8 Почти эрмитовы структуры.

8.1 Эрмитовы структуры на комплексном линейном пространстве.

Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел (короче, $\mathbf{C}$-линейное пространство). Мы уже знаем, что задание такого пространства равносильно заданию пары (V^R, J), где V^R – вещественное линейное пространство, J – комплексная структура в V^R, то есть антиинволютивный эндоморфизм этого пространства. Именно, если V – $\mathbf{C}-$ линейное пространство, то используя операцию сужения поля скаляров (попросту говоря, умножая элементы V не на все комплексные числа, а только на вещественные), мы получаем на V структуру вещественного векторного пространства, которое называется *овеществлением* $\mathbf{C}-$ линейного пространства V. Кроме того, на этом $\mathbf{R}-$ линейном пространстве, обозначаемом V^R, внутренним образом определен эндоморфизм $J : V^R \to V^R$ по формуле $J(X) = \sqrt{-1}X$. Очевидно, $J^2(X) = -X$ для любого $X \in V$, то есть $J^2 = -id$ и пара (V^R, J) построена.

Обратно, если дана пара (V^R, J), где V^R – $\mathbf{R}-$ линейное пространство, $J : V^R \to V^R$ такое, что $J^2 = -id$, то в V^R канонически вводится структура $\mathbf{C}-$ линейного пространства по формуле $zX = \alpha X + \beta JX$, где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$, $X \in V^R$.

Задача 8.1. Проверьте, что при этом выполняются все 8 аксиом $\mathbf{C}-$ линейного пространства.

Задача 8.2. Докажите, что овеществление построенного $\mathbf{C}-$ линейного пространства совпадает с исходной парой (V^R, J).

Определение 8.1. Пусть V – $\mathbf{C}-$ линейное пространство. *Эрмитовой формой* или *эрмитовой структурой* на V называется отображение $h : V \times V \to \mathbf{C}$, обладающее свойствами
1) аддитивность по любому аргументу, то есть

$$h(X' + X'', Y) = h(X', Y) + h(X'', Y); \quad h(X, Y' + Y'') = h(X, Y') + h(X, Y'')$$

$X, X', X'', Y, Y', Y'' \in V$;
2) однородность по первому аргументу

$$h(zX, Y) = zh(X, Y);\ z \in \mathbf{C};\ X, Y \in V$$

3) антилинейность по второму аргументу

$$h(X, zY) = \bar{z}h(X, Y);\ z \in \mathbf{C};\ X, Y \in V$$

4) эрмитовость

$$h(X, Y) = \overline{h(Y, X)};\ X, Y \in V$$

Замечание. Свойства 1) и 2) можно записать так

$$zh(X, Y) = h(zX, Y) = h(X, \bar{z}Y);\ z \in \mathbf{C};\ X, Y \in V$$

Это объединенное свойство называется *полуторалинейностью* отображения h.

Эрмитова структура называется *невырожденной*, если $h(X, Y) = 0, \forall Y \in V \Rightarrow X = 0$. Из эрмитовости следует, что аналогичное свойство верно и для второго аргумента.

Невырожденная эрмитова структура иначе называется *эрмитовой псевдометрикой*.

Определение 8.2. Эрмитова структура называется *положительно определенной*, если $h(X, X) \geq 0$, причем $h(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Заметим, что это определение корректно, так как в силу эрмитовости $\overline{h(X, X)} = h(X, X)$, то есть $h(X, X)$ – вещественное число для любого $X \in V$.

Положительно определенная эрмитова структура часто называется *эрмитовой метрикой*.

Задача 8.3. Докажите, что эрмитова метрика является невырожденной эрмитовой структурой.

Замечание. Эрмитова структура – комплексный аналог билинейной формы, а эрмитова метрика – комплексный аналог евклидовой метрики.

Пусть $h(X, Y)$ – эрмитова структура на $\mathbf{C}-$ линейном пространстве V и пусть (V^R, J) – овеществление V. Задание эрмитовой структуры h на $\mathbf{C}-$ линейном пространстве V влечет задание пары билинейных форм на овеществлении V^R. А именно, $h(X, Y) = g(X, Y) + \sqrt{-1}\Omega(X, Y)$, где $g(X, Y) = Re\, h(X, Y)$, $\Omega(X, Y) = Im\, h(X, Y)$, $X, Y \in V^R$.

Задача 8.4. Докажите, что g и Ω являются вещественными билинейными формами.

Лемма 8.1. g – симметричная, а Ω – кососимметричная билинейная форма.

Доказательство. Имеем $g(Y,X)+\sqrt{-1}\Omega(Y,X)=h(Y,X)=\overline{h(X,Y)}=g(X,Y)-\sqrt{-1}\Omega(X,Y)$, следовательно, $g(X,Y)=g(Y,X)$ и $\Omega(X,Y)=-\Omega(Y,X)$ для любых $X,Y\in V^R$. $\square$

