УДК 514.76

**Л. А. Игнаточкина**

# О конформных преобразованиях многообразий Вайсмана-Грея

Введено понятие отображения присоединенных $G-$ структур почти эрмитова многообразия; получены формулы, которые связывают компоненты основных тензоров исходного почти эрмитова многообразия и конформно преобразованного. Эти формулы применяются к изучению класса многообразий Вайсмана-Грея. Доказано, что класс 6-мерных многообразий Вайсмана-Грея совпадает с классом 6-мерных локально конформно приближенно келеровых многообразий.

Библиография: 9 названий.

**Ключевые слова:** почти эрмитово многообразие, конформное преобразование, присоединенная G-структура, многообразие Вайсмана-Грея.

## § 1. Введение

Класс многообразий Вайсмана-Грея является, с одной стороны, достаточно общим подклассом почти эрмитовых многообразий (он включает в себя локально конформно келеровы многообразия и приближенно келеровы многообразия), а, с другой стороны, обладает богатым набором геометрических свойств. Этот класс многообразий был впервые выделен в работе А.Грея и Л.Хервеллы [1] и обозначен как класс $W_1 \oplus W_4$. На пространстве присоединенной $G-$ структуры этот класс начала изучать Н. Н. Щипкова [2] под названием многообразий Вайсмана-Грея.

Для многообразия Вайсмана-Грея (как и для любого риманова многообразия) определен тензор Вейля конформной кривизны. На пространстве присоединенной $G-$ структуры этот тензор определяет четыре конформно инвариантных класса $C_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ [3]. Изучению их свойств посвящены работы [4], [5], [6]. В [5] доказано, что в размерности выше 4 класс $C_1$ совпадает с классом локально приближенно келеровых многообразий. Следовательно, свойства исходного многообразия Вайсмана-Грея класса $C_1$ тесно связаны со свойствами соответствующего приближенно келерова многообразия, а значит, возникает необходимость изучения сразу двух многообразий, каждое из которых обладает своей присоединенной $G-$ структурой. К решению возникшей задачи можно подходить разными путями. Во-первых, можно проводить исследование обоих многообразий с помощью инвариантного исчисления Кошуля (см., например, [7], [6]). Во-вторых, записать компоненты основных тензоров, характеризующих исходное многообразие, на пространстве присоединенной $G-$ структуры конформно преобразованного многообразия (см., например [5]). В-третьих, задать отображение для присоединенных $G-$ структур исходного и преобразованного многообразий, которое свяжет между собой компоненты соответствующих тензоров этих многообразий. При этом каждый набор компонент для пары соответствующих тензоров будет задан на своей присоединенной $G-$ структуре. Последнему способу и посвящена настоящая работа. В ней рассмотрены конформные преобразования почти эрмитовых многообразий и заданы соответствующее отображения присоединенных $G-$ структур. Полученные соотношения применены для изучения многообразий Вайсмана-Грея. Доказано, что любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея является локально конформно приближенно келеровым.

## § 2. Отображения присоединенных G-структур почти эрмитовых многообразий

Пусть $M$ – гладкое многообразие размерности $2n$, $n > 1$, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на многообразии $M$, $\mathcal{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на $M$; индексы $i, j, k, l, \ldots$ принимают значения от 1 до $2n$; индексы $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, t$ принимают значения от 1 до $n$; $\hat{a} = a + n$, $t_{\hat{a}} = t^a$, $t^{\hat{a}} = t_a$; по индексам, заключенным в круглые скобки $()$, предполагается симметризация; по индексам, заключенным в квадратные скобки $[\,]$, предполагается альтернирование; индексы, заключенные в прямые скобки $||$, в альтернировании (симметризации) не участвуют. Все многообразия и объекты на них предполагаются гладкими класса $C^\infty$.

Хорошо известно, что пара тензорных полей $(J, g)$ на многообразии $M$, где $J$ – тензорное поле типа (1,1), $J^2 = -id$ (*почти комплексная структура*), $g$ – риманова метрика на $M$, согласованная с почти комплексной структурой $J$, то есть $g(JX, JY) = g(X, Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$, называется *почти эрмитовой структурой* на многообразии $M$. Гладкое многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым многообразием.*

*Конформным преобразованием* почти эрмитовой структуры гладкого многообразия $M$ называется переход от почти эрмитовой структуры $(J, g)$ к почти эрмитовой структуре $(J, \tilde{g} = e^{2f} g)$, где $f \in C^\infty(M)$ – произвольная функция.

Напомним [8], что задание почти эрмитовой структуры на многообразии равносильно заданию присоединенной $G-$ структуры $(P, M, \pi, U(n))$ этого многообразия, то есть подрасслоения главного расслоения реперов многообразия $M$ со структурной группой $U(n)$. Элементы этого подрасслоения называются $A-$ реперами. $A-$ реперы присоединенной $G-$ структуры характеризуются тем, что в них компоненты почти комплексной структуры $J$ и римановой метрики $g$ имеют вид

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

где $I_n$ – единичная матрица порядка $n$. Напомним, что компонентами тензорного поля $J$ на пространстве присоединенной $G-$ структуры $(P, M, \pi, U(n))$ называется система функций $\{J^i_j\}$ на многообразии $P$, определяемая формулой

$J^i_j(p) = (J_m)(\varepsilon_j, \omega^i)$, $p \in P$. Здесь $p = (m, \varepsilon_i) \in P$, $(m, \omega^i)$ – дуальный корепер. Аналогично определяются компоненты римановой метрики.

