7 Комплексные многообразия.

7.1 Голоморфные функции.

Пусть $\mathbf{C}^n = \{(z^1, \ldots, z^n), z_k \in \mathbf{C}, k = 1, \ldots, n\}$ – комплексное арифметическое пространство. Его можно рассматривать как $2n-$ мерное вещественное пространство. Именно, если $z = x + \sqrt{-1}y$, $x, y \in \mathbf{R}$, то можно отождествить $(z^1, \ldots, z^n)$ с $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$. В этом случае $\mathbf{R}^{2n}$ называется *овеществлением* пространства $\mathbf{C}^n$ и обозначается $(\mathbf{C}^n)^R$.

Отличие овеществления пространства $\mathbf{C}^n$ от произвольного $\mathbf{R}^{2n}$ заключается в том, что элементы $\mathbf{R}^{2n} \equiv (\mathbf{C}^n)^R$ можно умножать на комплексные числа, в частности, на комплексное число $\sqrt{-1}$. А именно, результат умножения вектора $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ на комплексное число $\sqrt{-1}$ можно интерпретировать как результат применения к этому вектору линейного оператора $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, $J_0^2 = -id$, то есть J_0 – комплексная структура на $\mathbf{R}^{2n}$. В частности, в $\mathbf{R}^{2n}$ возникает структура $\mathbf{C}-$ модуля, в котором умножение $X \in \mathbf{R}^{2n}$ на комплексное число $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$ определяется формулой $zX = (\alpha X + \beta J_0 X)$. Оператор J_0 называется *стандартной комплексной структурой* в $\mathbf{R}^{2n}$.

С другой стороны, возможность отождествления $\mathbf{C}^n$ с $\mathbf{R}^{2n}$ позволяет рассмотреть $\mathbf{C}^n$ как вещественное евклидово пространство, в частности, как топологическое пространство, снабженное евклидовой топологией пространства $\mathbf{R}^{2n}$. В частности, в $\mathbf{C}^n$ имеет смысл понятие области и других топологических понятий.

Пусть $U \subset \mathbf{C}^n$ – область; $f : U \to \mathbf{C}$ – отображение, которое каждому элементу $z \in U$ ставит в соответствие однозначно определенное комплексное число. Это отображение называется *функцией n комплексных переменных* с областью определения U. Обозначение $w = f(z^1, \ldots, z^n)$, $(z^1, \ldots, z^n) \in U$.

Если $z^k = x^k + \sqrt{-1}y^k$, $w = u + \sqrt{-1}v$, то задание такой функции равносильно заданию двух функций $2n$ вещественных переменных, а именно,

$$\begin{cases} u = u(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n); \\ v = v(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) \end{cases}$$

Определение 7.1. Говорят, что функция f *дифференцируема в смысле вещественного анализа* в точке $p = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$, короче, $\mathbf{R}$-*дифференцируема*, если каждая из функций $u = u(x^i, y^i)$ и $v = v(x^i, y^i)$ дифференцируема, то есть если $(x^i, y^i) \to (x^i + \Delta x^i, y^i + \Delta y^i)$, то $\Delta u \equiv u(x^i + \Delta x^i, y^i + \Delta y^i) - u(x^i, y^i) = A_i \Delta x^i + C_j \Delta y^j + \bar{o}(\rho)$ и $\Delta v \equiv v(x^i + \Delta x^i, y^i + \Delta y^i) - v(x^i, y^i) = B_i \Delta x^i + D_j \Delta y^j + \bar{o}(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^n ((\Delta x^k)^2 + (\Delta y^k)^2)}$. При этом с необходимостью $A_i = \left.\frac{\partial u}{\partial x^i}\right|_p$, $C_j = \left.\frac{\partial u}{\partial y^i}\right|_p$, $B_i = \left.\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|_p$, $D_j = \left.\frac{\partial v}{\partial y^i}\right|_p$.

Умножим Δv на $\sqrt{-1}$ и прибавим к Δu: $\Delta f \equiv \Delta u + \sqrt{-1}\Delta v = (A_i + \sqrt{-1}B_i)\Delta x^i + (C_j + \sqrt{-1}D_j)\Delta y^j + \bar{o}(\rho)$. Обозначим $A_i + \sqrt{-1}B_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$ и $C_j + \sqrt{-1}D_j = \left.\frac{\partial f}{\partial y^j}\right|_p$. Тогда получим

$$\Delta f = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \Delta x^i + \left.\frac{\partial f}{\partial y^j}\right|_p \Delta y^j + \bar{o}(\rho)$$

где $\frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial u}{\partial y^j} = \frac{\partial u}{\partial y^j} + \sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial y^j}$.

