Игнаточкина Л.А.

Преобразования $G-$ структур почти эрмитовых многообразий, порождаемые их конформными преобразованиями.

Изучение почти эрмитовых многообразий существенно упрощается, если их исследование проводить на пространстве присоединенной $G-$ структуры. В случае конформного преобразования почти эрмитова многообразия, мы имеем дело с двумя почти эрмитовыми многообразиями. Для каждого такого многообразия существует своя присоединенная $G-$ структура. Каждое из полученных многообразий имеет набор тождеств, которые описывают свойства этого многообразия. Они связывают между собой системы функций, заданных на соответствующей $G-$ структуре. Пусть дано такое тождество, характеризующее исходное многообразие и задано конформное преобразование многообразий. Возникает задача: получить соответствующее тождество, которое характеризует конформно преобразованное многообразие в терминах функций, заданных на его пространстве присоединенной $G-$ структуры.

Пусть M - гладкое многообразие, $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ - модуль гладких векторных полей на многообразии M, d - оператор внешнего дифференцирования, id - тождественный оператор, $C^\infty(M)$ - алгебра гладких вещественных функций на многообразии M, индексы $i, j, k, l, \ldots$ принимают значения от 1 до $2n$, индексы $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, t$ принимают значения от 1 до n, $\hat{a} = a + n$, $t_{\hat{a}} = t^a$, $t^{\hat{a}} = t_a$, по индексам, заключенным в круглые скобки () предполагается суммирование, по индексам, заключенным в квадратные скобки [] предполагается альтернация, индексы, заключенные в прямые скобки || в альтернации (симметризации) не участвуют.

Рассмотрим почти эрмитово многообразие $M = (M, J, g)$, где J - почти комплексная структура, то есть $J^2 = -id$, g - риманова структура, согласованная с почти комплексной структурой, то есть $g(JX, JY) = g(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Обозначим $dim M = 2n > 2$. Рассмотрим функцию $f \in C^\infty(M)$ и конформно преобразованное почти эрмитово многообразие $\tilde{M} = (M, J, \tilde{g} = e^{2f} g)$. Хорошо известно [4], что задание почти эрмитовой структуры на многообразии равносильно заданию подрасслоения $(P, M, \pi, U(n))$ главного расслоения реперов на M. Эта $U(n)-$ структура называется присоединенной $G-$ структурой почти эрмитова многообразия. У каждого из многообразий M и $\tilde{M}$ своя присоединенная $G-$ структура. Поставим задачу: получить равенства для функций,

определяющих тензоры на обоих многообразиях так, чтобы слева стоял объект многообразия $\tilde{M}$, вычисленный в репере присоединенной $G-$ структуры этого многообразия, а справа - выражение для объектов многообразия M в реперах своей $G-$ структуры. Так как это функции, их можно сравнивать по значениям в соответствующий точках этих $G-$ структур.

Рассмотрим главное расслоение реперов BM. Определим отображение $\psi : BM \to BM$ по формуле $\psi : p = (m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n}) \longrightarrow p' = (m, \varepsilon'_1 = e^{-f}\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon'_n = e^{-f}\varepsilon_n)$, где $m = \pi(p) = \pi(p') \in M$. Докажем, что отображение ψ гладкое, записав его координатное выражение в локальных координатах. Берем локальную карту (U, φ) на BM с координатами (y^i, y^i_j) $i, j = 1, \ldots 2n$, где $y^i = x^i \circ \pi$ (x^i - координаты соответствующей локальной карты на многообразии M). Тогда отображение ψ задается формулами $\acute{y}^i = y^i$, $\acute{y}^i_j = (e^{-f} \circ \pi)(y^1, \ldots, y^{2n}) y^i_j$. Это гладкие функции, то есть ψ - гладкое отображение.

Пусть на многообразии M задано тензорное поле T. Рассмотрим тензорное поле $\tilde{T}$, полученное из T каким-либо преобразованием (например, конформным). Получим критерий инвариантнотсти тензорного поля T при этом преобразовании в терминах присоединенных $G-$ структур. Пусть тензорные поля T и $\tilde{T}$ задаются на соответствующих пространствах присоединенных $G-$ структур системами функций $\{T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t}\}$ и $\{\tilde{T}^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t}\}$. Предположим, что T - инвариантен, то есть $T = \tilde{T}$. Тогда
$\tilde{T}^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t} \circ \psi(p) = \tilde{T}_m(e^{-f}\varepsilon_{j_1}, \ldots, e^{-f}\varepsilon_{j_t}, e^f\omega^{i_1}, \ldots, e^f\omega^{i_s}) =$
$= e^{(-t+s)f} T_m(\varepsilon_{j_1}, \ldots, \varepsilon_{j_t}, \omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_s}) = e^{(-t+s)f} T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t}(p)$. Таким образом,

$$\tilde{T}^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t} \circ \psi(p) = e^{(-t+s)f} T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t}(p) \qquad (1)$$

Обратно, пусть верно (1). Рассмотрим локальную карту (U, φ) на многообразии M. Тогда компоненты тензорного поля $\tilde{T}$ в этой карте
$\tilde{T}^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t}(m) = \tilde{T}_m(\frac{\partial}{\partial^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_t}}, dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_s}) =$
$\tilde{T}(C^{k_1}_{j_1}\tilde{\varepsilon}_{k_1}, \ldots, C^{k_t}_{j_t}\tilde{\varepsilon}_{k_t}, (C^{-1})^{i_1}_{r_1}\tilde{\omega}^{r_1}, \ldots, (C^{-1})^{i_s}_{r_s}\tilde{\omega}^{r_s}) =$
$C^{k_1}_{j_1} \ldots C^{k_t}_{j_t} (C^{-1})^{i_1}_{r_1} \ldots (C^{-1})^{i_s}_{r_s} (\tilde{T}^{r_1 \ldots r_s}_{k_1 \ldots k_t} \circ \psi)(p) =$
$C^{k_1}_{j_1} \ldots C^{k_t}_{j_t} (C^{-1})^{i_1}_{r_1} \ldots (C^{-1})^{i_s}_{r_s} e^{(-t+s)f} T^{r_1 \ldots r_s}_{k_1 \ldots k_t}(p) =$
$T_m(C^{k_1}_{j_1} e^{-f}\varepsilon_{k_1}, \ldots, C^{k_t}_{j_t} e^{-f}\varepsilon_{k_t}, (C^{-1})^{i_1}_{r_1} e^f \omega^{r_1}, \ldots, (C^{-1})^{i_s}_{r_s} e^f \omega^{r_s} =$
$T_m(\frac{\partial}{\partial^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_t}}, dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_s}) = T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t}(m)$. Мы получили, что компоненты тензоров в натуральных базисах совпадают, то есть $T = \tilde{T}$. Итак,

доказано

Предложение 1 *Тензорное поле T инвариантно относительно какого-либо преобразования (в частности, конформного преобразования) тогда и только тогда, когда системы функций, задающие тензорное поле T и его образ $\tilde{T}$ при данном преобразовании на соответствующих присоединенных $G-$ структурах, связаны соотношением (1).* $\square$

Пусть $\{\mathcal{E}^i_j, \mathcal{E}_k\}$ - базис на BM и $\{\omega^i_j, \omega^k\}$ - дуальный базис. Выясним, как отображение антиувлечения ψ^* действует на дуальный базис. Пусть ω - форма смещения. Тогда для любого $X \in T_p(BM)$ имеем
$(\psi\omega)_p(X) = \omega_{\psi(p)}(\psi_* X) = (p')^{-1}(\pi_*)_{p'}(\psi_* X) =$
$= \left(p \circ \begin{pmatrix} e^{-f} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & e^{-f} \end{pmatrix}\right)^{-1} \circ ((\pi \circ \psi)_*)(X) = \begin{pmatrix} e^{f} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & e^{f} \end{pmatrix} \circ p^{-1} \circ$
$(\pi_*)_p(X) = \left(\left(\begin{pmatrix} e^{f} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & e^{f} \end{pmatrix} \circ \omega_p\right)\right)(X)$ Итак, получаем