Пусть $(P, M, \pi, U(n))$ – присоединенная $G-$ структура почти эрмитова многообразия $(M, J, g)$, а $(\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, U(n))$ – присоединенная $G-$ структура почти эрмитова многообразия $(M, J, \tilde{g})$. Рассмотрим отображение $\psi : P \to \tilde{P}$, заданное формулой

$$\psi : p = (m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}) \to p' = (m, \tilde{\varepsilon}_1 = e^{-f}(m)\varepsilon_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n = e^{-f}(m)\varepsilon_n,$$
$$\tilde{\varepsilon}_{\hat{1}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{n}})$$

где $m = \pi(p) = \pi'(p') \in M$. Очевидно, что при этом для кореперов имеет место соотношение

$$\psi : (m, \omega^1, \dots, \omega^n, \omega^{\hat{1}}, \dots, \omega^{\hat{n}}) \to (m, \tilde{\omega}^1 = e^f(m)\omega^1, \dots, \tilde{\omega}^n = e^f(m)\omega^n,$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{1}} = e^f(m)\omega^{\hat{1}}, \dots, \tilde{\omega}^{\hat{n}} = e^f(m)\omega^{\hat{n}})$$

Докажем, что отображение $\psi$ определено корректно.

Лемма 2.1. *$\tilde{p} \in \tilde{P}$ для любой $p \in P$.*

Доказательство. Нам достаточно доказать, что компоненты почти комплексной структуры $J$ и римановой метрики $\tilde{g}$ в репере $p' = \psi(p)$, $p \in P$ имеют вид (2.1). Обозначим $\{\tilde{J}^i_j\}$ компоненты почти комплексной структуры $J$ в реперах $p' = \psi(p)$, $\{\tilde{g}_{ij}\}$ – компоненты римановой метрики $\tilde{g}$.

По определению компонент тензорного поля имеем

$$\tilde{J}^i_j(p') = J_m(e^{-f}(m)\varepsilon_j, e^f(m)\omega^i) = J^i_j(p)$$

Таким образом, матрица компонент тензорного поля $J$ в точках $p' = \psi(p)$ имеет такой же вид как и матрица компонент этого же тензорного поля в точках $p$, то есть имеет вид (2.1).

Для римановой метрики $\tilde{g}$ доказательство аналогично.

Тогда, очевидно, что пара $(\psi, id)$, где $id : U(n) \to U(n)$ – тождественное отображение, является изоморфизмом главных расслоений $(P, M, \pi, U(n))$ и $(\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, U(n))$.

Обозначим $\omega = \{\omega^i\}$ и $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}^i\}$ формы смещения присоединенных $G-$ структур почти эрмитовых многообразий $(M, J, g)$ и $(M, J, \tilde{g})$ соответственно.

Лемма 2.2. *$(\psi^*\tilde{\omega}^i)(p) = e^f(m)\omega^i(p)$, где $\psi^*$ – отображение антиувлечения.*

Доказательство. Известно [8], что любой базис $\{\xi_1, \dots, \xi_{2n}\}$ арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^{2n}$ порождает базис $\{X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_{2n}}\}$ линейного пространства всех базисных векторных полей пространства расслоения реперов. Рассмотрим, в частности, в качестве такого базиса стандартный базис арифметического пространства $\xi_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\xi_{2n} = (0, \dots, 0, 1)$. Очевидно, что $\tilde{\pi} \circ \psi = \pi$, а значит, для дифференциалов данных отображений имеет место равенство $\tilde{\pi}_* \circ \psi_* = \pi_*$. Тогда по определению формы смещения получим

$$(\psi^*\tilde{\omega})_p(X_{\xi_i}) = \tilde{\omega}_{\psi(p)}(\psi_* X_{\xi_i}) = (p')^{-1} \circ \tilde{\pi}_*(\psi_* X_{\xi_i}) = (p')^{-1} \circ \pi_* X_{\xi_i} = (p')^{-1}(\varepsilon_i) =$$
$$= e^f(m)\xi_i = e^f(m)\omega_p(X_{\xi_i})$$

Так как базисные векторные поля являются базисом горизонтального распределения и форма смещения является горизонтальной формой, полученное соотношение верно для любых векторных полей на многообразии $P$.

Пусть $\nabla$ и $\tilde{\nabla}$ – римановы связности на почти эрмитовых многообразиях $(M, J, g)$ и $(M, J, \tilde{g})$ соответственно. Обозначим $\{\theta^a_b\}$ и $\{\tilde{\theta}^a_b\}$ линейно независимые на пространстве присоединенной $G-$ структуры тензорные компоненты форм этих связностей. Пусть

$$\psi^* \tilde{\theta}^a_b = A^{ac}_{bd} \theta^d_c + B^a_{bc} \omega^c + B^{ac}_b \omega_c \tag{2.2}$$

где $\{A^{ac}_{bd}\}$, $\{B^a_{bc}\}$, $\{B^{ac}_b\}$ – некоторые функции на пространстве присоединенной $G-$ структуры, которые мы должны найти. Для этого потребуется так называемая *первая группа структурных уравнений почти эрмитова многообразия.* Напомним [8], что первая группа структурных уравнений римановой связности $d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j$ на пространстве присоединенной $G-$ структуры почти эрмитова многообразия $(M, J, g)$ принимает вид

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= -\theta^b_a \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} B^{ab}{}_c &= -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},c}; \qquad B_{ab}{}^c = \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \\ B^{abc} &= \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad B_{abc} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{[b,c]}; \end{aligned}$$

Здесь $\{J^i_{j,k}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала почти комплексной структуры $J$ в римановой связности. Системы функций $\{B^{ab}{}_c\}$ и $\{B_{ab}{}^c\}$ определяют комплексные тензоры, которые называются *виртуальными тензорами почти эрмитовой структуры* $(J, g)$, а функции $\{B^{abc}\}$ и $\{B_{abc}\}$ – комплексные тензоры, которые называются *структурными тензорами почти эрмитовой структуры* $(J, g)$.

