УДК 514.76

Л. А. Игнаточкина

Обобщение преобразований, индуцированных на T^1- расслоениях конформными преобразованиями их базы

§ 1. Введение

Для изучения свойств почти контактных метрических многообразий существует два основных метода: инвариантное исчисления Кошуля и метод присоединенной $G-$ структуры. Второй метод предпочтительнее первого, так как позволяет характеризовать многообразия и их свойства формулами, которые существенно короче аналогичных формул инвариантного исчисления Кошуля. Но метод присоединенной $G-$ структуры применим только до тех пор, пока исследуется одно многообразие. Как только в рассмотрение вводится два почти контактных метрических многообразия, каждое из которых имеет свою присоединенную $G-$ структуру, этот метод перестает действовать. Исследователь вынужден, применяя метод восстановления тождеств, переходить в инвариантное исчисление Кошуля. В качестве примера приведем только две работы [1] и [2]. Основной целью настоящей работы является создание метода, который позволил бы изучать исходное и преобразованное многообразия методом присоединенной $G-$ структуры. В качестве преобразования выбрано так называемое обобщенное конформное преобразование. Оно является обобщением хорошо известного конформного преобразования почти контактных метрических многообразий и преобразования, которое индуцируется на пространстве расслоения главного T^1- расслоения над почти эрмитовым многообразием.

На пространстве расслоения канонического главного T^1- расслоения над почти эрмитовым многообразием можно ввести почти контактную метрическую структуру [3]. При конформном преобразовании почти эрмитовой структуры базы расслоения получаем две почти контактные метрические структуры в тотальном пространстве T^1- расслоения. Наша первая задача – получить формулы, связывающие структурные тензорные поля полученных почти контактных метрических структур. Кроме того, для почти контактного метрического многообразия можно определить конформное преобразование его структуры. Эти два вида преобразований оказались частными случаями введенного в настоящей работе так называемого обобщенного конформного преобразования почти контактной метрической структуры. Отметим, что конформные преобразования почти контактных метрических структур изучались в работе [4].

Вторая наша задача – построить аппарат для изучения введенного преобразования. Каждое из почти контактных метрических многообразий удобно изучать с помощью систем функций, введенных на пространстве расслоения его присоединенной $G-$ структуры. В настоящей работе рассмотрен переход от $G-$ структуры исходного многообразия к $G-$ структуре преобразованного многообразия. С его помощью выведены соотношения между системами функций, задающих структурные тензорные поля исходного и преобразованного многообразий.

Наша третья задача – показать эффективность применения разработанного аппарата на примере исследования инвариантности классов почти контактных метрических структур при конформных преобразованиях почти контактных метрических структур и преобразованиях, индуцированных на пространстве расслоения главного T^1- расслоения.

§ 2. Преобразования, индуцированные на пространстве T^1- расслоения

2.1. Пусть M – гладкое (хаусдорфово, со счетной базой) многообразие размерности $2n, n > 1$; $\mathcal{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на гладком многообразии M; d – оператор внешнего дифференцирования; id – тождественный оператор; $C^\infty(M)$ – алгебра гладких вещественнозначных функций на M; индексы $i, j, k, l, \dots$ принимают значения от 0 до $2n$; индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ принимают значения от 1 до $2n$; индексы $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, t$ принимают значения от 1 до n; $\hat{a} = a + n$, $t_{\hat{a}} = t^a$, $t^{\hat{a}} = t_a$; по индексам, заключенным в круглые скобки $()$, предполагается симметризация; по индексам, заключенным в квадратные скобки $[\,]$, предполагается альтернирование; индексы, заключенные в прямые скобки $||$, в альтернировании (симметризации) не участвуют. Все многообразия и объекты на них предполагаются гладкими класса C^∞.

2.2. Рассмотрим почти эрмитово многообразие $\mathcal{M} = (M, J, g^M)$, где J – почти комплексная структура, то есть $J^2 = -id$, g^M – риманова структура на M, согласованная с почти комплексной структурой, то есть $g^M(JX, JY) = g^M(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Рассмотрим функцию $f \in C^\infty(M)$ и конформно преобразованное почти эрмитово многообразие $\tilde{\mathcal{M}} = (M, J, \tilde{g}^M = e^{2f} g^M)$.

Напомним, что задание почти эрмитовой структуры на многообразии равносильно заданию присоединенной $G-$ структуры $(P, M, \pi', U(n))$ этого многообразия. Тогда существует главное T^1- расслоение $(P/SU(n), M, \pi, U(n)/SU(n))$, которое называется *каноническим* [3]. Если θ – форма римановой связности на пространстве расслоения реперов над M и ζ – форма соответствующей связности главного T^1- расслоения, то форма кривизны этой связности $d\zeta$ определяет форму ρ на многообразии M по формуле $d\zeta = \pi^* \rho$. Форма ρ называется *обобщенной формой Риччи.*

Рассмотрим канонические T^1- расслоения для почти эрмитова многообразия $\mathcal{M}$ и конформно преобразованного многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$. Обозначим их $\mathcal{P} = (P/SU(n), M, \pi, U(n)/SU(n))$ и $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{P}/SU(n), M, \tilde{\pi}, U(n)/SU(n))$, соответственно. Здесь $(P, M, \pi', U(n))$ и $(\tilde{P}, M, \tilde{\pi}', U(n))$ – присоединенные $G-$ структуры многообразий $\mathcal{M}$ и $\tilde{\mathcal{M}}$, соответственно.

На пространстве расслоения $\tilde{\mathcal{P}}$ определена форма связности $\tilde{\zeta}$, соответствующая обобщенной форме Риччи $\tilde{\rho}$, то есть $d\tilde{\zeta} = \tilde{\pi}^* \tilde{\rho}$.

Рассмотрим отображение $\psi : P \to \tilde{P}$, $id : U(n) \to U(n)$ присоединенных $G-$ структур многообразий $\mathcal{M}$ и $\tilde{\mathcal{M}}$, заданное формулой $\psi(p) = \tilde{p}$, где $p =$

$(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$ – A– репер, $m \in M$, $\tilde{p} = (m, \tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}(m)\varepsilon_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{a}})$. Заметим, что соответствующие дуальные A– корепери связаны соотношениями $\tilde{\omega}^a = e^f(m)\omega^a$, $\tilde{\omega}^{\hat{a}} = e^f(m)\omega^{\hat{a}}$.

Лемма 2.1. $\tilde{p} \in \tilde{P}$.

Доказательство. Нам достаточно доказать, что в точках $\tilde{p}$ тензорные поля $J, \tilde{g}^M$ задаются матрицами вида

$$(\tilde{J}^\alpha_\beta) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \ (\tilde{g}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

где I_n – единичная матрица порядка n.
Действительно, $(\tilde{g}^M)_{ab} = (\tilde{g}^M)_m(\tilde{\varepsilon}_a, \tilde{\varepsilon}_b) = e^{2f}e^{-2f}(g^M)_m(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = 0$. Остальные функции, задающие $\tilde{g}^M$, вычисляются аналогично.
Вычислим $\tilde{J}^a_b = J_m(\tilde{\varepsilon}_b, \tilde{\omega}^a) = e^f e^{-f} J_m(\varepsilon_b, \omega^a) = \sqrt{-1}\delta^a_b$. Остальные функции, задающие J, вычисляются аналогично. □

Очевидно, что построенное отображение ψ является изоморфизмом главных расслоений. Это отображение порождает гладкое отображение многообразия $P/SU(n)$ в $\tilde{P}/SU(n)$. Это отображение будем, по-прежнему, обозначать буквой ψ.

Рассмотрим форму $\psi^*\tilde{\zeta}$, определенную на многообразии $P/SU(n)$. Применим отображение ψ^* к уравнению $d\tilde{\zeta} = \tilde{\pi}^*\tilde{\rho}$. Тогда $d(\psi^*\tilde{\zeta}) = (\tilde{\pi})^*\tilde{\rho}$ или $d(\psi^*\tilde{\zeta}) = \pi^*\tilde{\rho}$. Таким образом, на пространстве T^1– расслоения $P/SU(n)$ определены две формы связности ζ и $\psi^*\tilde{\zeta}$. Вторую из этих связностей договоримся обозначать $\tilde{\zeta}$. Согласно [3] каждая из форм связности определяет на многообразии $P/SU(n)$ почти контактную метрическую структуру. Рассмотрим эти структуры подробнее.

