Преобразования, индуцированные на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий голоморфно проективными преобразованиями.

Никифорова А.В., Игнаточкина Л.А.

УДК 514.76

Ключевые слова: почти эрмитово многообразие, почти контактное метрическое многообразие.

Аннотация

Рассмотрены преобразования, индуцированные на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий голоморфно проективными преобразованиями и изучены их свойства.

Abstract

We have considered 's transformations of hypersurfaces induced by holomorphically projective transformations of almost Hermitian manifolds. Properties of these transformations were studied.

Пусть (M, J, g) - почти эрмитово многообразие размерности $2n > 2$. Рассмотрим ориентированную гиперповерхность N этого многообразия. Почти эрмитова структура многообразия M индуцирует на ней почти контактную метрическую структуру следующим образом [1]. Рассмотрим множество $\mathcal{X}_N(M) = \{T_p(M) : p \in N\}$. Оно называется ограничением модуля $\mathcal{X}(M)$ на N. На гиперповерхности N однозначно определено поле единичной нормали ν так, что в каждой точке многообразия N вектор этого поля дополняет положительный базис касательного пространства многообразия N до положительного базиса касательного пространства многообразия M в этой точке. Множество векторов ν определяет модуль $\mathcal{N}$, который ортогонален модулю $\mathcal{X}(N)$ относительно метрики g и $\mathcal{X}_N(M) = \mathcal{X}(N) \oplus \mathcal{N}$. Пусть $\zeta(X) = g(\nu, X)$, $\xi = J(\nu)$, $\eta(X) = g(\xi, X)$, $\Pi = id - \zeta \otimes \nu - \eta \otimes \xi$, $\Psi = J \circ \Pi$, $\Phi = \Psi|_{\mathcal{X}(N)}$. Тогда (Φ, g, η, ξ) образуют почти контактную метрическую структуру на многообразии N.

Напомним [2], что кривая $\gamma : I \to M$ на почти эрмитовом многообразии M называется *голоморфно почти геодезической*, если любой ее касательный вектор μ_p после параллельного переноса из точки p в любую ее точку q принадлежит линейной оболочке векторов μ_q, $(J\mu)_q$. Переход от почти эрмитовой структуры (J, g) к почти эрмитовой структуре $(J, \tilde{g})$ называется *голоморфно проективным преобразованием структуры* (J, g), если эти структуры имееют общие голоморфно почти геодезические [3].

Рассмотрим голоморфно проективное преобразование $(J, g) \to (J, \tilde{g})$ почти эрмитовой структуры многообразия M. Выясним, как связаны почти контактные метрические структуры (g, Φ, ξ, η) и $(\tilde{g}, \tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, индуцированные на гиперповерхностях полученных почти эрмитовых многообразий.

Обозначим через f тензор голоморфно проективной деформации, который однозначно определяется равенством $\tilde{g}(X,Y) = g(X, fY)$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Рассмотрим векторное поле $f\tilde{\nu}$. Очевидно, $g(f\tilde{\nu}, X) = \tilde{g}(\tilde{\nu}, X) = 0, \forall X \in \mathcal{X}(N)$. Следовательно, $f\tilde{\nu} \in \mathcal{N}$. Тогда $f\tilde{\nu} = \lambda\nu$. Найдем λ. По определению тензора голоморфно проективной деформации имеем $\tilde{g}(\nu, \tilde{\nu}) = g(\nu, f\tilde{\nu}) = g(\nu, \lambda\nu) = \lambda$ или $\lambda = \tilde{g}(\nu, \tilde{\nu}) = \tilde{\zeta}(\nu)$. Итак,

$$f\tilde{\nu} = \tilde{\zeta}(\nu)\nu \tag{1}$$

Далее $\tilde{\zeta}(X) = \tilde{g}(\tilde{\nu}, X) = g(f\tilde{\nu}, X) = \tilde{\zeta}(\nu)\zeta(X), \forall X \in \mathcal{X}(M)$. В частности, при $X = \tilde{\nu}$ имеем $\tilde{\zeta}(\nu)\zeta(\tilde{\nu}) = 1$. Выразим из (1) ν и подставим в последнее равенство. Получим $1 = \tilde{\zeta}(\nu)\zeta(\tilde{\nu}) = \tilde{\zeta}(\nu)\zeta(\tilde{\zeta}(\nu)f^{-1}\nu)$ или $\tilde{\zeta}(\nu)^2 = (\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}$. Подставим последнее равенство в (1).