Запишем первое уравнение первой группы структурных уравнений почти эрмитовой структуры $(J, \tilde{g})$ и применим к нему отображение $\psi^*$.

$$d\psi^* \tilde{\omega}^a = \psi^* \tilde{\theta}^a_b \wedge \psi^* \tilde{\omega}^b + (\tilde{B}^{abc} \circ \psi) \psi^* \tilde{\omega}_b \wedge \psi^* \tilde{\omega}_c + (\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi) \psi^* \tilde{\omega}^c \wedge \psi^* \tilde{\omega}_b$$

Подставим (2.2) и учтем лемму 2.2. Тогда

$$d(e^f \omega^a) = (A^{ac}_{bd} \theta^d_c + B^a_{bc} \omega^c + B^{ac}_b \omega_c) \wedge (e^f \omega^b) + e^{2f} (\tilde{B}^{abc} \circ \psi) \omega_b \wedge \omega_c + e^{2f} (\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi) \omega^c \wedge \omega_b$$

Продифференцируем левую часть этого равенства и введем обозначение $df = \beta$ – 1-форма на многообразии $M$, а значит, $\pi^* \beta \equiv \beta = \beta_i \omega^i$. Тогда в силу линейной независимости базисных форм получим

$$\begin{aligned} &A^{ac}_{bd} = \delta^a_d \delta^c_b; && B^a_{bc} = -\beta_b \delta^a_c; \\ &e^f (\tilde{B}^{abc} \circ \psi) = B^{abc}; && \beta^c \delta^a_b - B^{ac}{}_b = B^{ac}_b - e^f (\tilde{B}^{ac}{}_b \circ \psi); \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления, проведенные для второго уравнения первой группы структурных уравнений почти эрмитова многообразия позволяют получить следующие соотношения

$$\begin{aligned} &B^{ac}_b = \beta^a \delta^c_b; && e^f (\tilde{B}_{abc} \circ \psi) = B_{abc}; \\ &\beta_c \delta^a_b - B_{ac}{}^b = -B^b_{ac} - e^f (\tilde{B}_{ac}{}^b \circ \psi); && \end{aligned}$$

Подставим найденные значения функций $A^{ac}_{bd}$, $B^{a}_{bc}$, $B^{ac}_{b}$ в (2.2).

$$\psi^*\tilde{\theta}^a_b = \theta^a_b + \beta^a\omega_b - \beta_b\omega^a \tag{2.4}$$

Кроме того, мы получаем формулы, связывающие компоненты структурных и виртуальных тензоров исходного и конформно преобразованного почти эрмитовых многообразий. А именно, доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{B^{abc}, B_{abc}, B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$ *– компоненты структурных и виртуальных тензоров почти эрмитова многообразия* $(M, J, g)$*;* $\{\tilde{B}^{abc}, \tilde{B}_{abc}, \tilde{B}^{ab}{}_c, \tilde{B}_{ab}{}^c\}$ *– компоненты структурных и виртуальных тензоров конформно преобразованного почти эрмитова многообразия* $(M, J, \tilde{g})$*. Тогда*

$$\begin{aligned} &e^f(\tilde{B}^{abc}\circ\psi) = B^{abc}; \quad e^f(\tilde{B}^{ab}{}_c\circ\psi) = B^{ab}{}_c + \beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c;\\ &e^f(\tilde{B}_{abc}\circ\psi) = B_{abc}; \quad e^f(\tilde{B}_{ab}{}^c\circ\psi) = B_{ab}{}^c + \beta_a\delta^c_b - \beta_b\delta^c_a; \end{aligned}$$

*где* $df = \beta = \beta_i\omega^i$*.*

Получим вспомогательные формулы для ковариантного дифференциала формы $\beta$ в римановой связности $\nabla$. Напомним [8], что основной теореме тензорного анализа компоненты почти комплексной структуры $J$ удовлетворяют уравнениям

$$dJ^i_j - J^k_j\theta^i_k + J^i_k\theta^k_j = J^i_{j,k}\omega^k$$

Из этих уравнений, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} \theta^a_{\hat{b}} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},k}\omega^k = -C^{abc}\omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c;\\ \theta^{\hat{a}}_b &= \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k = -C_{abc}\omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},\hat{c}}$, $C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,c}$.

По основной теореме тензорного анализа для 1-формы $\beta$ имеем

$$d\beta_i + \beta_j\theta^j_i = \beta_{i,j}\omega^j$$

где $\{\beta_{i,j}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала формы $\beta$ в римановой связности $\nabla$ метрики $g$. Распишем эти уравнения на пространстве присоединенной $G-$ структуры почти эрмитова многообразия $(M, J, g)$, подставим (2.5) и воспользуемся линейной независимостью базисных форм.

$$\begin{aligned} &\beta_{a,c} = \beta_{a,c} - \beta^d C_{dab}; \quad \beta_{a,}{}^c = \beta_a{}^c + \beta^d B_{da}{}^c;\\ &\beta^{a,c} = \beta^{ac} - \beta_d C^{dac}; \quad \beta^a{}_{,c} = \beta^a{}_c + \beta_d B^{da}{}_c \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$d\beta_a + \beta_b\theta^b_a = \beta_{ab}\omega^b + \beta_a{}^b\omega_b; \quad d\beta^a - \beta^b\theta^a_b = \beta^{ab}\omega_b + \beta^a{}_b\omega^b$$

Напомним [1], что *формой Ли* называется 1-форма $\alpha$, задаваемая равенством

$$\alpha = -\frac{1}{n-1}\delta F\circ J$$

где $F(X,Y) = g(JX,Y)$ – *келерова форма*, $\delta$ – оператор кодифференцирования.

Получим формулу, связывающую компоненты форм Ли почти эрмитовых многообразий $(M,J,g)$ и $(M,J,\tilde{g})$ на соответствующих $G-$ структурах. Согласно [6] имеем $\tilde{\alpha}=\alpha+2df$. Обозначим $\{\alpha_i\}$ и $\{\tilde{\alpha}_i\}$ компоненты форм Ли почти эрмитовых многообразий $(M,J,g)$ и $(M,J,\tilde{g})$ на соответствующих $G-$ структурах. Тогда $\tilde{\alpha}_i(p')=\tilde{\alpha}_m(\varepsilon_i)=e^{-f}(\alpha_i+2\beta_i)(p)$. Итак,