2.3. Напомним [5], что *почти контактной метрической структурой* на многообразии P называется совокупность $\{\Phi, g, \xi, \eta\}$ тензорных полей на этом многообразии, где Φ – тензорное поле типа $(1,1)$, называемое *структурным эндоморфизмом*, g – риманова метрика, ξ и η – векторное поле и ковекторное поле, называемые, соответственно, *структурным вектором* и *контактной формой*. При этом выполняются соотношения

$$1)\,\Phi(\xi) = 0; \quad 2)\,\eta\circ\Phi = 0; \quad 3)\,\eta(\xi) = 1; \quad 4)\,\Phi^2 = -id + \xi\otimes\eta; \tag{2.1}$$
$$5)\,g(\Phi X, \Phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Предложение 1. [3] *Пусть (P, M, π, G) – главное T^1– расслоение над почти эрмитовым многообразием M с почти эрмитовой структурой $(J, \tilde{g})$. Если фиксировать связность ω на пространстве главного расслоения P, то внутренним образом на нем порождается почти контактная метрическая структура $\{\Phi, g, \xi, \eta\}$, где*

$$g = \pi^*\tilde{g} + \eta\otimes\eta; \quad \Phi = i_{\mathcal{H}}\circ J\circ\pi_*$$

ξ – единичный вектор вертикального распределения, $i_{\mathcal{H}}$ – горизонтальный лифт, задаваемый связностью ω. □

Применим это предложение для главного T^1- расслоения $P/SU(n)$ и форм связности ζ и $\tilde{\zeta}$. Мы получим на $P/SU(n)$ две почти контактные метрические структуры $I = (\Phi, g, \xi, \zeta)$, где $\Phi = i_{\mathcal{H}} \circ J \circ \pi_*$, $g = \pi^* g^M + \zeta \otimes \zeta$ и $II = (\tilde{\Phi}, \tilde{g}, \tilde{\xi}, \tilde{\zeta})$, где $\tilde{\Phi} = i_{\tilde{\mathcal{H}}} \circ J \circ \pi_*$, $\tilde{g} = \pi^* \tilde{g}^M + \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\zeta}$. Переход от структуры I к структуре II назовем *преобразованием почти контактной метрической структуры, индуцированным конформным преобразованием базы.*

Выясним, как связаны две полученные почти контактные метрические структуры Имеем $\tilde{\Phi} = i_{\tilde{\mathcal{H}}} \circ J \circ \pi_* = i_{\tilde{\mathcal{H}}} \circ \pi_* \circ i_{\mathcal{H}} \circ J \circ \pi_* = \Phi - (\tilde{\zeta} \circ \Phi) \otimes \tilde{\xi}$, то есть

$$\tilde{\Phi} = \Phi - (\tilde{\zeta} \circ \Phi) \otimes \tilde{\xi} \tag{2.2}$$

С учетом (2.1) и (2.2) получим $\tilde{\Phi}(\xi) = \Phi(\xi) - (\tilde{\zeta}(\Phi\xi))\tilde{\xi} = 0$, то есть $\xi \in Ker\tilde{\Phi}$. Аналогично, $\Phi = i_{\mathcal{H}} \circ J \circ \pi_* = i_{\mathcal{H}} \circ \pi_* \circ i_{\tilde{\mathcal{H}}} \circ J \circ \pi_* = \tilde{\Phi} - (\zeta \circ \tilde{\Phi}) \otimes \xi$. Тогда $\Phi(\tilde{\xi}) = \tilde{\Phi}(\xi) - \zeta(\tilde{\Phi}\tilde{\xi})\xi = 0$, то есть $\tilde{\xi} \in Ker\Phi$, следовательно, $Ker\Phi = Ker\tilde{\Phi}$.

Для метрик получим $\tilde{g}(X,Y) = \pi^* \tilde{g}^M(X,Y) + \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\zeta} = \pi^*(e^{2f} g^M)(X,Y) + \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\zeta}(X,Y) = (e^{2f} \circ \pi)(g(X,Y) - \zeta \otimes \zeta(X,Y)) + \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\zeta}(X,Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(P/SU(n))$. Итак,

$$\tilde{g}(X,Y) = (e^{2f} \circ \pi)(g(X,Y) - \zeta \otimes \zeta(X,Y)) + \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\zeta}(X,Y),\ \forall X, Y \in \mathcal{X}(P/SU(n)) \tag{2.3}$$

Вычислим $\tilde{\Phi}^2$ с учетом (2.1) и (2.2): $\zeta(X)\xi - \tilde{\zeta}(\xi)\zeta(X)\tilde{\xi} = 0, \forall X \in \mathcal{X}(P/SU(n))$, то есть

$$\xi = \tilde{\zeta}(\xi)\tilde{\xi} \tag{2.4}$$

Итак, мы доказали

Теорема 1. *Пусть на почти эрмитовом многообразии $M = (M, J, g)$ задано конформное преобразование его структуры. Тогда на каноническом T^1- расслоении над M индуцируется преобразование почти контактной метрической структуры (Φ, g, ξ, ζ), заданное формулами (2.2), (2.3), (2.4).* □

§ 3. Обобщение конформных и индуцированных преобразований почти контактных метрических структур

3.1. Построим обобщение полученного преобразования почти контактной метрической структуры.

Рассмотрим гладкое многообразие N, $dimN = 2n+1$, $n > 1$ с почти контактной метрической структурой $I = \{\Phi, g, \xi, \zeta\}$ на нем. Пусть четверка тензорных полей $II = \{\tilde{\Phi}, \tilde{g}, \tilde{\xi}, \tilde{\zeta}\}$ определяется следующими условиями

$$\begin{aligned}
&1)\ \tilde{\zeta}- \text{ произвольная 1-форма на многообразииNтакая, что } \tilde{\zeta}(\xi) \neq 0 \\
&\text{в каждой точке многообразияN} \\
&2) \tilde{\xi} = (\tilde{\zeta}(\xi))^{-1}\xi \\
&3) \tilde{\Phi} = \Phi - (\tilde{\zeta} \circ \Phi) \otimes \tilde{\xi} \\
&4) \tilde{g} = e^{2f}(g - \zeta \otimes \zeta) + \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\zeta},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где f – некоторая гладкая функция на многообразии N. Переход от структуры I к структуре II назовем *обобщенным конформным преобразованием почти контактной метрической структуры многообразия N.*

Предложение 2. *Четверка тензорных полей $II = \{\tilde{\Phi}, \tilde{g}, \tilde{\xi}, \tilde{\zeta}\}$ является почти контактной метрической структурой на многообразии N.*

Доказательство. Из (3.1) получаем, что

$$\tilde{\zeta}(\tilde{\xi}) = 1 \tag{3.2}$$

Кроме того,

$$1)\, \Phi\tilde{\xi} = (\tilde{\zeta}(\xi))^{-1}\Phi(\xi) = 0 \quad 2)\, \tilde{\zeta}(\xi)\zeta(\tilde{\xi}) = 1 \tag{3.3}$$

Далее, $\tilde{\zeta} \circ \tilde{\Phi} = \tilde{\zeta} \circ \Phi - (\tilde{\zeta} \circ \Phi)\tilde{\zeta}(\tilde{\xi}) = 0$. Аналогично, с учетом (2.1), (3.2) получим $\tilde{\Phi}(\tilde{\xi}) = \Phi(\tilde{\xi}) - \tilde{\zeta}(\Phi\tilde{\xi})\tilde{\xi} = 0$. Вычислим с учетом (2.1), (3.1), (3.3): $\tilde{\Phi}^2 = \Phi^2 - (\tilde{\zeta} \circ \Phi)\Phi\tilde{\xi} - (\tilde{\zeta} \circ \Phi^2) \otimes \tilde{\xi} + (\tilde{\zeta} \circ \Phi)(\tilde{\zeta}\Phi\tilde{\xi}) \otimes \tilde{\xi} = -id + \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\xi}$.

Наконец, из (3.1), (3.3) получим:
$\tilde{g}(\tilde{\Phi}X, \tilde{\Phi}Y) = e^{2f}g(\tilde{\Phi}X, \tilde{\Phi}Y) - e^{2f}\zeta(\tilde{\Phi}X)\zeta(\tilde{\Phi}Y) + \tilde{\zeta}(\tilde{\Phi}X)\tilde{\zeta}(\tilde{\Phi}Y) = e^{2f}(g(X,Y) - \zeta(X)\zeta(Y) + \tilde{\zeta}(\Phi X)\tilde{\zeta}(\Phi Y)\tilde{\zeta}(\xi)^{-1}\zeta(\tilde{\xi}) - \tilde{\zeta}(\Phi X)\tilde{\zeta}(\Phi Y)\zeta(\tilde{\xi})^2) =$
$= e^{2f}(g(X,Y) - \zeta(X)\zeta(Y)) = \tilde{g}(X,Y) - \tilde{\zeta}(X)\tilde{\zeta}(Y)$, $X, Y \in \mathcal{X}(N)$.

Итак, все условия определения почти контактной метрической структуры выполняются, то есть II является почти контактной метрической структурой на многообразии M. □

Лемма 3.1. *В принятых обозначениях $\tilde{g}(X, \tilde{\xi}) = \tilde{\zeta}(X)$, $X \in \mathcal{X}(N)$.*

3.2. Приведем примеры обобщенных конформных преобразований почти контактных метрических структур.

Предложение 3. *Конформное преобразование почти контактной метрической структуры $I = (\Phi, g, \eta, \xi) \to II = (\Phi, \tilde{g} = e^{2f}g, \tilde{\eta} = e^{-f}\eta, \tilde{\xi} = e^{f}\xi)$ является обобщенным конформным преобразованием.*

Доказательство. Положим $\zeta = \eta$, $\tilde{\zeta} = e^f\eta$. Тогда с учетом (2.1) получим $\tilde{\Phi} = \Phi - (e^f\eta \circ \Phi) \otimes \tilde{\xi}) = \Phi$, $\tilde{\xi} = \tilde{\zeta}(\xi)^{-1}\xi = e^{-f}\eta(\xi)^{-1}\xi = e^{-f}\xi$ и, наконец, для метрики $\tilde{g} = e^{2f}(g - \eta \otimes \eta) + e^{2f}\eta \otimes \eta = e^{2f}g$. □

Предложение 4. *Преобразование почти контактной метрической структуры, индуцированное на T^1- расслоении конформным преобразованием базы, является обобщенным конформным преобразованием. При этом данное преобразование отлично от конформного преобразования.*

Доказательство. Если предположить, что оно является конформным, то $\tilde{\zeta} - \zeta = ((e^f \circ \pi) - 1)\zeta$, где $\tilde{\zeta}$ и ζ суть формы связностей на главном T^1- расслоении, f – гладкая функция на базе расслоения. Хорошо известно, что разность двух форм связностей является горизонтальной формой, а форма связности – форма вертикальная. Это приводит нас к противоречию, следовательно, рассматриваемое преобразование не может являться конформным. □

3.3. Напомним [5] построение присоединенной $G-$ структуры почти контактного метрического многообразия N и вывод первой структурной группы уравнений N. Пусть на гладком многообразии N задана почти контактная метрическая структура (Φ, g, ξ, η). Тогда в модуле гладких векторных полей $\mathcal{X}(N)$ естественным образом возникает пара взаимно дополнительных проекторов:

$m = \xi \otimes \eta$ и $l = id - \xi \otimes \eta \equiv -\Phi^2$. Эти проекторы определяют два распределения: $\mathcal{L} = \mathrm{Im}\, l = \ker \eta = \mathrm{Im}\, \Phi$ и $\mathcal{M} = \mathrm{Im}\, m = \ker \Phi$, которые называются *первым и вторым фундаментальным распределением*, соответственно. При этом модуль $\mathcal{X}(N)$ распадается в прямую сумму $\mathcal{X}(N) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, $dim\mathcal{L} = 2n$, $dim\mathcal{M} = 1$. Пара $\{\Phi|_{\mathcal{L}}, g|_{\mathcal{L}}\}$ определяет почти эрмитову структуру, а значит, распределение $\mathcal{L}$ можно рассматривать как распределение с эрмитовой метрикой $H(X,Y) = g(X,Y) + \sqrt{-1}g(X, \Phi Y)$, $X, Y \in \mathcal{L}$.