$$f\tilde{\nu} = \pm\sqrt{(\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}}\nu \equiv \lambda\nu \tag{2}$$

Как было показано выше $\tilde{\zeta}(X) = \tilde{\zeta}(\nu)\zeta(X), \forall X \in \mathcal{X}(M)$. Тогда

$$\tilde{\zeta} = \pm\sqrt{(\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}}\zeta \tag{3}$$

Найдем выражение для $\tilde{\xi}$. Заметим, что согласно [3] $J \circ f = f \circ J$. Откуда, очевидно, следует, что $J \circ f^{-1} = f^{-1} \circ J$. По определению индуцированной почти контактной метрической структуры на многообразии N с учетом (2) имеем $\tilde{\xi} = J(\tilde{\nu}) = J(\pm\sqrt{(\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}}f^{-1}\nu) = \pm\sqrt{(\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}}f^{-1}J(\nu)$. Таким образом,

$$\tilde{\xi} = \pm\sqrt{(\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}}f^{-1}(\xi) \tag{4}$$

С учетом (4), (1) получим $\tilde{\eta}(X) = \tilde{g}(\tilde{\xi}, X) = \tilde{g}(\tilde{\zeta}(\nu)f^{-1}(\xi), X) = \tilde{\zeta}(\nu)\eta(X)$

$$\tilde{\eta} = \pm\sqrt{(\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}}\eta \tag{5}$$

Наконец, выразим $\tilde{\Psi}$. Имеем $\tilde{\Psi} = J \circ \tilde{\Pi} = J \circ (id - \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\nu} - \tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi}) = J \circ (id - \lambda^2\zeta \otimes f^{-1}\nu - \lambda^2\eta \otimes f^{-1}\xi)$, где $\lambda^2 = (\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}$. Тогда $\tilde{\Psi} = \Psi + J \circ (\zeta\otimes\nu + \eta\otimes\xi - \lambda^2\zeta\otimes f^{-1}\nu - \lambda^2\eta\otimes f^{-1}\xi) = \Psi + \zeta\otimes\xi - \eta\otimes\nu - \lambda^2\zeta\otimes f^{-1}\xi + \lambda^2\eta\otimes f^{-1}\nu$. Итак,

$$\tilde{\Psi} = \Psi + \zeta \otimes \xi - \eta \otimes \nu - \lambda^2\zeta \otimes f^{-1}\xi + \lambda^2\eta \otimes f^{-1}\nu$$

Так как в сужении на $\mathcal{X}(N)$ $\zeta = 0$, получим

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \eta \otimes \nu + \lambda^2\eta \otimes f^{-1}\nu \tag{6}$$

Докажем, что $Im\Pi = Im\tilde{\Pi}$, то есть $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$. Действительно, $\forall X \in \mathcal{L}$ $\tilde{\Pi}(X) = (id - \tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi} - \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\nu})(X) = (id - \lambda^2\eta \otimes f^{-1}\xi - \lambda^2\zeta \otimes f^{-1}\nu)(X) = X$, так как $\eta(X) = \zeta(X) = 0$. То есть $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$. Обратно, $\forall X \in \tilde{\mathcal{L}}$ $\Pi(X) = (id - \eta \otimes \xi - \zeta \otimes \nu)(X) = (id - \lambda^{-1}\tilde{\zeta} \otimes \nu - \lambda^{-1}\tilde{\eta} \otimes \xi)(X) = X$. $\square$

Итак, мы получили, что модуль $\mathcal{X}_N(M)$ раскладывается в прямую сумму подмодулей двумя способами $\mathcal{X}_N(M) = \mathcal{N}\oplus\mathcal{M}\oplus\mathcal{L}$ и $\mathcal{X}_N(M) = \tilde{\mathcal{N}}\oplus\tilde{\mathcal{M}}\oplus\mathcal{L}$, где $\mathcal{N} = L(\nu)$, $\tilde{\mathcal{N}} = L(\tilde{\nu})$, $\mathcal{M} = L(\xi)$, $\tilde{\mathcal{M}} = L(\tilde{\xi})$, $\mathcal{L} = Im\Pi = Im\tilde{\Pi}$.