$$e^f(\tilde{\alpha}_i\circ\psi)=\alpha_i+2\beta_i \tag{2.6}$$

Лемма 2.3. *Для форм Ли $\tilde{\alpha}$ и $\alpha$ имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}
&e^{2f}(\tilde{\alpha}_{ac}\circ\psi)=\alpha_{ac}+2\beta_{ac}-\alpha_a\beta_c-\alpha_c\beta_a-4\beta_a\beta_c;\\
&e^{2f}(\tilde{\alpha}_a{}^c\circ\psi)=\alpha_a{}^c+2\beta_a{}^c-\beta^c\alpha_a-2\beta^c\beta_a+\alpha_b\beta^b\delta^c_a+2\beta_b\beta^b\delta^c_a;\\
&e^{2f}(\tilde{\alpha}^{ac}\circ\psi)=\alpha^{ac}+2\beta^{ac}-\beta^c\alpha^a-\beta^a\alpha^c-4\beta^a\beta^c;\\
&e^{2f}(\tilde{\alpha}^a{}_c\circ\psi)=\alpha^a{}_c+2\beta^a{}_c-\alpha^a\beta_c-2\beta^a\beta_c+\alpha^b\beta_b\delta^a_c+2\beta^b\beta_b\delta^a_c
\end{aligned}$$

*где $\{\alpha_{ac},\alpha^{ac},\alpha^a{}_c,\alpha_a{}^c\}$ – система функций на пространстве присоединенной $G-$ структуры, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям*

$$d\alpha_a+\alpha_c\theta^c_a=\alpha_{ac}\omega^c+\alpha_a{}^c\omega_c;\quad d\alpha^a-\alpha^c\theta^a_c=\alpha^{ac}\omega_c+\alpha^a{}_c\omega^c \tag{2.7}$$

Доказательство. Для конформно преобразованного многообразия $(M,J,\tilde{g})$ уравнения (2.7) будут иметь вид

$$d\tilde{\alpha}_a+\tilde{\alpha}_c\tilde{\theta}^c_a=\tilde{\alpha}_{ac}\tilde{\omega}^c+\tilde{\alpha}_a{}^c\tilde{\omega}_c;\quad d\tilde{\alpha}^a-\tilde{\alpha}^c\tilde{\theta}^a_c=\tilde{\alpha}^{ac}\tilde{\omega}_c+\tilde{\alpha}^a{}_c\tilde{\omega}^c$$

Применим к этим уравнениям отображение $\psi^*$, воспользуемся Леммой 2.2 и формулами (2.4) и (2.6). Тогда в силу линейной независимости базисных форм получим требуемые соотношения.

Для дальнейших вычислений нам понадобится вторая группа структурных уравнений почти эрмитова многообразия. Рассмотрим первую группу структурных уравнений почти эрмитова многообразия [8]

$$\begin{aligned}
&d\omega^a=\theta^a_b\wedge\omega^b+B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b;\\
&d\omega_a=-\theta^b_a\wedge\omega_b+B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b
\end{aligned}$$

Проведя стандартную процедуру дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений, получим вторую группу структурных уравнений почти эрмитова многообразия.

$$\begin{aligned}
d\theta^a_c=\theta^a_b\wedge\theta^b_c+(A^{ah}_{cd}+2B^{abh}B_{cbd})\omega^d\wedge\omega_h+(A^a_{cdh}+B^{ab}{}_{[d}B_{|b|h]c})\omega^d\wedge\omega^h+\\
+(A^{adh}_c-B_{cb}{}^{[d}B^{|b|h]a})\omega_d\wedge\omega_h
\end{aligned}$$

где $\{A^{ah}_{cd}\}$, $\{A^a_{cdh}\}$, $\{A^{cdh}_a\}$ – системы функций на пространстве присоединенной $G-$ структуры. Кроме того, мы получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
&dB^{abc}-B^{dbc}\theta^a_d-B^{adc}\theta^b_d-B^{abd}\theta^c_d=B^{abcd}\omega_d+B^{abc}{}_d\omega^d;\\
&dB_{abc}+B_{dbc}\theta^d_a+B_{adc}\theta^d_b+B_{abd}\theta^d_c=B_{abcd}\omega^d+B_{abc}{}^d\omega_d;\\
&dB^{ab}{}_c-B^{db}{}_c\theta^a_d-B^{ad}{}_c\theta^b_d+B^{ab}{}_d\theta^d_c=B^{ab}{}_{cd}\omega^d+B^{ab}{}_c{}^d\omega_d;\\
&dB_{ab}{}^c+B_{db}{}^c\theta^d_a+B_{ad}{}^c\theta^d_b-B_{ab}{}^d\theta^c_d=B_{ab}{}^{cd}\omega_d+B_{ab}{}^c{}_d\omega^d;
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Используя формулы (2.8), по аналогии с доказательством Леммы 2.3 легко получить соотношения для структурных и виртуальных тензоров исходного и конформно преобразованного многообразия:

$$e^{2f}(\tilde{B}^{abcd}\circ\psi) = B^{abcd} - \beta^d B^{abc} - \beta^a B^{dbc} - \beta^b B^{adc} - \beta^c B^{abd};$$
$$e^{2f}(\tilde{B}^{abc}{}_d\circ\psi) = B^{abc}{}_d - \beta_d B^{abc} + \beta_h B^{hbc}\delta^a_d + \beta_h B^{ahc}\delta^b_d + \beta_h B^{abh}\delta^c_d;$$

и формулы комплексно сопряженные.

$$e^{2f}(\tilde{B}^{ab}{}_c{}^d\circ\psi) = B^{ab}{}_c{}^d + \beta^{ad}\delta^b_c - \beta^{bd}\delta^a_c - \beta^d B^{ab}{}_c - 2\beta^d\beta^a\delta^b_c + 2\beta^d\beta^b\delta^a_c - \\ - B^{db}{}_c\beta^a - B^{ad}{}_c\beta^b + B^{ab}{}_h\beta^h\delta^d_c;$$
$$e^{2f}(\tilde{B}^{ab}{}_{cd}\circ\psi) = B^{ab}{}_{cd} + \beta^a{}_d\delta^b_c - \beta^b{}_d\delta^a_c - \beta_d B^{ab}{}_c - \beta_d\beta^a\delta^b_c + \beta_d\beta^b\delta^a_c + \\ + B^{hb}{}_c\beta_h\delta^a_d + \beta^h\beta_h\delta^b_c\delta^a_d + B^{ah}{}_c\beta_h\delta^b_d - \beta^h\beta_h\delta^a_c\delta^b_d - B^{ab}{}_d\beta_c$$

