Программа зачета по курсу Многомерная дифференциальная геометрия 1 (2012/13 уч. год)

Нужно знать определения: касательного вектора (как класса эквивалентности соприкасающихся путей и как инфинитазимального дифференцирования), ковектора, векторного поля (как гладкого сечения касательного расслоения, как дифференцирования алгебры гладких функций и как тензорного поля типа (0,1)), дифференциальных форм (как гладких сечений соответствующих расслоений и как полилинейных отображений), тензорных полей (как гладких сечений и как полилинейных отображений), операций с тензорными полями, проектора, симметрических и кососимметрических тензорных полей, операций альтернации и симметризации, операции внешнего умножения, скобки Ли векторных полей, оператора ковариантного дифференцирования тензорных полей, ковариантного дифференциала тензорного поля, оператора внешнего дифференцирования, дифференциала гладкого отображения (вектор рассматривается как инфинитазимальное дифференцирование и как класс эквивалентности соприкасающихся путей), отображения антиувлечения ковекторов, ϕ-связанности векторных полей, r-мерного распределения, кораспределения, дифференциального идеала, инволютивного распределения, интегральной кривой векторного поля, интегральной кривой распределения, локального потока на многообразии, локальной группы диффеоморфизмов, дифференцирования Ли, группы Ли, ортогональной группы, специальной ортогональной группы, алгебры Ли, отображений левого и правого сдвига, левоинвариантного векторного поля на группе Ли, форм Маурера-Картана, структурных констант алгебры Ли, гомоморфизма групп Ли, гомоморфизма алгебр Ли, однопараметрической подгруппы группы Ли, экспоненциального отображения, действия группы на множестве (левое и правое), действия группы Ли на гладком многообразии, фундаментального векторного поля, главного расслоения, гомоморфизма главных расслоений, сечения главного расслоения, вертикального распределения, связности, псевдогоризонтального проектора, горизонтального распределения, горизонтального лифта векторного поля, базиса адаптированного связности, формы кривизны связности.

Вопросы к зачету.

1. Дифференциал гладкого отображения и его свойства ($\mathbb{R}$-линейность, композиция).
2. ϕ-связанные векторные поля. Критерий. Свойства.
3. Антиувлечение форм. Свойства. Связь с антиувлечением ковекторов.
4. Ассоциированное кораспределение. Теорема о его размерности. Критерий инволютивного распределения и его следствие. Теорема Фробениуса (без доказательства).
5. Теорема о задании векторного поля с помощью локального потока.
6. Свойства локального потока.
7. Группа Ли. Примеры.
8. Алгебра Ли. Примеры.
9. Отображения левого и правого сдвига в группе Ли. Свойства.
10. Вывод структурных уравнений Маурера-Картана.
11. Однопараметрические подгруппы и левоинвариантные векторные поля. Свойства.
12. Действие группы на множестве. Примеры.

13. Действие группы Ли на гладком многообразии. Примеры.

14. Гомоморфизм λ и фундаментальные векторные поля. Свойства.

15. Вертикальное распределение. Теорема о инволютивности вертикального распределения.

16. Вывод первой группы структурных уравнений главного расслоения.

17. Вывод второй группы структурных уравнений главного расслоения.

18. Связность в главном расслоении. Эквивалентность задания связности и горизонтального распределения.

19. Форма связности и ее свойства.

20. Базис, адаптированный связности. Теорема Картана-Лаптева. Структурные уравнения связности.

Задачи к зачету по курсу Многомерная дифференциальная геометрия (магистратура геометрии)

1. Докажите, что для 1-формы ω определение внешнего дифференциала d корректно.

2. Докажите, что для 2-формы Ω определение внешнего дифференциала d корректно.

3. Докажите, что для 1-формы ω имеет место равенство $d(d\omega) = 0$.

4. Докажите, что для 2-формы Ω имеет место равенство $d(d\Omega) = 0$.

5. Докажите, что для 1-форм ω и θ имеет место равенство $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge \theta$.

6. Докажите, что для функции f и 1-формы ω имеет место равенство $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$.

7. Докажите, что для функции f и 2-формы Ω имеет место равенство $d(f\Omega) = df \wedge \Omega + fd\Omega$.

8. Пусть на гладком многообразии M дана локальная карта (U, φ), r_φ – реперное отображение, $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – отображение, ставящее в соответствие набору из n вещественных чисел его i-й элемент. Докажите, что $d(x^i \circ \varphi) = x^i \circ r_\varphi$.

9. Пусть ∇ – связность без кручения на многообразии M. Найдите соотношение, связывающее тензорные поля $\nabla\omega$ и $d\omega$, где ω – 1-форма.

10. Выразите компоненты 2-формы $d\omega$ через компоненты 1-формы ω в натуральном базисе.

11. Получите формулу, связывающую внешний дифференциал $d\Omega$ 2-формы Ω и ковариантный дифференциал $\nabla\Omega$. Запишите это соотношение в компонентах.

12. Пусть $\phi : M \to N$ – диффеоморфизм гладких многообразий. Докажите, что дифференциал отображения ϕ имеет обратное отображение.

13. Пусть (U, φ) – локальная карта на гладком многообразии M. Найдите образы векторов векторных полей натурального базиса этой карты при отображении $(\varphi_*)_p$.

14. Докажите, что реперное отображение $r_\varphi : T_p(M) \to \mathbb{R}^n$ карты (U, φ) совпадает с дифференциалом картирующего отображения φ в точке p.

15. Докажите, что производная Ли для 1-формы ω вычисляется по формуле

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]).$$

16. Докажите, что производная Ли для эндоморфизма L вычисляется по формуле

$$(\mathcal{L}_X L)(Y) = [X, L(Y)] - L([X,Y]).$$

17. Пусть ∇ – связность без кручения на почти контактном многообразии M с почти контактной структурой (Φ, ξ, η). Докажите, что

$$(\mathcal{L}_\xi \Phi)(X) = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi) + (\nabla_X(\eta)\xi)\xi;$$
$$(\mathcal{L}_\xi \eta)(X) = \nabla_\xi(\eta)X - \nabla_X(\eta)\xi;$$
$$(\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)Y + \eta(\nabla_Y(\Phi)X).$$

18. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ является группой Ли относительно операции сложения.

19. Докажите, что структурные константы $\{C^i_{jk}\}$ группы Ли G определяют тензор типа (2,1) на ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

20. Докажите, что множество всех поворотов плоскости с фиксированным центром действует слева на множестве точек плоскости, причем это действие не является транзитивным. Найдите орбиты действия этой группы.

21. Докажите, что группа параллельных переносов плоскости действует на множестве точек плоскости слева, причем действие транзитивно. Будет ли это действие свободным?

22. Докажите, что для главного расслоения (P, M, π, G) имеет место равенство $\pi \circ (R_g) = \pi$. Выведите из этого, что $\pi_* \circ (R_g)_* = \pi_*$.

23. Докажите, что горизонтальный лифт векторного поля с базы главного расслоения инвариантен относительно правых сдвигов.

24. Докажите, что форма кривизны связности является горизонтальной формой.

25. Докажите, что форма связности является вертикальной формой.