$$\psi^*\omega^i = e^f \omega^i \tag{2}$$

Найдем аналогичные выражения для форм $\psi^*\omega^i_j$. Так как набор форм $\{\omega^i_j, \omega^k\}$ образует базис 1-форм на пространстве расслоения реперов, $\psi^*\omega^i_j = A^{ik}_{jl}\omega^l_k + B^i_{jk}\omega^k$, где A^{ik}_{jl} и B^i_{jk} суть некоторые функции на пространстве расслоения реперов, которые нам нужно найти. Для этого заметим, что
$(\psi_*)_p(\mathcal{E}^k_l)_p = (\psi_*)_p((\sigma_p)_{*e}(E^k_l)_e) = (\psi \circ \sigma_p)_{*e}(E^k_l)_e =$
$= \left(\sigma \begin{pmatrix} e^{-f} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & e^{-f} \end{pmatrix}_p\right)_{*e} (E^k_l)_e = (\mathcal{E}^k_l) \begin{pmatrix} e^{-f} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & e^{-f} \end{pmatrix}_p = (\mathcal{E}^k_l)_{\psi(p)} =$
$(\mathcal{E}^k_l)_{p'}$. Здесь (E^k_l) - базис алгебры Ли структурной группы расслоения реперов, котрорый порождает фундаментальные векторные поля $(\mathcal{E}^k_l)$, $\sigma_p(g) = pg$, $g \in GL(2n, R)$. Тогда $(A^{ik}_{jl})_p = (\psi^*\omega^i_j)_p(\mathcal{E}^k_l)_p = (\omega^i_j)_{\psi(p)}(\psi_{*p}(\mathcal{E}^k_l)_p) =$
$(\omega^i_j)_{p'}(\mathcal{E}^k_l)_{p'} = \delta^i_l\delta^k_j$. Итак,

$$\psi^*\omega^i_j = \omega^i_j + B^i_{jk}\omega^k \tag{3}$$

Обозначим g^{ij} и $\tilde{g}^{ij}$ системы функций на пространстве расслоения реперов, задающие контрвариантные метрические тензоры многообразий M и $\tilde{M}$ соответственно, $\{g_{ijk}\}$ и $\{\tilde{g}_{ijk}\}$ - системы функций на пространстве расслоения реперов, задающие ковариантные дифференциалы метрик g и $\tilde{g}$ в тривиальной связности $\breve{\nabla}$, заданной формой связности с компонентами $\{\omega^i_j\}$. Для краткости обозначим $e^{-f} \circ \pi$ через e^{-f}.

Лемма 1 *Во введенных обозначениях*
1) $\tilde{g}_{ij}(p') = g_{ij}(p)$; 2) $\tilde{g}^{ij}(p') = g^{ij}(p)$; 3) $J^i_j(p') = J^i_j(p)$;
4) $\tilde{g}_{ijk}(p') = e^{-f}(2\beta_k(p)g_{ij}(p) + g_{ijk}(p))$,
где $df = \beta = \beta_k\omega^k$, $p, p' \in BM$, $p' = \psi(p)$.

Доказательство. По определению системы функций $\{g_{ij}\}$ имеем $\tilde{g}_{ij}(p') = \tilde{g}_m(e^{-f}e_i, e^{-f}e_j) = e^{-2f}\tilde{g}_m(e_i, e_j) = e^{-2f}e^{2f}g_m(e_i, e_j) = g_{ij}(p)$. Так как $\tilde{g}^{ij}\tilde{g}_{jk} = \delta^i_j$, получим $\tilde{g}^{ij}(p') = g^{ij}(p)$. Аналогично, имеем $J^i_j(p') = J_m(e^{-f}e_i, e^f\omega^i) = J^i_j(p)$. Наконец, $\tilde{g}_{ijk}(p') = \breve{\nabla}_{e^{-f}e_k}(\tilde{g})(e^{-f}e_i, e^{-f}e_j) = e^{-3f}\breve{\nabla}_{e_k}(e^{2f}g)(e_i, e_j) =$
$e^{-3f}(2e^{2f}df(e_k)(p)g_{ij}(p) + e^{2f}\breve{\nabla}_{e_k}(g)(e_i, e_j)) =$
$= e^{-f}(2\beta_k(p)g_{ij}(p) + g_{ijk}(p))$. □

Обозначим $\{\theta^i_j\}$ и $\{\tilde{\theta}^i_j\}$ - компоненты форм римановых связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ метрик g и $\tilde{g}$ соответственно. Хорошо известно, что

$$\theta^i_j = \omega^i_j - \frac{1}{2}g^{it}(g_{ktj} + g_{tjk} - g_{jkt})\omega^k \tag{4}$$

$$\tilde{\theta}^i_j = \omega^i_j - \frac{1}{2}\tilde{g}^{it}(\tilde{g}_{ktj} + \tilde{g}_{tjk} - \tilde{g}_{jkt})\omega^k \tag{5}$$

Применяя к (5) отображение ψ^* и учтем (2), (3), (4) и лемму, получим
$\psi^*\tilde{\theta}^i_j(p) = \psi^*\omega^i_j(p) - \frac{1}{2}(\tilde{g}^{it} \circ \psi)(\tilde{g}_{ktj} \circ \psi + \tilde{g}_{tjk} \circ \psi - \tilde{g}_{jkt} \circ \psi)(p)\psi^*\omega^k(p) =$
$\omega^i_j(p) + B^i_{jk}(p)\omega^k(p) - \frac{1}{2}g^{it}(p)(g_{ktj}(p) + g_{tjk}(p) - g_{jkt}(p) + 2\beta_j(p)g_{kt}(p) + 2\beta_k(p)g_{tj}(p) -$
$2\beta_t(p)g_{jk}(p))\omega^k(p) =$
$= \theta^i_j(p) - g^{it}(p)(\beta_j(p)g_{kt}(p) + \beta_k(p)g_{tj}(p) - \beta_t(p)g_{jk}(p))\omega^k(p) + B^i_{jk}(p)\omega^k(p)$.
Получим

$$\psi^*\tilde{\theta}^i_j = \theta^i_j - g^{it}(\beta_j g_{kt} + \beta_k g_{tj} - \beta_t g_{jk})\omega^k + B^i_{jk}\omega^k \tag{6}$$

Найдем функции B^i_{jk}. Рассмотрим первую группу структурных уравнений расслоения реперов: $\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j$. Применим к ним отображение ψ^*

и с учетом формул (2), (3) получим
$e^f df \wedge \omega^i + e^f d\omega^i = e^f(\omega^i_j + B^i_{jk}\omega^k) \wedge \omega^j$. Так как $df = \beta_k\omega^k$,
$e^f \beta_{[k}\delta^i_{j]}\omega^k \wedge \omega^j = e^f B^i_{[jk]}\omega^k \wedge \omega^j$. В силу линейной независимости базисных форм получим

$$B^i_{[jk]} = \beta_{[k}\delta^i_{j]} \tag{7}$$

В силу ковариантного постоянства метрики $\tilde{g}$ в связности $\tilde{\nabla}$ имеем
$d\tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ij}\tilde{\theta}^k_i + \tilde{g}_{ik}\tilde{\theta}^k_j = 0$. Применим отображение ψ^* и подставим (6). После приведения подобных слагаемых получим

$$g_{kj}B^k_{im} + g_{ki}B^k_{jm} = 2\beta_m g_{ij}$$

Применяя циклическую замену индексов $i \to j \to m \to i$, получим еще два тождества

$$g_{km}B^k_{ji} + g_{kj}B^k_{mi} = 2\beta_i g_{jm}$$

$$g_{ki}B^k_{mj} + g_{km}B^k_{ij} = 2\beta_j g_{mi}$$

Склыдывая первые два тождества и вычитая из них третье с учетом (17), получим $2g_{kj}B^k_{im} = 2\beta_m g_{ij}$. Свернем последнее тождество с g^{jt}. Тогда $B^t_{im} = \beta_m\delta^t_i$. Окончательно, с учетом (6) получим

$$\psi^*\tilde{\theta}^i_j = \theta^i_j + (g^{it}g_{jk}\beta_t - \beta_j\delta^i_k)\omega^k \tag{8}$$

Заметим,что в силу соотношений 1) и 2) леммы 1, точкам присоединенной $G-$ структуры многообразия M соответствуют точки присоединенной $G-$ структуры многообразия $\tilde{M}$ при отображении ψ. Запишем формулу (8) в следующих случаях:
1) $i = a, j = b$

$$\psi^*\tilde{\theta}^a_b = \theta^a_b + \beta^a\omega_b - \beta_b\omega^a \tag{9}$$

2) $i = \hat{a}, j = b \quad \psi^*\tilde{\theta}^{\hat{a}}_b = \theta^{\hat{a}}_b + \beta_a\omega_b - \beta_b\omega_a$
3) $i = a, j = \hat{b} \quad \psi^*\tilde{\theta}^a_{\hat{b}} = \theta^a_{\hat{b}} + \beta^a\omega^b - \beta^b\omega^a$
4) $i = \hat{a}, j = \hat{b} \quad \psi^*\tilde{\theta}^{\hat{a}}_{\hat{b}} = \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} + \beta_a\omega^b - \beta^b\omega_a.$