Рассмотрим комплексификацию первого фундаментального распределения $\mathcal{L}^{\mathbb{C}} = \mathcal{L} \otimes \mathbb{C}$ и два проектора $\sigma : \mathcal{L}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{L}^{\mathbb{C}}$, $\sigma = \frac{1}{2}\left(id - \sqrt{-1}\Phi^{\mathbb{C}}\right)$ и $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\left(id + \sqrt{-1}\Phi^{\mathbb{C}}\right)$, где $\Phi^{\mathbb{C}} = \Phi|_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathbb{C}}$ – комплексификация эндоморфизма Φ. Тогда модуль $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ распадается в прямую сумму $\mathcal{L}^{\mathbb{C}} = D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ собственных подпространств $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} = \mathrm{Im}\, \sigma$ и $D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}} = \mathrm{Im}\, \bar{\sigma}$ эндоморфизма $\Phi^{\mathbb{C}}$, отвечающих собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, соответственно. Отметим, что $\bar{\sigma} \circ \tau = \tau \circ \sigma$, где τ – оператор комплексного сопряжения. При этом $\tau(D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}) = D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$.

Фиксируем точку $p \in N$ и рассмотрим репер $(e_1, \ldots, e_n) \subset \mathcal{L}_p$ такой, что $H(e_a, e_b) = \delta_{ab}$. Положим $\varepsilon_0 = \xi$, $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a)$. Тогда совокупность $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$ образует репер пространства $\mathcal{L}^{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ и называется *репером, адаптированным почти контактной структуре* или, короче, *$A-$ репером.* Совокупность таких реперов определяет $G-$ структуру на многообразии N, структурной группой которой является группа Ли $\{e\} \times U(n)$. Эта $G-$ структура называется *присоединенной $G-$ структурой* почти контактного метрического многообразия N. На пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры компоненты структурных тензорных полей примут вид:

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$$

где I_n – единичная матрица порядка n.

Для вывода первой группы структурных уравнений почти контактного метрического многообразия заметим, что Φ и g – тензорные поля типов (1,1) и (2,0), соответственно. Следовательно, на пространстве расслоения всех комплексных реперов они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{array}{l} 1)\, d\Phi^i_j + \Phi^i_k\theta^k_j - \Phi^k_j\theta^i_k = \Phi^i_{j,k}\omega^k \\ 2)\, dg_{ij} + g_{kj}\theta^k_i + g_{ik}\theta^k_j = 0 \end{array}$$

где $\{\omega^i\}$ – компоненты формы смещения, $\{\theta^i_j\}$ – компоненты формы римановой связности, $\{\Phi^i_{j,k}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма Φ. На пространстве присоединенной $G-$ структуры они примут вид

$$\begin{array}{ll} \theta^a_{\hat{b}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi^a_{\hat{b},k}\omega^k & \theta^{\hat{a}}_b = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k \\ \theta^a_0 = -\sqrt{-1}\Phi^a_{0,k}\omega^k & \theta^{\hat{a}}_0 = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,k}\omega^k \\ \theta^0_b = \sqrt{-1}\Phi^0_{b,k}\omega^k & \theta^0_{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{b},k}\omega^k \\ \Phi^a_{b,k} = 0 & \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0 \\ \Phi^0_{0,k} = 0 & \theta^i_j + \theta^{\hat{j}}_{\hat{i}} \equiv 0 (mod\, n) \end{array} \tag{3.4}$$

С учетом этого первая группа структурных уравнений римановой связности

$$d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j$$

на пространстве присоединенной $G-$ структуры почти контактного метрического многообразия запишется в форме, называемой *первой группой структурных уравнений почти контактного метрического многообразия*,

$$\begin{aligned}
&d\omega^a = \theta^a_b \wedge \omega^b + C^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + C^{ab}\omega_b \wedge \omega + C^a{}_b\omega^b \wedge \omega\\
&d\omega_a = -\theta^b_a \wedge \omega_b + C_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + C_{ab}\omega^b \wedge \omega + C_a{}^b\omega_b \wedge \omega\\
&d\omega = D_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + D^{ab}\omega_a \wedge \omega_b + D^b_a\omega^a \wedge \omega_b + D_a\omega^a \wedge \omega + D^a\omega_a \wedge \omega
\end{aligned}$$

где $\omega = \omega^0 = \pi^*\eta$, $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом

$$\begin{array}{ll}
C^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}; & C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\\
C^{ab} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},0} - \sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat{b}}; & C^a{}_b = -\sqrt{-1}\Phi^a_{0,b}\\
C_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; & C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}\\
C_{ab} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0} + \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,b}; & C_a{}^b = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}\\
D_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{[a,b]}; & D^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]}\\
D^b_a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,\hat{b}} - \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{b},a} & D_a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,0}\\
D^a = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},0} &
\end{array} \tag{3.5}$$

Отметим, что $\bar{C}^{ab}{}_c = C_{ab}{}^c$, $\bar{C}_{abc} = C^{abc}$, $\bar{C}_{ab} = C^{ab}$, $\bar{C}_a{}^b = C^a{}_b$, $\bar{D}_{ab} = D^{ab}$, $\bar{D}_a = D^a$.

Рассмотрим отображение Ψ присоединенной $G-$ структуры (P, N, π, G) почти контактного метрического многообразия (N, I) $\Psi : p = (m, \xi, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}}) \to p' = (m, \tilde{\xi}, \tilde{\varepsilon}_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{b}})$, где $\tilde{\xi} = \tilde{\zeta}(\xi)^{-1}\xi$, $\tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}(\varepsilon_a - \tilde{\zeta}(\varepsilon_a)\tilde{\xi})$, $\tilde{\varepsilon}_{\hat{b}} = e^{-f}(\varepsilon_{\hat{b}} - \tilde{\zeta}(\varepsilon_{\hat{b}})\tilde{\xi}))$, $m \in N$.

Предложение 5. *Отображение Ψ переводит присоединенную $G-$ почти контактного метрического многообразия (N, I) в присоединенную $G-$ структуру $(\tilde{P}, N, \tilde{\pi}, G)$ почти контактного метрического многообразия (N, II).*

Доказательство. Найдем $\tilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}_a) = e^{-f}(\sqrt{-1}\varepsilon_a - \tilde{\zeta}(\sqrt{-1}\varepsilon_a)\tilde{\xi}) = \sqrt{-1}\tilde{\varepsilon}_a$. Аналогично получаем $\tilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}_{\hat{b}}) = -\sqrt{-1}\tilde{\varepsilon}_{\hat{b}}$. Тогда с учетом предложения 2 имеем

$$\tilde{\Phi}^i_j(p') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}$$

где I_n – единичная матрица порядка n.

С учетом (2.1), (3.1), (3.3) получим $\tilde{g}(\tilde{\varepsilon}_a, \tilde{\varepsilon}_b) = g(\varepsilon_a - \tilde{\zeta}(\varepsilon_a)\tilde{\xi}, \varepsilon_b - \tilde{\zeta}(\varepsilon_b)\tilde{\xi}) - \zeta(\varepsilon_a - \tilde{\zeta}(\varepsilon_a)\tilde{\xi})\zeta(\varepsilon_b - \tilde{\zeta}(\varepsilon_b)\tilde{\xi}) + e^{-2f}\tilde{\zeta}(\varepsilon_a - \tilde{\zeta}(\varepsilon_a)\tilde{\xi})\tilde{\zeta}(\varepsilon_b - \tilde{\zeta}(\varepsilon_b)\tilde{\xi}) = \tilde{\zeta}(\varepsilon_a)\tilde{\zeta}(\varepsilon_b)g(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) - \tilde{\zeta}(\varepsilon_a)\zeta(\tilde{\xi})\tilde{\zeta}(\varepsilon_b)\zeta(\tilde{\xi}) = 0$.

Аналогично получаем $\tilde{g}(\tilde{\varepsilon}_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{b}}) = \delta^b_a$, $\tilde{g}(\tilde{\xi}, \tilde{\varepsilon}_a) = 0$, $\tilde{g}(\tilde{\xi}, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}) = 0$ и $\tilde{g}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = e^{2f}(g(\tilde{\zeta}(\xi)^{-1}\xi, \tilde{\zeta}(\xi)^{-1}\xi) - \zeta(\tilde{\zeta}(\xi)^{-1}\xi)\zeta(\tilde{\zeta}(\xi)^{-1}\xi)) + \tilde{\zeta}(\tilde{\xi})\tilde{\zeta}(\tilde{\xi}) =$
$e^{2f}(\tilde{\zeta}(\xi)^{-2} - \tilde{\zeta}(\xi)^{-2}) + 1 = 1$. Тогда

$$\tilde{g}_{ij}(p') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_n\\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, отображение Ψ удовлетворяет требованиям предложения. $\square$

Предложение 6. *Для корепероров, дуальных $A-$ реперам, имеет место соответствие* $\Psi : (m, \zeta, \omega^a, \omega^{\hat{b}}) \to (m, \tilde{\zeta}, \tilde{\omega}^a = e^f \omega^a, \tilde{\omega}^{\hat{b}} = e^f \omega^{\hat{b}})$.