и формулы комплексно сопряженные. Найдем аналогичные соотношения для функций $\{A^{ah}_{cd}\}$, $\{A^a_{cdh}\}$, $\{A^{cdh}_a\}$. Запишем вторую группу структурных уравнений для конформно преобразованного многообразия $(M, J, \tilde{g})$:

$$d\tilde{\theta}^a_c = \tilde{\theta}^a_b\wedge\tilde{\theta}^b_c + (\tilde{A}^{ah}_{cd} + 2\tilde{B}^{abh}\tilde{B}_{cbd})\tilde{\omega}^d\wedge\tilde{\omega}_h + (\tilde{A}^a_{cdh} + \tilde{B}^{ab}{}_{[d}\tilde{B}_{|b|h]c})\tilde{\omega}^d\wedge\tilde{\omega}^h + \\ + (\tilde{A}^{adh}_c - \tilde{B}_{cb}{}^{[d}\tilde{B}^{|b|h]a})\tilde{\omega}_d\wedge\tilde{\omega}_h$$

и применим отображение $\psi^*$. Тогда с учетом Леммы 2.2, Теоремы 1 и формул (2.4) получим

$$e^{2f}(\tilde{A}^{ah}_{cd}\circ\psi) = A^{ah}_{cd} + \beta^a{}_d\delta^h_c + \beta_c{}^h\delta^a_d - \beta^a B_{cd}{}^h - \beta_c B^{ah}{}_d - \beta^a\beta_c\delta^h_d + \beta^b\beta_b\delta^a_d\delta^h_c$$

$$e^{2f}(\tilde{A}^a_{cdh}\circ\psi) = A^a_{cdh} - \beta_{c[d}\delta^a_{h]} + \beta^a B_{cdh} + \beta^b\delta^a_{[d}B_{|b|h]c} - \beta^a B_{[dh]c} - \beta_c\beta_{[h}\delta^a_{d]};$$
$$e^{2f}(\tilde{A}^{adh}_c\circ\psi) = A^{adh}_c + \beta^{a[d}\delta^{h]}_c - \beta_c B^{adh} + \beta^a\delta^{[d}_c\beta^{h]} + \beta_c B^{[dh]a} - \beta_b\delta^{[d}_c B^{|b|h]a};$$

## § 3. Многообразия Вайсмана-Грея

**3.1. Конформно инвариантные классы.** Одним из наиболее общих и одновременно богатых геометрическими свойствами классов почти эрмитовых многообразий является класс $W_1\oplus W_4$ в классификации Грея и Хервеллы [1] (или, в другой терминологии, многообразий Вайсмана-Грея [3]).

Определение 1. [1] Почти эрмитово многообразие $(M, J, g)$ называется многообразием класса $W_1\oplus W_4$ (или *многообразием Вайсмана-Грея*), если

$$\nabla(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}\left\{\langle X,X\rangle\delta F(Y) - \langle X,Y\rangle\delta F(X) - \langle JX,Y\rangle\delta F(JX)\right\}$$

where $\nabla$ is Riemannian connection of $g$; $F(X,Y) = \langle JX,Y\rangle$ is *the Kahler form*, $\delta$ is a coderivative and $X,Y\in\mathcal{X}(M)$.

Почти эрмитово многообразие называется многообразием класса $W_4$, если

$$\nabla_X(F)(Y,Z) = \tfrac{-1}{2(n-1)}\{\langle X,Y\rangle\delta F(Z) - \langle X,Z\rangle\delta F(Y) - \langle X,JY\rangle\delta F(JZ) + \\ + \langle X,JZ\rangle\delta F(JY)\}$$

Почти эрмитово многообразие называется *приближенно келеровым многообразием*, если

$$\nabla_X(J)X = 0 \quad X\in\mathcal{X}(M)$$

На пространстве присоединенной $G-$ структуры критерий принадлежности почти эрмитова многообразия классу многообразий Вайсмана-Грея выглядит следующим образом:

Лемма 3.1. [9] *Почти эрмитово многообразие* $(M, J, g)$ *принадлежит классу многообразий Вайсмана-Грея тогда и только тогда, когда*

$$B_{[abc]} = B_{abc}; \quad B^{[abc]} = B^{abc}; \quad B_{ab}{}^{c} = \alpha_{[a}\delta^{c}_{b]}; \quad B^{ab}{}_{c} = \alpha^{[a}\delta^{b]}_{c};$$

*Почти эрмитово многообразие принадлежит классу* $W_4$ *тогда и только тогда, когда*

$$B_{abc} = 0; \quad B^{abc} = 0; \quad B_{ab}{}^{c} = \alpha_{[a}\delta^{c}_{b]}; \quad B^{ab}{}_{c} = \alpha^{[a}\delta^{b]}_{c};$$

*Почти эрмитово многообразие является приближенно келеровым тогда и только тогда, когда*

$$B_{[abc]} = B_{abc}; \quad B^{[abc]} = B^{abc}; \quad B_{ab}{}^{c} = 0; \quad B^{ab}{}_{c} = 0;$$

Из Леммы 3.1, в частности, легко видеть, что приближенно келеровы многообразия и многообразия класса $W_4$ являются многообразиями Вайсмана-Грея. При этом, многообразие Вайсмана-Грея является приближенно келеровым многообразием тогда и только тогда, когда $\alpha^a = \alpha_a = 0$; многообразие Вайсмана-Грея является многообразием класса $W_4$ тогда и только тогда, когда $B_{abc} = B^{abc} = 0$.