Лемма 2 *Пусть $\{J^i_{j,k}\}$ - система функций на пространстве присоединенной $G-$ структуры многообразия M, задающие ковариантный дифференциал структурного эндоморфизма J в римановой связности ∇ и*

$\{\tilde{J}^i_{j,k}\}$ - *система функций на пространстве присоединенной* $G-$ *структуры многообразия* $\tilde{M}$, *задающие ковариантный дифференциал структурного эндоморфизма* J *в римановой связности* $\tilde{\nabla}$. *Тогда*

$$(\tilde{J}^i_{j,m} \circ \psi)e^f = J^i_{j,m} - J^k_j g^{it} g_{km}\beta_t + J^k_j \beta_k \delta^i_m + J^i_k g^{kt} g_{jm}\beta_t - J^i_m \beta_j \qquad (10)$$

Доказательство. По определению ковариантного дифференциала имеем $dJ^i_j - J^k_j \tilde{\theta}^i_k + J^i_k \tilde{\theta}^k_j = \tilde{J}^i_{j,k}\omega^k$. Применим отображение ψ^* с учетом (2) и (6).
$dJ^i_j - J^k_j(\theta^i_k + (g^{it}g_{km}\beta_t - \beta_k\delta^i_m)\omega^m) + J^i_k(\theta^k_j + (g^{kt}g_{jm}\beta_t - \beta_j\delta^k_m)\omega^m) = (\tilde{J}^i_{j,k} \circ \psi)e^f\omega^k$
Так как $dJ^i_j - J^k_j\theta^i_k + J^i_k\theta^k_j = J^i_{j,k}\omega^k$, в силу линейной независимости форм $\{\omega^k\}$ получим формулу (10). $\square$
Следствие. 1) $(\tilde{B}^{abc} \circ \psi)e^f = B^{abc}$; $(\tilde{B}_{abc} \circ \psi)e^f = B_{abc}$;
2) $(\tilde{B}_{ab}{}^c \circ \psi)e^f = B_{ab}{}^c + \beta_a\delta^c_b - \beta_b\delta^c_a$; $(\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi)e^f = B^{ab}{}_c + \beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c$;
3) $(\tilde{J}^a_{\hat{b},\hat{c}} \circ \psi)e^f = J^a_{\hat{b},\hat{c}}$; $(\tilde{J}^{\hat{a}}_{b,c} \circ \psi)e^f = J^{\hat{a}}_{b,c}$,
где $B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}$, $B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]}$, $B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}$, $B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}$ и аналогичные обозначения для объектов многообразия $\tilde{M}$. $\square$

Напомним [4], что наборы функций $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ задают чистые тензоры на многообразии M, которые называются структурными тензорами почти эрмитова многообразия, а системы функций $\{B^{ab}{}_c\}$, $\{B_{ab}{}^c\}$ задают виртуальные тензоры этого многообразия.

Получим формулы для функций, заданных на пространстве присоединенной $G-$ структуры многообразия M, которые определяют ковариантный дифференциал формы β в римановой связности ∇. Для этого введем обозначения $C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,c}$, $C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},\hat{c}}$. Заметим, что функции C^{abc} и C_{abc} можно выразить через структурные тензоры. Именно, в силу кососимметричности $J^{\hat{a}}_{b,c} = -J^{\hat{b}}_{a,c}$ имеем $J^{\hat{b}}_{[c,d]} = \frac{1}{2}(J^{\hat{d}}_{b,c} - J^{\hat{c}}_{b,d})$. Умножим обе части этого тождества на $-\frac{\sqrt{-1}}{2}$ и учтем введенные выше обозначения. Тогда $B_{bcd} = \frac{1}{2}(C_{dbc} - C_{cbd})$. Альтернируя это тождество по индексам b, c окончательно получим

$$C_{cbd} = B_{dbc} + B_{bdc} + B_{cbd} \qquad (11)$$

По определению ковариантного дифференциала формы β имеем $d\beta_i + \beta_j\theta^j_i = \beta_{i,j}\omega^j$. Пусть $i = a$. Тогда $d\beta_a + \beta_c\theta^c_a + \beta_{\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_a = \beta_{a,c}\omega^c + \beta_{a,\hat{c}}\omega^{\hat{c}}$.

Подставим в эти равенства известные соотношения $\theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} = B_{ab}{}^{c}\omega_c - C_{abc}\omega^c$, $\theta_{\hat{b}}^{a} = B^{ab}{}_{c}\omega^c - C^{abc}\omega_c$ и обозначения $\beta_{a,\hat{c}} = \beta_{a,}{}^{c}$, $d\beta_a + \beta_c\theta_a^c = \beta_{ac}\omega^c + \beta_a{}^{c}\omega_c$. Тогда в силу линейной независимости форм $\{\omega^k\}$ получим

$$\beta_{a,c} = \beta_{ac} - \beta^d C_{dac};\ \beta_{a,}{}^{c} = \beta_a{}^{c} + \beta^d B_{da}{}^{c}$$

Проводя аналогичные рассуждения в случае $i = \hat{a}$, получим

$$\beta^{a,c} = \beta^{ac} - \beta_d C^{dac};\ \beta^{a}{}_{,c} = \beta^{a}{}_{c} + \beta_d B^{da}{}_{c}$$

Получим формулы, связывающие компоненты форм Ли ω и $\tilde{\omega}$ многообразий M и $\tilde{M}$, соответственно. Известно, что $\tilde{\omega} = \omega + 2df$. Обозначим $\{\alpha_i\}$ и $\{\tilde{\alpha}_i\}$ системы функций на пространствах присоединенных $G-$ структур, задающие формы Ли ω и $\tilde{\omega}$. Тогда $\tilde{\alpha}_i(p') = \tilde{\omega}_m(\tilde{\varepsilon}_i) = (\omega + 2df)_m(e^{-f}\varepsilon_i) = e^{-f}(\alpha_i + 2\beta_i)$, $p' = \psi(p), p = (m, \varepsilon_i)$. Итак,

$$e^f(\tilde{\alpha}_i \circ \psi) = \alpha_i + 2\beta_i$$

Проводя рассуждения аналогичные доказательству леммы 2, получим формулы для форм Ли.

$$\begin{array}{l}
1)\ e^{2f}(\tilde{\alpha}_{ac} \circ \psi) = \alpha_{ac} + 2\beta_{ac} - \alpha_a\beta_c - \alpha_c\beta_a - 4\beta_a\beta_c \\
2)\ e^{2f}(\tilde{\alpha}_a{}^{c} \circ \psi) = \alpha_a{}^{c} + 2\beta_a{}^{c} - \beta^c\alpha_a - 2\beta^c\beta_a + \alpha_b\beta^b\delta_a^c + 2\beta_b\beta^b\delta_a^c \\
3)\ e^{2f}(\tilde{\alpha}^{ac} \circ \psi) = \alpha^{ac} + 2\beta^{ac} - \beta^c\alpha^a - 4\beta^c\beta^a - \beta^a\alpha^c \\
4)\ e^{2f}(\tilde{\alpha}^{a}{}_{c} \circ \psi) = \alpha^{a}{}_{c} + 2\beta^{a}{}_{c} - \alpha^a\beta_c - 2\beta_c\beta^a + \alpha^b\beta_b\delta_c^a + 2\beta^b\beta_b\delta_c^a,
\end{array} \qquad (12)$$

где $d\alpha_a + \alpha_c\theta_a^c = \alpha_{ac}\omega^c + \alpha_a{}^{c}\omega_c$; $d\alpha^a - \alpha^c\theta_c^a = \alpha^{ac}\omega_c + \alpha^a{}_{c}\omega^c$.