Доказательство. Согласно предложению 2 имеем $\tilde{\zeta}(\tilde{\xi}) = 1$. Проверим $\tilde{\zeta}(\tilde{\varepsilon}_a) = \tilde{\zeta}(e^{-f}\varepsilon_a - \tilde{\zeta}(e^{-f}\varepsilon_a)\tilde{\xi}) = e^{-f}(\tilde{\zeta}(\varepsilon_a) - (\tilde{\zeta}(\varepsilon_a)\tilde{\zeta}(\tilde{\xi}) = 0$. Аналогично $\tilde{\zeta}(\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}) = 0$. Далее, с учетом (3.1) получим $\tilde{\omega}^a(\tilde{\varepsilon}_b) = e^f \omega^a(e^{-f}\varepsilon_b - \tilde{\zeta}(e^{-f}\varepsilon_b)\tilde{\xi}) = \delta^a_b - \tilde{\zeta}(\varepsilon_b)\omega^a(\tilde{\zeta}(\xi)^{-1}\xi) = \delta^a_b$. Аналогично $\tilde{\omega}^a(\tilde{\varepsilon}_{\hat{b}}) = 0$, $\tilde{\omega}^{\hat{a}}(\tilde{\varepsilon}_b) = 0$, $\tilde{\omega}^{\hat{a}}(\tilde{\varepsilon}_{\hat{b}}) = \delta^b_a$. $\square$

Лемма 3.2. *В принятых обозначениях* $\varepsilon_\alpha = e^f \tilde{\varepsilon}_\alpha + \tilde{\zeta}(\varepsilon_\alpha)\tilde{\xi}$.

Доказательство. Сначала докажем, что $\varepsilon_\alpha = e^f(id - \zeta \otimes \xi)(\tilde{\varepsilon}_\alpha)$. Действительно, $e^f(id - \zeta \otimes \xi)(\tilde{\varepsilon}_\alpha) = e^f \tilde{\varepsilon}_\alpha - \zeta(\tilde{\varepsilon}_\alpha)\xi = \varepsilon_\alpha - \tilde{\zeta}(\varepsilon_\alpha)\tilde{\xi} - \zeta(\varepsilon_\alpha) - \tilde{\zeta}(\varepsilon_\alpha)\zeta(\tilde{\xi})\xi = \varepsilon_\alpha$, в силу (3.1) и (3.3). Кроме того, $\zeta(\tilde{\varepsilon}_\alpha) = -e^{-f}\tilde{\zeta}(\varepsilon_\alpha)\zeta(\tilde{\xi})$. Используя доказанные равенства, получим $\varepsilon_\alpha = e^f \tilde{\varepsilon}_\alpha + \tilde{\zeta}(\varepsilon_\alpha)\tilde{\xi}$. $\square$

Предложение 7. *Для форм смещения* $\omega = \{\omega^\alpha, \omega^0 = \pi^*\zeta\}$, $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^0 = \tilde{\pi}^*\tilde{\zeta}\}$ *присоединенных $G-$ структур многообразий (N, I) и (N, II) имеем*

$$(\Psi^*\tilde{\omega}^\alpha)(p) = e^f \omega^\alpha(p); (\Psi^*\tilde{\omega}^0)(p) = (\pi^*\tilde{\zeta})(p).$$

Доказательство. Известно [5], что любой базис $\{\xi_0, \cdots, \xi_{2n}\}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$ порождает базис $\{X_{\xi_0}, \cdots, X_{\xi_{2n}}\}$ линейного пространства всех базисных векторных полей пространства расслоения реперов. Рассмотрим, в частности, в качестве такого базиса стандартный базис арифметического пространства $\xi_0 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $\xi_{2n} = (0, 0, \cdots, 0, 1)$. Кроме того, в силу определения отображения Ψ имеем $\tilde{\pi} \circ \Psi = \pi$, следовательно, $\tilde{\pi}_* \circ \Psi_* = \pi_*$. Тогда по определению формы смещения получим $(\Psi^*\tilde{\omega})_p(X_{\xi_i}) = \tilde{\omega}_{\Psi(p)}(\Psi_* X_{\xi_i}) = (p')^{-1} \circ \tilde{\pi}_*(\Psi_* X_{\xi_i}) = (p')^{-1} \circ \pi_* X_{\xi_i} = (p')^{-1} \circ p(\xi_i)$.

Рассмотрим частные случаи: 1) $i = 0$. Тогда $(\Psi^*\tilde{\omega})_p(X_{\xi_0}) = (p')^{-1}(\xi) = \tilde{\zeta}(\xi)\xi_0 = \tilde{\zeta}(\xi)\omega_p(X_{\xi_0})$.
2) $i = \alpha$. Тогда, используя лемму 3.2, получим $(\Psi^*\tilde{\omega})_p(X_{\xi_\alpha}) = e^f \omega_p(X_{\xi_\alpha}) + \omega_p(X_{\xi_0})\tilde{\zeta}(\varepsilon_\alpha)$.
Наконец, для произвольного базисного векторного поля X имеем $(\Psi^*\tilde{\omega})_p(X) = (\Psi^*\tilde{\omega})_p(X^i X_{\xi_i}) = X^0\tilde{\zeta}(\xi)\omega_p(X_{\xi_0}) + X^\alpha(e^f \omega_p(X_{\xi_\alpha}) + \omega_p(X_{\xi_0})\tilde{\zeta}_\alpha) = \pi^*\tilde{\zeta}(X)\xi_0 + e^f \omega^\alpha(X)\xi_\alpha$. Откуда получаем утверждение предложения. $\square$

Отметим, что в доказательстве предложения 7 система функций $\{\tilde{\zeta}_\alpha, \tilde{\zeta}_0\}$, заданная на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры многообразия N, определяет форму $\tilde{\zeta}$.

Найдем соотношения для линейно независимых компонент $\{\theta^a_b\}$, $\{\tilde{\theta}^a_b\}$ римановых связностей ∇, $\tilde{\nabla}$ многообразий (N, I), (N, II), заданных на соответствующих присоединенных $G-$ структур. Пусть

$$\Psi^*\tilde{\theta}^a_b = A^{ac}_{bd}\theta^d_c + B^a_{bc}\omega^c + B^{ac}_b\omega_c + B^a_{b0}\omega^0 \tag{3.6}$$

где $\{A^{ac}_{bd}\}$, $\{B^a_{bc}\}$, $\{B^{ac}_b\}$, $\{B^a_{b0}\}$ – некоторые системы функций на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры многообразия (N, I).

Применим отображение Ψ^* для первой группы структурных уравнений почти контактного метрического многообразия (N, II)

$$\begin{array}{l}
1)\, d\tilde{\omega}^a = \tilde{\theta}^a_b \wedge \tilde{\omega}^b + \tilde{C}^{ab}{}_c \tilde{\omega}^c \wedge \tilde{\omega}_b + \tilde{C}^{abc}\tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}_c + \tilde{C}^{ab}\tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}^0 + \tilde{C}^a{}_b \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^0 \\
2)\, d\tilde{\omega}_a = -\tilde{\theta}^b_a \wedge \tilde{\omega}_b + \tilde{C}_{ab}{}^c \tilde{\omega}_c \wedge \tilde{\omega}^b + \tilde{C}_{abc}\tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^c + \tilde{C}_{ab}\tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^0 + \tilde{C}_a{}^b \tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}^0 \\
3)\, d\tilde{\omega}^0 = \tilde{D}_{ab}\tilde{\omega}^a \wedge \tilde{\omega}^b + \tilde{D}^{ab}\tilde{\omega}_a \wedge \tilde{\omega}_b + \tilde{D}^b_a \tilde{\omega}^a \wedge \tilde{\omega}_b + \tilde{D}_a \tilde{\omega}^a \wedge \tilde{\omega}^0 + \tilde{D}^a \tilde{\omega}_a \wedge \tilde{\omega}^0,
\end{array} \tag{3.7}$$

где

$$\begin{array}{cc}
\tilde{C}^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{\Phi}^a_{\hat{b},c}; & \tilde{C}^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{\Phi}^a_{[\hat{b},\hat{c}]} \\
\tilde{C}^{ab} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{\Phi}^a_{\hat{b},0} - \sqrt{-1}\tilde{\Phi}^a_{0,\hat{b}}; & \tilde{C}^a{}_b = -\sqrt{-1}\tilde{\Phi}^a_{0,b} \\
\tilde{C}_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{\Phi}^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; & \tilde{C}_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{\Phi}^{\hat{a}}_{[b,c]} \\
\tilde{C}_{ab} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{\Phi}^{\hat{a}}_{b,0} + \sqrt{-1}\tilde{\Phi}^{\hat{a}}_{0,b}; & \tilde{C}_a{}^b = \sqrt{-1}\tilde{\Phi}^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} \\
\tilde{D}_{ab} = -\sqrt{-1}\tilde{\Phi}^0_{[a,b]}; & \tilde{D}^{ab} = \sqrt{-1}\tilde{\Phi}^0_{[\hat{a},\hat{b}]} \\
\tilde{D}^b_a = -\sqrt{-1}\tilde{\Phi}^0_{a,\hat{b}} - \sqrt{-1}\tilde{\Phi}^0_{\hat{b},a} & \tilde{D}_a = -\sqrt{-1}\tilde{\Phi}^0_{a,0} \\
\tilde{D}^a = \sqrt{-1}\tilde{\Phi}^0_{\hat{a},0} &
\end{array}$$