Мы получили для многообразия N переход от почти контактной метрической структуры (Φ, g, ξ, η) к почти контактной метрической структуре $(\tilde{\Phi}, \tilde{g}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Здесь g и $\tilde{g}$ сужение соответствующих метрик многообразия M на гиперповерхность N. Назовем это преобразование *контактно проективным*.

Рассмотрим случай, когда $\forall p \in N$ и предположим, что $\tilde{\nu}_p \parallel \nu_p$. Тогда получим $\tilde{\nu}_p = c(p)\nu_p$, $c(p) = const$ или $\tilde{\nu} = c\nu$, $c \in C^\infty(N)$. Имеем с учетом (2) и определения тензора голоморфно проективной деформации $1 = \tilde{g}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}) = g(f\tilde{\nu}, c\nu) = g(\lambda\nu, c\nu) = c\lambda$, то есть $c = \lambda^{-1}$.

$$\tilde{\nu} = \lambda^{-1}\nu \tag{7}$$

Подставим (7) в (2) $f(\lambda^{-1}\nu) = \lambda\nu$ или $f(\nu) = \lambda^2\nu$. Обратно, пусть ν является собственным вектором оператора f, то есть $f_p\nu_p = c\nu_p$, $c = const$. Так как оператор f обратим, получим $\nu_p = cf^{-1}\nu$ и согласно (2) $\tilde{\nu} = \lambda f^{-1}\nu$, то есть $\tilde{\nu}_p \parallel \nu_p$. Получаем

Предложение 1 *$\tilde{\nu}_p \parallel \nu_p$ $\forall p \in N$, тогда и только тогда, когда ν является собственным вектором оператора голоморфно проективной деформации f в каждой точке многообразия N.* $\square$

Предложение 2 *Если $\tilde{\nu}_p \parallel \nu_p$ $\forall p \in N$, то ξ является собственным вектором оператора голоморфно проективной деформации f в каждой точке многообразия N.*

Доказательство. Так как $\xi = J(\nu)$, $\tilde{\xi} = J(\tilde{\nu}) = J(\lambda^{-1}\nu) = \lambda^{-1}\xi$. Тогда с учетом (4) получим $f(\lambda^{-1}\xi) = \lambda\xi$ или $f(\xi) = \lambda^2\xi$. $\square$

Предложение 3 *Если $\tilde{\nu}_p \parallel \nu_p$ $\forall p \in N$, то $\tilde{\Phi} = \Phi$.*

Доказательство. Действительно, $\tilde{\Psi} = J\circ\tilde{\Pi} = J\circ(id - \tilde{\zeta}\otimes\tilde{\nu} - \tilde{\eta}\otimes\tilde{\xi}) = J\circ(id - \zeta\otimes\nu - \eta\otimes\xi) = \Psi$. Так как $\Phi = \Psi|_{\mathcal{X}(N)}$, $\tilde{\Phi} = \Phi$. $\square$

Предложение 4 *Если $\tilde{\nu}_p \parallel \nu_p$ $\forall p \in N$, то распределения $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{L}$ являются инвариантными относительно оператора голоморфно проективной деформации f.*

Доказательство. Для распределений $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ непосредственно следует из предложений 1 и 2 с учетом одномерности этих распределений. Далее, для $\forall X \in \mathcal{L}$ имеем $g(fX, \xi) = \tilde{g}(X, \xi) = \tilde{g}(X, \lambda\tilde{\xi}) = 0$, так как $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. Аналогично получаем $g(fX, \nu) = 0$. Следовательно, $fX \in \mathcal{L}$. $\square$

Так как для оператора голоморфно проективной деформации f подмодуль $\mathcal{X}(N)$ является инвариантным, можно определить его сужение на