Для дальнейших вычислений нам понадобится вторая группа структурных уравнений почти эрмитова многообразия. Рассмотрим первую группу структурных уравнений почти эрмитова многообразия [4]

$$\begin{array}{l}
d\omega^a = \theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_{c}\omega^c \wedge \omega_b \\
d\omega_a = -\theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}{}^{c}\omega_c \wedge \omega^b
\end{array}$$

Проведя стандартную процедуру дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений, получим вторую группу структурных уравнений

$$d\theta_c^a = \theta_b^a \wedge \theta_c^b + (A_{cd}^{ah} + 2B^{abh}B_{cbd})\omega^d \wedge \omega_h + (A_{cdh}^{a} + B^{ab}{}_{[d}B_{|b|h]c})\omega^d \wedge \omega^h + (A_{c}^{adh} -$$

$$-B_{cb}{}^{[d}B^{|b|h]a})\omega_d \wedge \omega_h$$

где $\{A^{ah}_{cd}\}$, $\{A^{abc}_{d}\}$, $\{A^{a}_{bcd}\}$ - системы функций на пространстве присоединенной $G-$ структуры, которые удовлетворяют следующим тождествам

$$A^{ac}_{[bd]} - 2B^{ahc}B_{[bd]h} + B^{ac}{}_{[db]} + B^{af}{}_{[d}B_{b]f}{}^{c} - 2B^{ach}B_{hbd} = 0;$$
$$A^{[bc]}_{ad} - 2B^{[bc]h}B_{ahd} - B_{ad}{}^{[bc]} - B_{af}{}^{[b}B^{c]f}{}_{d} - 2B_{afd}B^{fcb} = 0;$$
$$A^{acd}_{b} - B_{bh}{}^{[c}B^{d]ah} + B^{acd}{}_{b} + B^{a[c}{}_{b}{}^{d]} + 2B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} - B^{a[d}{}_{f}B^{c]f}{}_{b} = 0;$$
$$A^{b}_{acd} + B^{bh}{}_{[c}B_{d]ah} - B_{acd}{}^{b} - B_{a[c}{}^{b}{}_{d]} - 2B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + B_{a[d}{}^{f}B_{c]f}{}^{b} = 0;$$
$$A^{a}_{[bcd]} + B^{ah}{}_{[c}B_{db]h} - B^{ah}{}_{[c}B_{|h|db]} = 0;$$
$$A^{[bcd]}_{a} - B_{ah}{}^{[c}B^{db]h} + B_{af}{}^{[c}B^{|f|db]} = 0;$$

$$B^{a[bcd]} + B^{a[d}{}_{f}B^{|f|bc]} = 0; \quad B_{a[bcd]} + B_{a[c}{}^{f}B_{|f|db]} = 0;$$

и формулы комплексно сопряженные. Кроме того получается, что функции, задающие структурные и виртуальные тензоры, удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$dB^{abc} - B^{dbc}\theta^{d}_{a} - B^{adc}\theta^{d}_{b} - B^{abd}\theta^{d}_{c} = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_{d}\omega^d$$

$$dB_{abc} + B_{dbc}\theta^{d}_{a} + B_{adc}\theta^{d}_{b} + B_{abd}\theta^{d}_{c} = B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^{d}\omega_d$$
$$dB^{ab}{}_{c} - B^{db}{}_{c}\theta^{a}_{d} - B^{ad}{}_{c}\theta^{b}_{d} + B^{ab}{}_{d}\theta^{d}_{c} = B^{ab}{}_{c}{}^{d}\omega_d + B^{ab}{}_{cd}\omega^d$$
$$dB_{ab}{}^{c} + B_{db}{}^{c}\theta^{d}_{a} + B_{ad}{}^{c}\theta^{d}_{b} + B_{ab}{}^{d}\theta^{c}_{d} = B_{ab}{}^{c}{}_{d}\omega^d + B_{ab}{}^{cd}\omega_d$$

Получим формулы, связывающие ковариантные дифференциалы структурных и виртуальных тензоров, многообразий M и $\tilde{M}$. Так как система функций $\{\tilde{B}^{abc}\}$ задаем тензорное поле на многообразии $\tilde{M}$ имеем $d\tilde{B}^{abc} - \tilde{B}^{dbc}\tilde{\theta}^{d}_{a} - \tilde{B}^{adc}\tilde{\theta}^{d}_{b} - \tilde{B}^{abd}\tilde{\theta}^{d}_{c} = \tilde{B}^{abcd}\omega_d + \tilde{B}^{abc}{}_{d}\omega^d$. Применим к обеим частям последнего равенства отображение ψ^*: $d(\tilde{B}^{abc} \circ \psi) - (\tilde{B}^{dbc} \circ \psi)(\psi^*\tilde{\theta}^{d}_{a}) - \tilde{B}^{adc} \circ \psi)(\psi^*\tilde{\theta}^{b}_{d}) - (\tilde{B}^{abd} \circ \psi)(\psi^*\tilde{\theta}^{c}_{d}) = (\tilde{B}^{abcd} \circ \psi)e^f\omega_d + (\tilde{B}^{abc}{}_{d} \circ \psi)e^f\omega^d$. С учетом (9) и следствия получим

$$e^{2f}(\tilde{B}^{abcd} \circ \psi) = B^{abcd} - \beta^d B^{abc} - \beta^a B^{dbc} - \beta^b B^{adc} - \beta^c B^{abd}$$

$$e^{2f}(\tilde{B}^{abc}{}_{d} \circ \psi) = B^{abc}{}_{d} - \beta_d B^{abc} + \beta_h B^{hbc}\delta^{a}_{d} + \beta_h B^{ahc}\delta^{b}_{d} + \beta_h B^{abh}\delta^{c}_{d}$$

Проводя аналогичные рассуждения для равенств $d\tilde{B}_{abc} + \tilde{B}_{dbc}\tilde{\theta}^{a}_{d} + \tilde{B}_{adc}\tilde{\theta}^{b}_{d} + \tilde{B}_{abd}\tilde{\theta}^{c}_{d} = \tilde{B}_{abcd}\omega^d + \tilde{B}_{abc}{}^{d}\omega_d$, получим

$$e^{2f}(\tilde{B}_{abcd} \circ \psi) = B_{abcd} - \beta_d B_{abc} - \beta_a B_{dbc} - \beta_b B_{adc} - \beta_c B_{abd}$$

$$e^{2f}(\tilde{B}_{abc}{}^{d} \circ \psi) = B_{abc}{}^{d} - \beta^{d}B_{abc} + \beta^{h}B_{hbc}\delta^{d}_{a} + \beta^{h}B_{ahc}\delta^{d}_{b} + \beta^{h}B_{abh}\delta^{d}_{c}$$

Для виртуальных тензоров имеем $d\tilde{B}_{ab}{}^{c} + \tilde{B}_{db}{}^{c}\tilde{\theta}^{d}_{a} + \tilde{B}_{ad}{}^{c}\tilde{\theta}^{d}_{b} - \tilde{B}_{ab}{}^{d}\tilde{\theta}^{a}_{d} = \tilde{B}_{ab}{}^{cd}\omega_{d} + \tilde{B}_{ab}{}^{c}{}_{d}\omega^{d}$. Применим отображение ψ^{*}, формулы (9) и следствие.

$$(\tilde{B}_{ab}{}^{c}{}_{d} \circ \psi)e^{2f} = B_{ab}{}^{c}{}_{d} + \beta_{ad}\delta^{c}_{b} - \beta_{bd}\delta^{c}_{a} - \beta_{d}B_{ab}{}^{c} - 2\beta_{d}\beta_{a}\delta^{c}_{b} + 2\beta_{d}\beta_{b}\delta^{c}_{a} - B_{db}{}^{c}\beta_{a} -$$

$$-B_{ad}{}^{c}\beta_{b} + B_{ab}{}^{h}\beta_{h}\delta^{c}_{d}$$

$$(\tilde{B}_{ab}{}^{cd} \circ \psi)e^{2f} = B_{ab}{}^{cd} + \beta_{a}{}^{d}\delta^{c}_{b} - \beta_{b}{}^{d}\delta^{c}_{a} - \beta^{d}B_{ab}{}^{c} - \beta^{d}\beta_{a}\delta^{c}_{b} + \beta^{d}\beta_{b}\delta^{c}_{a} + B_{hb}{}^{c}\beta^{h}\delta^{d}_{a} +$$

$$+\beta_{h}\beta^{h}\delta^{c}_{b}\delta^{d}_{a} + B_{ah}{}^{c}\beta^{h}\delta^{d}_{b} - \beta^{h}\beta_{h}\delta^{c}_{a}\delta^{d}_{b} - B_{ab}{}^{d}\beta^{c}$$

Аналогично получаем комплексно сопряженные формулы

$$(\tilde{B}^{ab}{}_{c}{}^{d} \circ \psi)e^{2f} = B^{ab}{}_{c}{}^{d} + \beta^{ad}\delta^{b}_{c} - \beta^{bd}\delta^{a}_{c} - \beta^{d}B^{ab}{}_{c} - 2\beta^{d}\beta^{a}\delta^{b}_{c} + 2\beta^{d}\beta^{b}\delta^{a}_{c} - B^{db}{}_{c}\beta^{a} -$$

$$-B^{ad}{}_{c}\beta^{b} + B^{ab}{}_{h}\beta^{h}\delta^{d}_{c}$$

$$(\tilde{B}^{ab}{}_{cd} \circ \psi)e^{2f} = B^{ab}{}_{cd} + \beta^{a}{}_{d}\delta^{b}_{c} - \beta^{b}{}_{d}\delta^{a}_{c} - \beta_{d}B^{ab}{}_{c} - \beta_{d}\beta^{a}\delta^{b}_{c} + \beta_{d}\beta^{b}\delta^{a}_{c} + B^{hb}{}_{c}\beta_{h}\delta^{a}_{d} +$$

$$+\beta^{h}\beta_{h}\delta^{b}_{c}\delta^{a}_{d} + B^{ah}{}_{c}\beta_{h}\delta^{b}_{d} - \beta_{h}\beta^{h}\delta^{a}_{c}\delta^{b}_{d} - B^{ab}{}_{d}\beta_{c}$$