Более того, эти формы выражаются одна через другую. В самом деле, имеем $zh(X,Y)=h(zX,Y)=h(X,\bar{z}Y)$. В частности, если $z=\sqrt{-1}$, то $zX=\sqrt{-1}X=JX$, $\bar{z}Y=-JY$ и, таким образом, $\sqrt{-1}\left(g(X,Y)+\sqrt{-1}\Omega(X,Y)\right)=g(JX,Y)+\sqrt{-1}\Omega(JX,Y)=-g(X,JY)-\sqrt{-1}\Omega(X,JY)$. Откуда, приравнивая вещественные и мнимые части, получим

$$\begin{array}{lll} g(JX,Y)=-g(X,JY); & \Omega(JX,Y)=-\Omega(X,JY); & \Omega(X,Y)=-g(JX,Y) \\ g(X,Y)=\Omega(JX,Y); & \Omega(X,Y)=g(X,JY) & \end{array}$$

Кроме того, заменяя $X\to JX$, получим $g(JX,JY)=-g(J^2X,Y)=g(X,Y)$. Итак, мы получили

$$\Omega(X,Y)=g(X,JY)=-g(JX,Y);\quad g(JX,JY)=g(X,Y)$$

Заметим, что если h – невырождена, то формы g и Ω также не вырождены. В самом деле, пусть $h(X,Y)=0$, $\forall Y\in V\Rightarrow X=0$, то есть $g(X,Y)+\sqrt{-1}\Omega(X,Y)=0$, $\forall Y\in V\Rightarrow X=0$, то есть

$$\left.\begin{array}{l} g(X,Y)=0,\ \forall Y\in V \\ \Omega(X,Y)=0,\ \forall Y\in V \end{array}\right\}\Rightarrow X=0$$

Докажем, что эти два условия эквивалентны. Так как если $g(X,Y)=0\,\forall Y\in V$, то, заменяя Y на JY, получим $g(X,JY)=0\,\forall Y\in V$, то есть $\Omega(X,Y)=0\,\forall Y\in V$. Верно и обратное.
Таким образом, невырожденность любой из трех форм h, g, Ω влечет невырожденность двух других форм.

Более того, положительная определенность h равносильна положительной определенности g. В самом деле, $h(X,X)\geq 0$, причем $h(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$ равносильно $g(X,X)+\sqrt{-1}\Omega(X,X)\geq 0$, причем $g(X,X)+\sqrt{-1}\Omega(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$. В силу кососимметричности Ω получим $\Omega(X,X)=-\Omega(X,X)=0$. Таким образом, $h(X,X)\geq 0$, причем $h(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$ равносильно $g(X,X)\geq 0$, причем $g(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$.

Итак, $h(X,X)\equiv g(X,X)$. В частности, верно наше утверждение.

Обратно, пусть V^R – $\mathbf{R}-$ линейное пространство, J – комплексная структура на нем. Допустим, что g – билинейная симметрическая форма на V^R такая, что $g(X,Y)=g(JX,JY)$; $X,Y\in V^R$. Тогда $g(X,JY)=g(JX,J^2Y)=-g(JX,Y)=-g(Y,JX)$. Рассмотрим тензор $\Omega(X,Y)=g(X,JY)$. По доказанному $\Omega(X,Y)=-\Omega(Y,X)$. Построим отображение $h: V^R\times V^R\to\mathbf{C}$, положив $h(X,Y)=g(X,Y)+\sqrt{-1}\Omega(X,Y)$.

Задача 8.5. Докажите, что отображение h является эрмитовой формой на линейном пространстве V^R, рассматриваемом как $\mathbf{C}-$ линейное пространство V относительно J (то есть $zX=\alpha X+\beta JX$).

Как мы уже показали, невырожденность g равносильна невырожденности Ω равносильно невырожденности h. Таким образом, доказана

Теорема 8.1. Задание эрмитовой формы в $\mathbf{C}-$ линейном пространстве V равносильно заданию симметричной билинейной формы g в (V^R,J).
Если h – эрмитова форма, то $h(X,Y)=g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY)$, $X,Y\in V\equiv V^R$. Невырожденность (положительная определенность) формы h равносильна невырожденности (соответственно положительной определенности) формы g.

Замечание. Пара (g,Ω) однозначно определяет эндоморфизм J комплексной структуры. В самом деле, имеем $\Omega(X,Y)=g(X,JY)$, то есть форма Ω получается операцией опускания индекса у комплексной структуры J. Следовательно, J получается операцией поднятия индекса у Ω посредством метрики g (если форма g невырождена).

Интересно заметить, что антиинволютивность эндоморфизма J (если форма g невырождена) непосредственно следует из свойств форм g и Ω. В самом деле, $g(J^2X,Y)=-g(JX,JY)=-g(X,Y)$, то есть в силу невырожденности g это влечет $J^2X=-X$, $\forall X\in V$, то есть $J^2=-id$.

Определение 8.3. *Эрмитовой структурой в вещественном линейном пространстве* V называется пара (J,g), где J – комплексная структура на V, g – (псевдо)евклидова структура на V, причем $g(JX,JY)=g(X,Y)$, $X,Y\in V$.

По доказанному, задание эрмитовой структуры на $\mathbf{R}-$ линейном пространстве равносильно заданию эрмитовой псевдометрики в V, рассматриваемом как $\mathbf{C}-$ линейное пространство относительно J. ø2-форма $\Omega(X,Y) = g(X,JY)$ называется *фундаментальной формой* эрмитовой структуры. 2-форма $F(X,Y) = g(JX,Y)$ называется *келеровой формой*.

Очевидно, что $F = -\Omega$.