Выражение $df \equiv \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \Delta x^i + \left.\frac{\partial f}{\partial y^j}\right|_p \Delta y^j$ называется *дифференциалом* или *главной линейной частью приращения* в точке p.

Положим по определению $\frac{\partial f}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y^i}\right)$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y^i}\right)$. Кроме того, положим по определению $dz^i \equiv \Delta z^i = \Delta x^i + \sqrt{-1}\Delta y^i$, $d\bar{z}^i \equiv \Delta \bar{z}^i = \Delta x^i - \sqrt{-1}\Delta y^i$.

Тогда с учетом этих определений

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial z^i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i}\right); \quad \frac{\partial f}{\partial y^i} = \sqrt{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial z^i} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i}\right);$$

$df = \left(\frac{\partial f}{\partial z^i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i}\right)\frac{1}{2}(dz^i + d\bar{z}^i) + \sqrt{-1}(\frac{\partial f}{\partial z^i} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i})(-\frac{\sqrt{-1}}{2})(dz^i - d\bar{z}^i) = \frac{\partial f}{\partial z^i}dz^i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i}d\bar{z}^i$.

Итак, во введенных обозначениях дифференциалом $\mathbf{R}-$ дифференцируемой в данной точке функции n комплексных переменных вычисляется по формуле

$$df = \frac{\partial f}{\partial z^i}dz^i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i}d\bar{z}^i$$

Определение 7.2. Функция f n комплексных переменных называется *дифференцируемой в смысле комплексного анализа*, короче, $\mathbf{C}-$ *дифференцируемой*, если
1) f является $\mathbf{R}-$ дифференцируемой;
2) $df = \frac{\partial f}{\partial z^i} dz^i$.

Предложение 7.1. Пусть f является $\mathbf{R}-$ дифференцируемой функцией. Тогда f является $\mathbf{C}-$ дифференцируемой тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} = 0$. □

С учетом наших определений $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial u}{\partial y^i} - \frac{\partial v}{\partial y^i} = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial v}{\partial y^i}; \quad \frac{\partial u}{\partial y^i} = -\frac{\partial v}{\partial x^i} \tag{1}$$

Теорема 7.1. $\mathbf{R}-$ дифференцируемая функция f n комплексных переменных является $\mathbf{C}-$ дифференцируемой тогда и только тогда, когда выполняется (1). □

Условия (1) называются *уравнениями Коши-Римана* (иногда *Даламбера-Эйлера*).

Определение 7.3. Функция n комплексных переменных называется *голоморфной* (или *комплексно-аналитической*) в точке p, если она $\mathbf{C}-$ дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция называется *голоморфной*, если она голоморфна в каждой точке своей области определения.

В комплексном анализе доказывается, что голоморфность функции в точке равносильна разложимости этой функции в степенной ряд в некоторой окрестности этой точки. Отсюда легко следует, что $\mathbf{C}-$ дифференцируемость функции влечет ее гладкость, то есть существование непрерывных частных производных любого порядка ее вещественной и мнимой частей.

Определение 7.4. Пусть $U \subset \mathbf{C}^n$, $V \subset \mathbf{C}^m$ – области комплексных евклидовых пространств. Отображение $f : U \to V$ называется *голоморфным*, если оно задается системой из m голоморфных в области U функций.

Если существует $f^{-1} : V \to U$, которое также голоморфно, то f называется *биголоморфизмом* или *голоморфной эквивалентностью*.

Из сказанного следует, что любой биголоморфизм является диффеоморфизмом овеществления этих областей.

Определение 7.5. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. *Комплексной картой*, короче $\mathbf{C}-$ *картой*, в M называется пара (U, φ), где $U \subset M$ – область, $\varphi : U \to \tilde{U} \subset \mathbf{C}^n$ – гомеоморфизм на область в пространстве $\mathbf{C}$. Отображение φ называется *картирующим отображением*.

Две карты (U, φ) и (V, ψ) на M называются $\mathbf{C}-$ *согласованными*, если отображение $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ является биголоморфизмом.