Система функций $\{\tilde{\Phi}^i_{j,k}\}$ задает ковариантный дифференциал структурного эндоморфизма $\tilde{\Phi}$ в римановой связности. Кроме того,

$$\begin{array}{ll}
1)\, \tilde{\Phi}^a_{b,k} = 0; & 2)\, \tilde{\Phi}^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0; \\
3)\, \tilde{\Phi}^0_{0,k} = 0; & 4)\, \tilde{\theta}^i_j + \tilde{\theta}^{\hat{i}}_{\hat{j}} = 0; \\
5)\, \tilde{\theta}^a_{\hat{b}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\tilde{\Phi}^a_{\hat{b},k}\tilde{\omega}^k; & 6)\, \tilde{\theta}^{\hat{a}}_b = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\tilde{\Phi}^{\hat{a}}_{b,k}\tilde{\omega}^k; \\
7)\, \tilde{\theta}^a_0 = -\sqrt{-1}\tilde{\Phi}^a_{0,k}\tilde{\omega}^k; & 8)\, \tilde{\theta}^{\hat{a}}_0 = \sqrt{-1}\tilde{\Phi}^{\hat{a}}_{0,k}\tilde{\omega}^k; \\
9)\, \tilde{\theta}^0_b = \sqrt{-1}\tilde{\Phi}^0_{b,k}\tilde{\omega}^k; & 10)\, \tilde{\theta}^0_{\hat{b},k} = -\sqrt{-1}\tilde{\Phi}^0_{\hat{b},k}\tilde{\omega}^k;
\end{array}$$

С учетом предложения 7 и равенств (3.6), (3.7) получим

$$\begin{array}{l}
1)\, \beta^b\delta^a_c - C^{ab}{}_c = B^{ab}_c - e^f(\tilde{C}^{ab}{}_c \circ \Psi) + (\tilde{C}^{ab} \circ \Psi)\tilde{\zeta}_c - (\tilde{C}^a{}_c \circ \Psi)\tilde{\zeta}^b \\
2)\, C^{abc} = e^f(\tilde{C}^{abc} \circ \Psi) + (\tilde{C}^{a[b} \circ \Psi)\tilde{\zeta}^{c]} \\
3)\, \beta_0\delta^a_b - C^a{}_b = B^a_{b0} - (\tilde{C}^a{}_b \circ \Psi)\tilde{\zeta}_0 \\
4)\, C^{ab} = (\tilde{C}^{ab} \circ \Psi)\tilde{\zeta}_0 \\
5)\, \beta_{[b}\delta^a_{c]} = -B^a_{[bc]} + (\tilde{C}^a{}_{[b} \circ \Psi)\tilde{\zeta}_{c]} \\
6)\, A^{ac}_{bd} = \delta^a_d\delta^c_b,
\end{array} \tag{3.8}$$

где $\{\beta^a, \beta_a, \beta_0\}$ – система функций на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры многообразия N, задающая форму $\beta = df$.

Аналогично из (3.7) получим

$$\begin{array}{l}
1)\, \beta_b\delta^c_a - C_{ab}{}^c = -B^c_{ab} - e^f(\tilde{C}_{ab}{}^c \circ \Psi) + (\tilde{C}_{ab} \circ \Psi)\tilde{\zeta}^c - (\tilde{C}_a{}^c \circ \Psi)\tilde{\zeta}_b \\
2)\, C_{abc} = e^f(\tilde{C}_{abc} \circ \Psi) + (\tilde{C}_{a[b} \circ \Psi)\tilde{\zeta}_{c]} \\
3)\, \beta_0\delta^b_a - C_a{}^b = -B^b_{a0} - (\tilde{C}_a{}^b \circ \Psi)\tilde{\zeta}_0 \\
4)\, C_{ab} = (\tilde{C}_{ab} \circ \Psi)\tilde{\zeta}_0 \\
5)\, B^{[bc]}_a + (\tilde{C}_a{}^{[b} \circ \Psi)\tilde{\zeta}^{c]} = \beta^{[b}\delta^{c]}_a
\end{array} \tag{3.9}$$

Из (3.7) получим

$$\begin{gathered}
1)\ -\tilde{\zeta}_{[ab]}+\tilde{\zeta}^{c}C_{cab}+\tilde{\zeta}_{0}D_{ab}=e^{2f}(\tilde{D}_{ab}\circ\Psi)+e^{f}(\tilde{D}_{[a}\circ\Psi)\tilde{\zeta}_{b]}\\
2)\ -\tilde{\zeta}_{a}{}^{b}+\tilde{\zeta}_{c}C^{cb}{}_{a}+\tilde{\zeta}^{b}{}_{a}-\tilde{\zeta}^{c}C_{ca}{}^{b}+\tilde{\zeta}_{0}D^{b}_{a}=e^{2f}(\tilde{D}^{b}_{a}\circ\Psi)+e^{f}(\tilde{D}_{a}\circ\Psi)\tilde{\zeta}^{b}-\\
-e^{f}\tilde{\zeta}_{a}(\tilde{D}^{b}\circ\Psi)\\
3)\ -\tilde{\zeta}_{a0}+\tilde{\zeta}_{b}C^{b}{}_{a}+\tilde{\zeta}^{b}C_{ba}+\tilde{\zeta}_{0a}+\tilde{\zeta}_{0}C_{a}=e^{f}(\tilde{D}_{a}\circ\Psi)\tilde{\zeta}_{0}\\
4)\ \tilde{\zeta}_{c}C^{cab}-\tilde{\zeta}^{[ab]}+\tilde{\zeta}_{0}D^{ab}=e^{2f}(\tilde{D}^{ab}\circ\Psi)+e^{f}(\tilde{D}^{[a}\circ\Psi)\tilde{\zeta}^{b]}\\
5)\ \tilde{\zeta}_{b}C^{ba}-\tilde{\zeta}^{a}{}_{0}+\tilde{\zeta}^{b}C_{b}{}^{a}+\tilde{\zeta}_{0}{}^{a}+\tilde{\zeta}_{0}D^{a}=e^{f}\tilde{\zeta}_{0}(\tilde{D}^{a}\circ\Psi)
\end{gathered}\tag{3.10}$$

где системы функций $\{\tilde{\zeta}^{ab},\tilde{\zeta}_{ab},\tilde{\zeta}^{a}{}_{b},\tilde{\zeta}_{a}{}^{b},\tilde{\zeta}^{a}{}_{0},\tilde{\zeta}_{0}{}^{a},\tilde{\zeta}_{a0},\tilde{\zeta}_{0a},\tilde{\zeta}_{00}\}$, заданные на пространстве расслоения присоединенной $G-$ многообразия N, определяются следующими дифференциальными уравнениями

$$\begin{gathered}
d\tilde{\zeta}_{a}+\tilde{\zeta}_{b}\theta^{b}_{a}=\tilde{\zeta}_{ab}\omega^{b}+\tilde{\zeta}_{a}{}^{b}\omega_{b}+\tilde{\zeta}_{a0}\omega^{0}\\
d\tilde{\zeta}^{a}-\tilde{\zeta}^{b}\theta^{a}_{b}=\tilde{\zeta}^{ab}\omega_{b}+\tilde{\zeta}^{a}{}_{b}\omega^{b}+\tilde{\zeta}^{a}{}_{0}\omega^{0}\\
d\tilde{\zeta}_{0}=\tilde{\zeta}_{0a}\omega^{a}+\tilde{\zeta}_{0}{}^{a}\omega_{a}+\tilde{\zeta}_{00}\omega^{0}
\end{gathered}\tag{3.11}$$

Из (3.10) получим

$$\begin{aligned}
&1)\ e^{f}\tilde{\zeta}_{0}(\tilde{D}^{a}\circ\Psi)=\tilde{\zeta}_{0}D^{a}+\tilde{\zeta}_{0}{}^{a}-\tilde{\zeta}^{a}{}_{0}+\tilde{\zeta}_{b}C^{ba}+\tilde{\zeta}^{b}C_{b}{}^{a}\\
&2)\ e^{f}\tilde{\zeta}_{0}(\tilde{D}_{a}\circ\Psi)=\tilde{\zeta}_{0}D_{a}+\tilde{\zeta}_{0a}-\tilde{\zeta}_{a0}+\tilde{\zeta}_{b}C^{b}{}_{a}+\tilde{\zeta}^{b}C_{ba}\\
&3)\ e^{2f}(\tilde{D}^{ab}\circ\Psi)=\tilde{\zeta}_{0}D^{ab}-\tilde{\zeta}^{[ab]}+\tilde{\zeta}_{c}C^{cab}-\\
&-e^{f}\tilde{\zeta}_{0}^{-1}\left(\tilde{\zeta}_{0}D^{[a}\tilde{\zeta}^{b]}+\tilde{\zeta}_{0}{}^{[a}\tilde{\zeta}^{b]}-\tilde{\zeta}^{[a}{}_{0}\tilde{\zeta}^{b]}+\tilde{\zeta}_{c}C^{c[a}\tilde{\zeta}^{b]}+\tilde{\zeta}^{c}C_{c}{}^{[a}\tilde{\zeta}^{b]}\right)\\
&4)\ e^{2f}(\tilde{D}_{ab}\circ\Psi)=\tilde{\zeta}_{0}D_{ab}-\tilde{\zeta}_{[ab]}+\tilde{\zeta}^{c}C_{cab}-\\
&-e^{f}\tilde{\zeta}_{0}^{-1}\left(\tilde{\zeta}_{0}D_{[a}\tilde{\zeta}_{b]}+\tilde{\zeta}_{0[a}\tilde{\zeta}_{b]}-\tilde{\zeta}_{[a|0|}\tilde{\zeta}_{b]}+\tilde{\zeta}_{c}C^{c}{}_{[a}\tilde{\zeta}_{b]}+\tilde{\zeta}^{c}C_{c[a}\tilde{\zeta}_{b]}\right)\\
&5)\ e^{2f}(\tilde{D}^{b}_{a}\circ\Psi)=\tilde{\zeta}_{0}D^{b}_{a}+\tilde{\zeta}^{b}{}_{a}-\tilde{\zeta}_{a}{}^{b}+\tilde{\zeta}_{c}C^{cb}{}_{a}-\tilde{\zeta}^{c}C_{ca}{}^{b}+\\
&+e^{f}\tilde{\zeta}_{0}^{-1}\left(\tilde{\zeta}_{a}\tilde{\zeta}_{0}D^{b}+\tilde{\zeta}_{a}\tilde{\zeta}_{0}{}^{b}=\tilde{\zeta}_{a}\tilde{\zeta}^{b}{}_{0}+\tilde{\zeta}_{c}C^{cb]}\tilde{\zeta}_{a}+\tilde{\zeta}^{c}C_{c}{}^{b}\tilde{\zeta}_{a}\right)-\\
&-e^{f}\tilde{\zeta}_{0}^{-1}\left(\tilde{\zeta}^{b}\tilde{\zeta}_{0}D_{a}+\tilde{\zeta}^{b}\tilde{\zeta}_{0a}-\tilde{\zeta}^{b}\tilde{\zeta}_{a0}+\tilde{\zeta}^{b}\tilde{\zeta}_{c}C^{c}{}_{a}+\tilde{\zeta}^{b}\tilde{\zeta}^{c}C_{ca}\right)
\end{aligned}\tag{3.12}$$