В дальнейшем метрику g эрмитовой структуры будем подразумевать положительно определенной и обозначать $\langle\cdot,\cdot\rangle$. А соответствующую эрмитову метрику $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$. Таким образом, по определению

$$\langle\langle X,Y\rangle\rangle = \langle X,Y\rangle + \sqrt{-1}\langle X,JY\rangle$$

Пусть $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ – эрмитова структура $\mathbf{R}-$ линейного пространства V. Рассмотрим его комплексификацию $V^C = \mathbf{C}\otimes V$. Напомним, что задание J в V равносильно распадению V^C в прямую сумму двух комплексно сопряженных подпространств, а именно, собственных подпространств эндоморфизма J: $V^C = D_J^{\sqrt{-1}} \oplus D_J^{-\sqrt{-1}}$, причем $\tau(D_J^{\sqrt{-1}}) = D_J^{-\sqrt{-1}}$. Соответствующие проекторы на подпространства $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$ имеют соответственно вид $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)$, $\bar\sigma = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J)$. Они являются соответственно изоморфизмом и антиизоморфизмом линейного пространства V, рассматриваемого как $\mathbf{C}-$ линейное пространство, на подпространства $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$ соответственно.

Заметим, что в $\mathbf{C}-$ линейном пространстве V^C внутренним образом определена еще одна эрмитова метрика

$$H(X,Y) = 2g^C(X,\tau Y);\quad X,Y\in V^C$$

где g^C – распространение по линейности на V^C билинейной формы g, а именно

$$g^C(\sum_{k=1}^{N_1} z_k X_k, \sum_{p=1}^{N_2} w_p Y_p) = \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{p=1}^{N_2} g(X_k, Y_p)$$

Задача 8.6. Докажите, что если g положительно определена, то g^C невырождена. Всегда ли она будет положительно определенной?

Имеем для любых $X,Y\in V$ $H(\sigma X,\sigma Y) = 2g^C(\sigma X,\tau\sigma Y) = 2g^C(\sigma X,\bar\sigma Y) = 2g^C(\frac{1}{2}(X-\sqrt{-1}JX),\frac{1}{2}(Y+\sqrt{-1}JY)) = \frac{1}{2}(g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY)-\sqrt{-1}g(JX,Y)+g(JX,JY)) = g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY) = \langle\langle X,Y\rangle\rangle$. Итак,

$$H(\sigma X,\sigma Y) = \langle\langle X,Y\rangle\rangle;\quad X,Y\in V$$

Аналогично, $H(\bar\sigma X,\bar\sigma Y) = \langle\langle Y,X\rangle\rangle = \overline{\langle\langle X,Y\rangle\rangle}$.

Задача 8.7. Проведите вычисления.

Таким образом, проекторы σ и $\bar\sigma$ являются не только изоморфизмом и антиизоморфизмом $\mathbf{C}-$ линейного пространства V на образы, но еще и изометрией и антиизометрией, соответственно.

Пусть, в частности, V – конечномерное линейное пространство, $\{J,g\}$ – эрмитова структура на V. Тогда с необходимостью V четномерно (так как допускает комплексную структуру). Обозначим размерность $dimV = 2n$. В этом случае вещественно адаптированный базис $(e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n)$ можно канонизировать еще в большей степени. Именно, выберем в качестве e_1 любой единичный вектор. Тогда $\langle e_1,Je_1\rangle = 0$, так как $\langle e_1,Je_1\rangle = -\langle Je_1,e_1\rangle = -\langle e_1,Je_1\rangle$. Кроме того, $\langle Je_1,Je_1\rangle = \langle e_1,e_1\rangle = 1$, то есть пара (e_1,Je_1) является ортонормированной. Возможны случаи:

1) Линейная оболочка $L(e_1,Je_1) = V$. Тогда $dimV = 2$ и пара (e_1,Je_1) является ортонормированным $RA-$ базисом.

2) Ортогональное дополнение линейной оболочки $L(e_1,Je_1)^\perp \neq \{0\}$. Выберем $e_2\in L(e_1,Je_1)^\perp$ такой, что $\langle e_2,e_2\rangle = 1$. Тогда $\langle Je_2,e_2\rangle = 0$ и $\langle Je_2,Je_2\rangle = 1$. При этом как мы доказали в комплексных структурах $L(e_1,Je_1)\cap L(e_2,Je_2) = \{0\}$. Возможны случаи:

1) $L(e_1,Je_1)\oplus L(e_2,Je_2) = V$. Тогда набор (e_1,e_2,Je_1,Je_2) будет ортонормированным базисом в V;

2) $L(e_1,e_2,Je_1,Je_2)^\perp \neq \{0\}$. Выберем $e_3\in L(e_1,e_2,Je_1,Je_2)^\perp$ такой, что $\langle e_3,e_3\rangle = 1$ и так далее. Процесс конечен в силу конечномерности пространства V. Следовательно, существует натуральное число n такое, что $(e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n)$ – ортонормированный $RA-$ базис пространства V.

Более того, как мы уже знаем, $(e_1,\dots,e_n)$ будет базис V как $\mathbf{C}-$ линейного пространства. В данном же случае это будет еще и ортонормированный базис относительно метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$. В самом деле, $\langle\langle e_a,e_b\rangle\rangle = \langle e_a,e_b\rangle + \sqrt{-1}\langle e_a,Je_b\rangle = \langle e_a,e_b\rangle = \delta_{ab}$. Такой базис иногда называют *унитарным* (устаревшее).