Найдем формулы преобразования для функций $\{A^{ah}_{cd}\}$, $\{A^{abc}_{d}\}$, $\{A^{a}_{bcd}\}$. Запишем вторую группу структурных уравнений многообразия $\tilde{M}$.

$$d\tilde{\theta}^{a}_{c} = \tilde{\theta}^{a}_{b} \wedge \tilde{\theta}^{b}_{c} + (\tilde{A}^{ah}_{cd} + 2\tilde{B}^{abh}\tilde{B}_{cbd})\omega^{d} \wedge \omega_{h} + (\tilde{A}^{a}_{cdh} + \tilde{B}^{ab}{}_{[d}\tilde{B}_{|b|h]c})\omega^{d} \wedge \omega^{h} + (\tilde{A}^{adh}_{c} -$$

$$-\tilde{B}_{cb}{}^{[d}\tilde{B}^{|b|h]a})\omega_{d} \wedge \omega_{h}$$

Применим к ним отображение ψ^{*} и подставим (9).
$d(\theta^{a}_{c} + \beta^{a}\omega_{c} - \beta_{c}\omega^{a}) = (\theta^{a}_{b} + \beta^{a}\omega_{b} - \beta_{b}\omega^{a}) \wedge (\theta^{b}_{c} + \beta^{b}\omega_{c} - \beta_{c}\omega^{b}) + (\tilde{A}^{ah}_{cd} \circ \psi + 2(\tilde{B}^{abh} \circ \psi)(\tilde{B}_{cbd} \circ \psi))e^{2f}\omega^{d} \wedge \omega_{h} + ((\tilde{A}^{a}_{cdh} \circ \psi) + (\tilde{B}^{ab}{}_{[d} \circ \psi)(\tilde{B}_{|b|h]c} \circ \psi))e^{2f}\omega^{d} \wedge \omega^{h} + ((\tilde{A}^{adh}_{c} \circ \psi) - \tilde{B}_{cb}{}^{[d} \circ \psi)(\tilde{B}^{|b|h]a} \circ \psi))e^{2f}\omega_{d} \wedge \omega_{h}$
С учетом следствия и линейной независимости базисных форм получим

$$e^{2f}(\tilde{A}^{ah}_{cd} \circ \psi) = A^{ah}_{cd} + \beta^{a}{}_{d}\delta^{h}_{c} + \beta_{c}{}^{h}\delta^{a}_{d} - \beta^{a}B_{cd}{}^{h} - \beta_{c}B^{ah}{}_{d} + \beta^{a}\beta_{c}\delta^{h}_{d} - \beta_{b}\beta^{b}\delta^{a}_{d}\delta^{h}_{c} \quad (13)$$

$$e^{2f}(\tilde{A}^{a}_{cdh} \circ \psi) = A^{a}_{cdh} - \beta_{c[d}\delta^{a}_{h]} + \beta^{a}B_{cdh} + \beta^{b}\delta^{a}_{[d}B_{|b|h]c} - \beta^{a}B_{[dh]c} - \beta_{c}\beta_{[h}\delta^{a}_{d]} \quad (14)$$

$$e^{2f}(\tilde{A}_c^{adh} \circ \psi) = A_c^{adh} + \beta^{a[d}\delta_c^{h]} - \beta_c B^{adh} + \beta^a \delta_c^{[d}\beta^{h]} + \beta_c B^{[dh]a} - \beta_b \delta_c^{[d} B^{|b|h]a} \quad (15)$$

Используя вторую группу структурных уравнений римановой связности $d\tilde{\theta}_j^i = \tilde{\theta}_k^i \wedge \tilde{\theta}_j^k + \frac{1}{2}\tilde{R}_{j,kl}^i \omega^k \wedge \omega^l$ аналогичными рассуждениями, получаем формулу, которая связывает компоненты тензоров Римана-Кристоффеля многообразий M и $\tilde{M}$.

$$e^{2f}(\tilde{R}_{j,kl}^i \circ \psi) = R_{j,kl}^i + 2g^{it} g_{j[l}\beta_{|t|k]} - 2\beta_{j[k}\delta_{l]}^i - 2(g^{it}\beta_t g_{j[l}\beta_{k]} - \beta_m \delta_{[k}^i g^{mr} g_{|j|l]}\beta_r +$$

$$+ \beta_{[l}\delta_{k]}^i \beta_j)$$

Стандартные вычисления, использующие вторую группу структурных уравнений почти эрмитова многообразия и вторую группу структурных уравнений римановой связности, позволяют получить выражения для компонент тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной $G-$ структуры почти эрмитова многообразия.

$$R^a{}_{bcd} = 2(A_{bcd}^a + B^{af}{}_{]c} B_{|f|d]b} + B^{af}{}_{[c} C_{|fb|d]})$$

$$R^a{}_{bc\hat{d}} = A_{bc}^{ad} + 2B^{afd} B_{fcb} - B^{af}{}_c B_{fb}^d + C^{afd} C_{fbc}$$

$$R^{\hat{a}}{}_{bcd} = 2(C_{ab[cd]} + B_{ab}{}^f B_{fcd})$$

$$R^{\hat{a}}{}_{b\hat{c}\hat{d}} = 2(-B_{ab}{}^{[cd]} + C_{abf} B^{fdc})$$

Напомним, что $C_{abc} = B_{cba} + B_{bca} + B_{abc}$ и $C_{abcd} = B_{cbad} + B_{bcad} + B_{abcd}$. Остальные компоненты тензора Римана- Кристоффеля получаются с использованием свойств симметрии этого тензора и комплексным сопряжением.

Предложение 2 *Если $\beta_a = const$, то $\beta_a = 0$.*

Доказательство. Имеем $d\beta_a + \beta_b \theta_a^b = \beta_a{}^b \omega_b + \beta_{ab}\omega^b$. Продифференцируем эти равенства с учетом второй группы структурных уравнений почти эрмитова многообразия. Тогда $\beta_b \theta_c^b \wedge \theta_a^c + T_{abc}^d \theta_d^c \wedge \omega^b + T_{ac}^{bd} \theta_d^c \wedge \omega_b + T_{aij}\omega^i \wedge \omega^j = 0$. Здесь T_{abc}^d, T_{ac}^{bd}, T_{aij} обозначены коэффициенты, конкретное содержание которых нас не интересует. Первое слагаемое полученной суммы можно записать в виде $\beta_b \delta_a^d \delta_c^h \theta_h^b \wedge \theta_d^c$ или, приводя подобные слагаемые,

$\frac{1}{2}(\beta_b\delta^d_a\delta^h_c - \beta_c\delta^h_a\delta^d_b)\theta^b_h \wedge \theta^c_d$. Тогда в силу линейной независимости базисных форм получим $\beta_b\delta^d_a\delta^h_c - \beta_c\delta^h_a\delta^d_b = 0$. Свернем это тождество сначала по h, c, затем по d, a. Тогда получим $n^2\beta_b - \beta_b = 0$, то есть $\beta_b = 0$. □

Замечание. Заменяя букву β на букву α мы получаем точно такой же результат для компонент формы Ли. □

Напомним, что задание почти эрмитовой структуры на многообразии равносильно заданию подрасслоения $(P, M, \tilde{\pi}, U(n))$ главного расслоения реперов. Тогда существует главное T^1- расслоение $(P/SU(n), M, \pi, U(n)/SU(n) = T^1)$, которое называется каноническим [5]. Если θ - форма римановой связности на пространстве расслоения реперов над M и ζ - форма соответствующей связности главного T^1- расслоения, то форма кривизны этой связности $d\zeta$ определяет форму ρ по формуле $d\zeta = \pi^*\rho$. Форма ρ называется обобщенной формой Риччи. На пространстве присоединенной $G-$ структуры обобщенная форма Риччи имеет вид [5] $\rho = \sqrt{-1}((R^a{}_{ahr} - 2C_{ab[h}B^{ab}{}_{r]})\omega^h \wedge \omega^r + (R^a{}_a{}^{hr} + 2C^{ab[h}B_{ab}{}^{r]})\omega_h \wedge \omega_r + 2(R^a{}_{ah}{}^r - B^{ab}{}_hB_{ab}{}^r + C_{abh}C^{abr})\omega^h \wedge \omega_r)$ Подставим в это выражение вычисленные компоненты тензора Римана-Кристоффеля. $\rho = 2\sqrt{-1}((A^a_{ahr} + B^{af}{}_{[h}B_{|f|r]a})\omega^h \wedge \omega^r + (A^{ahr}_a - B_{af}{}^{[h}B^{|f|r]a})\omega_h \wedge \omega_r + (A^{ar}_{ah} + 2B^{afr}B_{fha})\omega^h \wedge \omega_r)$