Определение 7.6. Семейство $\mathbf{C}-$ карт в M называется $\mathbf{C}-$ *атласом*, если
1) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;
2) любая пара карт этого семейства $\mathbf{C}-$ согласована.
Произвольная карта (U, φ) называется $\mathbf{C}-$ *согласованной* с атласом, если она $\mathbf{C}-$ согласованна с каждой картой этого атласа. $\mathbf{C}-$ атлас называется *полным*, если он содержит любую согласованную с ним $\mathbf{C}-$ карту.

Определение 7.7. Полный $\mathbf{C}-$ атлас называется *комплексной структурой* на M. Пара, состоящая из хаусдорфова топологического пространства со счетной базой M и фиксированной на нем комплексной структуры, называется *комплексным многообразием*.

Размерностью комплексного многообразия называется размерность любой его карты, то есть размерность образа ее картирующего отображения.

Замечание. Любое $n-$ мерное комплексное многообразие можно рассмотреть как $2n-$ мерное вещественное многообразие. В самом деле, в силу сказанного выше любая пара $\mathbf{C}-$ согласованных $\mathbf{C}-$ карт является в то же время парой согласованных карт (так как любой биголоморфизм является диффеоморфизмом). □

7.2 Почти комплексная структура на овеществлении комплексного многообразия.

Пусть M^n – $n-$ мерное комплексное многообразие, $M^{2n} \equiv (M^n)^R$ – его овеществление, являющееся $2n-$ мерным вещественным многообразием. Фиксируем $\mathbf{C}-$ карту (U, φ) на M с координатами $(z^1, \ldots, z^n)$, $z^a = x^a + \sqrt{-1}x^{\hat{a}}$ $(a = 1, \ldots, n$.

Фиксируем точку $p \in U$ и определим эндоморфизм I_p касательного пространства $T_p(M)$ (где M рассматривается как вещественное многообразие) следующей формулой $I_p = r_\varphi^{-1} \circ I_0 \circ r_\varphi$, где r_φ –

реперное отображение, а именно, $r_\varphi(\xi) = (\xi^1, \ldots, \xi^{2n})$ – компоненты касательного вектора ξ в данной карте (карта рассматривается как вещественная) или, что эквивалентно, $r_\varphi = (\varphi_*)_p$. Здесь I_0 – стандартная комплексная структура на $\mathbf{R}^{2n}$, рассматриваемом как овеществление пространства $\mathbf{C}^n$. Напомним, что эндоморфизму $I_0 : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ отвечает умножение на $\sqrt{-1}$ в $\mathbf{C}^n \equiv \mathbf{R}^{2n}$ так, что если $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta \in \mathbf{C}$, $X \in \mathbf{C}^n \equiv \mathbf{R}^{2n}$, то $zX = \alpha X + \beta(I_0 X)$. Очевидно, $I_p^2 = -id$, то есть I_p – почти комплексная структура в области U. Нужно еще убедиться, что тензорное поле I гладко. Это вытекает из того, что его компоненты в натуральном базисе $I_j^i = dx^i(I(\frac{\partial}{\partial x^j})) = dx^i(r_\varphi^{-1} \circ I_0 \circ r_\varphi(\frac{\partial}{\partial x^j})) = dx^i(r_\varphi^{-1} \circ I_0(e_j)) = e^i(I_0(e_j)) = (I_0)_j^i$, то есть

$$(I_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь $(e_i = r_\varphi(\frac{\partial}{\partial x^i}))$ – стандартный базис в $\mathbf{R}^{2n}$, $dx^i \circ r_\varphi^{-1} = e^i$ – дуальный кобазис стандартного базиса. Итак, функции I_j^i являются константами, а значит, гладки. Следовательно, I – гладкое тензорное поле на многообразии M. Заметим, что в данном случае страндартный базис $(e_1, \ldots, e_{2n})$ пространства $\mathbf{R}^{2n}$ является $RA-$ базисом.

Определение 7.8. Назовем построенную почти комплексную структуру I на области U *канонической* почти комплексной структурой данной $\mathbf{C}-$ карты.

Замечание. Доказанное соотношение $(I_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ равносильно соотношениям $I(\frac{\partial}{\partial x^a}) = \frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}}$, $I(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}}) = -\frac{\partial}{\partial x^a}$.