Так как σ и $\bar\sigma$ – изометрия и антиизометрия, соответственно, соответствующий $A-$ базис $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat 1},\dots,\varepsilon_{\hat n})$ будет ортонормирован относительно метрики H. Заметим, что это пока не доказано. Из указанных фактов лишь следует, что $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ и $(\varepsilon_{\hat 1},\dots,\varepsilon_{\hat n})$ – ортонормированные базисы подпространств $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$, соответственно.

Чтобы доказать, что базис $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat 1},\dots,\varepsilon_{\hat n})$ является ортонормированным базисом пространства V^C, надо доказать следующее.

Лемма 8.2. Подпространства $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$ вполне ортогональны относительно метрики H, то есть нам нужно доказать, что $\forall X\in D_J^{\sqrt{-1}}$, $\forall Y\in D_J^{-\sqrt{-1}}\Rightarrow H(X,Y)=0$.

Доказательство. Так как σ и $\bar\sigma$ изоморфизм и антиизоморфизм V на собственные подпространства, в частности, сюръективные отображения, существуют векторы $U,W\in V$ такие, что $H(X,Y)=H(\sigma U,\bar\sigma W)=\frac14(H(U-\sqrt{-1}JU,W+\sqrt{-1}JW))=\frac12 g^C(U-\sqrt{-1}JU,W-\sqrt{-1}JW)=\frac12(g(U,W)-\sqrt{-1}g(U,JW)-\sqrt{-1}g(JU,W)-g(JU,JW))=0$.
Следовательно, $(\varepsilon_a,\varepsilon_{\hat a})$ – ортонормированный базис относительно метрики H. □

Вычислим матрицы (g_{ij}) и (J^i_j) в $A-$ реперe. Так как $A-$ репер состоит из собственных векторов эндоморфизма J, получаем

$$(J^i_j)=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}I_n & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}I_n\end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу $(g_{ij})=\begin{pmatrix}g_{ab} & g_{a\hat b}\\ g_{\hat a b} & g_{\hat a\hat b}\end{pmatrix}$.
1) $g_{ab}=g^C(\varepsilon_a,\varepsilon_b)=\langle\sigma e_a,\sigma e_b\rangle=\frac14\langle e_a-\sqrt{-1}Je_a,e_b-\sqrt{-1}Je_b\rangle=\frac14(\langle e_a,e_b\rangle-\sqrt{-1}\langle Je_a,e_b\rangle-\sqrt{-1}\langle Je_a,e_b\rangle-\langle Je_a,Je_b\rangle)=0$. Таким образом, $g_{ab}=0$ и $g_{\hat a\hat b}=\bar g_{ab}=0$.
2) С учетом перпендикулярности векторов e_a и Je_b получим $g_{\hat a b}=g^C(\varepsilon_{\hat a},\varepsilon_b)=\langle\bar\sigma e_a,\sigma e_b\rangle=\frac14\langle e_a+\sqrt{-1}Je_a,e_b-\sqrt{-1}Je_b\rangle=\frac14(\langle e_a,e_b\rangle+\sqrt{-1}\langle Je_a,e_b\rangle-\sqrt{-1}\langle Je_a,e_b\rangle-\sqrt{-1}\langle e_a,Je_b\rangle+\langle Je_a,Je_b\rangle=\frac12\langle e_a,e_b\rangle=\frac12\delta_{ab}\equiv\frac12\delta^a_b$. Итак, $g_{\hat a b}=\delta^a_b$ и $g_{a\hat b}=\bar g_{\hat a b}=\frac12\delta^b_a$. Итак,

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}0 & \frac12 I_n\\ \frac12 I_n & 0\end{pmatrix}$$

Перейдем от векторов $\varepsilon_a=\sigma(e_a)$ к векторам $\tilde\varepsilon_a=\sqrt2\sigma(e_a)$ и $\tilde\varepsilon_{\hat a}=\sqrt{-1}\bar\sigma(e_a)$. Тогда в репере $(\tilde\varepsilon_a,\tilde\varepsilon_{\hat a})$ получим $g^C(\tilde\varepsilon_a,\tilde e_{\hat b})=g^C(\sqrt2\varepsilon_a,\sqrt2\varepsilon_{\hat b})=2\cdot\frac12\delta^b_a=\delta^b_a$.

Определение 8.4. Репер $(\tilde\varepsilon_a,\tilde e_{\hat b})$ называется *модифицированным* $A-$ репером.

Такой репер однозначно характеризуется тем, что в нем матрицы структурных тензоров J и g имеют соответственно вид

$$(J^i_j)=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}I_n & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}I_n\end{pmatrix}\quad(g_{ij})=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$$

Всюду под $A-$ репером будем понимать именно модифицированный $A-$ репер и волну над его векторами будем опускать.

Таким образом, $A-$ репер – это репер вида $(m,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat 1},\dots,\varepsilon_{\hat n})$, где $\varepsilon_a=\sqrt2\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat a}=\sqrt2\bar\sigma(e_a)$, $a=1,\dots,n$. При этом $(e_1,\dots,e_n)$ – ортонормированный базис относительно эрмитовой метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ пространства V, рассматриваемое как $\mathbf{C}-$ линейное пространство.

8.2 Почти эрмитовы структуры.