$\mathcal{X}(N)$, которое мы обозначим той же буквой f. Назовем его *тензором контактно проективной деформации*. Найдем тензор аффинной деформации T для индуцированных римановых связностей на многообразии N. Согласно [4, стр.21-23] $\nabla^M_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)\nu$ и $\tilde{\nabla}^M_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{h}(X,Y)\tilde{\nu}$, где ∇^M и $\tilde{\nabla}^M$ - римановы связности на почти эрмитовом многообразии M, ∇ и $\tilde{\nabla}$ - римановы связности на почти контактном метрическом многообразии N, h и $\tilde{h}$ - симметрические ковариантные тензорные поля на многообразии N. Тогда $T(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = T^M(X,Y) - \tilde{h}(X,Y)\tilde{\nu} + h(X,Y)\nu$, где T^M- тензор аффинной деформации для римановых связностей многообразия M. Так как $T^M(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX$, где ψ- некоторая дифференциальная форма на многообразии M [3], получим

$$T(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX - \tilde{h}(X,Y)\tilde{\nu} + h(X,Y)\nu, \tag{8}$$

$X, Y \in \mathcal{X}(N)$. Напомним [1], что $\pi_1 = \zeta \otimes \nu$ и $\Pi_1 = id - \zeta \otimes \nu$ - проекторы на подмодули $\mathcal{N}$ и $\mathcal{X}(N)$, соответственно. Применим проектор Π_1 к (8).

$$T(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)\Pi_1 JY - \psi(JY)\Pi_1 JX \tag{9}$$

Для любого $X \in \mathcal{X}(N)$ имеем $JX = J(X - \eta(X)\xi + \eta(X)\xi)$. Так как $X - \eta(X)\xi \in \mathcal{L}$, $J(X - \eta(X)\xi) = \Phi(X - \eta(X)\xi) = \Phi X - \eta(X)\Phi(\xi) = \Phi X$. Так как $\xi = J(\nu)$, то $\nu = -J(\xi)$ и $JX = \Phi X + \eta(X)J(\xi) = \Phi X - \eta(X)\nu$ и $\Pi_1 JX = \Phi X$. Подставим в (9) $T(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(\Phi X - \eta(X)\nu)\Phi Y - \psi(\Phi X - \eta(X)\nu)\Phi X$

Итак, мы получили выражение для тензора аффинной деформации многообразия N.

$$T(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(\Phi X)\Phi Y - \psi(\Phi Y)\Phi X - \tag{10}$$

$$-\eta(X)\psi(\nu)\Phi Y - \eta(Y)\psi(\nu)\Phi X$$

С учетом (10) получим

$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \tilde{\nabla}_X(\Phi Y) - \Phi(\tilde{\nabla}_X Y) = \nabla_X(\Phi)Y + T(X,\Phi Y) - \Phi T(X,Y) = \nabla_X(\Phi)Y + \psi(\Phi Y)X - \psi(\Phi Y)\Phi X - \psi(Y)\Phi X + \psi(\Phi Y)\Phi^2 X + \eta(Y)\psi(\nu)\Phi^2 X.$

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + \psi(\Phi Y)X - \psi(\Phi Y)\Phi X - \psi(Y)\Phi X + \psi(\Phi Y)\Phi^2 X + \tag{11}$$

$$+\eta(Y)\psi(\nu)\Phi^2 X$$

Так как $g(X,\Phi Y) + g(\Phi X, Y) = 0$ и $\tilde{g}(X,\Phi Y) + \tilde{g}(\Phi X, Y) = 0$, $g(\nabla_X(\Phi)Y, Y) = 0$ и $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y, Y) = 0$. Пусть Y- собственный вектор оператора контактно проективной деформации f с собственным значением ϖ. Тогда $0 = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y, Y) = g(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y, fY) = \varpi g(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y, Y)$. Подставим в последнее равенство (11) $g(\psi(\Phi Y)X, Y) - g(\psi(\Phi^2 Y)\Phi X, Y) - g(\eta(\Phi Y)\psi(\nu)\Phi X, Y) - g(\psi(Y)\Phi X, Y) + g(\psi(\Phi Y)\Phi^2 X, Y) + g(\eta(Y)\psi(\nu)\Phi^2 X, Y) = 0$, $\forall X \in \mathcal{X}(N), \forall Y$