Рассмотрим обобщенную форму Риччи $\tilde{\rho}$ для многообразия $\tilde{M}$. Вычислим ее компоненты на пространстве присоединенной $G-$ структуры многообразия M. Для этого заметим, что на пространстве присоединенной $G-$ структуры многообразия $\tilde{M}$ ее компоненты имеют вид $\tilde{\rho}_{hr} = 2\sqrt{-1}(\tilde{A}^a_{ahr} + \tilde{B}^{af}{}_{[h}\tilde{B}_{|f|r]a})$, $\tilde{\rho}^{hr} = 2\sqrt{-1}(\tilde{A}^{ahr}_a - \tilde{B}_{af}{}^{[h}\tilde{B}^{|f|r]a})$, $\tilde{\rho}_h{}^r = 2\sqrt{-1}(\tilde{A}^{ar}_{ah} + 2\tilde{B}^{afr}\tilde{B}_{fha})$. Тогда используя следствие, (13),(14), (15), получим

$$\tilde{\rho}_{hr} \circ \psi = e^{-2f}\rho_{hr} + 4\sqrt{-1}e^{-2f}\beta^a B_{ahr}$$

$$\tilde{\rho}_{\hat{h}\hat{r}} \circ \psi = e^{-2f}\rho^{hr} - 4\sqrt{-1}e^{-2f}\beta_a B^{ahr}$$

$$\tilde{\rho}_h{}^r \circ \psi = e^{-2f}\rho_h{}^r + 4\sqrt{-1}e^{-2f}(\beta^r{}_h - \beta^a B_{ah}{}^r)$$

Используя (1) для обобщенной формы Риччи, получим

Предложение 3 *Обобщенная форма Риччи не является конформно инвариантной.* □

Рассмотрим в качестве функции

$$f = ln\sqrt{B} \tag{16}$$

, где $B = B^{abc}B_{abc}$. Такая функция определена в некоторой окрестности любой точки почти эрмитова многообразия M, в которой $B \neq 0$. Тогда в силу следствия леммы (2) получим $\tilde{B} = \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = e^{-2f}B^{abc}B_{abc} = e^{-2ln\sqrt{B}}B = 1$. Итак, в некоторой окрестности любой точки почти эрмитова многообразия, где $B \neq 0$, его структуру можно преобразовать к почти эрмитовой структуре, для которой

$$\tilde{B} = 1 \tag{17}$$

Назовем такое конформное преобразование *каноническим*. Рассмотрим один из конформно инвариантных классов почти эрмитовых многообразий. В классификации Грея-Хервеллы [3] этот класс обозначен $W_1 \oplus W_4$, а в работе [2] многообразиями Вайсмана-Грея. На пространстве присоединенной $G-$ структуры эти многообразия опреоделяются следующими условиями [1]: $B^{[abc]} = B^{abc}$, $B_{[abc]} = B_{abc}$, $B^{ab}{}_{c} = \alpha^{[a}\delta^{b]}_{c}$, $B_{ab}{}^{c} = \alpha_{[a}\delta^{c}_{b]}$.

Пусть многообразие M принадлежит классу многообразий Вайсмана-Грея. Преобразуем его структуру с помощью функции (16). Тогда для конформно преобразованного многообразия имеет место (17).

Изучим подробнее свойства многообразий Вайсмана-Грея, для которых верно тождество $B = 1$. Продифференцировав это тождество, получим

$$B^{abcd}B_{abc} + B^{abc}B_{abc}{}^{d} = 0 \tag{18}$$

Так как для многообразий Вайсмана-Грея имеет место тождество [1],

$$B_{bcd}{}^{a} = -\frac{1}{2}\alpha^{a}B_{bcd} + \frac{1}{2}\alpha^{h}B_{h[bc}\delta^{a}_{d]} + \alpha_{[bc}\delta^{a}_{d]} \tag{19}$$

подставив (19) в (18), получим

$$\alpha^{d} = 2B^{abcd}B_{abc} + \alpha^{h}B_{hab}B^{abd} + 2\alpha_{[ab]}B^{abd} \tag{20}$$

Известно, что [1]

$$B^{a[bcd]} = B^{a[b}{}_{h}B^{dc]h} \tag{21}$$

Свернем (21) с B_{abc} и подставим в (20).

$$\alpha^{d} = -4B^{ad[bc]}B_{abc} - 5\alpha^{a}B^{dbc}B_{abc} + \alpha^{d}B + \alpha^{h}B_{hab}B^{abd} + 2\alpha_{[ab]}B^{abd}$$

Так как $B = 1$, получим

$$2B^{ad[bc]}B_{abc} + 2\alpha^{a}B^{dbc}B_{abc} - \alpha_{[ab]}B^{abd} = 0 \tag{22}$$

Свернем (21) с B_{bcd}.

$$B^{ad[bc]}B_{abc} = \frac{1}{2}(\alpha^d - \alpha^b B^{dca}B_{bca})$$

Подставим в (22)

$$\alpha^d = (\alpha_{[ab]} - \alpha^c B_{cab})B^{abd} \tag{23}$$

Итак, мы получили

Предложение 4 *Любое многообразие Вайсмана-Грея в некоторой окрестности каждой своей точки, для которой* $B = B^{abc}B_{abc} \neq 0$, *каноническим конформным преобразованием переводится в многообразие Вайсмана-Грея, для которого верно (23).* □

Пусть многообразие Вайсмана-Грея M переводится каноническим конформным преобразованием с функцией $f = ln\sqrt{B}$ в многообразие $\tilde{M}$. Тогда имеем

$$\tilde{\alpha}^d = (\tilde{\alpha}_{[ab]} - \tilde{\alpha}^c \tilde{B}_{cab})\tilde{B}^{abd}$$

Выясним, какое тождество соответствует ему на пространстве присоединенной G-структуры исходного многообразия M. Подставим в это тождество выражения для тензоров с волнами
$e^{-f}(\alpha^d + 2\beta^d) = e^{-3f}(\alpha_{[ab]} + 2\beta_{[ab]} - (\alpha^c + 2\beta^c)B_{cab})B^{abd}$, то есть
$\alpha^d + 2\beta^d = \frac{1}{B}(\alpha_{[ab]} - \alpha^c B_{cab})B^{abd}$. Так как $f = ln\sqrt{B}$, $df = \beta$, то $\beta^d = \frac{1}{B}(B^{abcd}B_{abc} + B^{abc}B_{abc}{}^d)$. Подставим в последнее соотношение
$\alpha^d + \frac{1}{B}(B^{abcd}B_{abc} + B^{abc}B_{abc}{}^d) = \frac{1}{B}(\alpha_{[ab]} - \alpha^c B_{cab})B^{abd}$.
Напомним, что для произвольного многообразия Вайсмана-Грея имеем

$$B_{bcd}{}^a = -\frac{1}{2}\alpha^a B_{bcd} + \frac{1}{2}\alpha^h B_{h[bc}\delta^a_{d]} + \alpha_{[bc}\delta^a_{d]}$$

Подставим в последнее соотношение. После раскрытия альтернации и приведения подобных слагаемых получим

$$B\alpha^d + 2B^{abcd}B_{abc} + 3\alpha^c B_{cab}B^{abd} = 0 \tag{24}$$

Итак, для любого многообразия Вайсмана-Грея, в некоторой окрестности каждой точки, в которой $B \neq 0$ получим тождество (24). С использованием этого тождества легко получить выражения для β^a в случае данного конформного преобразования:

$\beta^a = \frac{1}{2B}(B^{bcda}B_{bcd} + B^{bcd}B_{bcd}{}^a) = \frac{1}{2B}(\frac{1}{2}(-B\alpha^a - 3\alpha^h B_{hbc}B^{bca}) - \frac{1}{2}\alpha^a B + \frac{1}{2}\alpha^h B_{hbc}B^{bca} + \alpha_{[bc]}B^{bca}) = \frac{1}{2B}(-B\alpha^a - \alpha^h B_{hbc}B^{bca} + \alpha_{[bc]}B^{bca})$. Итак,

$$\beta^a = \frac{1}{2B}(-B\alpha^a - \alpha^h B_{hbc}B^{bca} + \alpha_{[bc]}B^{bca}) \tag{25}$$