Определение 8.5. Пусть M – гладкое многообразие размерности $2n$. *Почти эрмитовой структурой*, короче, *$AH-$ структурой*, на M называется эрмитова структура модуля $\mathcal{X}(M)$, рассматриваемого как бесконечномерное $\mathbf{R}-$ линейное пространство.

Иначе говоря, почти эрмитова структура – это пара $(J,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$, где J – комплексная структура $J^2=-id$, g – (псевдо)риманова метрика, причем $g(JX,JY)=g(X,Y)$, $X,Y\in\mathcal{X}(M)$.

Как мы знаем, задание почти эрмитовой структуры на M равносильно заданию (псевдо)эрмитовой метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle=\langle X,Y\rangle+\sqrt{-1}\Omega(X,Y)$ в модуле $\mathcal{X}(M)$, где $\Omega(X,Y)=\langle X,JY\rangle$ – фундаментальная форма почти эрмитовой структуры.

Мы знаем также, что в модуле $\mathcal{X}^C(M)=\mathbf{C}\otimes\mathcal{X}(M)$, а также в касательном пространстве $T_m(M)$, $m\in M$, внутренним образом определены два проектора $\sigma=\frac12(id-\sqrt{-1}J)$ и $\bar\sigma=\frac12(id+\sqrt{-1}J)$ на

собственные распределения $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$, соответственно. При этом $\mathcal{X}^C(M) = D_J^{\sqrt{-1}} \oplus D_J^{-\sqrt{-1}}$ и проекторы σ и $\bar{\sigma}$ являются изоморфизмом и антиизоморфизмом $\mathbf{C} \otimes C^\infty(M)-$ модуля $\mathcal{X}(M)$ на подмодули $D_J^{\sqrt{-1}}$ и $D_J^{-\sqrt{-1}}$. Кроме того, эти проекторы являются изометрией и антиизометрией этих модулей относительно метрик $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ и $H(X,Y) = 2g^C(X, \tau Y)$, соответственно.

Эти обстоятельства позволяют установить естественное биективное соответствие между множеством ортонормированных реперов линейного пространства $T_m(M)$, рассматриваемого как $\mathbf{C}-$ модуль с эрмитовой метрикой $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$, множеством ортонормированных $RA-$ реперов линейного пространства $T_m(M)$, рассматриваемого как $\mathbf{R}-$ модуль со скалярным произведением $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ и множеством $A-$ реперов $\mathbf{C}-$ линейного пространства $\mathbf{C} \otimes T_m(M) = T_m(M)^C$, ортонормированным относительно метрики H. Именно, если $(m, e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормированный репер $\mathbf{C}-$ модуля $T_m(M)$, то ему соответствует $(m, e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$ ортонормированный $RA-$ репер $\mathbf{R}-$ модуля $T_m(M)$, а также, $(m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$ – ортонормированный репер $\mathbf{C}-$ модуля $T_m^C(M)$, где $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a)$.

Как мы знаем, эти биекции, если отказаться от свойства ортонормированности, определяют изоморфизмы соответствующих $G-$ структур $\mathcal{B}_G$, где $G = GL(n, \mathbf{C})$, $\mathcal{B}_{\hat{G}}$, где $G = GL(n, \mathbf{C})^R$ и $\mathcal{B}_{\hat{G}}$, где $\hat{G} = GL(n, \mathbf{C})$, рассматриваемая как подгруппа группы $GL(2n, \mathbf{C})$, вложенная посредством отображения $C \in GL(n, \mathbf{C}) \to \hat{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix}$.

Задание любой из этих $G-$ структур, как мы видели, равносильно заданию почти комплексной структуры J. С другой стороны, как мы знаем, задание римановой структуры g равносильно заданию $G-$ структуры $\mathcal{B}_{O(2n)}$ со структурной группой $O(2n)$. Следовательно, задание почти эрмитовой структуры (J, g) равносильно заданию $G-$ структуры (P, M, π, G), где P есть пересечение пространства расслоения $\mathcal{B}_{\hat{G}}$ и пространства расслоения $\mathcal{B}_{O(2n)}$. Проще говоря, совокупность всех ортонормированных $A-$ реперов, $\pi = \pi|_{B_{\hat{G}} \cap B_{O(2n)}}$, $G = GL(n, \mathbf{C}) \cap O(2n) = U(n)$. Назовем эту $G-$ структуру *присоединенной $G-$ структурой почти эрмитова многообразия*. Ее пространство расслоения состоит из ортонормированных относительно H $A-$ реперов. Эти реперы характеризуются тем, что в них матрицы (J_j^i) и (g_{ij}) структурных тензоров имеют вид

$$(J_j^i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим простейшие следствия из этих фактов.

1. Пусть Ω – фундаментальная форма почти эрмитовой структуры. Тогда форма Ω однозначно определяется набором функций $\{\Omega_{ij}\}$, определенных на пространстве присоединенной $G-$ структуры. Напомним, что значение такой функции в точке $p = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$ расслоения $A-$ реперов есть $\Omega_{ij}(p) = \Omega_m(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$. Для краткости точку m будем опускать.

