Условные обозначения.

1. $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел.
2. $\mathbf{C}$ – поле комплексных чисел
3. Доказательство* – такие доказательства можно пропустить при первом прочтении.

1 Анализ на многообразиях

1.1 Гладкие отображения областей евклидовых пространств

Пусть $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ - евклидовы пространства, $U \subset \mathbf{R}^n$ и $V \subset \mathbf{R}^m$ - некоторые области в них. Пусть $f : U \to V$ некоторое отображение, которое каждой точке $p = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$ переводит в точку $f(p) = (y^1, \dots, y^m) \in \mathbf{R}^m$. Это отображение задается набором набором m функций от n переменных. Обратно, всякий набор из m функций от n переменных определяет некоторое отображение $f : U \to V$, где U - общая область определения этих функций.

Определение 1.1. Отображение $f : U \to V$ называется *гладким порядка* k, если каждая из функций $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), i = 1, \dots, m$ имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно. Если эти функции имеют непрерывные частные производные любого порядка, то отображение f называется отображением класса C^∞ или просто *гладким отображением*.

В дальнейшем будем предполагать все отображения гладкими, если не оговорено противное.

Определение 1.2. Биективное отображение областей евклидовых пространств $f : U \to V$ называется *диффеоморфизмом*, если f и f^{-1} одновременно гладки. Если такое отображение существует, то области U и V называются *диффеоморфными*.

Замечание. Из математического анализа известно, что всякий диффеоморфизм является гомеоморфизмом (так как всякое гладкое отображение является непрерывным).

С другой стороны, из топологии известно, что области евклидовых пространств гомеоморфны тогда и только тогда, когда размерности этих пространств совпадают. Следовательно, это верно и для диффеоморфных областей.

1.2 Гладкие структуры и гладкие многообразия

Определение 1.3. Пусть M - хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. *Локальной картой* на M называется пара (U, φ), где U - открытое подмножество в M, $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ - гомеоморфизм на открытое подмножество в $\mathbf{R}$. Подмножество U называется *областью карты*, гомеоморфизм φ называется *картирующим отображением*.

Если $p \in U$ - произвольная точка, то $\varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ и, значит, $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$. Эти числа называются *локальными координатами* точки p относительно локальной карты (U, φ).

Определение 1.4. Две локальные карты (U, φ) и (V, ψ) - две локальные карты на M. Эти карты называются *гладко связанными*, если отображение $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ является диффеоморфизмом областей евклидовых пространств.

Определение 1.5. Семейство открытых карт $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ на M называется *атласом*, если
1) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ образует открытое покрытие M;
2) любая пара карт этого семейства гладко связана.

Определение 1.6. Пусть $\mathcal{A}$ - некоторый атлас на M. Локальная карта (U, φ) на M называется *гладко связанной* с $\mathcal{A}$, если она гладко связана с любой картой этого атласа.

Определение 1.7. Атлас $\mathcal{A}$ на M называется *максимальным или гладкой структурой* на M, если любая карта, связанная с этим атласом принадлежит ему.

Очевидно, любой атлас можно единственным образом дополнить до гладкой структуры, присоединив к нему все карты, гладко связанные с этой структурой.

Определение 1.8. Две гладкие структуры называются эквивалентными, если каждая карта одной структуры гладко связана с каждой картой другой структуры (и, следовательно, принадлежит ей).

Определение 1.9. *Гладким многообразием* называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, на котором фиксирована гладкая структура. При этом размерность образа любой карты этой структуры называется *размерностью* многообразия и обозначается $dim M$. **Замечание.** Доказано, что если на гладком многообразии M существует хотя бы одна гладкая структура, то на нем существует бесконечно много гладких структур.

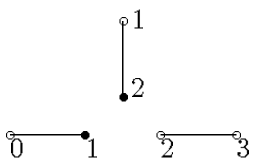
Пример неэквивалентных гладких структур

Пусть $M = \mathbf{R}$ - вещественная прямая. На ней существует естественная гладкая структура, порожденная атласом из единственной карты $(\mathbf{R}, id)$, где id - тождественное отображение. Рассмотрим вторую гладкую структуруо, порожденную картой $(\mathbf{R}, \varphi)$, где $\varphi(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Выясним, будут ли эти карты гладко связаны. Рассмотрим функцию $id \circ \varphi^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $id \circ \varphi^{-1}(x) = x^3$ - это гладкая функция. С другой стороны, $\varphi \circ id^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\varphi \circ id^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ хотя и является непрерывной на всей области определения, но не является гладкой, так как ее первая производная терпит разрыв в 0. Значит, эти две карты не являются гладко связанными и, следовательно, порождают неэквивалентные гладкие структуры. $\square$

Задача 1.1. Докажите, что атласы $(\mathbf{R}, \varphi_0), \dots, (\mathbf{R}, \varphi_k), \dots,$, где $\varphi_k = x^{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots$ задают на вещественной прямой различные гладкие структуры.

Замечание. Свойства хаусдорфовости и счетности базы из существования гладкой структуры на топологическом пространстве, вообще говоря, не вытекают. Проиллюстрируем это следующими примерами.

1. Нехаусдорфово топологическое пространство с гладкой структурой размерности 1 и счетной базой.



Рассмотрим интервал (0,3) и разобьем его на три множества: $(0, 1]$, $(2, 3)$, $(1, 2]$. В формальном (несвязном) объединении введем топологию следующим образом: окрестности точек на множестве $(0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$ такие же как в топологии, индуцированной вещественной прямой. Окрестностями же точек $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ служат соответственно множества $(1-\varepsilon, 1] \cup (2, 2+\varepsilon)$, $(2-\varepsilon, 2] \cup (2, 2+\varepsilon)$. Тогда точки x_1, x_2 неотделимы.

Задача 1.2. Постройте на этом топологическом пространстве одномерную гладкую структуру и докажите, что оно имеет счетную базу.

2. Хаусдорфово топологическое пространство с одномерной гладкой структурой, не имеющее счетной базы.

Рассмотрим декартово произведение двух вещественных прямых $M = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$. Топологию в M определим как топологию декартова произведения, где первый сомножитель с обычной топологией (метрической), а второй сомножитель – с дискретной.

Задача 1.3. Докажите, что это топологическое пространство хаусдорфово, имеет одномерную гладкую структуру и не обладает счетной базой.

Взяв декартово произведение многообразий из этих двух примеров, получим топологическое пространство с гладкой структурой, но не хаусдорфово и не имеющее счетной базы. Заметим, что отсутствие счетной базы в последнем примере привело к "патологии": плоскость в нем является многообразием размерности 1, а не 2. Поэтому обычно гладкое многообразие определяют как хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, на котором фиксирована гладкая структура. Из этого определения следует, что гладкое многообразие является локально компактным и даже паракомпактным пространством.

Чтобы ввести понятие ориентации на гладком многообразии, нам понадобятся следующие

Определение 1.10. *Псевдогруппой преобразований* на топологическом пространстве M называется множество Γ преобразований, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) каждое преобразование $f \in Gamma$ есть гомеоморфизм открытого множества $U \subset M$ (называемое *областью определения* f) на открытое множество $V \subset M$ (называемое *областью значений* f);

2) если $f \in \Gamma$, то сужение f на произвольное открытое множество области определения f, также принадлежит Γ;

3) пусть $U = \cup_i U_i$, где каждое U_i есть открытое множество в M; гомеоморфизм f множества U на открытое множество в M принадлежит Γ, если сужение f на каждое U_i принадлежит Γ;

4) для каждого открытого множества U в M тождественное преобразование в U принадлежит Γ;

5) если $f \in \Gamma$, то $f^{-1} \in \Gamma$;

6) если $f \in \Gamma$ есть гомеоморфизм U на V, а $f' \in \Gamma$ есть гомеоморфизм U' на V' и если $V \cap U'$ не пусто, то гомеоморфизм $f' \circ f : f^{-1}(V \cap U') \to f'(V \cap U')$ принадлежит Γ.

Примеры.

1. Множество всех диффеоморфизмов открытых множеств из $\mathbf{R}^n$ в открытые множества из $\mathbf{R}^n$ явля-

ется псевдогруппой преобразований и обозначается $\Gamma(\mathbf{R}^n)$.
2. Если мы рассмотрим только те преобразования $f \in \Gamma(\mathbf{R}^n)$, которые имеют всюду положительный якобиан, то мы получим подпсевдогруппу преобразований в $\Gamma(\mathbf{R}^n)$. Она обозначается $\Gamma_0(\mathbf{R}^n)$ и называется *псевдогруппой сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов* в $\mathbf{R}^n$.

Определение 1.11. Будем говорить, что атлас топологического пространства M *совместим с псевдогруппой* Γ, если для любых двух карт (U,φ), (V,ψ), для которых $U \cap V \neq \emptyset$, этого атласа отображение $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ есть элемент из Γ. Атлас будем называть *полным*, если он содержит все карты, удовлетворяющие данному условию.

Отметим, что атлас $n-$ мерного гладкого многообразия является атласом, совместимым с псевдогруппой $\Gamma(\mathbf{R}^n)$.

Определение 1.12. *Ориентированным гладким многообразием* называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, на котором фиксирован полный атлас, совместимый с псевдогруппой $\Gamma_0(\mathbf{R}^n)$.