В работе [2] Н.Н. Щипкова получила вторую группу структурных уравнений многообразий Вайсмана-Грея

$$\begin{aligned} d\theta^a_c = \theta^a_b \wedge \theta^b_c + (A^{ah}_{cd} + 2B^{abh}B_{cbd})\omega^d \wedge \omega_h + (A^a_{cdh} + \\ + B^{ab}{}_{[d}B_{|b|h]c})\omega^d \wedge \omega^h + (A^{adh}_c - B_{cb}{}^{[d}B^{|b|h]a})\omega_d \wedge \omega_h \end{aligned} \tag{3.1}$$

и тождества

$$\begin{aligned} A^a_{bcd} = -\tfrac{1}{6}\alpha^h B_{hb[c}\delta^a_{d]} + \tfrac{1}{6}\alpha^h B_{hcd}\delta^a_b - \tfrac{1}{6}\alpha_{b[c}\delta^a_{d]} - \tfrac{1}{6}\alpha_{[cd]}\delta^a_b - \tfrac{1}{3}\alpha_{[c|b|}\delta^a_{d]} - \\ - \tfrac{1}{4}\alpha_b\alpha_{[c}\delta^a_{d]} \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$A^{ad}_{[bc]} = \alpha^{[a}_{[c}\delta^{d]}_{b]} + B^{ah}{}_{[b}B_{c]h}{}^{d} \tag{3.3}$$

Продифференцируем внешним образом первое уравнение (2.7) и подставим (2.3), (3.1).

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{ab} \wedge \omega^b + \Delta\alpha^b_a \wedge \omega_b + \alpha_{ab}B^{bcd}\omega_c \wedge \omega_d + \alpha_{ab}B^{bc}{}_{d}\omega^d \wedge \omega_c + \alpha^b_a B_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + \\ + \alpha^b_a B_{bc}{}^{d}\omega_d \wedge \omega^c - \alpha_b(2B^{bdh}B_{hac} + A^{bd}_{ac})\omega^c \wedge \omega_d - \alpha_b(A^a_{bcd} + \\ + B^{ah}{}_{[c}B_{d]bh})\omega^c \wedge \omega^d - \alpha_b(A^{bcd}_a - B_{bh}{}^{[c}B^{d]ah})\omega_c \wedge \omega_d = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\Delta\alpha_{ab} = d\alpha_{ab} + \alpha_{cb}\theta^c_a + \alpha_{ac}\theta^c_b; \quad \Delta\alpha^b_a = d\alpha^b_a + \alpha^b_c\theta^c_a - \alpha^c_a\theta^b_c;$$

Разложим 1-формы $\Delta\alpha_{ab}$ и $\Delta\alpha^b_a$ по базису

$$\Delta\alpha_{ab} = \alpha_{ab}{}^{c}_{d}\theta^d_c + \alpha_{ab}{}^{c}\omega_c + \alpha_{abc}\omega^c; \quad \Delta\alpha^b_a = \alpha^{bd}_{ac}\theta^c_d + \alpha^b_{ac}\omega^c + \alpha^{bc}_a\omega_c; \tag{3.5}$$

подставим в (3.5) и воспользуемся линейной независимостью базисных форм. В частности, получим

$$\alpha_{ab}{}^c = \alpha^c_{ab} + \alpha_{ad}B^{dc}{}_b - \alpha^d_a B_{db}{}^c - \alpha_d(2B^{dch}B_{hab} + A^{dc}_{ab} = 0 \tag{3.6}$$

$$\alpha^{bc}_a = \alpha_{ad}B_{dbc} - \alpha_d(A^d_{abc} + B^{dh}{}_{[b}B_{c]ah}) \tag{3.7}$$

Применим комплексное сопряжение к (3.7), проальтернируем по индексам $(b, c)$ и подставим в (3.6). Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_{[ab]}{}^c = \alpha^{cd}B^{dab} + \alpha^d(A^c_{dab} + B^{ch}{}_{[a}B_{b]dh}) + \alpha_{[a|d|}B^{dc}{}_{b]} + \alpha^d_{[a}B_{b]d} - \\ -2\alpha_d B^{dch}B_{hab} - \alpha_d A^{dc}_{[ab]} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Напомним [10; стр.613], что для любого риманова многообразия определен тензор Вейля конформной кривизны $C$. В случае почти эрмитова многообразия размерности $2n$ он примет вид:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = R_{ijkl} + \tfrac{1}{2(n-1)}(r_{ik}g_{il} + r_{jl}g_{ik} - r_{il}g_{jk} - r_{jk}g_{il}) + \\ + \tfrac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik}) \end{aligned}$$

где $R$ – тензор Римана-Кристоффеля, $r$ – тензор Риччи, $\varkappa$ – скалярная кривизна. На пространстве присоединенной $G-$ структуры тензор Вейля $\{C_{ijkl}\}$ четыре основные группы компонент (остальные компоненты выражаются через данные четыре группы с помощью свойств симметрии и вещественности тензора $C$). Для многообразий Вайсмана-Грея в работе [3] было выделено четыре конформно инвариантных класса многообразий: $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$. Каждый из классов определяется обращением в нуль одной из четырех групп компонент: $C_0 : C_{abcd} = 0$, $C_1 : C_{\hat{a}bcd} = 0$, $C_2 : C_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$, $C_3 : C_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$. Нам потребуются критерии принадлежности многообразия Вайсмана-Грея классам $C_0$ и $C_1$.

Лемма 3.2. [4] *Многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу*

$$\begin{array}{lcl} C_0 & \Leftrightarrow & B_{abcd} = -\alpha_{[a}B_{b]cd} - \alpha_{(c}B_{d)ab}; \\ C_1 & \Leftrightarrow & \alpha_{[ab]} = \alpha^h B_{hab} \end{array}$$

Из свойств симметрии тензора Вейля непосредственно следует, что $C_3 \subset C_2$, а в работе [5] доказано, что $C_1 \subset C_0$. Там же получены классификации для многообразий классов $C_1 \cap C_2$ и $C_1 \cap C_3$.

Теорема 2. [5] *В размерности выше 4 любое многообразие Вайсмана-Грея $(M, J, g)$ класса $C_1$ является локально конформно приближенно келеровым многообразием, то есть для каждой точки многообразия $M$ существует окрестность $U$ и функция $f$, такие что многообразие $(U, J, e^{2f}g)$ является приближенно келеровым.*

Будем называть функцию $f$ из Теоремы 2 *функцией конформной эквивалентности.*

Следствие 1. В размерности выше 4 любое многообразие класса $W_4$ является локально конформно келеровым многообразием.