1) $\Omega_{ab} = \Omega(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \langle\varepsilon_a, J\varepsilon_b\rangle = \langle\varepsilon_a, \sqrt{-1}\varepsilon_b\rangle = \sqrt{-1}g_{ab} = 0$.
2) $\Omega_{\hat{a}\hat{b}} = \bar{\Omega}_{ab} = 0$.
3) $\Omega_{a\hat{b}} = \Omega(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}}) = \langle\varepsilon_a, J\varepsilon_{\hat{b}}\rangle = -\sqrt{-1}g_{a\hat{b}} = -sqrt-1\delta_a^b$.
4) $\Omega_{\hat{a}b} = \bar{\Omega}_{a\hat{b}} = \sqrt{-1}\delta_b^a$. Тогда

$\Omega = \Omega_{ij}\omega^i \wedge \omega^j (i < j) = \Omega_{a\hat{b}}\omega^a \wedge \omega^{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta_a^b\omega^a \wedge \omega^{\hat{b}}$. Договоримся обозначать

$$\omega^{\hat{a}} \equiv \omega_a$$

Тогда последнее равенство примет вид $\Omega = -\sqrt{-1}\delta_a^b\omega^a \wedge \omega_b = -\sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega_a$.

$$\Omega = -\sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega_a$$

2. Рассмотрим специфику операции поднятия и опускания индекса на пространстве присоединенной $G-$ структуры. По определению операции поднятия и опускания индекса имеем $t_i = g_{ij}t^j$. На пространстве присоединенной $G-$ структуры эти равенства примут вид

1) $t_a = g_{ab}t^b + g_{a\hat{b}}t^{\hat{b}} = 0 + \delta_{\hat{b}_a}t^{\hat{b}} = t^{\hat{a}}$. 2) $t_{\hat{a}} = g_{\hat{a}b}t^b + g_{\hat{a}\hat{b}}t^{\hat{b}} = \delta_{\hat{a}b}t^b = \delta_b^a t^b = t^a$. Итак,

$$t_a = t^{\hat{a}}; \quad t_{\hat{a}} = t^a$$

Это правило остается верным и при применении к тензорам произвольного типа. Важно при этом следить, на какое место поднимается (опускается) индекс.

8.3 Структурные уравнения почти эрмитовой структуры.

Пусть M – $2n-$ мерное почти эрмитово многообразие и (J,g) – почти эрмитова структура на нем. Обозначим через ∇ риманову связность метрики g. Как мы знаем первая группа ее структурных уравнений имеет вид $d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j$, где $\{\omega^i_j\}$ – компоненты формы римановой связности, $\{\omega^i\}$ – глобально определенные компоненты формы смещения. Запишем эти стуктурные уравнения на пространстве присоединенной $G-$ структуры. Для этого сначала распишем основную теорему тензорного анализа, примененную к тензорному полю J: $dJ^i_j + J^i_k\omega^k_j - J^k_j\omega^i_k = J^i_{j,k}\omega^k$, где $\{J^i_{j,k}\}$ – система функций, задающая ковариантный дифференциал структурного эндоморфизма J.

1) $i = a$, $j = b$. Тогда строения матрицы J в $A-$ реперах получим $dJ^a_b + J^a_c\omega^c_b - J^c_b\omega^a_c = J^a_{b,k}\omega^k$, следовательно, $\sqrt{-1}(\omega^a_b - \omega^a_b) = J^a_{b,k}\omega^k$. Откуда в силу линейной независимости базисных форм имеем $J^a_{b,k} = 0$.

2) $i = \hat{a}$, $j = b$. Аналогично $dJ^{\hat{a}}_b + J^{\hat{a}}_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b - J^c_b\omega^{\hat{a}}_c = J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$ или $-\sqrt{-1}\delta^{\hat{a}}_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b - \sqrt{-1}\omega^{\hat{a}}_c\delta^c_b = J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$ или $-2\sqrt{-1}\omega^{\hat{a}}_b = J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$ или $\omega^{\hat{a}}_b = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k$.

3) Аналогично (проведите вычисления самостоятельно) $\omega^a_{\hat{b}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},k}\omega^k$.

4) Аналогично (проведите вычисления самостоятельно) $J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0$. Итак,

$$J^a_{b,k} = 0; \quad J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0; \quad \omega^{\hat{a}}_b = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k; \quad \omega^a_{\hat{b}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},k}\omega^k$$

Аналогично распишем основную теорему тензорного анализа для метрики g. Напомним, что в римановой связности ковариантный дифференциал метрики g равен нулю, а значит, основная теорема тензорного анализа для нее запишется в виде $dg_{ij} + g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j = 0$.

1) $i = a$, $j = b$. Тогда $dg_{ab} + g_{ac}\omega^c_b + g_{a\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b + g_{cb}\omega^c_a + g_{\hat{c}b}\omega^{\hat{c}}_a = 0$ или $\delta_{\hat{c}b}\omega^{\hat{c}}_a + \delta_{a\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b = 0$ или $\omega^{\hat{b}}_a + \omega^{\hat{a}}_b = 0$.

2) $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда $dg_{\hat{a}b} + g_{\hat{c}b}\omega^{\hat{c}}_{\hat{a}} + g_{\hat{a}c}\omega^c_b = 0$ или $\omega^{\hat{b}}_{\hat{a}} + \omega^a_b = 0$.