Ориентируемая гладкая структура многообразия однозначно порождает гладкую структуру многообразия. Но не каждая гладкая структура получается таким образом. Если гладкая структура многообразия получена из ориентированной гладкой структуры, то она называется *ориентируемой.*

Задача 1.4. Докажите, что ориентируемое гладкое многообразие допускает в точности две ориентации.
Укажем, как поменять ориентацию многообразия. Пусть семейство локальных карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ определяет ориентированное многообразие. Тогда семейство карт (U_α, ψ_α) определяет многообразие с противоположной ориентацией, если ψ_α есть композиция φ_α с преобразованием $(x^1, x^2, \dots, x^n) \to (-x^1, x^2, \dots, x^n)$ в $\mathbf{R}^n$.

1.3 Примеры гладких структур

1. Всякое конечномерное линейное пространство несет каноническую гладкую структуру той же размерности.
Пусть V- n-мерное векторное пространство. Рассмотрим произвольный базис этого пространства $(e_1, \dots, e_n)$. Он позволяет построить отображение $r : V \to \mathbf{R}^n$ следующим образом: каждому вектору $x \in V$ поставим в соответствие его набор координат $(x_1, \dots, x_n)$ в данном базисе. Очевидно, это биекция. Внесем в V топологию, потребовав, чтобы r было гомеоморфизмом. Иначе говоря, подмножество $U \subset V$ назовем открытым тогда и только тогда, когда $r(U) \subset \mathbf{R}^n$ - открыто. Таким образом, пара (V, r) является локальной картой и, следовательно, порождает гладкую структуру.

Если мы возьмем другой базис, то в силу линейности формул перехода от одного базиса к другому, карта порождаемая этим базисом будет гладко связана с картой (V, r) (докажите самостоятельно). Значит, порождаемые ими гладкие структуры совпадают.

Полученная таким образом гладкая структура на векторном пространстве V называется *канонической гладкой структурой* линейного пространства V.

2. Всякое n-мерное аффинное пространство несет каноническую гладкую структуру той же размерности.
Гладкая структура строится как в предыдущем случае, только вместо базиса берется репер.

3. Всякое n-мерное комплексное линейное пространство W несет каноническую $2n$- мерную гладкую структуру. (Указание: если $(e_1, \cdots, e_n)$ - базис W как комплексного пространства, то
$(e_1, \dots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \dots, \sqrt{-1}e_n)$ является базисом его овеществления. Каноническая гладкая структура этого вещественного линейного пространства называется канонической гладкой структурой комплексного линейного пространства.

1.4 Алгебра гладких функций гладкого многообразия

Обозначим $\mathcal{F}(M)$ – множество всех функций на гладком многообразии M.

Определение 1.13. Пусть M^n – гладкое многообразие. Отображение $f : M \to \mathbf{R}$ называется гладкой функцией на M, если для любой точки $p \in M$ существует локальная карта (U,φ), содержащая точку p, что отображение $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbf{R}$ является гладким отображением областей евклидовых пространств.

В данной карте функция $f \circ \varphi^{-1}$ аналитически задается уравнением вида $y = f(x^1, \dots, x^n)$. Допуская некоторую вольность, в дальнейшем будем говорить, что этим уравнением задается функция

f.

Обозначим множество всех гладких функций на гладком многообразии M^n через $C^\infty(M)$.

Предложение 1.1. Множество $C^\infty(M)$ обладает естественной структурой ассоциативной, коммутативной алгебры с 1, вообще говоря, бесконечномерной.

Доказательство. Напомним, что алгебра – это линейное пространство, котором задана операция умножения ее элементов $x \cdot y$, обладающая свойствами $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$, $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$.

Пусть $f, g \in C^\infty(M)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Определим отображение $f+g : M^n \to \mathbf{R}$ формулой $(f+g)(p) = f(p) + g(p)$, $p \in M$. Очевидно, это гладкое отображение, так как в локальной карте задается суммой гладких функций.

Аналогично определяется отображение $\lambda f : M^n \to \mathbf{R}$ формулой $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$. Очевидно, что $\lambda f \in C^\infty(M)$.

Задача 1.5. Проверьте, что введенные операции удовлетворяют всем 8 аксиомам линейного пространства.

Наконец, определим отображение $fg : M^n \to \mathbf{R}$ формулой $(fg)(p) = f(p)g(p)$.

Задача 1.6. Докажите, что выполняются аксиомы коммутативной, ассоциативной алгебры с 1. В качестве 1 выступает функция, ставящая любой точке p в соответствие число 1. $\square$

Предложение 1.2. Элементы алгебры $C^\infty(M)$ обладают следующими свойствами:

(F1) Пусть функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_r C^\infty(M)$, α – гладкая функция на $\mathbf{R}^r$. Тогда $\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in C^\infty(M)$, то есть гладкая функция на M.

(F3) Пусть $f \in \mathcal{F}(M)$ – произвольная функция на M, такая, что для любой точки $p \in M$ существует гладкая функция $g \in C^\infty(M)$, существует открытая окрестность U_p точки p и сужения фукций f и g на эту окрестность совпадают, то есть $g\,|_{U_p} = f\,|_{U_p}$. Тогда $f \in C^\infty(M)$, то есть гладкая функция на M.

(F3) Для любой точки $p \in M$ существует набор гладких функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^\infty(M)$ и существует гомеоморфизм $q \to (\varphi_1(q), \ldots, \varphi_n(q))$, $q \in U_p$ области U_p на открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$. При этом окрестность U_p и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ можно выбрать так, что для каждой гладкой функции $f \in C^\infty(M)$ ее сужение $f\,|_{U_p}$ представляется в виде $f\,|_{U_p} = \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, где α – гладкая функция на $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. *

$(F1)$ Фиксируем произвольную точку $p \in M$. Так как функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ – гладкие, то для каждой функции существует локальная карта (U_i, ψ_i), $i = 1, \ldots, r$, что отображение $\varphi_i \circ \psi_i^{-1}$ является гладким отображением областей евклидовых пространств.

Рассмотрим множество $U = \bigcap_{i=1}^r U_i$. Это открытое множество, содержащее точку p. Рассмотрим отображение $\psi = \psi_i\,|_U$. Это гомеоморфизм. Тогда пара (U, ψ) является локальной картой на M.

Имеем $\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \circ \psi^{-1} = \alpha(\varphi_1 \circ \psi^{-1}, \ldots, \varphi_r \circ \psi^{-1})$ – гладкое отображение областей евклидовых пространств, то есть по определению $\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ – гладкая функция на многообразии M.

$(F2)$ Рассмотрим произвольную точку $p \in M$. По условию существует окрестность U_p точки p и гладкая на M функция g, такая что $g\,|_{U_p} = f\,|_{U_p}$. Так как функция g – гладкая, то существует локальная карта (U, ψ), содержащая точку p, и отображение $g \circ \psi^{-1}$ является гладким отображением областей евклидовых простаранств. Рассмотрим пару $(U \cap U_p, \psi_{U \cap U_p})$. Это локальная карта на M, содержащая точку p и такая, что $f \circ (\psi_{U\cap U_p})^{-1} = f\,|_{U_p} \circ (\psi_{U\cap U_p})^{-1} = g\,|_{U_p} \circ (\psi_{U\cap U_p})^{-1}$ – гладкое отображение областей евклидовых пространств. Получаем по определению f – гладкая функция на многообразии M.

$(F3)$ Пусть (U, φ) – локальная карта в окрестности точки $p \in M$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Имеем

$$\varphi(q) = (x^1 \circ \varphi(q), \ldots, x^n \circ \varphi(q)),\ q \in U$$

Пусть $S \subset \varphi(U)$ – компактная окрестность точки $\varphi(p)$.

Замечание. Напомним, что топологическое пространство называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Компактное хаусдорфово пространство называется *компактом*. Подмножество топологического пространства называется *компактным*, если оно является компактным топологическим пространством в индуцированной топологии. Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Из дифференциальной топологии известно, что

$$\exists \psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \, : \, \psi\,|_S \equiv 1 \text{ и } \psi\,\Big|_{\mathbf{R}^n \setminus \varphi(U)} \equiv 0$$

Положим $V_p = \varphi^{-1}(IntS)$, где $IntS$ обозначает множество внутренних точек компакта S. Положим также

$$\varphi_k(q) = \begin{cases} \psi((x^1 \circ \varphi(q), \ldots, x^n \circ \varphi(q)), \, q \in U \\ 0, \, q \notin U \end{cases}$$

Тогда набор $(V_p, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ обладает требуемыми свойствами. В самом деле, отображение $q \to (\varphi_1(q), \ldots, \varphi_n(q))$, суженное на V_p совпадает с φ и, значит, является гомеоморфизмом. Далее, пусть $f \in C^\infty(M)$. Тогда $\alpha = f \circ \varphi^{-1}$ – гладкая функция в области $\varphi(V_p)$. Имеем
$f(q) = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(q) = f \circ \varphi^{-1}(\varphi_1(q), \ldots, \varphi_n(q)) = \alpha(\varphi_1(q), \ldots, \varphi_n(q)), \, q \in V_p$. □

Оказывается, что свойства $(F1)$ – $(F3)$ являются характеристическими свойствами гладкой структуры. Точнее, справедлива

Теорема 1.1. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, n – натуральное число. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(M)$ – подалгебра алгебры всех функций на M, элементы которой обладают свойствами $(F1)$ – $(F3)$, в которых роль $C^\infty(M)$ играет $\mathcal{F}$. Тогда существует, и притом единственная, гладкая структура на M, относительно которой M является n - мерным гладким многообразием, а $\mathcal{F}$ совпадает с алгеброй $C^\infty(M)$.