Вычитая из выражения 3) (3.8) выражение 3) (3.9), получим $(C_{a}{}^{b}-C^{b}{}_{a})=B^{b}_{a0}+\tilde{\zeta}_{0}(\tilde{C}_{a}{}^{b}\circ\psi-\tilde{C}^{b}{}_{a}\Psi)$. Так как $C_{a}{}^{b}-C^{b}{}_{a}=D^{b}_{a}$, то получим

$$B^{b}_{a0}=\frac{1}{2}(D^{b}_{a}-\tilde{\zeta}_{0}(\tilde{D}^{b}_{a}\circ\Psi)),\tag{3.13}$$

где $\tilde{D}^{b}_{a}\circ\Psi$ вычисляется по формуле 5) в (3.10). Просимметризуем выражение 1) из (3.8) по индексам a, b и сложим с 5) из (3.9).

$$B^{ab}_{c}=\beta^{a}\delta^{b}_{c}+\tilde{\zeta}_{0}^{-1}\tilde{\zeta}_{c}C^{(ab)}+(\tilde{C}^{(a}{}_{c}\circ\Psi)\tilde{\zeta}^{b)}-(\tilde{C}_{c}{}^{[a}\circ\Psi)\tilde{\zeta}^{b]}$$

Комплексно сопрягая (3.6) с учетом свойств компонент формы римановой связности, получим $B^{ab}_{c}=-B^{c}_{ab}$.

Таким образом, функции B^{a}_{bc}, B^{ab}_{c}, B^{a}_{b0} выражаются через системы функций, определенных на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры многообразия N. В явном виде мы не будем выписывать эти формулы из-за их громоздкости. Рассмотрим формулы преобразования компонент структурных тензоров в двух частных случаях обобщенных конформных преобразований почти контактного метрического многообразия.

§ 4. Инвариантность классов почти контактных метрических структур относительно обобщенных конформных преобразований

4.1. Конформные преобразования. Рассмотрим конформные преобразования почти контактных метрических многообразий. Как мы отметили выше, эти преобразования являются частным случаем обобщенных конформных преобразований.

Лемма 4.1. *Обобщенное конформное преобразование является конформным тогда и только тогда, когда $\tilde{\zeta}_\alpha = 0$, $\tilde{\zeta}_0 = e^f$, где $\tilde{\zeta}_\alpha, \tilde{\zeta}_0$ – система функций на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры исходного многообразия N.*

Доказательство. 1) Пусть обобщенное конформное преобразование является конформным. Тогда по определению конформного преобразования $\tilde{\zeta} = e^f\zeta$. Найдем $\tilde{\zeta}_\alpha = \tilde{\zeta}(\varepsilon_\alpha) = e^f\zeta(\varepsilon_\alpha) = 0$ по определению $A-$ репера. Аналогично $\tilde{\zeta}_0 = \tilde{\zeta}(\xi) = e^f\zeta(\xi) = e^f$.

2) Обратно, пусть обобщенное конформное преобразование задано формой $\tilde{\zeta}$, для которой $\tilde{\zeta}_\alpha = 0$, $\tilde{\zeta}_0 = e^f$. Тогда $\tilde{\zeta}(X) = \tilde{\zeta}_\alpha X^\alpha + \tilde{\zeta}_0 X^0 = e^f\zeta(X)$, то есть $\tilde{\zeta} = e^f\zeta$. □

Лемма 4.2. *Для конформного преобразования $\tilde{\zeta}_{0a} = e^f\beta_a$, $\tilde{\zeta}_0{}^a = e^f\beta^a$, $\tilde{\zeta}_{00} = e^f\beta_0$.*

Доказательство. Из (3.11) получим $e^f(\beta_a\omega^a + \beta^a\omega_a + \beta_0\omega^0) = \tilde{\zeta}_{0a}\omega^a + \tilde{\zeta}_0{}^a\omega_a + \tilde{\zeta}_{00}\omega^0$. Откуда, в силу линейной независимости базисных форм, получим требуемые соотношения. □

Лемма 4.3. *Для конформного преобразования $\tilde{\zeta}^{ab} = \tilde{\zeta}_{ab} = 0$, $\tilde{\zeta}^a{}_b = \tilde{\zeta}_a{}^b = 0$, $\tilde{\zeta}^a{}_0 = \tilde{\zeta}_a{}^0 = 0$.*

Доказательство. Легко получить из (3.11) с учетом леммы 4.1. □

Подставим соотношения лемм 4.1 – 4.3 в соотношения для компонент структурных тензоров. Таким образом, доказано

Предложение 8. *Для конформного преобразования*

1) $B^b_{a0} = 0$	2) $B^{bc}_a = \beta^b\delta^c_a$
3) $B^a_{bc} = -\beta_b\delta^a_c$	4) $e^f(\tilde{D}^a_b \circ \Psi) = D^a_b$
5) $e^f(\tilde{C}^{ab}{}_c \circ \Psi) = C^{ab}{}_c + \beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c$	6) $e^f(\tilde{C}_{ab}{}^c \circ \Psi) = C_{ab}{}^c + \beta_a\delta^c_b - \beta_b\delta^c_a$
7) $e^f(\tilde{D}^a \circ \Psi) = D^a + \beta^a$	8) $e^f(\tilde{D}_a \circ \Psi) = D_a + \beta_a$
9) $e^f(\tilde{D}^{ab} \circ \Psi) = D^{ab}$	10) $e^f(\tilde{D}_{ab} \circ \Psi) = D_{ab}$
11) $e^f(\tilde{C}^{ab} \circ \Psi) = C^{ab}$	12) $e^f(\tilde{C}_{ab} \circ \Psi) = C_{ab}$
13) $e^f(\tilde{C}^a{}_b \circ \Psi) = C^a{}_b - \beta_0\delta^a_b$	14) $e^f(\tilde{C}_a{}^b \circ \Psi) = C_a{}^b - \beta_0\delta^b_a$
15) $e^f(\tilde{C}^{abc} \circ \Psi) = C^{abc}$	16) $e^f(\tilde{C}_{abc} \circ \Psi) = C_{abc}$

Напомним, [5], что системы функций на пространстве присоединенной $G-$ структуры
$B = \{B^i{}_{jk}\} : B^a{}_{\hat{b}c} = C^{ab}{}_c, B^{\hat{a}}{}_{b\hat{c}} = C_{ab}{}^c$, все прочие компоненты равны нулю;
$C = \{C^i{}_{jk}\} : C^a{}_{\hat{b}\hat{c}} = C^{abc}, C^a{}_{bc} = C_{abc}$, все прочие компоненты равны нулю;

$D = \{D^i{}_j\} : D^a{}_{\hat{b}} = C^{ab}, D^{\hat{a}}{}_b = C_{ab}$, все прочие компоненты равны нулю;
$E = \{E^i{}_j\} : E^a{}_b = C^a{}_b, E^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} = C_a{}^b$, все прочие компоненты равны нулю;
$F = \{F^i{}_j\} : F^a{}_{\hat{b}} = D^{ab}, F^{\hat{a}}{}_b = D_{ab}$, все прочие компоненты равны нулю;
$G = \{G^i\} : G^a = D^a, G^{\hat{a}} = D_a, G^0 = 0$ определяют тензоры соответствующих типов на многообразии N, которые называются *структурными тензорами: первым, вторым, ... шестым* почти контактной метрической структуры. Рассмотрим линейные пространства $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ тензоров на первом фундаментальном распределении $\mathcal{L}$, которые обладают свойствами соответствующих структурных тензоров:

$$\begin{aligned}
&1)\, \Phi \circ B(X,Y) = -B(\Phi X, Y) = B(X, \Phi Y);\\
&2)\, H(B(X,Y),Z) + \overline{H(Y, B(X,Z)} = 0\\
&3)\, \Phi \circ C(X,Y) = -C(\Phi X, Y) = -C(X, \Phi Y)\\
&4)\, \Phi \circ D = -D \circ \Phi\\
&5)\, \Phi \circ E = E \circ \Phi\\
&6)\, \Phi \circ F = -F \circ \Phi\\
&7)\, G \in \mathcal{L}
\end{aligned}$$

$X, Y \in \mathcal{X}(N)$, $H(X,Y) = g(X,Y) + \sqrt{-1}g(X, \Phi Y)$.