В связи с этим возникает вопрос: не является ли любое многообразие Вайсмана-Грея (размерности выше 4) локально конформно приближенно келеровым? Мы получили ответ на этот вопрос для 6-мерных многообразий Вайсмана-Грея.

**3.2. Свойства канонического конформного преобразования.** В работе [6] доказано, что функция конформной эквивалентности $f$ для собственного локально конформно приближенно келерова многообразия (то есть не принадлежащего классу $W_4$) задается формулой

$$f = \ln \sqrt{B \circ \pi} \tag{3.9}$$

где $B = B^{abc} B_{abc}$.

Рассмотрим произвольное многообразие Вайсмана-Грея и его произвольную точку, в которой $B \neq 0$. Тогда для некоторой окрестности этой точки определено конформное преобразование его структуры, задаваемое (3.9). Назовем такое конформное преобразование *каноническим*. Для канонического преобразования имеем

$$\tilde{B} = e^{-2f} B^{abc} B_{abc} = e^{-2f} B = e^{-2f} e^{2f} = 1$$

Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 3. *Для каждой точки многообразия Вайсмана-Грея, в которой $B \circ \pi \neq 0$, существует окрестность $U$, такая что тройка $(U, J, \tilde{g})$ будет многообразием Вайсмана-Грея с*

$$\tilde{B} = 1 \tag{3.10}$$

Дифференцируя (3.10) внешним образом и подставляя (2.8), получим

$$\tilde{B}^{abcd} \tilde{B}_{abc} + \tilde{B}^{abc} \tilde{B}_{abc}{}^{d} = 0 \tag{3.11}$$

Для любого многообразия Вайсмана-Грея имеют место тождества [2]

$$\tilde{B}_{bcd}{}^{a} = -\frac{1}{2} \tilde{\alpha}^{a} \tilde{B}_{bcd} + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}^{h} \tilde{B}_{h[bc} \delta^{a}_{d]} + \tilde{\alpha}_{[bc} \delta^{a}_{d]} \tag{3.12}$$

$$\tilde{B}^{a[bcd]} + \tilde{B}^{a[b}{}_{h} \tilde{B}^{cd]h} = 0 \tag{3.13}$$

Подставим (3.12) в (3.11) и получим

$$\tilde{\alpha}^{d} = 2\tilde{B}^{abcd} \tilde{B}_{abc} + \tilde{\alpha}^{h} \tilde{B}_{hab} \tilde{B}^{abd} + 2\tilde{\alpha}_{[ab]} \tilde{B}^{abd} \tag{3.14}$$

Свернем (3.13) с $B_{abc}$, подставим в (3.14) и учтем (3.10).

$$2\tilde{B}^{ad[bc]} \tilde{B}_{abc} + 2\tilde{\alpha}^{a} \tilde{B}^{dbc} \tilde{B}_{abc} - \tilde{\alpha}_{[ab]} \tilde{B}^{abc} = 0 \tag{3.15}$$

Свернем (3.13) с $B_{bcd}$ и подставим в (3.15).

$$\tilde{\alpha}^{d} = (\tilde{\alpha}_{[ab]} - \tilde{\alpha}^{c} \tilde{B}_{abc}) \tilde{B}^{abd} \tag{3.16}$$

Итак, мы получили

Теорема 4. *Любое многообразие Вайсмана-Грея в некоторой окрестности каждой своей точки, для которой $B \circ \pi \neq 0$, каноническим конформным преобразованием переводится в многообразие Вайсмана-Грея, для которого верно* (3.16).

Выясним, какое тождество соответствует (3.16) на пространстве присоединенной $G-$ структуры исходного многообразия. Подставим в (3.16) (2.6), (3.12) и учтем Теорему 1, Лемму 2.3. Получим

$$B\alpha^d + 2B^{abcd}B_{abc} + 3\alpha^c B_{cab}B^{abd} = 0 \tag{3.17}$$

Тем самым доказано

Теорема 5. *Для любого многообразия Вайсмана-Грея в некоторой окрестности каждой точки, в которой $B \circ \pi \neq 0$, имеет место тождество (3.17).*

**3.3. 6-мерные многообразия Вайсмана-Грея.** Пусть $M$ – 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея. Фиксируем точку $m \in M$, такую что в этой точке $B \neq 0$. Хорошо известно [8], что комплексификация касательного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M) = \mathbb{C} \otimes T_m(M) = (D_J^{\sqrt{-1}})_m \oplus (D_J^{-\sqrt{-1}})_m$, где $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$, $(D_J^{-\sqrt{-1}})_m$ – собственные подпространства комплексификации почти комплексной структуры $J$, отвечающие собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ соответственно. При этом отображение $\sigma : T_m^{\mathbb{C}}(M) \to (D_J^{\sqrt{-1}})_m$, задаваемое формулой $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})$, является проектором на подпространство $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$. Его сужение на касательное пространство $T_m(M)$, рассматриваемое как комплексное векторное пространство, является изоморфизмом $\mathbb{C}-$ линейных пространств. В частности, комплексная размерность пространства $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$ равна 3. Если $(m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{\hat{1}}, \varepsilon_{\hat{2}}, \varepsilon_{\hat{3}})$ – произвольный $A-$ репер, а $(m, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^{\hat{1}}, \omega^{\hat{2}}, \omega^{\hat{3}})$ – дуальный репер, то векторы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ образуют базис пространства $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$, а формы $(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ – дуальный базис. Тогда пространство 3-форм на $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$ одномерно и любая 3-форма пропорциональна форме $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$. В частности, для структурного тензора $C$ получаем $(\sigma C)_m = \lambda \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$. Следовательно,

$$B_{abc} = \lambda \varepsilon_{abc}; \quad B^{abc} = \bar{\lambda} \varepsilon^{abc} \tag{3.18}$$

где $\varepsilon_{abc}$, $\varepsilon^{abc}$ – символ Кронекера 3-го порядка.