Доказательство. *
Пусть $p \in M$. Согласно (F3), существует набор объектов $(U_p, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, обладающий соответствующими свойствами. Поскольку это построение возможно для любой точки $p \in M$, заключаем, что $M = \bigcup_{p \in M} U_p$, то есть первое условие определения гладкого многообразия выполнено. Далее, отображение $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – гомеоморфизм. Пусть $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ – другой такой гомеоморфизм, то есть ψ_i – гладкие функции на M. Согласно (F3), $\psi_i = \alpha_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\alpha_i \in C^\infty(M)$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда вытекает, что $\psi \circ \varphi^{-1} = (\alpha_1(\varphi), \ldots, \alpha_n(\varphi)) \circ \varphi^{-1}$ – гладкое отображение областей евклидовых пространств (карты гладко связаны), то есть второе условие определения гладкого многообразия тоже выполнено.

Таким образом, система $\{(U_p, \varphi)\}\,|_{p \in M}$ образует атлас на многообразии M, который однозначно дополняется до гладкой структуры.

Пусть $f \in \mathcal{F}$. Согласно (F3) для любой точки $p \in M$ существует окрестность U_p и набор $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i \in \mathcal{F}$ такой, что $f\,\big|_{U_p} = \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \alpha(\varphi)$, $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_p) \to \mathbf{R}$ есть гладкое отображение α области $\varphi(U_p)$ из $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}$. По определению это означает, что f – гладкая относительно построенной гладкой структуры функция, то есть $f \in C^\infty(M)$. Обратно, пусть f – гладкая относительно построенной гладкой структуры функция, $p \in M$, (U_p, φ) – построенная выше карта. Тогда функция $\alpha = f \circ \varphi^{-1}$ – гладкая функция на $\mathbf{R}^n$. Имеем $f\,\big|_{U_p} = \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,\big|_{U_p}$. Но согласно (F1), $\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{F}$. Согласно (F2), $f \in \mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{F} = C^\infty(M)$.

Остается доказать единственность построенной гладкой структуры. Пусть $\{(U_\beta, \psi_\beta)\}$ – другая гладкая структура на M, класс гладких функций которой совпадает с $\mathcal{F}$. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ – локальная карта первой структуры, (U_β, ψ_β) – локальная карта второй структуры. Тогда в области $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ имеем

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} = (f \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}), \; f \in \mathcal{F} \tag{1}$$

Но из равенства $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ следует, что

$$\forall f \in \mathcal{F} \Rightarrow f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty(M), \; f \circ \psi_\beta^{-1} \in C^\infty(M)$$

Но тогда из (1) вытекает, в частности, что отображение $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ гладкое, следовательно, карты первой и второй гладких структур гладко связаны, то есть эти структуры совпадают. □

Резюмируя содержание этого пункта, заключаем, что задание гладкой структуры на хаусдорфовом топологическом пространстве M равносильно заданию на нем алгебры $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ вещественных функций, удовлетворяющих условиям $(F1)$ – $(F3)$. В частности, алгебра $C^\infty(M)$ содержит всю информацию о гладкой структуре на M, то есть о дифференциальной геометрии гладкого многообразия.

1.5 Векторные поля на гладком многообразии

Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая алгебра над полем F.

Определение 1.14. Линейный оператор $X : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$, если $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$, $f, g \in \mathcal{A}$.
Обозначим совокупность всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ через $Diff(\mathcal{A})$.

Задача 1.7. Докажите, что совокупность всех дифференцирований $Diff(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ будет модулем над кольцом $\mathcal{A}$ с операциями

$$(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$$
$$(gX)(f) = g \cdot X(f)$$

$X, Y \in Diff(\mathcal{A})$, $f, g \in \mathcal{A}$.

Определение 1.15. *(Гладким) векторным полем* на гладком многообразии M называется произвольное дифференцирование алгебры гладких функций $C^\infty(M)$ многообразия M. Обозначим $C^\infty(M)$ - модуль $Diff(M)$ через $\mathcal{X}(M)$ и назовем *модулем гладких векторных полей* на многообразии M.

Напомним, что из дифференциальной топологии известно

Лемма 1.1. Пусть M – гладкое многообразие, $C \subset V$, где V – компакт, $V \subset M$ – открытое подмножество. Тогда существует неотрицательная функция $\psi \in C^\infty(M)$, такая, что

$$1)\ \psi\,|_C \equiv 1,\ 2)\ supp\psi \subset V$$

где $supp\psi$ – носитель функции ψ, то есть множество точек многообразия M, в которых функция ψ отлична от нуля. $\square$

Предложение 1.3. Пусть M – гладкое многообразие, X – векторное поле на M. Тогда $X(const) = 0$. Здесь под $const$ понимается функция, ставящая каждой точке многообразия одно и тоже вещественное число.

Доказательство. Прежде всего,

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = 1 \cdot X(1) + X(1) \cdot 1 = 2X(1)$$

откуда $X(1) = 0$. Далее, если $c = const$, то, используя линейность отображения X, получим $X(c) = X(c \cdot 1) = cX(1) = 0$. $\square$

Предложение 1.4. Пусть M – гладкое многообразие, $U \subset M$ – открытое подмногообразие, $f \in C^\infty(M) \,:\, f\,|_U = 0$. Тогда

$$\forall X \in \mathcal{X}(M) \Rightarrow\ X(f\,|_U) = 0$$

Доказательство. Пусть $p \in U$ – произвольная точка. По лемме 1.5

$$\exists g \in C^\infty(M)\ (g = 1 - \psi)\ :\ g(p) = 0,\ g\Big|_{M \setminus U} = 1$$

Очевидно, $f \cdot g = f$. Следовательно, $X(f) = X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$. В частности, $X(f)(p) = X(f)(p)g(p) + f(p)X(g)(p) = 0$. В силу произвольности выбора $p \in U$ получим $f\,|_U = 0$ $\square$

Следствие. (Первый принцип локализации)
Всякое векторное поле $X \in \mathcal{X}(M)$ внутренним образом индуцирует векторное поле $\tilde{X} \in \mathcal{X}(U)$ на любом открытом подмногообразии $U \subset M$.

Доказательство. *
Пусть $p \in U$ – произвольная точка. Фиксируем функцию $f \in C^\infty(U)$. Пусть C – компактная окрестность точки p в U (то есть p – внутренняя точка компакта C). По лемме 1.5

$$\exists\, \alpha \in C^\infty(M)\ :\ \alpha\,|_C \equiv 1,\ supp\alpha \subset U$$

Определим функцию $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, положив

$$\tilde{f}(q) = \begin{cases} \alpha(q)f(q),\ q \in U \\ 0,\ q \notin U \end{cases}$$

В частности, $\tilde{f}\,|_C = f\,|_C$. Определим функцию $\tilde{X}(f)$ на U условием

$$(\tilde{X}(f))\,|_C = (X(\tilde{f}))\,|_C$$

Это определение корректно, во-первых, в смысле независимости от выбора функции $\tilde{f}$ и, во-вторых, в смысле независимости от выбора точки $p \in U$ и ее компактной окрестности. Докажем это.
1) Пусть $\hat{f}$ – другая гладкая функция на M, сужение которой на C совпадает с функцией $f\,|_C$, то есть $\hat{f}\,|_C = \tilde{f}\,|_C$. В силу предыдущего предложения $X\hat{f} = X\tilde{f}$ на множестве внутренних точек компакта C.
2) Пусть $m \in U$ – другая точка и K – ее компактная окрестность, $C \cap K \neq \emptyset$.

$$\exists\,\beta \in C^\infty(M)\ :\ \alpha\,|_K \equiv 1,\ supp\beta \subset U$$

Определим функцию $h \in C^\infty(M)$, положив

$$h(q) = \begin{cases} \beta(q)f(q),\ q \in U \\ 0,\ q \notin U \end{cases}$$

В частности, $h\,|_K = f\,|_K$. Докажем, что во внутренних точках пересечения этих компактных окрестностей мы получим одну и ту же функцию $\tilde{X}f$. Действительно, $h\,|_{C\cap K} = f\,|_{C\cap K} = \tilde{f}\,|_{C\cap K}$. Тогда по предыдущему предложению $(X\tilde{f})\,|_{C\cap K} = (Xh)\,|_{C\cap K}$. Значит, наше определение корректно.

Функция $\tilde{X}f$ гладкая в силу (F2) (ее сужение на некоторую окрестность произвольной точки $p \in U$ совпадает с функцией $X\tilde{f} \in C^\infty(M)$).

Задача 1.8. Докажите, что отображение $\tilde{X}\ :\ f \to \tilde{X}f$ является дифференцированием алгебры $C^\infty(U)$, то есть $\tilde{X} \in \mathcal{X}(U)$. □

Таким образом, всякому векторному полю $X \in \mathcal{X}(M)$ внутренним образом сопоставляется векторное поле на любом открытом подмногообразии $U \subset M$, называемое *ограничением*, или *сужением*, или *локализацией* векторного поля X на U и обозначаемое $X\,|_U$.

Задача 1.9. Докажите, что это сопоставление является гомоморфизмом $\mathbf{R}$-линейных пространств $\mathcal{X}(M)$ и $\mathcal{X}(U)$.

Заметим, что обратное, вообще говоря, не верно: не всякое векторное поле $X \in \mathcal{X}(U)$ можно рассматривать как локализацию некоторого векторного поля $Y \in \mathcal{X}(M)$ на U. Тем не менее справедливо следующее

Предложение 1.5. (Второй принцип локализации)
Пусть $U \subset M$ – открытое подмногообразие гладкого многообразия M, X – векторное поле на U. Тогда

$$\forall p \in U\,\exists Y \in \mathcal{X}(M)\,\exists V_p \subset U\ :\ X\,\big|_{V_p} = Y\,\big|_{V_p}$$

где V_p – некоторая окрестность точки p.