Как известно пространство $\mathcal{B}$ распадается в прямую сумму $\mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1$ подпространств бесследных и примитивных тензоров, пространство $\mathcal{C}$ – в прямую сумму $\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1$ подпространств квазисимметричных и кососимметрических тензоров, пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{F}$ распадаются в прямую сумму $\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$, $\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$, подпространств симметричных и кососимметричных тензоров, подпространство $\mathcal{E}$ – в прямую сумму $\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1$ бесследных и скалярных эндоморфизмов. Тогда пространство $\mathcal{T} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \oplus \mathcal{D} \oplus \mathcal{E} \oplus \mathcal{F} \oplus \mathcal{L}$ распадается в прямую сумму своих подпространств

$$\mathcal{T} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{L}$$

Таким образом, определяются 2048 различных классов почти контактных метрических структур. Каждый класс обозначается символом $AC - N$, где N – десятичное число, в двоичной записи которого на $k-$ м месте стоит нуль, если составляющая соответственного структурного тензора, лежащая в соответствующем подпространстве, равна нулю.

Из предложения [?] легко видеть, что конформно инвариантными являются условия принадлежности структурных тензоров следующим подпространствам: $\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$. Откуда легко узнать, является ли класс конформно инвариантным. В двоичной записи номера конформно инвариантного класса на местах $\mathcal{B}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{L}$ должны стоять 1, а на остальных местах – любое из чисел 0 или 1.

Рассмотрим широко известные классы почти контактных метрических структур и выясним их конформную инвариантность, используя разработанный аппарат. Отметим, часть из приведенных результатов была получена в [3] другим методом.

Напомним [5],

Определение 1. Почти контактная метрическая структура (Φ, g, ξ, η) на многообразии N называется:

– *нормальной*, если $2N_\Phi + d\eta\otimes\xi = 0$, где $4N_\Phi(X,Y) = \Phi^2[X,Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]$ – *тензор Нейенхейса* эндоморфизма Φ;
– *контактной метрической* или *почти сасакиевой*, если $d\eta = \Theta$, где $\Theta(X,Y) = g(X, \Phi Y)$ – фундаментальная форма почти контактной метрической структуры;
– *K– контактной*, если она контактна и ее структурная форма η является формой Киллинга, то есть выполняются соотношения $d\eta = \Theta$, $\nabla_X(\eta)X = 0$;
– *квазисасакиевой*, если она нормальна и имеет замкнутую фундаментальную форму, то есть $2N_\Phi + d\eta\otimes\xi = 0$, $d\Theta = 0$;
– *сасакиевой*, если она нормальна и контактна. Как известно, это равносильно тому, что $\nabla_X(\Phi)Y = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi$, где ∇ – риманова связность метрики g;
– *почти косимплектической*, если ее фундаментальная и структурная формы замкнуты, то есть $d\eta = 0$, $d\Theta = 0$;
– *слабо косимплектической*, если ее фундаментальная и структурная формы являются формами Киллинга, то есть $\nabla_X(\Phi)X = 0$, $\nabla_X(\eta)X = 0$;
– *точнейше косимплектической*, если ее фундаментальная форма является формой Киллинга, а структурная форма замкнута, то есть $d\eta = 0$, $\nabla_X(\Theta)X = 0$;
– *косимплектической*, если ее фундаментальная и структурная формы параллельны в римановой связности, то есть $\nabla\Theta = 0$, $\nabla\eta = 0$;
– *структурой Кенмоцу*, если $\nabla_X(\Phi)Y = g(\Phi X, Y)\xi - \eta(Y)\Phi X$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

На пространстве присоединенной G– структуры имеем

Теорема 2. *Почти контактная метрическая структура является:*
– нормальной тогда и только тогда, когда $C_{abc} = 0$, $C_{ab} = 0$, $D_{ab} = 0$, $D_a = 0$;
– контактной тогда и только тогда, когда $C_{[abc]} = 0$, $C_{[ab]} = 0$, ${C_{ab}}^c = 0$, $D_{ab} = 0$, $D_a = 0$, $2{C_a}^b = D_a^b = -2\sqrt{-1}\delta_a^b$;
– K– контактной тогда и только тогда, когда $C_{[abc]} = 0$, $C_{ab} = 0$, ${C_{ab}}^c = 0$, $D_{ab} = 0$, $D_a = 0$, $2{C_a}^b = D_a^b = -2\sqrt{-1}\delta_a^b$;
– квазисасакиевой тогда и только тогда, когда $C_{abc} = 0$, ${C_{ab}}^c = 0$, $C_{ab} = 0$, $D_{ab} = 0$, $D_a = 0$;
– сасакиевой тогда и только тогда, когда $C_{abc} =$, ${C_{ab}}^c = 0$, $C_{ab} = 0$, $D_{ab} = 0$, $D_a = 0$, ${C_a}^b = -\sqrt{-1}\delta_a^b$;
– слабо косимплектической тогда и только тогда, когда ${C_{ab}}^c = 0$, ${C_a}^b = 0$, $D_a^b = 0$, $D_a = 0$, $2C_{ab} = 3D_{ab}$, $C_{[abc]} = C_{abc}$;
– точнейше косимплектической тогда и только тогда, когда ${C_{ab}}^c = 0$, $C_{ab} = 0$, $D_{ab} = 0$, $D_a = 0$, ${C_a}^b = 0$, $D_a^b = 0$, $C_{[abc]} = C_{abc}$;
– почти косимплектической тогда и только тогда, когда ${C_{ab}}^c = 0$, $C_{[ab]} = 0$, $D_{ab} = 0$, $D_a = 0$, ${C_a}^b = 0$, $D_a^b = 0$, $C_{[abc]} = 0$;
– косимплектической тогда и только тогда, когда $C_{abc} = 0$, ${C_{ab}}^c = 0$, $C_{ab} = 0$, $D_{ab} = 0$, $D_a = 0$, ${C_a}^b = 0$, $D_a^b = 0$;
– структурой Кенмоцу тогда и только тогда, когда ${C_{ab}}^c = 0$, $C_{abc} = 0$, $C_{ab} = 0$, $D_{ab} = 0$, $D_a = 0$, ${C^a}_b = -\delta_b^a$.

Рассмотрим нормальную структуру. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем

Теорема 3. *При конформном преобразовании нормальная структура переходит в структуру* $AC-1561$. *Нормальная структура переходит в нормальную при конформном преобразовании тогда и только тогда, когда* $\beta_a=0$, *то есть* $grad\, f \in \mathcal{M}$.

Предложение 9. *Пусть при конформном преобразовании нормальное многообразие* N *переходит в нормальное. Обозначим* N_1 *открытое подмногообразие многообразия* N, *в каждой точке которого форма* $\beta = df$ *отлична от нуля. Тогда сужение контактной формы исходного многообразия на подмногообразие* N_1 *замкнуто и с необходимостью замкнуто сужение на* N_1 *контактной формы конформно преобразованного многообразия.*

Доказательство. По основной теореме тензорного анализа имеем $d\beta_i + \beta_j\theta_i^j = \beta_{i,j}\omega^j$, где система функций $\{\beta_{i,j}\}$ задает ковариантный дифференциал формы β в римановой связности метрики g. В частности, при $i=a$ с учетом (3.4) получаем $\beta_0\sqrt{-1}\Phi^0_{a,j}\omega^j = \beta_{a,j}\omega^j$ и в силу линейной независимости базисных форм $\sqrt{-1}\beta_0\Phi^0_{a,j} = \beta_{a,j}$. При $j=\hat{b}$ с учетом (3.5) получим

$$-\beta_0 C_a{}^b = \beta_{a,}{}^b \tag{4.1}$$

Применим оператор комплексного сопряжения с учетом вещественности функции β_0:

$$-\beta_0 C^b{}_a = \beta^b{}_{,a} \tag{4.2}$$

Так как $\beta = df$, форма β замкнута, а значит, $\beta^b{}_{,a} = \beta_{a,}{}^b$. Тогда сравнивая (4.1) и (4.2), получим $C^b{}_a = C_a{}^b$. Следовательно, $D^b_a = \sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} + \sqrt{-1}\Phi^b_{0,a} = C_a{}^b - C^a{}_b = 0$. Откуда с учетом первой группы структурных уравнений и соотношения $\omega = \pi^*\eta$, где $\pi : P \to N$ – естественная проекция тотального пространства расслоения присоединенной $G-$ структуры почти контактного метрического многообразия N. Наконец, с учетом предложения 8 получим, что $d\tilde{\eta} = 0$. $\square$

Рассмотрим контактную структуру. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем, что контактная структура является конформно инвариантной тогда и только тогда, когда $\beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = 0$, $\beta_a = 0$, $e^f(-\sqrt{-1}\delta^a_b) = -\sqrt{-1}\delta^a_b - \beta_0\delta^a_b$. Так как $\bar{\beta}_0 = \beta_0$ (черта обозначает комплексное сопряжение), то из последнего соотношения получаем, что $\beta_0 = 0$ и $f \equiv 0$. Итак,

Теорема 4. *При конформном преобразовании контактная структура переходит в структуру* $AC-841$. *При этом контактные формы как исходного, так и преобразованного многообразия не замкнуты. При конформном преобразовании контактная структура переходит в контактную тогда и только тогда, когда функция конформного преобразования* $f \equiv 0$.