- собственного вектора оператора f. Так как метрика g знакоопределена, в каждой точке многообразия N оператор f допускает базис из собственных векторов, то есть последнее равенство выполняется тождественно по Y. В силу невырожденности метрики g получим

$$\psi(\Phi Y)X - \psi(\Phi^2 Y)\Phi X - \psi(Y)\Phi X + \psi(\Phi Y)\Phi^2 X + \eta(Y)\psi(\nu)\Phi^2 X = 0$$

Так как существуют линейно независимые системы $(X, \Phi X, \Phi^2 X)$ имеем

$$\psi \circ \Phi = 0 \quad \psi \circ \Phi^2 + \psi = 0 \quad \psi \circ \Phi + \psi(\nu)\eta = 0$$

Значит, $\psi(Y) = 0\ \forall Y \in \mathcal{X}(N)$ и $\psi(\nu) = 0$, то есть согласно (10) контактно проективное преобразование тривиально.

Предложение 5 *Если $\tilde{\nu}_p \parallel \nu_p\ \forall p \in N$, то индуцированное контактно проективное преобразование тривиально.* □

Рассмотрим случай, когда $\nu \not\parallel \tilde{\nu}$, то есть $\mathcal{N} \neq \tilde{\mathcal{N}}$. На многообразии N определяется оператор контактно проективной деформации $\hat{f}$. В этом случае он не совпадает с сужением оператора голоморфно проективной деформации f многообразия M. Найдем соотношение между ними. По определению $\tilde{g}(X,Y) = g(X, \hat{f}Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(N)$ и $\tilde{g}^{\boldsymbol{M}}(X,Y) = g^{\boldsymbol{M}}(X, fY)$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Тогда для $\forall X, Y \in \mathcal{X}(N)$ имеем $\tilde{g}(X,Y) = \tilde{g}^{\boldsymbol{M}}(X,Y)$. С другой стороны, $g^{\boldsymbol{M}}(X, fY) = g^{\boldsymbol{M}}(X, \Pi_1 fY + \pi_1 fY) = g^{\boldsymbol{M}}(X, \Pi_1 fY) = g(X, \Pi_1 fY$. Откуда в силу произвольного выбора $X \in \mathcal{X}(N)$ получим $\hat{f} = \Pi_1 \circ f$.

Найдем тензор аффинной деформации T для римановых связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ многообразия N. Аналогично первому случаю имеем $T(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX + h(X,Y)\nu - \tilde{h}(X,Y)\tilde{\nu}$ для любых $X, Y \in \mathcal{X}(N)$. Подставляя (2), получим

$$T(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(JX)JY - \psi(JY)JX + h(X,Y)\nu - \tilde{h}(X,Y)\lambda f^{-1}\nu$$

Применим к обеим частям этого тождества проектор Π_1. С учетом того, что $\Pi_1 JX = \Phi X$ и $JX = \Phi X - \eta(X)\nu$, получим

$$T(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X - \psi(\Phi X)\Phi Y + \eta(X)\psi(\nu)\Phi Y - \psi(\Phi Y)\Phi X + \quad (12)$$
$$+\eta(Y)\psi(\nu)\Phi X + \tfrac{\tilde{h}(X,Y)}{\lambda}(\nu - \lambda^2 f^{-1}\nu)$$

Последнее слагаемое тензора аффинной деформации содержит векторное поле $\nu - \lambda^2 f^{-1}\nu$, которое мы обозначим ϑ. Это векторное поле принадлежит $\mathcal{X}(N)$. Более того, оно принадлежит распределению $\mathcal{L}$. Действительно, $\Pi(\nu - \lambda^2 f^{-1}\nu) = (id - \zeta \otimes \nu - \eta \otimes \xi)(\nu - \lambda^2 f^{-1}\nu) = \nu - \lambda^2 f^{-1}\nu) - \nu + \lambda^2 \zeta(f^{-1}\nu)\nu + \lambda^2 \eta(f^{-1}\nu)\xi$. Так как $\zeta(f^{-1}\nu) = \lambda^{-2}$ и $\eta(f^{-1}\nu) = \lambda^{-2}\tilde{\eta}(\tilde{\nu}) = 0$, окончательно получаем $\Pi(\nu - \lambda^2 f^{-1}\nu) = \nu - \lambda^2 f^{-1}\nu$.