Доказательство. *
Пусть $\bar{V}_p$ – компактная окрестность точки p, содержащаяся в U. Обозначим V_p множество внутренних точек компактной окрестности $\bar{V}_p$. Как известно из топологии, это множество является открытым. По лемме 1.5

$$\exists\psi \in C^\infty(M)\ :\ \psi\,\Big|_{\bar{V}_p} \equiv 1,\ supp\psi \subset U$$

Пусть $f \in C^\infty(M)$. Определим функцию Yf формулой

$$Yf(q) = \begin{cases} \psi(q)(X(f\,|_U))(q),\ q \in U \\ 0,\ q \notin U \end{cases}$$

Задача 1.10. Докажите, что отображение $f \to Yf$ является векторным полем на многообразии M.

Задача 1.11. Докажите, что $Y\,\big|_{V_p} = X\,\big|_{V_p}$. □

Пусть (U, φ) – локальная карта с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ на многообразии M, $X \in \mathcal{X}(U)$, $f \in C^\infty(U)$. Фиксируем точку $p \in U$. Пусть $\varphi(p) = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathbf{R}^n$ – набор ее координат в данной карте. Пусть $q \in U$ $(\varphi(q) = (x^1, \ldots, x^n))$ – произвольная точка, такая, что отрезок $[\varphi(p), \varphi(q)]$ входит в $\varphi(U)$. Построим функцию α на отрезке $[0,1]$:

$$\alpha(t) = f^*(t\varphi(q) + (1-t)\varphi(p)) = f^*(a^1 + t(x^1 - a^1), \ldots, a^n + t(x^n - a^n))$$

где $f^* = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbf{R}$. Эта функция гладкая, как композиция таковых. Имеем
$\alpha(1) - \alpha(0) = \int_0^1 \alpha'(t)dt =$
$\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(f^*(a^1 + t(x^1 - a^1), \ldots, a^n + t(x^n - a^n))\right)dt =$

$= \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) \int_0^1 f_i^*(a^1 + t(x^1 - a^1), \dots, a^n + t(x^n - a^n))dt$
где $f_i^*(u^1, \dots, u^n) = \frac{\partial f^*}{\partial u^i}(u^1, \dots, u^n)$.
С учетом определения функции α это соотношение можно переписать в виде

$$f^*(x^1, \dots, x^n) = f^*(a^1, \dots, a^n) + \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) g_i^*(x^1, \dots, x^n)$$

где $g_i^*(x^1, \dots, x^n) = \int_0^1 f_i^*(a^1 + t(x^1 - a^1), \dots, a^n + t(x^n - a^n))dt$ или

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^n \Big(x^i \circ \varphi(q) - x^i \circ \varphi(p)\Big) g_i(q)$$

где $g_i = g_i^* \circ \varphi$.
Применим к обеим частям этого тождества оператор X. Учитывая, что, действуя этим оператором на константы, мы получим 0, имеем

$$(Xf)(q) = 0 + \sum_{i=1}^n X(x^i \circ \varphi)(q) g_i(q) + \sum_{i=1}^n (x^i \circ \varphi(q) - x^i \circ \varphi(p)(Xg_i)(q)$$

В частности, если $q = p$, тождество примет вид

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n X(x^i \circ \varphi)(p) g_i(p)$$

Поскольку $g_i(p) = g_i^*(a^1, \dots, a^n) = f_i^*(a^1, \dots, a^n) \int_0^1 dt = f_i^*(a^1, \dots, a^n)$, $i = 1, \dots, n$, то $(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n X(x^i \circ \varphi)(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} f \circ \varphi^{-1}$. Для краткости введем обозначение

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} f \circ \varphi^{-1}$$

Тогда в силу произвола в выборе точки $p \in U$, предыдущее тождество перепишется в виде

$$Xf = \sum_{i=1}^n X(x^i \circ \varphi) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

а в силу произвола в выборе функции $f \in C^\infty(U)$

$$X = \sum_{i=1}^n X(x^i \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Кроме того, применяя дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ к координатным функциям $x^1, \dots, x^n$ легко убедиться в линейной независимости этих дифференцирований.

Задача 1.12. Докажите.

Следовательно, они образуют базис модуля $\mathcal{X}(U)$, называемый *натуральным базисом.* Таким образом, мы доказали следующее

Предложение 1.6. Пусть (U, φ) – локальная карта на гладком многообразии M с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Тогда модуль $\mathcal{X}(U)$ есть свободный модуль с образующими $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$. В частности,

$$\forall X \in \mathcal{X}(M) \Rightarrow X|_U = \sum_{i=1}^n X|_U (x^i \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

1.6 Инфинитазимальные дифференцирования на гладком многообразии

Определение 1.16. *Инфинитазимальным дифференцированием* (короче, *i-дифференцированием*) алгебры $C^\infty(M)$ в точке $p \in M$ называется $\mathbf{R}$-линейное отображение $\delta : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$, такое, что

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta(g),\ f, g \in C^\infty(M)$$

Задача 1.13. Докажите, что $\delta(const) = 0$, где под $const$ мы понимаем постоянную функцию, которая каждой точке $p \in M$ ставит в соответствие одно и тоже вещественное число.
Всякое векторное поле $X \in \mathcal{X}(M)$ внутренним образом порождает i-дифференцирование X_p в каждой точке $p \in M$, называется значением векторного поля X в точке p. Именно, определим отображение $X_p : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ формулой $X_p(f) = X(f)(p)$.

Задача 1.14. Докажите, что это i-дифференцирование.
Обратно, справедлива

Теорема 1.2. Пусть $\delta : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ – i-дифференцирование на гладком многообразии M в точке $p \in M$. Тогда

$$\exists X \in \mathcal{X}(M) \; : \; \delta = X_p$$

Прежде, чем приступить к доказательству этой теоремы, докажем

Теорема 1.3. Совокупность $\Delta_p(M)$ всех i-дифференцирований на гладком многообразии M в точке $p \in M$ обладает естественной структурой n-мерного линейного пространства, где n – размерность многообразия.

Доказательство. Определим операции сложения и умножения на вещественное число элементов из $\Delta_p(M)$ следующим образом: если $\xi, \eta \in \Delta_p(M)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ то

$$(\xi + \eta)(f) = \xi(f) + \eta(f); \; (\lambda\xi)(f) = \lambda \cdot \xi(f), \; f \in C^\infty(M)$$

Задача 1.15. Докажите, что все аксиомы $\mathbf{R}$-линейного пространства при этом выполняются.

Докажем, что это пространство конечномерно и его размерность равна n.
Пусть (U, φ) – локальная карта с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки p, то векторные поля

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\} \subset \mathcal{X}(U)$$

определяют i-дифференцирования $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ в точке p.

Задача 1.16. Докажите, что это действительно инфинитазимальные дифференцирования.
Докажем, что любое инфинитазимальное дифференцирование представляется в виде линейной комбинации данных инфинитазимальных дифференцирований.
Согласно рассуждениям, проведенным при построении натурального базиса, имеем

$$\forall f \in C^\infty(M) \Rightarrow f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \left(x^i \circ \varphi(q) - x^i \circ \varphi(p) \right) g_i(q), \; q \in U$$

Применим к обеим частям тождества оператор $\delta \in \Delta_p(M)$:

$$\delta f = 0 + \sum_{i=1}^{n} \delta(x^i \circ \varphi) g_i(p) = \sum_{i=1}^{n} \delta^i \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p f$$

где $\delta^i = \delta(x^i \circ \varphi)$. Отсюда в силу произвола в выборе $f \in C^\infty(M)$ находим, что $\delta = \delta^i \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p$.
Нам осталось доказать линейную независимость системы векторов $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$. Рассмотрим линейную комбинацию $\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = 0$ (по i идет суммирование). Применим оператор $\delta = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ к функции $x^j \circ \varphi$, где j – произвольное фиксированное число от 1 до n. Получим

$$0 = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (x^j \circ \varphi) = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} x^j = \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j$$

Итак, векторы $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ линейно независимы, а следовательно, образуют базис пространства $\Delta_p(M)$.

Перейдем к доказательству теоремы 1.6. Выберем локальную карту (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки p. Положим $\delta^i = \delta(x^i \circ \varphi)$ и введем в рассмотрение векторное поле $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \delta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$. Согласно второму принципу локализации $\exists V_p \, \exists X \in \mathcal{X}(M)$ такие, что $X\big|_{V_p} = \tilde{X}\big|_{V_p}$.
Если $f \in C^\infty(M)$, то
$X_p(f) = X(f)(p) = \tilde{X}(f\big|_{V_p})(p) = \sum_{i=1}^{n} \delta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \delta f$. В силу произвола в выборе функции f получим $X_p = \delta$. $\square$

1.7 Касательные векторы и касательные пространства

Определение 1.17. Пусть M – гладкое многообразие, $p \in M$. *(Гладким) путем* или *(гладкой) кривой* с началом в точке p называется гладкое отображение $\gamma : I \to M$ интервала $I \subset \mathbf{R}$, включающего $0 \in \mathbf{R}$, такое, что $\gamma(0) = p$.