Рассмотрим $K-$ контактную структуру. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем, что $\beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = 0$, $\beta_a = 0$, $e^f(-\sqrt{-1}\delta^a_b) = -\sqrt{-1}\delta^a_b - \beta_0\delta^a_b$. Так как $\bar{\beta}_0 = \beta_0$, то из последнего соотношения получаем, что $\beta_0 = 0$ и $f \equiv 0$. Итак,

Теорема 5. *При конформном преобразовании* $K-$ *контактная структура переходит в структуру* $AC-777$. *При конформном преобразовании* $K-$

контактная структура переходит в $K-$ контактную тогда и только тогда, когда функция конформного преобразования $f \equiv 0$.

Рассмотрим квазисасакиеву структуру. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем, что $\beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = 0$, $\beta_a = 0$.

Теорема 6. *При конформном преобразовании квазисасакиева структура переходит в структуру $AC - 921$. При конформном преобразовании квазисасакиева структура переходит в квазисасакиеву тогда и только тогда, когда $\beta_a = 0$, то есть $grad\, f \in \mathcal{M}$.*

Рассмотрим сасакиеву структуру. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем, что $\beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = 0$, $\beta_a = 0$, $e^f(-\sqrt{-1}\delta^a_b) = -\sqrt{-1}\delta^a_b - \beta_0\delta^a_b$. Так как $\bar\beta_0 = \beta_0$, то из последнего соотношения получаем, что $\beta_0 = 0$ и $f \equiv 0$. Итак,

Теорема 7. *При конформном преобразовании сасакиева структура переходит в структуру $AC-521$. При конформном преобразовании сасакиева структура переходит в сасакиеву тогда и только тогда, когда функция конформного преобразования $f \equiv 0$.*

Рассмотрим слабо косимплектическую структуру. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем, что $\beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = 0$, $\beta_0\delta^a_b = 0$, $\beta_a = 0$. Итак,

Теорема 8. *Слабо косимплектическая структура при конформном преобразовании переходит в структуру $AC-851$. При конформном преобразовании слабо косимплектическая структура переходит в слабо косимплектическую тогда и только тогда, когда функция конформного преобразования $f = \mathrm{const}$.*

Рассмотрим точнейше косимплектическую структуру. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем, что $\beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = 0$, $\beta_a = 0$, $\beta_0\delta^a_b = 0$. Итак,

Теорема 9. *При конформном преобразовании точнейше косимплектическая структура переходит в структуру $AC - 649$. При конформном преобразовании точнейше косимплектическая структура переходит в точнейше косимплектическую тогда и только тогда, когда функция конформного преобразования $f = \mathrm{const}$.*

Рассмотрим почти косимплектическую структуру. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем, что $\beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = 0$, $\beta_a = 0$, $\beta_0\delta^a_b = 0$. Итак,

Теорема 10. *При конформном преобразовании почти косимплектическая структура переходит в структуру $AC - 841$. При конформном преобразовании почти косимплектическая структура переходит в почти косимплектическую тогда и только тогда, когда функция конформного преобразования $f = \mathrm{const}$.*

Рассмотрим косимплектическую структуру. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем, что $\beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = 0$, $\beta_a = 0$, $\beta_0\delta^a_b = 0$. Итак,

Теорема 11. *При конформном преобразовании почти косимплектическая структура переходит в структуру $AC - 521$.При конформном преобразовании косимплектическая структура переходит в косимплектическую тогда и только тогда, когда функция конформного преобразования $f = \mathrm{const}$.*

Рассмотрим структуру Кенмоцу. Сравнивая предложение 8 и теорему 2 получаем, что $\beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c = 0$, $\beta_a = 0$, $-e^f\delta^a_b = -\delta^a_b - \beta_0\delta^a_b$. Это равносильно соотношения $\beta^a = \beta_a = 0$, $\beta_0 = e^f - 1$. Так как $\beta_0 = df(\xi) = \xi(f)$, то второе условие примет вид $\xi(f) = e^f - 1$. Отметим, что одной и той же буквой f мы обозначаем функцию конформного преобразования почти эрмитовой структуры базы, антиувлечение этой функции на пространство T^1- расслоения и антиувлечение этой функции на пространство присоединенной $G-$ структуры. Первое из соотношений означает, что градиент функции f принадлежит второму фундаментальному распределению $\mathcal{M}$.

Теорема 12. *При конформном преобразовании структура Кенмоцу переходит в структуру $AC-521$.При конформном преобразовании структура Кенмоцу переходит в структуру Кенмоцу тогда и только тогда, когда функция конформного преобразования удовлетворяет условиям $gradf \in \mathcal{M}$ и $\xi(f) = e^f - 1$.*

4.2. Преобразования почти контактной метрической структуры, индуцированные на T^1- расслоении конформными преобразованиями базы. Формы ζ и $\tilde{\zeta}$ являются формами связности на T^1- расслоении, следовательно, разность $\zeta - \tilde{\zeta}$ является горизонтальной формой, то есть ее нулевая компонента на пространстве присоединенной $G-$ структуры равна нулю

$$\tilde{\zeta}_0 = 1$$

Напомним [6], что для главного T^1- расслоения

$$\begin{array}{cc} C^a{}_b = -C_b{}^a \equiv C^a_b & D^a = D_a = 0 \\ D^b_a = 2C_a{}^b & C^{ab} = C_{ab} = 0 \end{array} \tag{4.3}$$

Лемма 4.4. *В принятых обозначениях $\tilde{\zeta}_0{}^a = \tilde{\zeta}_{0a} = \tilde{\zeta}_{00} = 0$, $\tilde{\zeta}^a{}_0 = -\tilde{\zeta}^b C^a_b$, $\tilde{\zeta}_{a0} = \tilde{\zeta}_b C^b_a$, $\beta_0 = 0$.*

Доказательство. Так как $d\tilde{\zeta}_0 = \tilde{\zeta}_0{}^a\omega_a + \tilde{\zeta}_{0a}\omega^a + \tilde{\zeta}_{00}\omega^0$. В силу независимости базисных форм получим $\tilde{\zeta}_0{}^a = \tilde{\zeta}_{0a} = \tilde{\zeta}_{00} = 0$. В силу (3.12), (4.3) получим $\tilde{\zeta}^a{}_0 = -\tilde{\zeta}^b C^a_b$, $\tilde{\zeta}_{a0} = \tilde{\zeta}_b C^b_a$. Подставим (3.13) в (3.9) и с учетом (4.3) получим $\beta_0 = 0$. $\square$

С учетом леммы 4.4 из (3.8) – (3.10) получим

$$\begin{array}{l} e^{2f}(\tilde{D}^{ab} \circ \Psi) = D^{ab} - \tilde{\zeta}^{[ab]} + \tilde{\zeta}_c C^{cab} \\ e^{2f}(\tilde{D}_{ab} \circ \Psi) = D_{ab} - \tilde{\zeta}_{[ab]} + \tilde{\zeta}^c C_{cab} \\ e^{2f}(\tilde{D}^b_a \circ \Psi) = D^b_a + \tilde{\zeta}^b{}_a - \tilde{\zeta}_a{}^b + \tilde{\zeta}_c C^{cb}{}_a - \tilde{\zeta}^c C_{ca}{}^b \\ e^f(\tilde{C}^{abc} \circ \Psi) = C^{abc} \\ e^f(\tilde{C}_{abc} \circ \Psi) = C_{abc} \\ e^f(\tilde{C}^{ab}{}_c \circ \Psi) = C^{ab}{}_c - \beta^b\delta^a_c + \beta^a\delta^b_c \\ e^f(\tilde{C}_{ab}{}^c \circ \Psi) = C_{ab}{}^c - \beta_b\delta^c_a + \beta_a\delta^c_b \end{array} \tag{4.4}$$

Из (4.4) легко видеть, что инвариантными при индуцированных преобразованиях являются условия принадлежности структурных тензоров следующим подпространствам: $\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{L}$. Откуда легко узнать, является ли класс инвариантным. В двоичной записи номера инвариантного класса на местах $\mathcal{B}_1, \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1$ должны стоять 1, а на остальных местах – любое из чисел 0 или 1.

Рассмотрим наиболее классы почти контактных метрических структур из определения 1 и выясним их инвариантность, используя разработанный аппарат.

Согласно теореме 2 квазисасакиева, слабо косимплектическая, точнейше косимплектическая, почти косимплектическая, косимплектическая и структура Кенмоцу содержат условие $C^{ab}{}_c = 0$. Для того чтобы каждая из этих структур переходила структуру того же класса, необходимо выполнение условий $C^{ab}{}_c = 0$ и $\tilde{C}^{ab}{}_c = 0$. Согласно (4.4) это равносильно $\beta^a = \beta_a = 0$. Тогда с учетом леммы 4.4 получим следующую

Теорема 13. *Квазисасакиева, слабо косимплектическая, точнейше косимплектическая, почти косимплектическая, косимплектическая структура и структура Кенмоцу, определенная на пространстве T^1- расслоения переходит в структуру того же класса тогда и только тогда, когда функция конформного преобразования базы f является константой.*

Список литературы

[1] В. Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова, “Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 347–360.

[2] В. Ф. Кириченко, Н. Н. Дондукова, “Контактно геодезические преобразования почти контактных метрических структур”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 209–219.

[3] В. Ф. Кириченко, “Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **6**:4 (2000), 1095–1120.

[4] В. Ф. Кириченко, И. В. Ускорев, “Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур”, *Матем. заметки*, **84**:6 (2008), 838–850.

[5] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, Типография МПГУ, Москва, 2003.

[6] И. П. Борисовский, “О геометрии главных T^1- расслоений над почти эрмитовыми многообразиями”, *Деп. ВИНИТИ РАН*, 1997, №3729-В97, 12.

Л. А. Игнаточкина (L. A. Ignatochkina)
Московский педагогический государственный университет
E-mail: ignlia@gmail.com

Поступила в редакцию
24.12.2009