Теорема 6. *Любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу $C_0$.*

Доказательство. В случае 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея критерий класса $C_0$ (3.2) примет вид

$$B^{123d} = -\alpha^d B^{123} \tag{3.19}$$

и формулы комплексно сопряженные. Проверим, что он выполняется для любого 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея.

Пусть $p \in P$ – произвольная точка присоединенной $G-$ структуры многообразия Вайсмана-Грея $(M, J, g)$, такая что $B(p) = 0$. Так как $B = 6B^{123}B_{123}$, получим $B^{123}(p) = B_{123}(p) = 0$ и в силу (2.8) $B^{123d} = 0$. Следовательно, критерий класса $C_0$ выполняется.

Пусть $p \in P$, такая что $B(p) \neq 0$. Тогда по Теореме 5 существует окрестность $U$ точки $m = \pi(p)$, для которой выполняется (3.17). С учетом (3.18) получим (3.19).

Теорема 7. *Любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея является локально конформно приближенно келеровым многообразием.*

Доказательство. Пусть $p \in P$ – произвольная точка присоединенной $G-$структуры 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея, для которой $B = 0$. Тогда выполняется (3.2) критерий класса $C_1$ в силу Леммы 3.1 и (3.12).

Пусть $p \in P$, такая что $B(p) \neq 0$. Согласно Теореме 3 для некоторой окрестности $U$ точки $\pi(p)$ имеем многообразие Вайсмана-Грея $(U, J, \tilde{g} = e^{2f}g)$, для которого $1 = \tilde{B} = 6\tilde{B}^{123}B_{123}$. Следовательно,

$$\tilde{B}^{123}\tilde{B}_{123} = \frac{1}{6} \tag{3.20}$$

Тогда, подставляя (3.18) и (3.20) в (3.16), получим

$$1)\, \tilde{\alpha}^1 = \tfrac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[23]}\tilde{B}^{123}; \quad 2)\, \tilde{\alpha}^2 = \tfrac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[31]}\tilde{B}^{123}; \quad 3)\, \tilde{\alpha}^3 = \tfrac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[12]}\tilde{B}^{123}; \tag{3.21}$$

Продифференцируем внешним образом первое соотношение из (3.21) и подставим (2.8) и (3.5). Используя линейную независимость базисных форм, в частности, получим

$$\tilde{\alpha}^{12} = \frac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[23]}{}^2\tilde{B}^{123} + \frac{3}{2}\tilde{\alpha}_{[23]}\tilde{B}^{1232}$$

Подставляя (3.3), (3.2) и учитывая Теорему 6, получим

$$\tilde{\alpha}^{12} - \frac{1}{4}\tilde{\alpha}^{21} = -\frac{3}{2}\tilde{\alpha}^1\tilde{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_3\tilde{B}^{123} \tag{3.22}$$

Аналогичным образом дифференцируя второе соотношение из (3.21), получим

$$\tilde{\alpha}^{21} - \frac{1}{4}\tilde{\alpha}^{12} = -\frac{3}{2}\tilde{\alpha}^1\tilde{\alpha}^2 - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_3\tilde{B}^{123} \tag{3.23}$$

Вычитая из (3.22) (3.23) и комплексно сопрягая, получим $\tilde{\alpha}_{[12]} = \frac{2}{5}\tilde{\alpha}^3\tilde{B}_{123}$. Подставляя полученное тождество в (3.21), получим $\tilde{\alpha}^3 = 0$.

Аналогично получаем, что $\tilde{\alpha}^1 = 0$ и $\tilde{\alpha}^2 = 0$. Таким образом, многообразие $(U, J, \tilde{g})$ является приближенно келеровым в силу Леммы 3.1, многообразие $(U, J, g)$ – конформно приближенно келеровым и в силу Теоремы 2 принадлежит классу $C_1$. В частности, в точке $p$ критерий принадлежности многообразия $(M, J, g)$ классу $C_1$ выполняется.

Итак, в любой точке присоединенной $G-$ структуры многообразия $(M, J, g)$ выполняется критерий класса $C_1$ (3.2), а значит, в силу Теоремы 2 является локально конформно приближенно келеровым.

## Список литературы


[1] A. Gray, L. M. Hervella, “The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants”, *Annali di Matematica pura ed applicata*, **CXXIII**:IV (1980), 35–58.

[2] Н. Н. Щипкова, *Дифференциальная геометрия многообразий Вайсмана-Грея. Дисс.…к.ф.-м.н.*, МПГУ, Москва, 1994.

[3] В. Ф. Кириченко, Н. А. Ежова, “Конформные инварианты многообразий Вайсмана–Грея”, *УМН*, **51**:2(308) (1996), 163–164.

[4] Н. А. Ежова, *Тензорные инварианты многообразий Вайсмана-Грея. Дисс....к.ф.-м.н.*, МПГУ, Москва, 1994.

[5] Л. А. Игнаточкина, “Многообразия Вайсмана–Грея с $J$-инвариантным тензором конформной кривизны”, *Матем. сб.*, **194**:2 (2003), 61–72.

[6] L. A. Ignatochkina, “Some conformal changes of metric for Vaisman-Gray manifolds with exact Lee form”, *Ткани и квазигруппы: Межвузовский тематический сборник научных трудов*, ТвГУ, Тверь, 2000, 149–154.

[7] В. Ф. Кириченко, И. В. Ускорев, “Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур”, *Матем. заметки*, **84**:6 (2008), 838–850.

[8] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, Типография МПГУ, Москва, 2003.

[9] M. Banaru, *A new characterization of the Gray-Hervella classes of almost Hermitian manifold*, $8^{th}$International conference on differential geometry and its applications, August 27-31, Opava-Czech Republic, 2001.

[10] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Наука, Москва, 1967.

**Л. А. Игнаточкина (L. A. Ignatochkina)**
Московский педагогический государственный университет
*E-mail*: ignlia@gmail.com

Поступила в редакцию
????????