Если (U, φ) – локальная карта на M с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ на M, то композиция отображений $\gamma^* = \varphi \circ \gamma$ задает гладкое отображение $\gamma^* : I \to \varphi(U)$ областей евклидовых пространств, определенное системой функций

$$x^i = x^i \circ \gamma^*(t),\ i = 1, \ldots, n = dimM$$

Определение 1.18. Два гладких пути γ_1 и γ_2 с началом в точке $p \in M$ называются *эквивалентными* и обозначаются $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если

Задача 1.17. Докажите, что это определение не зависит от выбора локальной карты.

Задача 1.18. Докажите, что введенное отношение " $\sim$ " является отношением эквивалентности.

Определение 1.19. Класс эквивалентности по отношению " $\sim$ " гладких путей с началом в точке $p \in M$ называется касательным вектором к многообразию M в точке p.

Пусть $\xi = [\gamma(t)]$ – касательный вектор к многообразию M в точке p. Выберем представитель $\gamma(t) \in [\gamma(t)]$. Числа $\left\{\frac{d}{dt}\big|_{t=0} x^1 \circ \gamma^*(t), \ldots, \frac{d}{dt}\big|_{t=0} x^n \circ \gamma^*(t)\right\}$ называются *координатами касательного вектора* в данной карте.

Задача 1.19. Докажите, что определение корректно, то есть данный набор чисел не зависит от выбора представителя из класса $\xi = [\gamma(t)]$.

Выведем соотношения для координат вектора ξ в двух различных локальных картах с пересекающимися областями. Пусть $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ – координаты вектора ξ в локальной карте (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, а $(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^n)$ – его координаты в карте (V, ψ) с координатами $(y^1, \ldots, y^n)$. Тогда

$$\tilde{\xi}^i = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} y^i \circ \gamma^*(t) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)} \frac{d}{dt}\big|_{t=0} x^j \circ \gamma^*(t) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)} \xi^j$$

и, таким образом,

$$\tilde{\xi}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)} \xi^j \tag{2}$$

Теорема 1.4. Совокупность $T_p(M)$ касательных векторов к n-мерному многообразию M в точке $p \in M$ обладает естественной структурой n-мерного линейного пространства.

Доказательство. Зафиксируем локальную карту (U, φ) в окрестности точки p и построим *реперное отображение* $r_\varphi : T_p(M) \to \mathbf{R}^n$, сопоставив вектору $\xi \in T_p(M)$ набор его координат в данной карте. Пусть $\xi, \eta \in T_p(M)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Положим

$$\xi + \eta = r_\varphi^{-1}\left(r_\varphi(\xi) + r_\varphi(\eta)\right) \quad \lambda\xi = r_\varphi^{-1}\left(\lambda r_\varphi(\xi)\right)$$

Задача 1.20. Докажите, что эти операции задают на множестве $T_p(M)$ структуру линейного пространства.

Задача 1.21. Докажите, что отображение r_φ является изоморфизмом линейный пространств $T_p(M)$ и $\mathbf{R}^n$.

В частности, из этого следует, что $\dim T_p(M) = n$.

Докажем, что операция сложения касательных векторов не зависит от выбора локольной карты. Если (V, ψ) – другая карта в окрестности точки p и $\xi \tilde{+} \eta = r_\psi^{-1}\left(r_\psi(\xi) + r_\psi(\eta)\right)$. Тогда $\xi \tilde{+} \eta = r_\psi^{-1}\left(r_\psi(\xi) + r_\psi(\eta)\right) =$
$= r_\psi^{-1} r_\varphi \circ r_\varphi^{-1}\left(r_\varphi \circ r_\varphi^{-1} r_\psi(\xi) + r_\varphi \circ r_\varphi^{-1} r_\psi(\eta)\right) =$
$= \chi_{\varphi\psi}^{-1} \circ r_\varphi^{-1}\left(r_\varphi \circ \chi_{\varphi\psi}(\xi) + r_\varphi \circ \chi_{\varphi\psi}(\eta)\right) = \chi_{\varphi\psi}^{-1}\left(\chi_{\varphi\psi}(\xi) + \chi_{\varphi\psi}(\eta)\right)$, где $\chi_{\varphi\psi} = r_\varphi^{-1} \circ r_\psi : T_p(M) \to T_p(M)$. Так как реперное отображение является изоморфизмом линейных пространств (докажите!), получаем $\chi_{\varphi\psi}\left(\xi \tilde{+} \eta\right) = \chi_{\varphi\psi}(\xi) + \chi_{\varphi\psi}(\eta) = \chi_{\varphi\psi}(\xi + eta)$. Поскольку $\chi_{\varphi\psi}$ является биекцией (как композиция биекций), $\xi \tilde{+} \eta = \xi + \eta$, $\xi, \eta \in T_p(M)$. Таким образом, операция сложения не зависит от выбора локальной карты. Аналогично доказывается независимость операции умножения на число операции умножения на число (докажите!). □

Задача 1.22. Докажите независимость введенных операций от выбора локальной карты, используя формулу (2).

Определение 1.20. Линейное пространство $T_p(M)$ называется *касательным пространством* к многообразию M в точке p.

Рассмотрим векторы $\{e_1^0, \ldots, e_n^0\}$, где $e_i^0 = r_\varphi^{-1}\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ – стандартный базис арифметического пространства $\mathbf{R}^n$. Они образуют базис пространства $T_p(M)$. Векторы e_i^0 ($i = 1, \ldots, n$) этого базиса представляют собой классы эквивалентности для координатных линий, то есть путей, задаваемых в карте (U, φ) уравнениями $x^j \circ \gamma_i^*(t) = t\delta_i^j$. Этот базис называется *натуральным базисом* касательного пространства $T_p(M)$.

Теорема 1.5. Линейные пространства $T_p(M)$ и $\Delta_p(M)$ канонически изоморфны.

Доказательство. Зафиксируем локальную карту (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки $p \in M$ и построим отображение $\beta_\varphi : T_p(M) \to \Delta_p(M)$, положив $\beta_\varphi(\xi)(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \xi^i$, где $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ – координаты касательного вектора ξ в этой карте.

Задача 1.23. Докажите, что β_φ – линейное отображение, переводящее базис $(e_1^0, \ldots, e_n^0)$ пространства $T_p(M)$ в базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right)$ пространства $\Delta_p(M)$.

Задача 1.24. Используя формулу (2) и правило дифференцирования сложной функции, докажите, что отображение β_φ не зависит от выбора локальной карты. □

Таким образом, касательный вектор в данной точке гладкого многообразия канонически отождествляется с инфинитазимальным дифференцированием в этой точке, которое представляет собой ни что иное, как дифференцирование в направлении этого касательного вектора. При этом справедлива

Теорема 1.6. Задание векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ на n-мерном гладком многообразии равносильно заданию семейства касательных векторов $\{X_p \in T_p(M)\}|_{p\in M}$, такого, что в каждой локальной карте (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ на M функции $X^i(q) = X_q(x^i)$ принадлежат алгебре $C^\infty(U)$ и служат компонентами этого векторного поля в натуральном базисе.

Доказательство.* Пусть $X \in \mathcal{X}(M)$. Так как $\mathcal{X}(U)$ – свободный модуль с конечным числом образующих, $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, где $X^i(q) = X|_U(x^i \circ \varphi) \in C^\infty(U)$. Так как каждое векторное поле порождает инфинитазимальное дифференцирование по формуле $X_q(f) = X(f)(q)$, для координатных функций, в частности, имеем $X_q(x^i \circ \varphi) = X|_U (x^i \circ \varphi)(q) = X^i(q)$.

Обратно, если $X = \{X_p \in T_p(M)\}$ – семейство указанного вида, то для любой функции $f \in C^\infty(M)$ функция, заданная формулой

$$X(f)(p) = X_p(f)\; p \in M$$

принадлежит классу $C^\infty(M)$. В самом деле, во введенных обозначениях рассмотрим векторное поле $\tilde{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$, где $X^i(q) = X_q(x^i \circ \varphi)$. По второму принципу локализации $\exists V_p \,\exists Y \in \mathcal{X}(M)$: $\tilde{X}|_{V_p} = Y|_{V_p}$. Тогда $Y(f) \in C^\infty(M)$, причем $Y(f)|_{V_p} = Y|_{V_p} (f|_{V_p}) = \tilde{X}|_{V_p} (f|_{V_p}) = X(f)|_{V_p}$. Ввиду (F2) $Xf \in C^\infty(M)$. При этом $Y(f)|_{V_p} = X(f)|_{V_p} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_{V_p}$.

Задача 1.25. Докажите, что построенное отображение X удовлетворяет правилу Лейбница, то есть $X(fg) = X(f)g + fX(g)$, $f, g \in C^\infty(M)$.

Наконец, значение векторного поля X в произвольной точке $p \in M$ совпадает с X_p из данного семейства касательных векторов, и, значит, $X|_U = \tilde{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, откуда и следует последнее утверждение теоремы. □

В заключение докажем

Предложение 1.7. Касательное пространство к линейному пространству V^n, наделенному канонической гладкой структурой, в произвольной его точке канонически изоморфно V^n как линейному пространству.

Доказательство.* Зафиксируем базис $\alpha = (e_1, \ldots, e_n)$ пространства V^n. Определим набор функций $\omega^i : V^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$, ставящих в соответствие каждому вектору $X \in V^n$ его i-ю координату в базисе α. Этот набор функций $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ называется *дуальным базисом* линейного пространства V^n. Напомним, что картирующее отображение для V^n $\varphi_\alpha : V^n \to \mathbf{R}^n$ задается формулой $\varphi_\alpha(X) = (X^1, \ldots, X^n)$, где $X^i = \omega^i(X)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда функции $\omega^i \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ задаются уравнениями $\omega^i \circ \varphi_\alpha^{-1}(X^1, \ldots, X^n) = X^i$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, $\omega^i \in C^\infty(V^n)$.