Пусть на многообразии M заданы две $\mathbf{C}-$ карты (U, φ) и (V, ψ). Тогда на пересечении областей этих карт возникают две почти комплексные структуры. Обозначим их I и J, соответственно, $I = r_\varphi^{-1} \circ I_0 \circ r_\varphi$, $J = r_\psi^{-1} \circ I_0 \circ r_\psi$. Возникает вопрос: когда эти две почти комплексные структуры совпадут?

Предложение 7.2. Канонические почти комплексные структуры двух $\mathbf{C}-$ карт совпадают на пересечении областей этих $\mathbf{C}-$ карт тогда и только тогда, когда эти $\mathbf{C}-$ карты голоморфно связаны.

Доказательство. Пусть (U, φ) – $\mathbf{C}-$ карта с координатами $z^a = x^a + \sqrt{-1}x^{\hat{a}}$; (V, ψ) – $\mathbf{C}-$ карта с координатами $w^a = u^a + \sqrt{-1}u^{\hat{a}}$, $a = 1, \ldots, n$. Пусть I и J – их канонические почти комплексные структуры. Тогда $I|_{U\cap V} = J|_{U\cap V}$ тогда и только тогда, когда $r_\varphi^{-1} \circ I_0 \circ r_\varphi = r_\psi^{-1} \circ I_0 \circ r_\psi$. Так как $r_\varphi = (\varphi_*)$, $r_\psi = (\psi_*)$ в соответствующей точке, то последнее соотношение равносильно

$$(\psi \circ \varphi^{-1})_* \circ I_0 = I_0 \circ (\psi \circ \varphi^{-1})_* \tag{2}$$

Заметим, что $(I_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ и $(\psi \circ \varphi^{-1})_* = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^a}{\partial x^b} & \frac{\partial u^a}{\partial x^{\hat{b}}} \\ \frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^b} & \frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^{\hat{b}}} \end{pmatrix}$. Тогда (2) равносильно

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^a}{\partial x^b} & \frac{\partial u^a}{\partial x^{\hat{b}}} \\ \frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^b} & \frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^{\hat{b}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^a}{\partial x^b} & \frac{\partial u^a}{\partial x^{\hat{b}}} \\ \frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^b} & \frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^{\hat{b}}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^a}{\partial x^{\hat{b}}} & -\frac{\partial u^a}{\partial x^b} \\ \frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^{\hat{b}}} & -\frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^b} & -\frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^{\hat{b}}} \\ \frac{\partial u^a}{\partial x^b} & \frac{\partial u^a}{\partial x^{\hat{b}}} \end{pmatrix}$$

Что равносильно $\frac{\partial u^a}{\partial x^{\hat{b}}} = -\frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^b}$, $-\frac{\partial u^a}{\partial x^b} = -\frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^{\hat{b}}}$, $\frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^{\hat{b}}} = \frac{\partial u^a}{\partial x^b}$, $-\frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^b} = \frac{\partial u^a}{\partial x^{\hat{b}}}$, то есть $\frac{\partial u^a}{\partial x^b} = -\frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^{\hat{b}}}$, $\frac{\partial u^a}{\partial x^{\hat{b}}} = \frac{\partial u^{\hat{a}}}{\partial x^b}$ – условия Коши для функций, задающих отображение $\psi \circ \varphi^{-1}$. В силу равноправия карт, обратное отображение также голоморфно, следовательно, $\psi \circ \varphi^{-1}$ – голоморфизм. □

Теорема 7.2. На овеществлении любого комплексного многообразия внутренним образом определена почти комплексная структура.

Доказательство. По доказанному такая структура определена в области любой $\mathbf{C}-$ карты внутренним образом. В силу предыдущего предложения эти структуры совпадают на пересечении $\mathbf{C}-$ карт и, следовательно, определяют почти комплексную структуру, глобально определенную на овеществлении этого комплексного многообразия. □

Определение 7.9. Почти комплексная структура, внутренним образом присоединенная к овеществлению комплексного многообразия, называется *канонической* почти комплексной структурой этого многообразия.

Определение 7.10. Пусть M – произвольное четномерное ориентируемое гладкое многообразие, J – почти комплексная структура на нем. Эта структура называется *интегрируемой*, если она является канонической почти комплексной структурой некоторой комплексной структуры этого многообразия.

В частности, канонические почти комплексные структуры $\mathbf{R}^{2n} = (\mathbf{C}^n)^R$, а также $(\mathbf{C}P^n)^R$ (овеществление комплексного $n-$ мерного проективного пространства) интегрируемы.