По аналогии с почти эрмитовым многообразием назовем кривую $\gamma : I \to N$ на почти контактном метрическом многообразии N *голоморфно почти геодезической*, если любой ее касательный вектор μ_p после параллельного переноса из точки p в любую ее точку q принадлежит линейной оболочке векторов μ_q, $(\Phi\mu)_q$. Пусть γ голоморфно почти геодезическая относительно почти контактной метрической структуры (Φ, g, η, ξ). Выясним, будет ли она голоморфно почти геодезической относительно структуры $(\tilde{\Phi}, \tilde{g}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi})$. Пусть μ поле касательных векторов кривой γ. Так как она является голоморфно почти геодезической, $\nabla_\mu \mu = a(t)\mu + b(t)\Phi\mu$, где $a(t), b(t)-$ некоторые подходящие функции на многообразии N. Вычислим $\tilde{\nabla}_\mu \mu = \nabla_\mu \mu + T(\mu, \mu)$. Подставим в это выражение (12)
$\tilde{\nabla}_\mu \mu = a(t)\mu + b(t)\Phi\mu + 2\psi(\mu)\mu - 2\psi(\Phi\mu)\Phi\mu + 2\eta(\mu)\psi(\nu)\Phi\mu + \lambda^{-1}\tilde{h}(\mu, \mu)\vartheta$
Выразим Φ из (6) и подставим в последнее соотношение

$$\tilde{\nabla}_\mu \mu = (a(t) + 2\psi(\mu))\,\mu + \left(b(t) - 2\psi(\tilde{\Phi}\mu) + 2\psi(f^{-1}\nu)\lambda^2\eta(\mu)\right)\tilde{\Phi}\mu + \qquad (13)$$

$$+ \left(b(t)\eta(\mu) - 2\psi(\tilde{\Phi}\mu)\eta(\mu) + 2\psi(f^{-1}\nu)\lambda^2\eta^2(\mu) + \lambda^{-2}\tilde{h}(\mu, \mu)\right)\vartheta$$

Лемма 1 $\vartheta = -\lambda^{-1}\tilde{\Phi}(\hat{f\xi})$.

Доказательство. Применим (6) к ξ. Тогда $\tilde{\Phi}(\xi) = -\vartheta$ или с учетом (4) $\tilde{\Phi}(\lambda^{-1}f\tilde{\xi}) = -\vartheta$. По определению $\hat{f\xi} = \Pi_1 f\tilde{\xi} = f\tilde{\xi} - \zeta(f\tilde{\xi})\nu = f\tilde{\xi} - \zeta(\lambda\xi)\nu = f\tilde{\xi}$. Окончательно получаем $\vartheta = -\lambda^{-1}\tilde{\Phi}(\hat{f\xi})$. □

Лемма 2 *В любой точке многообразия N существуют векторы μ, для которых система векторов $(\mu, \tilde{\Phi}\mu, \vartheta)$ линейно независима.*

Доказательство. Пусть в произвольной точке многообразия N $\vartheta = \alpha\mu + \beta\tilde{\Phi}\mu$, α, β- некоторые числа. Применим к обеим частям последнего равенства $\tilde{\Phi}^2$ и сложим с ним: $\alpha(\mu + \tilde{\Phi}^2\mu) = 0$. Если $\mu \notin \mathcal{L}$, то $\alpha = 0$. Тогда $\vartheta = \beta\tilde{\Phi}\mu$ для любого $\mu \notin \mathcal{L}$. Что невозможно в силу произвольности выбора μ. □

Тогда из (13) с учетом последней леммы получим

Теорема 1 *Контактно проективное преобразование на гиперповерхности N почти эрмитова многообразия M, индуцированное голоморфно проективным преобразованием на M, не сохраняет голоморфно почти геодезические.*

Список литературы

[1] Кириченко В.Ф., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, Типография МПГУ, М., 2003.

[2] Levi-Chivita T., Sulle transformazione delle equazioni dinamiche, Ann. Di Mat., 1896, ser 2,24, p. 255-300.

[3] Никифорова А. В., Кириченко В.Ф., О голоморфно проективных преобразованиях почти эрмитовых структур., Успехи мат. наук., 56, N6(342), 2001, 149-150.

[4] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии., Т.2., Новосибирский физико-математический институт, 1999.