Пусть $p \in V^n$. Построим отображение $\kappa : T_p(V) \to V$, положив $\kappa(\xi) = \xi(\omega^i)e_i$, $\xi \in T_p(V)$.

Задача 1.26. Докажите, что κ – линейное отображение и $ker\kappa = \{0\}$.

Так как $dimT_p(V) = dimV$, то κ сюръективно и, следовательно, является изоморфизмом линейных пространств.

Докажем, что этот изоморфизм не зависит от выбора базиса. Пусть $\beta = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ – другой базис линейного пространства V^n и $(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ – дуальный базис. Пусть $\varepsilon_i = C_i^j e_j$, то есть $C = (C_i^j)$ –

матрица перехода от базиса α к базису β.

Задача 1.27. Докажите, что $\theta^i = (C^{-1})^i_j \omega^j$.

Следовательно, $\xi(\theta^i)\varepsilon_i = \xi((C^{-1})^i_j\omega^j)C^k_i e_k = \delta^k_j \xi(\omega^j)e_k = \xi(\omega^j)e_j = \kappa(\xi)$. Таким образом, изоморфизм κ не зависит от выбора базиса, то есть определен внутренним образом. С его помощью касательное пространство $T_p(V)$ к V как гладкому многообразию в произвольной точке $p \in V$ внутренним образом отождествляется с линейным пространством V. $\square$

1.8 Алгебра Ли векторных полей гладкого многообразия

Пусть M – гладкое многообразие, $\mathcal{X}(M)$ – модуль его гладких векторных полей, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, рассматриваемые как дифференцирования алгебры $C^\infty(M)$. Рассмотрим их композицию $X \circ Y : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. Это линейное отображение. Выясним, является ли это отображение векторным полем. Для этого надо проверить, удовлетворяет ли это отображение правилу Лейбница. Пусть $f, g \in C^\infty(M)$

$X \circ Y(fg) = X(Y(fg)) = X(Y(f)g + fY(g)) = X(Y(f))g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fX(Y(g))$. Итак, композиция векторных полей векторным полем не является. Запишем

$Y \circ X(fg) = Y(X(f))g + X(f)Y(g) + Y(f)X(g) + fY(X(g))$. Вычтем из первого равенства второе

$(X \circ Y - Y \circ X)(fg) = (X \circ Y - Y \circ X)(f)g + f(X \circ Y - Y \circ X)(g)$

Это означает, что отображение $(X \circ Y - Y \circ X)$ является дифференцированием алгебры $C^\infty(M)$, то есть векторным полем на M. Это векторное поле обозначается $[X, Y]$ и называется *коммутатором векторных полей* или *скобкой Ли*. Итак, по определению

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

Задача 1.28. Докажите, что

$$1)\ [X, Y] = -[Y, X]\ \text{антикоммутативность}$$

$$2)\ [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0\ \text{тождество Якоби}$$

Эти тождества означают, что модуль $\mathcal{X}(M)$, рассматриваемый как (бесконечномерное) $\mathbf{R}-$ линейное пространство, обладает естественной структурой алгебры Ли относительно операции коммутирования, которая называется *алгеброй Ли векторных полей* гладкого многообразия M.

Задача 1.29. Докажите, что $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $\forall f, g \in C^\infty(M)$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

Задача 1.30. Пусть (U, φ) – локальная карта на многообразии M с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Докажите, что

$$[X, Y]^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j$$

1.9 Тензорная алгебра гладкого многообразия

Пусть K – коммутативное ассоциативное кольцо с 1, V - модуль над кольцом K (короче, K-модуль). Рассмотрим семейство V^* всех K линейных отображений отображений $\omega : V \to K$. Свойство линейности означает, что $\forall X, Y \in V, \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \omega(\alpha X + \beta Y) = \alpha\omega(X) + \beta\omega(Y)$. Элементы модуля V будем называть *векторами*, а элементы множества V^* – *ковекторами*. Оказывается, в множестве V^* также определена структура K-модуля.

Именно, пусть $\omega, \theta \in V^*$. Построим отображение $\omega + \theta : V \to K$ по формуле, положив $(\omega + \theta)(X) = \omega(X) + \theta(X)$, $X \in V$.

Задача 1.31. Докажите, что построенное отображение является линейным, то есть $\forall X, Y \in V, \forall \alpha, \beta \in K$ $(\omega + \theta)(\alpha X + \beta Y) = \alpha(\omega + \theta)(X) + \beta(\omega + \theta)(Y)$.

Определим операцию умножения элементов из V^* на элементы кольца K. Пусть $\lambda \in K, \omega \in V^*$. Положим по определению $\lambda\omega : V \to K$ по формуле $(\lambda\omega)(X) = \lambda(\omega(X))$, $X \in V$. Аналогично доказывается, что это отображение линейно (докажите самостоятельно).

Непосредственно проверяется, что введенные операции удовлетворяют всем аксиомам K-модуля (проверьте!).

Определение 1.21. K-модуль V^* называется модулем, *сопряженным* модулю V (или *дуальным* модулю V).

Замечание. Аналогично можно ввести в рассмотрение K-модуль $V^{**} = (V^*)^*$.

Существует канонический гомоморфизм $\tau : V \to V^{**}$, определенный формулой $\tau(X)(\omega) = \omega(X)$, $X \in V, \omega \in V^*$.
Докажем, что определенное отображение действительно гомоморфизм. $\tau(\alpha X+\beta Y)(\omega) = \omega(\alpha X+\beta Y) = \alpha\omega(X) + \beta\omega(Y) = \alpha\tau(X)(\omega) + \beta\tau(Y)(\omega) = (\alpha\tau(X) + \beta\tau(Y))(\omega)$. Итак,

$$\tau(\alpha X + \beta Y) = \alpha\tau(X) + \beta\tau(Y)$$

Гомоморфизм τ называется *каноническим.*

Определение 1.22. K-модуль V называется *рефлексивным*, если канонический гомоморфизм является изоморфизмом.

Задача 1.32. Докажите, что всякое конечномерное линейное пространство является рефлексивным модулем.

Определение 1.23. Пусть V – рефлексивный K-модуль, V^* – дуальный модуль. *Тензором* типа (r, s) на V или, подробнее, r раз ковариантным и s раз контравариантным тензором на V называется отображение $t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s \text{ раз}} \to K$, линейное по каждому аргументу. Множество всех тензоров типа (r,s) обозначается $\mathcal{T}_r^s(V)$.

В множестве тензоров вводятся операции:
1) $+ : \mathcal{T}_r^s(V) \times \mathcal{T}_r^s(V) \to \mathcal{T}_r^s(V)$ – *сумма тензоров*

$$(t_1 + t_2)(x_1, \ldots, x_r, u^1, \ldots, u^s) = t_1(x_1, \ldots, x_r, u^1, \ldots, u^s) + t_2(x_1, \ldots, x_r, u^1, \ldots, u^s)$$

$x_1, \ldots, x_r \in V$, $u^1, \ldots, u^s \in V^*$;
2) $\lambda\cdot : K \times \mathcal{T}_r^s(V) \to \mathcal{T}_r^s(V)$ – *произведение тензора на скаляр (элемент K)*

$$(\lambda \cdot t)(x_1, \ldots, x_r, u^1, \ldots, u^s) = \lambda(t(x_1, \ldots, x_r, u^1, \ldots, u^s))$$

$\lambda \in K$, $x_1, \ldots, x_r \in V$, $u^1, \ldots, u^s \in V^*$;
3) $\otimes : \mathcal{T}_{r_1}^{s_1}(V) \times \mathcal{T}_{r_2}^{s_2}(V) \to \mathcal{T}_{r_1+r_2}^{s_1+s_2}(V)$ – *тензорное умножение тензоров*

$$(t_1 \otimes t_2)(x_1, \ldots, x_{r_1+r_2}, u^1, \ldots, u^{s_1+s_2}) = t_1(x_1, \ldots, x_{r_1}, u^1, \ldots, u^{s_1})t_2(x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_1+r_2}, u^{s_1+1}, \ldots, u^{s_1+s_2})$$

$x_1, \ldots, x_{r_1+r_2} \in V$, $u^1, \ldots, u^{s_1+s_2} \in V^*$.

Задача 1.33. Докажите, что определения корректны, то есть в результате введенных операций получаются тензоры.

Задача 1.34. Докажите, что

1. $t_1 \otimes (t_2 + t_3) = t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes t_3$
2. $(t_1 + t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_3$
3. $t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3$

Операция тензорного умножения превращает K-модуль

$$\mathcal{T}(V) = \oplus_{r=0}^{\infty} \oplus_{s=0}^{\infty} \mathcal{T}_r^s(V)$$

где $\mathcal{T}_0^0(V) = K$, в ассоциативную алгебру, которая называется *тензорной алгеброй* модуля V. Из рефлексивности этого модуля следует, что компонента $\mathcal{T}_0^1(V)$ этой прямой суммы канонически отождествляется с V. Из этого определения следует также, что подмодули $\mathcal{T}_*(V) = \oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{T}_r^0(V)$ и $\mathcal{T}^*(V) = \oplus_{s=0}^{\infty}\mathcal{T}_0^s(V)$ образуют подалгебры тензорной алгебры $\mathcal{T}(V)$, называемые соответственно *ковариантной* и *контравариантной* тензорными алгебрами модуля V.