3) Аналогично $\omega^b_{\hat{a}} + \omega^a_{\hat{b}} = 0$. Итак,

$$\omega^{\hat{b}}_a + \omega^{\hat{a}}_b = 0; \quad \omega^b_{\hat{a}} + \omega^a_{\hat{b}} = 0; \quad \omega^{\hat{b}}_{\hat{a}} + \omega^a_b = 0$$

С учетом полученных соотношений первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединенной $G-$ структуры примет вид

1) $i = a$: $d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \omega^a_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} = \omega^a_b \wedge \omega^b + (-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},k}\omega^k) \wedge \omega^{\hat{b}} = \omega^a_b \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}\,\omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{b}} = \omega^a_b \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}\,\omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}}$. Последнее равенство обосновывается следующей леммой.

Лемма 8.3. $J^a_{\hat{b},\hat{c}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} = J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} = 2J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} (b < c)$.

Доказательство. $J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} = \frac{1}{2}(J^a_{b,c}\omega^b \wedge \omega^c - J^a_{c,b}\omega^b \wedge \omega^c) =$. Во втором слагаемом поменяем местами индексы суммирования b и c. Тогда $= \frac{1}{2}(J^a_{b,c}\omega^b \wedge \omega^c - J^a_{b,c}\omega^c \wedge \omega^b) = \frac{1}{2}(J^a_{b,c}\omega^b \wedge \omega^c + J^a_{b,c}\omega^b \wedge \omega^c) = J^a_{\hat{b},\hat{c}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}}$. Далее, $J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} = J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} (b < c) + J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} (b > c) = J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} (b < c) + J^a_{[\hat{c},\hat{b}]}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{b}} (c > b) =$ Так как $J^a_{[\hat{b},\hat{c}]} = -J^a_{[\hat{c},\hat{b}]}$, то $= 2J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} (b < c)$. □

Вернемся к структурным уравнениям римановой связности. Введем обозначения

$$B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}; \quad B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},\hat{c}}$$

Из этих обозначений сразу следует, что $B^{abc} = C^{a[bc]}$, $B^{ab}{}_c = -B^{ba}{}_c$ и $C^{abc} = -C^{bac}$ в силу кососимметричности J, а значит, и его ковариантного дифференциала.

Задача 8.8. Докажите, что $J^{\hat{a}}_{b,k} = -J^{\hat{b}}_{a,k}$.

С учетом введенных обозначений первая часть первой группы структурных уравнений римановой связности примет вид $d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c$.

2) $i = \hat{a}$. Тогда $d\omega^{\hat{a}} = \omega^{\hat{a}}_b \wedge \omega^b + \omega^{\hat{a}}_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k \wedge \omega^b = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,c}\omega^c \wedge \omega^b + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^b = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]}\omega^c \wedge \omega^b + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^b$. Введем обозначения

$$B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \quad B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]}; \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,c}$$

Тогда вторая часть первой группы структурных уравнений римановой связности примет вид $d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c$. Итак, уравнения

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c;$$
$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c$$

называются *первой группой структурных уравнений почти эрмитовой структуры.* Другими словами, первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры – это первая группа структурных уравнений римановой связности, записанная на пространстве присоединенной $G-$ структуры.

Из введенных обозначений следует, что $B_{abc} = \bar{B}^{abc}$, $B^{ab}{}_c = \bar{B}_{ab}{}^c$, $C_{abc} = \bar{C}^{abc}$.
Проводя процедуру дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений почти эрмитовой структуры (мы проведем подробные вычисления позже), можно убедиться, что системы функций $\{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$, $\{B^{abc}, B_{abc}\}$ задают тензоры на многообразии M, которые называются *виртуальным* и *структурным тензором*, соответственно.

Лемма 8.4. $C_{abc} = B_{cba} + B_{bca} + B_{abc}$. В частности, из этого следует, что система функций $\{C^{abc}, C_{abc}\}$ также задает тензор на многообразии M, который называется *структурным тензором в альтернативной форме.*

Доказательство. В силу кососимметричности структурного эндоморфизма имеем $J^{\hat{a}}_{b,c} = -J^{\hat{b}}_{a,c}$. Тогда $J^{\hat{b}}_{[c,d]} = \frac{1}{2}(J^{\hat{d}}_{b,c} - J^{\hat{c}}_{b,d})$. Умножим обе части на $\sqrt{-1}$ и с учетом введенных обозначений получим $B_{bcd} = \frac{1}{2}(C_{dbc} - Ccbd)$. Альтернируя это соотношение по индексам b, c, получим $C_{abc} = B_{cba} + B_{bca} + B_{abc}$. □

Заметим, что с учетом введенных обозначений $\omega^a_{\hat{b}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}\omega^c - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},\hat{c}} = B^{ab}{}_c\omega^c - C^{abc}\omega_c = B^{ab}{}_c\omega^c - (B^{cba} + B^{bca} + B^{abc})\omega_c$. Аналогично, $\omega^{\hat{a}}_b = B_{ab}{}^c\omega_c - C_{abc}\omega^c = B_{ab}{}^c\omega_c - (B_{cba} + B_{bca} + B_{abc})\omega^c$. Итак,

$$\omega^a_{\hat{b}} = B^{ab}{}_c\omega^c - C^{abc}\omega_c = B^{ab}{}_c\omega^c - (B^{cba} + B^{bca} + B^{abc})\omega_c$$
$$\omega^{\hat{a}}_b = B_{ab}{}^c\omega_c - C_{abc}\omega^c = B_{ab}{}^c\omega_c - (B_{cba} + B_{bca} + B_{abc})\omega^c$$

Построим структурный и виртуальный тензор явным образом и выясним их геометрический смысл.