Как уже отмечалось, натуральные базисы овеществления $\mathbf{C}-$ карт комплексного многообразия M являются вещественно адаптированными базисами. Рассмотрим соответствующие им $A-$ базисы $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$. Они образованы комплексными векторными полями $\varepsilon_a = \sigma(\frac{\partial}{\partial x^a}) = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)(\frac{\partial}{\partial x^a}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^a} - \sqrt{-1}J(\frac{\partial}{\partial x^a})) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^a} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}}) = \frac{\partial}{\partial z^a}$;
$\varepsilon_{\hat{a}} = \bar{\sigma}(\frac{\partial}{\partial x^a}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^a} + \sqrt{-1}J(\frac{\partial}{\partial x^a})) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^a} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^a} \equiv \frac{\partial}{\partial z^{\hat{a}}}$.
Итак, $\varepsilon_a = \frac{\partial}{\partial z^a}$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \frac{\partial}{\partial z^{\hat{a}}}$. Отметим, что в этом случае, в отличии от остальных почти комплексных структур, существует натуральный $A-$ базис.

Соответствующий базис, дуальный натуральному образован формами $dz^a = dx^a + \sqrt{-1}dx^{\hat{a}}$, $dz^{\hat{a}} \equiv d\bar{z}^a = dx^a - \sqrt{-1}dx^{\hat{a}}$. Проверим это, то есть $dz^i(\frac{\partial}{\partial z^j}) = \delta^i_j$.
1) $dz^a(\frac{\partial}{\partial z^b} = \frac{1}{2}(dx^a + \sqrt{-1}dx^{\hat{a}})(\frac{\partial}{\partial x^b} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^b}) = \frac{1}{2}(\delta^a_b - \sqrt{-1}\cdot 0 + \sqrt{-1}\cdot 0 + \delta^a_b) = \delta^a_b$.
2) $dz^a(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{b}}}) = \frac{1}{2}(dx^a + \sqrt{-1}dx^{\hat{a}})(\frac{\partial}{\partial x^b} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^b}) = \frac{1}{2}(\delta^a_b + \sqrt{-1}\cdot 0 + \sqrt{-1}\cdot 0 - \delta^a_b) = 0$.
Остальные два равенства доказываются аналогично. Итак, $dz^i(\frac{\partial}{\partial z^j}) = \delta^i_j$.

Поскольку векторные поля (ε_a) и $(\varepsilon_{\hat{a}})$, будучи соответственно частями $A-$ базиса, образуют локальные базисы распределений $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$, система 1-форм $(dz^{\hat{a}})$ и (dz^a) образуют систему Пфаффа этих распределений, соответственно. Очевидно, эти системы Пфаффа вполне интегрируемы, так как внешние дифференциалы этих форм равны нулю, следовательно, соответствующие им распределения инволютивны, следовательно, собственные распределения оператора почти комплексной структуры инволютивны. Тогда, как мы знаем тензор Нейенхейса тождественно равен нулю.

Итак, доказано, что тензор Нейенхейса интегрируемой почти комплексной структуры тождественно равен нулю.

Оказывается, что верно и обратное. Пусть (M, J) – $2n-$ мерное почти комплексное многообразие, причем тензор Нейенхейса $N_J \equiv 0$. Это равносильно тому, что собственные распределения оператора структуры $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$ инволютивны. Выберем системы Пфаффа этих распределений $(\omega^{\hat{a}})$ и (ω^a), соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $\omega^{\hat{a}} = \bar{\omega}^a$ (так как эти распределения комплексно сопряжены). Рассмотрим вторую из этих систем (ω^a). В силу инволютивности $D_J^{-\sqrt{-1}}$, ее формы локально удовлетворяют структурным уравнениям $d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b$, где ω^a_b – подходящие 1-формы в некоторой окрестности каждой точки.