Пусть V – конечномерное линейное пространство над полем K, $(e_1, \ldots, e_n)$ – его базис. Построим отображения $e^i : V \to K$, $i = 1, \ldots, n$ по формуле $e^i(X) = X^i$, где $(X^1, \ldots, X^n)$ – координаты вектора X в данном базисе.

Задача 1.35. Докажите, что набор $(e^1,\dots,e^n)$ является базисом сопряженного пространства V^*. Построенный базис называется *дуальным базисом* пространства V или *кобазисом.* В частности, из этого следует, что $dimV^*=n$. Дуальный базис однозначно характеризуется условием $e^i(e_j)=\delta^i_j$, где $\delta^i_j=\begin{cases}1,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}$ – символ Кронекера.

Если фиксировать базис $(e_1,\dots,e_n)$ линейного пространства V и кобазис $(e^1,\dots,e^n)$, то система тензоров

$$e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_s}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_r},\ i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_r=1,\dots,n$$

образуют базис линейного пространства $\mathcal{T}^s_r(V)$. В частности,

$$dim\mathcal{T}^s_r(V)=2^{r+s}$$

Задача 1.36. Докажите. (Составьте линейную комбинацию из данных тензоров $\lambda^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_s}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_r}=0$. Фиксируйте набор значений индексов $k_1,\dots,k_s,l_1,\dots,l_r$ и подействуйте линейной комбинацией на набор $e^{k_1},\dots,e^{k_s},e_{l_1},\dots,e_{l_r}$. Тем самым получите линейную независимость тензоров. Далее возьмите произвольный тензор $t\in\mathcal{T}^s_r(V)$ и постройте тензор $T=t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_s}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_r}$, где скаляры

$$t^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_r}=t(e_{j_1},\dots,e_{j_r},e^{i_1},\dots,e^{i_s})$$

называются *компонентами тензора* t в базисе $(e_1,\dots,e_n)$. Докажите, что тензоры T и t имеют одни и те же компоненты в базисе $(e_1,\dots,e_n)$, следовательно, совпадают. Откуда следует, что тензор t представляется в виде линейной комбинации данного набора тензоров.)

Задача 1.37. Докажите, что набор компонент тензора в данном базисе однозначно определяет этот тензор.

Определение 1.24. *Тензором типа* (r,s) *со значениями* в K-модуле $\mathcal{A}$ называется отображение

$$t:\underbrace{V\times\ldots\times V}_{r\text{ раз}}\times\underbrace{V^*\times\ldots\times V^*}_{s\text{ раз}}\to\mathcal{A}$$

K-линейное по каждому аргументу.

Пусть, в частности, K – вещественная алгебра, W – N-мерное вещественное линейное пространство, t – тензор типа (r,s) со значениями в модуле $\mathcal{A}=K\otimes W$ (такой тензор обычно называют *тензором со значениями в линейном пространстве* W).

Замечание. Пусть U и V – два векторных пространства над полем F. Определим тензорное произведение $U\otimes V$ двух векторных пространств U и V следующим образом. Пусть $M(U,V)$ есть векторное пространство, которое имеет множество $U\times V$ как базис, то есть свободное векторное пространство, порожденное парами (u,v),$u\in U$, $v\in V$. Пусть N есть векторное подпространство в $M(U,V)$, порожденное элементами вида

$$\begin{array}{cc}(u+u',v)-(u,v)-(u',v) & (u,v+v')-(u,v)-(u,v')\\ (ru,v)-r(u,v) & (u,rv)-r(u,v)\end{array}$$

$u,u'\in U$, $v,v'\in V$, $r\in F$. Положим $U\otimes V=M(U,V)/N$, то есть фактормножество $M(U,V)$ по подпространству N. Для каждой пары (u,v), рассматриваемой как элемент $M(U,V)$, ее образ при действии естественной проекции $M(U,V)\to U\otimes V$ будет обозначаться $u\otimes v$.

В нашем случае F – поле вещественных чисел, $U=K$, $V=W$. □

Фиксируем базис $b=(e_1,\dots,e_N)$ в W. Пусть $(e^1,\dots,e^N)$ – дуальный базис. Как мы видели выше векторы – это тензоры типа (0,1), а ковекторы – тензоры типа (1,0). Тогда тензорное произведение $e^a\otimes e_a$, $a=1,\dots,N$ – тензор типа (1,1), то есть K-линейное отображение $t:\mathcal{A}\times\mathcal{A}^*\to K$. Его можно отождествить с линейным оператором на $\mathcal{A}$, то есть с линейным отображением $T:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ следующим образом: $t(X,u)=u(T(X))$, $X\in\mathcal{A}$, $u\in\mathcal{A}^*$ (это возможно сделать в силу рефлексивности K-модуля $\mathcal{A}$). Тогда посмотрим на тензорное произведение $e^a\otimes e_a$ как на линейный оператор и выясним, что это за оператор. Имеем $u(e^a\otimes e_a(X))=e^a\otimes e_a(X,u)=e^a(X)e_a(u)=X^au(e_a)=X^au_a=u(X)$, $X\in\mathcal{A}$, $u\in\mathcal{A}^*$. Так как это равенство верно для любого ковектора u, то $e^a\otimes e_a(X)=X$, то есть $e^a\otimes e_a=id$.

Пусть t – тензор типа (r.s) со значениями в K-модуле $\mathcal{A}$. Очевидно, $t=id\circ t$, где id – это тождественный оператор в модуле $\mathcal{A}$. Тогда

$$t=id\circ t=(e^a\otimes e_a)\circ t=(e^a\circ t)\otimes e_a=t^a\otimes e_a$$

где отображения $t^a = e^a \circ t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s \text{ раз}} \to K$ являются обычными тензорами типа (r,s) и называются *тензорными компонентами* тензора t в базисе b.

Пусть $\beta = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ – другой базис в W, $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^N)$ – дуальный ему базис, $C = (C^a_b)$ – матрица перехода от базиса b к базису β, $H = (h^a_b) = C^{-1}$, $a, b = 1, \ldots, N$. Тогда $\varepsilon^a = h^a_b e^b$. Следовательно, если $\tilde{t}^a = \varepsilon^a \circ t$ – тензорная компонента тензора t в новом базисе, то

$$\tilde{t}^a = h^a_b t^b$$

Пусть теперь M – n-мерное гладкое многообразие. Наша задача – доказать, что модуль $\mathcal{X}(M)$ рефлексивен, а значит, порождает вполне определенную тензорную алгебру, которая называется *тензорная алгеброй гладкого многообразия* M.

Определение 1.25. Модуль $\mathcal{X}^*(M)$, дуальный модулю $\mathcal{X}(M)$, называется *модулем дифференциальных 1-форм на многообразии* M.

Изучим основные свойства дифференциальных 1-форм (для краткости будем называть их просто 1-формами).

Предложение 1.8. Пусть $X \in \mathcal{X}(M)$, $X|_U = 0$, где $U \subset M$ открытое подмногообразие. Тогда

$$\forall \omega \in \mathcal{X}^*(M) \Rightarrow \omega(X)|_U = 0$$

Доказательство. Пусть $p \in U$ – произвольная точка. Тогда

$$\exists g \in C^\infty(M) \; : \; g(p) = 0, g\Big|_{M \setminus U} = 1$$

Очевидно, $gX = X$. Тогда в силу линейности 1-формы ω получим $\omega(X) = \omega(gX)(p) = g(p)\omega(X) = 0$. Это верно для любой точки $p \in U$, то есть $\omega(X)|_U = 0$. □

Следствие. Пусть U – открытое подмногообразие в M. Тогда всякая 1-форма $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$ индуцирует 1-форму $\tilde{\omega} \in \mathcal{X}^*(U)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное векторное поле $X \in \mathcal{X}(U)$. По второму принципу локализации для векторных полей для любой точки $p \in U$ существует окрестность V_p и векторное поле $Y \in \mathcal{X}(M)$ такие, что $X\big|_{V_p} = Y\big|_{V_p}$. Тогда определим функцию $\tilde{\omega}(X)\big|_{V_p} = \omega(Y)\big|_{v_p}$. Эта функция не зависит от выбора векторного поля Y. Действительно, путь $Z \in \mathcal{X}(M)$ такое, что $Z\big|_{V_p} = X\big|_{V_p}$. Тогда $(Z-Y)\big|_{V_p} = \Rightarrow \omega(Z-Y)\big|_{V_p} = 0$. В силу линейности 1-формы ω получим $\omega(Z)\big|_{V_p} - \omega(Y)\big|_{V_p} = 0$. В силу (F2) функция $\tilde{\omega}(X) \in C^\infty(U)$.

Определим отображение $\tilde{\omega} : \mathcal{X}(U) \to C^\infty(U)$ по формуле $X \to \tilde{\omega}(X)$. Очевидно, это $C^\infty(U)$-линейное отображение, то есть ковектор. □

Форма $\tilde{\omega}$ называется *сужением* или *локализацией* 1-формы ω на U и обозначается $\omega|_U$.

Заметим, что из определения локализации 1-формы следует, что $\omega(X)|_U = \omega|_U (X|_U)$, $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$.