Подставляя в соответствующие соотношения получим $e^f(\tilde{\alpha}^a \circ \psi) = \alpha^a + 2 \cdot \frac{1}{2B}(-B\alpha^a - \alpha^h B_{hbc}B^{bca} + \alpha_{[bc]}B^{bca})$. Остальные из ниже перечисленных аналогично

$e^f(\tilde{\alpha}^a \circ \psi) = \frac{1}{B}(\alpha_{[bc]} - \alpha^h B_{hbc})B^{bca} \equiv \frac{1}{B}\alpha_{[b,c]}B^{bca}$
$e^f(\tilde{\alpha}_a \circ \psi) = \frac{1}{B}(\alpha^{[bc]} - \alpha_h B^{hbc})B_{bca} \equiv \frac{1}{B}\alpha^{[b,c]}B_{bca}$
$e^f(\tilde{B}_{ab}{}^c \circ \psi) = \frac{1}{2B}(\alpha^{[fg]}B_{fga} - \alpha_h B^{hfg}B_{fga})\delta^c_b - \frac{1}{2B}(\alpha^{[fg]}B_{fgb} - \alpha_h B^{hfg}B_{fgb})\delta^c_a$
$e^f(\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi) = \frac{1}{2B}(\alpha_{[fg]}B^{fga} - \alpha^h B_{hfg}B^{fga})\delta^b_c - \frac{1}{2B}(\alpha_{[fg]}B^{fgb} - \alpha^h B_{hfg}B^{fgb})\delta^a_c$

Прежде чем приступать к вычислению β_{ab} и т.п., нам потребуются несколько вспомогательных формул.
Найдем дифференциальное продолжение уравнений

$$d\alpha_a + \alpha_b\theta^b_a = \alpha_{ab}\omega^b + \alpha^b_a\omega_b; \quad d\alpha^a - \alpha^b\theta^a_b = \alpha^{ab}\omega_b + \alpha^a_b\omega^b$$

Дифференцируем первое из них внешним образом

$$d\alpha_b \wedge \theta^b_a + \alpha_b d\theta^b_a = d\alpha_{ab} \wedge \omega^b + \alpha_{ab}d\omega^b + d\alpha^b_a \wedge \omega_b + \alpha^b_a d\omega_b \tag{26}$$

Подставим структурные уравнения многообразия Вайсмана-Грея, причем для краткости во второй группе введем новое обозначение

$d\omega^a = \theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b;$
$d\omega_a = -\theta^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b;$
$d\theta^a_b = \theta^a_c \wedge \theta^c_b + (2B^{adh}B_{hbc} + A^{ad}_{bc})\omega^c \wedge \omega_d + \hat{A}^a_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + \hat{A}^{acd}_b\omega_c \wedge \omega_d;$

Подставим структурные уравнения в (26).
$(\alpha_{ac}\omega^c + \alpha^c_b\omega_c - \alpha_c\theta^c_b) \wedge \theta^b_a + \alpha_b(\theta^b_c \wedge \theta^c_a + (2B^{bdh}B_{hac} + A^{bd}_{ac})\omega^c \wedge \omega_d + \hat{A}^b_{acd}\omega^c \wedge \omega^d + \hat{A}^{bcd}_a\omega_c \wedge \omega_d) = d\alpha_{ab} \wedge \omega^b + \alpha(\theta^b_c \wedge \omega^c + B^{bcd}\omega_c \wedge \omega_d + B^{bc}{}_d\omega^d \wedge \omega_c) + \alpha^b_a(-\theta^c_b \wedge \omega_c + B_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + B_{bc}{}^d\omega_d \wedge \omega^c)$.
Разложим 1-формы по базису.

$d\alpha_{ab} + \alpha_{cb}\theta^c_a + \alpha_{ac}\theta^c_b = \alpha_{ab}{}^c\omega_c + \alpha_{abc}\omega^c + \alpha_{ab}{}^c{}_d\theta^d_c;$
$d\alpha^b_a + \alpha^b_c\theta^c_b - \alpha^c_a\theta^b_c = \alpha^b_{ac}\omega^c + \alpha^{bc}_a + \alpha^{bc}_{ad}$

Подставим эти разложения в последнее соотношение и в силу линейной независимости базисных форм получим

$$-\alpha_{ab}{}^{c}+\alpha^{c}_{ab}+\alpha_{ad}B^{dc}{}_{b}-\alpha^{d}_{a}B_{db}{}^{c}-\alpha_{d}(2B^{dch}B_{hab}+A^{dc}_{ab})=0;$$
$$-\alpha_{a[bc]}+\alpha^{d}_{a}B_{dbc}-\alpha_{d}\hat{A}^{d}_{abc}=0;$$
$$-\alpha^{bc}_{a}+\alpha_{ad}B^{dbc}-\alpha_{d}\hat{A}^{dbc}_{a}=0$$

Как обычно мы имеем комплексно сопряженные формулы. Тогда

$$\alpha_{[ab]}{}^{c}=\alpha^{cd}B_{dab}+\alpha^{d}\hat{A}^{c}_{dab}+\alpha_{[a|d|}B^{dc}{}_{b]}-\alpha^{d}_{[a}B_{|d|b]}{}^{c}-2\alpha_{d}B^{dch}B_{hab}-\alpha_{d}A^{dc}_{[ab]}\quad(27)$$

Чтобы получить соотношения для остальных функций B_{abcd}, и так далее, нам потребуются компоненты β^{ab}, β_{ab}, $\beta^{a}{}_{b}$, $\beta_{a}{}^{b}$.
Напомним, что

$$d\beta_{a}+\beta_{b}\theta^{b}_{a}=\beta_{ab}\omega^{b}+\beta_{a}{}^{b}\omega_{b}\quad d\beta^{a}-\beta^{b}\theta^{a}_{b}=\beta^{ab}\omega_{b}+\beta^{a}{}_{b}\omega^{b}$$

Продифференцируем (25)
$\beta^{ad}=-\frac{1}{2B^{2}}(B^{bchd}B_{bch}+B^{bch}B_{bch}{}^{d})(-B\alpha^{a}-\alpha^{h}B_{hbc}B^{bca}+\alpha_{[bc]}B^{bca})+\frac{1}{2B}(-B^{d}\alpha^{a}-B\alpha^{ad}-\alpha^{hd}B_{hbc}B^{bca}-\alpha^{h}B_{hbc}{}^{d}B^{bca}-\alpha^{h}B_{hbc}B^{bcad}+\alpha_{[bc]}{}^{d}B^{bca}+\alpha_{[bc]}B^{bcad})=$
$\frac{-1}{2B^{2}}(-B\alpha^{d}-\alpha^{h}B_{hbc}B^{bcd}+\alpha_{[bc]}B^{bcd})(-B\alpha^{a}-\alpha^{f}B_{feg}B^{ega}+\alpha_{[eg]}B^{ega})+\frac{1}{2B}(-B\alpha^{d}\alpha^{a}-\alpha^{h}B_{hbc}B^{bcd}\alpha^{a}+\alpha_{[bc]}B^{bcd}\alpha^{a}-B\alpha^{ad}-\alpha^{hd}B_{hbc}B^{bca}-\alpha^{h}B^{bca}(-\frac{1}{2}B_{hbc}\alpha^{d}+\frac{1}{2}\alpha^{f}B_{f[hb}\delta^{d}_{c]}+\alpha_{[hb}\delta^{d}_{c]})-\alpha^{h}B_{hbc}B^{bcad}+\alpha_{[bc]}B^{bcad}+B^{bca}(-\alpha^{de}B_{ebc}-\alpha^{e}\hat{A}^{d}_{ebc}-\alpha_{be}B^{ed}{}_{c}+\alpha^{e}_{b}B_{ec}{}^{d}+2\alpha_{e}B^{edf}B_{fbc}+\alpha_{e}A^{ed}_{bc})).$
Если проальтернировать последнее тождество по индексам (a,d) и подставить $\beta^{[ad]}=B^{adh}\beta_{h}$, (25), то получим тождество, которое выполняется в окрестности любой точки многообразия Вайсмана-Грея размерности выше 4, для которой $B\neq 0$.
$B^{adh}(-B\alpha_{h}-\alpha_{f}B^{fbc}B_{bch}+\alpha^{[bc]}B_{bch})=-\frac{3}{2}\alpha^{h}B_{hbc}\alpha^{[a}B^{d]bc}+\alpha_{[bc]}B^{bc[d}\alpha^{a]}-B\alpha^{[ad]}-B_{hbc}\alpha^{h[d}B^{a]bc}-\alpha_{[hb]}\alpha^{h}B^{bda}-\alpha^{h}B_{hbc}B^{bc[ad]}+\alpha_{[bc]}B^{bc[ad]}-B_{ebc}B^{bc[a}\alpha^{d]e}-\alpha^{e}B^{bc[a}\hat{A}^{d]}_{ebc}+\alpha_{be}B^{bc[a}B^{d]e}{}_{c}+\alpha^{e}_{b}B_{ec}{}^{[d}B^{a]bc}+2\alpha_{e}B_{fbc}B^{fe[d}B^{a]bc}+\alpha_{e}A^{e[d}_{bc}B^{a]bc}.$

0.1 6-мерные многообразия Вайсмана-Грея

Пусть (M,J,g) – 6-мерное собственное многообразие Вайсмана-Грея, то есть многообразие отличное от многообразия класса W_4. Фиксируем

произвольную точку $p \in M$, в которой $B = B^{abc}B_{abc} \neq 0$. В силу непрерывности функции B существует некоторая окрестность U точки p, в которой $B \neq 0$.