Пусть (U, φ) – локальная карта многообразия с координатами $(x^1, \ldots, x^{2n})$, в области которой определены указанные структурные уравнения. Отображение φ является диффеоморфизмом области U на область $V = \varphi(U) \subset \mathbf{R}^{2n}$ и, следовательно, определяет изоморфизм тензорных алгебр этих областей $\phi_* : \mathcal{T}(U) \to \mathcal{T}(V)$. При этом изоморфизме формы ω^a переходят в формы $\theta^a = \varphi_*(\omega^a)$, а формы ω^a_b – в формы $\theta^a_b = \varphi_*(\omega^a_b)$. При этом в силу структурных уравнений $d\theta^a = d(\varphi_*\omega^a) = \varphi_* d\omega^a = \varphi_*(\omega^a_b \wedge \omega^b) = \varphi_*(\omega^a_b) \wedge \varphi_*(\omega^b) = \theta^a_b \wedge \theta^b$.
Вывод: в области $V \subset \mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$ задана система 1-форм (θ^a) такая, что $d\theta^a = \theta^a_b \wedge \theta^b$. Из классической теоремы Фробениуса, распространенной в комплексную область, вытекает, что существует система $(z^a = z^a(x^1, \ldots, x^{2n}))$ комплексно-значных вещественно-аналитичных функций на V таких, что $\theta^a = A^a_b dz^b$, где (A^a_b) – матрица комплексно-значных вещественно-аналитичных функций, невырожденная в любой точке области определения. Пусть $z^a = u^a + \sqrt{-1}u^{\hat{a}}$. Так как (dz^a) – комплексно линейно независимы (так как θ^a – линейно независимы, а матрица (A^a_b) невырождена) их вещественные и мнимые части, то есть формы (du^a), $(du^{\hat{b}})$ будут линейно независимы в вещественном смысле, а значит, $det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$ в любой точке области определения. Следовательно, система функций $\{u^i = u^i \circ \varphi(p)\}$ определяет допустимую карту на многообразии M. Более того, система комплексно-значных функций $z^a = z^a \circ \varphi(p)$ на U определяет $\mathbf{C}-$ карту на этом многообразии M в окрестности любой точки.

Пусть I – каноническая почти комплексная структура на U, отвечающая такой карте. Как мы видели, формы $(d(z^a \circ \varphi))$ определяют систему Пфаффа распределения $D_I^{-\sqrt{-1}}$. С другой стороны, формы ω^a образуют систему Пфаффа распределения $D_J^{-\sqrt{-1}}$ по построению, а значит, $\omega^a = \varphi^*(\theta^a) = \varphi^*(A^a_b dz^b) = (A^a_b \circ \varphi)(\varphi_* dz^b) = (A^a_b \circ \varphi)d(z^b \circ \varphi)$. Так как матрица (A^a_b) всюду не вырождена, системы

Пфаффа (ω^a) и $(d(z^a \circ \varphi))$ эквивалентны, следовательно, отвечающие им распределения, совпадают, то есть $D_J^{-\sqrt{-1}} = D_I^{-\sqrt{-1}}$.

Аналогично доказывается, что $D_J^{\sqrt{-1}} = D_I^{\sqrt{-1}}$. Но распределение $D_I^{\sqrt{-1}}$, как мы видели, натягивается векторными полями $\frac{\partial}{\partial z^{\hat{a}}}$, а значит, $J(\frac{\partial}{\partial z^{\hat{a}}}) = -\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial z^{\hat{a}}}$, то есть $\frac{1}{2}J(\frac{\partial}{\partial x^a} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}}) = -\frac{\sqrt{-1}}{2}(\frac{\partial}{\partial x^a} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}})$, то есть $J(\frac{\partial}{\partial x^a}) + \sqrt{-1}J(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}}) = -\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}}$. Приравнивая вещественную и мнимую части, получим $J(\frac{\partial}{\partial x^a}) = \frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}} = I(\frac{\partial}{\partial x^a})$ и $J(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}}) = -\frac{\partial}{\partial x^a} = I(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{a}}})$, то есть $I = J$. Итак, каноническая почти комплексная структура I, порожденная этой картой, совпадает с исходной почти комплексной структурой J. Итак, мы построили множество голоморфно связанных между собой карт, которое покрывает все многообразие M, следовательно, они определяют комплексно-аналитическую структуру на M, каноническая почти комплексная структура которой совпадает с исходной почти комплексной структурой J. Итак, доказана

Теорема 7.3. Если многообразие вещественно-аналитично, то интегрируемость почти комплексной структуры на нем равносильно обращению в нуль ее тензора Нейенхейса. □

Замечание. Американские математики Ньюлендер и Ниренберг доказали, что предположение о вещественной аналитичности почти комплексного многообразия не существенна и, таким образом, интегрируемость почти комплексной структуры J равносильна тождественному обращению в нуль тензора Нейенхейса $N_J \equiv 0$.