Более того, справедливо

Предложение 1.9. Пусть $X \in \mathcal{X}(M)$ – векторное поле, такое, что $X_p = 0$ в некоторой точке $p \in M$. Тогда

$$\forall \omega \in \mathcal{X}^*(M) \Rightarrow \omega(X)(p) = 0$$

Доказательство. Пусть (U, φ) – локальная карта на M в окрестности точки p с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда

$$\omega(X)|_U = \omega|_U (X|_U) = \omega|_U \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = X^i \omega|_U \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

где $X^i(q) \in C^\infty(U)$. В частности, в точке p получим $\omega(X)(p) = X^i(p)\omega|_U \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(p)$. Так как по доказанному выше $X^i(p) = X_p(x^i \circ \varphi)$ и по условию $X_p = 0$, то $\omega(X)(p) = 0$. □

Отсюда сразу же следует, что корректно определено сужение ω_p 1-формы ω на точку $p \in M$, а именно $\forall X_p \in T_p(M)$ определим $\omega_p(X_p) = \omega(X)(p)$, где $X \in \mathcal{X}(M)$, $X(p) = X_p$. Пусть $Y \in \mathcal{X}(M)$ – другое векторное поле, для которого $Y(p) = X_p$. Тогда $(X - Y)(p) = 0$ и $\omega(X - Y)(p) = 0$, то есть $\omega(X)(p) = \omega(Y)(p)$. Откуда и следует корректность введенного определения.

Это будет линейная функция на пространстве $T_p(M)$, то есть элемент дуального пространства $T_p^*(M)$. Обозначим совокупность всех таких элементов $\mathcal{D}(p)$. Оказывается, что $\mathcal{D}(p) = T_p^*(M)$. Чтобы доказать это, нам понадобится следующее

Предложение 1.10. Пусть $\omega \in \mathcal{X}^*(U)$, где $U \subset M$ – открытое подмногообразие. Тогда

$$\forall p \in U \exists \tilde{\omega} \in \mathcal{X}^*(M) \exists V_p \subset U \,:\, \tilde{\omega}\,|_{V_p} = \omega\,|_{V_p}$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{X}(M)$ – произвольное векторное поле, $X\,|_U$ – его локализация на открытое подмногообразие U, V_p – компактная окрестность точки $p \in U$. Тогда

$$\exists \psi \in C^\infty(M) \,:\, \psi\,|_{V_p} \equiv 1, supp\psi \subset U$$

Положим

$$\tilde{\omega}(X) = \begin{cases} \psi(q)\omega(X\,|_U)(q),\ (q \in U) \\ 0,\ (q \notin U) \end{cases}$$

Тогда $X \to \tilde{\omega}(X)$ требуемая 1-форма. □

Предложение 1.11. Во введенных обозначениях $\mathcal{D}(p) = T_p^*(M)$.

Доказательство. Согласно определению, $\mathcal{D}(p) \subset T_p^*(M)$. Обратно, пусть $L \in T_p^*(M)$. Пусть (U, φ) – локальная карта с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки p. Обозначим $l_i = L\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)$. Рассмотрим базис $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ модуля $\mathcal{X}^*(U)$ дуальный натуральному базису, то есть $\omega^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$. Рассмотрим 1-форму $\theta = l_i\omega^i \in \mathcal{X}^*(U)$. По предложению 1.9

$$\exists \tilde{\theta} \in \mathcal{X}^*(M) \exists V_p \,:\, \tilde{\theta}\,|_{V_p} = \theta\,|_{V_p}$$

В частности, $\tilde{\theta}_p(\xi) = \theta_p = l_i\omega^i_p(\xi) = L\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)\omega^i_p(\xi) = L\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)\xi^i = L\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\xi^i\right) = L(\xi)$, $\forall \xi \in T_p(M)$. Здесь мы использовали, что $(\omega^1_p, \ldots, \omega^n_p)$ будет дуальным базисом для натурального базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}{}_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}{}_p\right)$. Следовательно, $\tilde{\theta}_p = L$, то есть $T_p^*(M) = \mathcal{D}(p)$. □

Определение 1.26. Пространство $\mathcal{D}(p) = T_p^*(M)$ называется *кокасательным пространством* к многообразию M в точке p.

Теперь мы в состоянии доказать следующий принципиальный результат.

Теорема 1.7. Модуль гладких векторных полей $\mathcal{X}(M)$ гладкого многообразия M рефлексивен.

Доказательство.* Пусть $X \in \mathcal{X}(M)$. Его можно рассматривать как элемент модуля, дуального модулю $\mathcal{X}^*(M)$. В самом деле, если $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$ – произвольная дифференциальная 1-форма на M, то достаточно положить $X(\omega) = \omega(X)$. Очевидно, отображение X $C^\infty(M)$ линейно. Отсюда вытекает, что $\mathcal{X}(M) \subset (\mathcal{X}(M)^*)^*$.

Обратно, пусть $F \in (\mathcal{X}(M)^*)^*$. Так же как в предложении 1.9 убеждаемся, что если $U \subset M$ – открытое подмногообразие, $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$ – 1-форма на M, такая, что $\omega\,|_U = 0$, то $F(\omega)\,|_U = 0$, а значит, определена локализация элемента F на любое открытое подмногообразие в M. Далее, поскольку в координатной окрестности U локальной карты (U, φ) на M представляется в виде $\omega\,|_U = f_i\omega^i$ (действительно, $\omega\,|_U(X\,|_U) = \omega\,|_U\left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \omega\,|_U\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)X^i = \omega\,|_U\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\omega^i(X)$, $\forall X \in \mathcal{X}(U)$.), $f_i \in C^\infty(U)$, мы убеждаемся, что если $\omega_p = 0$, то $F(\omega)(p) = 0$. Отсюда сразу же следует, что отображение $\omega_p \to F(\omega)(p)$ – вполне определенная линейная функция на пространсве $\mathcal{D}(p) = T_p^*(M)$. Поскольку это конечномерное линейное пространство, $\exists! X_p \in \mathcal{T}_p(M) \,:\, F(\omega)(p) = \omega_p(X_p)$. Следовательно, определено семейство $X = \{X_p\}\,|_{p \in M}$ таких элементов. Разложим их по натуральному базису в соответствующих точках: $X_p = X^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$. Остается убедиться, что $X^i \in C^\infty(U)$. Рассмотрим кобазис $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$, дуальный натуральному базису модуля $\mathcal{X}(U)$. Имеем

$$\exists V_p \subset U \exists \{\tilde{\omega}^i\} \subset \mathcal{X}^*(M) \,:\, \tilde{\omega}^i\,|_{V_p} = \omega^i\,|_{V_p},\ i = 1, \ldots, n$$

Следовательно,

$$F(\tilde{\omega}^i)(q) = \tilde{\omega}^i_q(X_q) = X^i(q),\ q \in V_p,\ i = 1, \ldots, n$$

Поскольку $F(\tilde{\omega}^i) \in C^\infty(M)$, функции X^i гладкие и в силу теоремы 1.7 $X \in \mathcal{X}(M)$, причем $F(\omega) = \omega(X)$. Таким образом, F можно отождествить с X, а значит, $(\mathcal{X}(M)^*)^* \subset \mathcal{X}(M)$. □

Определение 1.27. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $p \in M$. Тензорная алгебра $\mathcal{T}(T_p(M))$ обозначается $\mathcal{T}(p)$ и называется *тензорной алгеброй многообразия* M *в точке* p. Тензорная алгебра $\mathcal{T}(\mathcal{X}(M))$ обозначается $\mathcal{T}(M)$ и называется тензорной алгеброй многообразия M. Элементы этой тензорной алгебры называются *тензорными полями* или просто *тензорами* на многообразии M.

Несложно доказать, что для тензоров произвольного типа на гладком многообразии M справедливы те же свойства локализации, которые были сформулированы нами для векторных полей. Более того, пусть $t \in \mathcal{T}_r^s(M)$. Как и для 1-форм доказывается, что если хотя бы один из аргументов $u_1, \dots, u_r, v^1, \dots, v^s$ этого тензорного поля обращается в нуль в точке $p \in M$, то $t(u_1, \dots, u_r, v^1, \dots, v^s)(p) = 0$, а значит, тензорное поле t можно рассматривать как набор $t = \{t_p | p \in M, t_p \in \mathcal{T}_r^s(p)\}$ тензоров, определенных в каждой точке многообразия M. Аналогично соответствующей теореме для векторных полей доказывается

Теорема 1.8. Задание тензорного поля $t \in \mathcal{T}_r^s(M)$ на n-мерном гладком многообразии M равносильно заданию семейства тензоров $\{t_p \in \mathcal{T}_r^s(T_p(M))\}_{p \in M}$, такого, что в каждой локальной карте (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ на M функции

$$t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(q) = t_q \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\Big|_q, \omega_q^{j_1}, \dots, \omega_q^{j_s} \right)$$

где $(\omega_q^1, \dots, \omega_q^n)$ – кобазис, дуальный натуральному базису пространства $T_q(M)$ в точке $q \in M$, принадлежат алгебре $C^\infty(U)$. $\square$

Замечание. Легко видеть, что отображение локализации, в том числе и точечной, является гомоморфизмом тензорных алгебр, рассматриваемых как $\mathbf{R}$-векторные пространства, в частности,

$$(t_1 + t_2)_p = (t_1)_p + (t_2)_p; \ (t_1 \otimes t_2)_p = (t_1)_p \otimes (t_2)_p$$

$t_1, t_2 \in \mathcal{T}(M), p \in M$. Это обстоятельство позволяет естественно определить операцию свертки в тензорной алгебре $\mathcal{T}(M)$, положив

$$\left(C_{(j)}^{(i)} t \right)_p = C_{(j)}^{(i)}(t_p); \ t \in \mathcal{T}_r^s(M), p \in M$$

Из предыдущей теоремы легко следует, что $\left(C_{(j)}^{(i)} t \right) \in \mathcal{T}_{r-1}^{s-1}(M)$.