Мы знаем, что комплексификация касательного пространства $T_p^{\mathbf{C}}(M) = \mathbf{C} \otimes \mathbf{T_p(M)}$ распадается в прямую сумму собственных подпространств оператора почти комплексной структуры J.

$$T_p^{\mathbf{C}}(M) = (D_J^{\sqrt{-1}})_p \oplus (D_J^{-\sqrt{-1}})_p$$

При этом сужение проектора $\sigma : T_p^{\mathbf{C}}(M) \to (D_J^{\sqrt{-1}})_p$, заданного формулой $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)$, на касательное пространство $T_p(M)$ является изоморфизмом $\mathbf{C}-$ линейных пространств. Следовательно, векторы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ $A-$ репера $(p, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{\hat{1}}, \varepsilon_{\hat{2}}, \varepsilon_{\hat{3}})$ являются базисом комплексного линейного пространства $(D_J^{\sqrt{-1}})_p$, а формы $(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ – дуальным базисом этого пространства. Тогда 3-форма $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ является базисом пространства 3-форм на $(D_J^{\sqrt{-1}})_p$ и любой кососимметрический $\mathbf{C}-$ линейный по всем аргументам тензор пропорционален этой 3-форме. В частности, для структурного тензора имеем $(\sigma C)_p = \lambda\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$. Следовательно,

$$B_{abc} = \lambda\varepsilon_{abc}; \quad B^{abc} = \bar{\lambda}\varepsilon^{abc} \tag{28}$$

где

$$\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{abc} = \begin{cases} 1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} - \text{четна}; \\ -1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} - \text{нечетна}; \\ 0, \text{ в остальных случаях}; \end{cases}$$

символ Кронекера 3-го порядка.

Теорема 1 *Любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу* C_0.

Доказательство. Напомним, что критерий принадлежности многообразия Вайсмана-Грея классу C_0 имеет вид

$$B^{abcd} = -\alpha^{[a}B^{b]cd} - \alpha^{(c}B^{d)ab}$$

и формулы комплексно сопряженные. В случае 6-мерного многообразия этот критерий примет вид

$$B^{123d} = -\alpha^d B^{123}$$

Проверим, что он выполняется для любого 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея. Если в точке p многообразия M $B = 0$, то $0 = B = 6B^{123}B_{123}$ и $B^{123} = 0$. Тогда $B^{123d} = 0$. Следовательно, критерий класса C_0 выполняется.

Пусть для многообразия M существует точка, в которых $B \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки p выполняется соотношение (24). Запишем его с учетом (28): $6\lambda\bar{\lambda}\alpha^d + 12B^{123d}\lambda + 6\alpha^d\lambda\bar{\lambda} = 0$, то есть $B^{123d} = -\bar{\lambda}\alpha^d = -\alpha^d B^{123}$. Таким образом, критерий класса C_0 выполняется. □

Применим к многообразию (U, J, g) каноническое конформное преобразование (16). Для многообразия $(U, J, \tilde{g} = e^{2f}g)$ получим следующее. В силу (17) имеем $1 = \tilde{B} = \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = 6\tilde{B}^{123}B_{123}$, то есть

$$\tilde{B}^{123}\tilde{B}_{123} = \frac{1}{6} \tag{29}$$

Распишем (23) для 6-мерных многообразий с учетом (28) и (29). $\tilde{\alpha}^1 = (\tilde{\alpha}_{[ab]} - \tilde{\alpha}^h\tilde{B}_{hab})\tilde{B}^{ab1} = 2\tilde{\alpha}_{[23]}\tilde{B}^{123} - 2\tilde{\alpha}^1\frac{1}{6}$, следовательно, $\tilde{\alpha}^1 = \frac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[23]}\tilde{B}^{123}$. Аналогично получаем остальные два соотношения:

$$\tilde{\alpha}^1 = \tfrac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[23]}\tilde{B}^{123};\quad \tilde{\alpha}^2 = \tfrac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[31]}\tilde{B}^{123};\quad \tilde{\alpha}^3 = \tfrac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[12]}\tilde{B}^{123}; \tag{30}$$

Из (30_1) следует $\tilde{\alpha}^{11} = \frac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[23]}{}^1\tilde{B}^{123} + \frac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[23]}\tilde{B}^{1231}$. Подставим (27) и еще два соотношения, которые верны для любого многообразия Вайсмана-Грея

$$A^{ad}_{[bc]} = \alpha^{[a}_{[c}\delta^{d]}_{b]} + B^{ah}{}_{[b}B_{c]h}{}^{d};$$
$$A^a_{bcd} = -\tfrac{1}{6}\alpha^h B_{hb[c}\delta^a_{d]} + \tfrac{1}{6}\alpha^h B_{hcd}\delta^a_b - \tfrac{1}{6}\alpha_{b[c}\alpha^a_{d]} - \tfrac{1}{6}\alpha_{[cd]}\delta^a_b - \tfrac{1}{3}\alpha_{[c|b|}\delta^a_{d]} - \tfrac{1}{4}\alpha_b\alpha_{[c}\delta^a_{d]}$$

и учтем, что любое шестимерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_0. В результате получим $\tilde{\alpha}^{11} = -(\tilde{\alpha}^1)^2$. Аналогично получаем, что

$$\tilde{\alpha}^{11} = -(\tilde{\alpha}^1)^2;\quad \tilde{\alpha}^{22} = -(\tilde{\alpha}^2)^2;\quad \tilde{\alpha}^{33} = -(\tilde{\alpha}^3)^2$$

Дифференцируя $(30_{1,2})$ и проводя аналогичные вычисления, получим

$$\tilde{\alpha}^{12} - \tfrac{1}{4}\tilde{\alpha}^{21} = -\tfrac{3}{2}\tilde{\alpha}^{1}\tilde{\alpha}^{2} + \tfrac{1}{2}\tilde{\alpha}_{3}\tilde{B}^{123};$$
$$\tilde{\alpha}^{21} - \tfrac{1}{4}\tilde{\alpha}^{12} = -\tfrac{3}{2}\tilde{\alpha}^{1}\tilde{\alpha}^{2} - \tfrac{1}{2}\tilde{\alpha}_{3}\tilde{B}^{123};$$

Вычитая из первого второе, получим $\tilde{\alpha}^{[12]} = \frac{2}{5}\tilde{\alpha}_{3}\tilde{B}^{123}$. Комплексно сопряжем: $\tilde{\alpha}_{[12]} = \frac{2}{5}\tilde{\alpha}^{3}\tilde{B}_{123}$ и подставим в (30). Получим $\frac{1}{10}\tilde{\alpha}^{3} = 0$. Аналогично получаем, что $\tilde{\alpha}^{1} = \tilde{\alpha}^{2} = 0$. Таким образом, преобразованное многообразие оказывается приближенно келеровым, а значит, исходное многообразие является конформно приближенно келеровым. Следовательно, в точках многообразия M, для которых $B \neq 0$, критерий класса C_1 выполняется. В тех точках, для которых $B = 0$, критерий C_1 выполняется в силу того, что $B^{123} = 0$ и $\alpha^{[ab]} = 0$. Итак, доказана

Теорема 2 *Любое шестимерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_1, а значит, является локально конформно приближенно келеровым.*

Список литературы

[1] Кириченко В.Ф., Щипкова Н.Н. О геометрии многообразий Грея-Вайсмана. УМН, т.49, 2, 1994, с.155-156.

[2] Кириченко В.Ф., Ежова Н.А. Конформные инварианты многообразий Вайсмана-Грея. УМН, т.51, 2, 1996, с.163-164.

[3] Gray A., Hervella L.M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their kinear invariants. Ann. Math. pure ed appl., v.123.1980, p.35-58.

[4] Кириченко В.Ф., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, Типография МПГУ, М., 2003.

[5] Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений., Фундаментальная и прикладная математика, 2000, том 6, 4, с.1095-1120.