Лемма 8.5. На любом почти эрмитовом многообразии справедливо тождество $J\nabla_X(J)Y + \nabla_X(J)(JY) = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Доказательство. Заметим, что $J^2 = J \circ J = C^{(2)}_{(1)}(J \otimes J)$ (Действительно, $J^2(X) = J(J(X)) = J^i_j J^j_k X^k$). Напомним, что $C^{(i)}_{(j)}$ – это оператор свертки по $i-$ му верхнему и $j-$ му нижнему индексу. Тогда применим оператор ∇_X к тождеству $J^2 = -id$, то есть $C^{(2)}_{(1)}(J \otimes J) = -id$. Согласно свойствам оператора ковариантного дифференцирования получим $C^{(2)}_{(1)}(\nabla_X(J) \otimes J + J \otimes \nabla_X(J)) = 0$ или $C^{(2)}_{(1)}(\nabla_X(J) \otimes J) + C^{(2)}_{(1)}(J \otimes \nabla_X(J)) = 0$ или $\nabla_X(J)(JY) + J\nabla_X(J)Y = 0$. □

Лемма 8.6. На любом почти эрмитовом многообразии справедливо тождество $\langle \nabla_X(J)Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X(J)Z\rangle = 0$.

Доказательство. Имеем $g(JX, JY) = g(X, Y)$. Заменяя $Y \to JY$, получим $g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$. Тогда применяя оператор ковариантного дифференцирования ∇_Z и учитывая правило Лейбница, получим $\nabla_Z(g)(JX, Y) + g(\nabla_Z(J)X, Y) + g(J\nabla_Z X, Y) + g(JX, \nabla_Z Y) + \nabla_Z(g)(X, JY) + g(\nabla_Z X, JY) + g(X, \nabla_Z(J)Y) + g(X, J\nabla_Z Y) = 0$. Так как метрический тензор ковариантно постоянен в римановой связности, $\nabla_Z(g)(JX, Y) = \nabla_Z(g)(X, JY) = 0$. Далее, $g(J\nabla_Z X, Y) = -g(\nabla_Z X, JY)$ и $g(X, J\nabla_Z Y) = g(JX, \nabla_Z Y)$ (условие согласованности метрики и почти комплексной структуры). Тогда $g(\nabla_Z(J)X, Y) + g(X, \nabla_Z(J)Y) = 0$. □

8.4 Виртуальный тензор.

Введем в рассмотрение отображение $B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ по формуле

$$B(X, Y) = B^{ab}{}_c X_b Y^c \varepsilon_a + B_{ab}{}^c X^b Y_c \varepsilon^a$$

где мы ввели обозначение $\varepsilon^a \equiv \varepsilon_{\hat{a}}$.

Задача 8.9. Докажите, что отображение определено корректно, то есть $B(X, Y)$ является вещественным векторным полем.

Задача 8.10. Докажите, что отображение B является $C^\infty(M)-$ линейным, то есть тензорным полем типа (2,1).

Априори этот тензор зависит от выбора $A-$ репера. Вскоре мы увидим, что это не так.

Если мы будем рассматривать модуль $\mathcal{X}(M)$ как $\mathbf{C}-$ линейное пространство (это возможно благодаря комплексной структуре J на нем), то покажем, что тензор B будет $\mathbf{C}-$ антилинеен по первому аргументу и $\mathbf{C}-$ линеен по второму аргументу.

Лемма 8.7. $(JX)^a = \sqrt{-1}X^a$, $(JX)^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}X^{\hat{a}}$.

Доказательство. $(JX)^a = J^a_k X^k = J^a_b X^b + J^a_{\hat{b}} X^{\hat{b}} = \sqrt{-1}\delta^a_b X^b + 0 = \sqrt{-1}X^a$. Второе аналогично (докажите самостоятельно). $\square$

Имеем $B(JX,Y) = B^{ab}{}_c (JX)_b Y^c \varepsilon_a + B_{ab}{}^c (JX)^b Y_c \varepsilon^a = B^{ab}{}_c (-\sqrt{-1}) X_b Y^c \varepsilon_a + B_{ab}{}^c \sqrt{-1} X^b Y_c \varepsilon^a$.
$B(X,JY) = B^{ab}{}_c X_b (JY)^c \varepsilon_a + B_{ab}{}^c X^b (JY)_c \varepsilon^a = B^{ab}{}_c X_b \sqrt{-1} Y^c \varepsilon_a + B_{ab}{}^c X^b (-\sqrt{-1}) Y_c \varepsilon^a$
$JB(X,Y) = B^{ab}{}_c X_b Y^c J\varepsilon_a + B_{ab}{}^c X^b Y_c J\varepsilon^a = B^{ab}{}_c X_b Y^c (\sqrt{-1})\varepsilon_a + B_{ab}{}^c X^b Y_c (-\sqrt{-1})\varepsilon^a$.
Сравнивая правые части полученных равенств, получим

$$B(JX,Y) = -B(X,JY) = -JB(X,Y)$$

Пусть $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$. Напомним, что умножение на комплексное число в $\mathbf{C}-$ модуле $\mathcal{X}(M)$ вводится по формуле $zX = \alpha X + \beta JX$. Тогда $B(zX,Y) = B(\alpha X + \beta JX, Y) = \alpha B(X,Y) + \beta B(JX,Y) = \alpha B(X,Y) - J\beta B(X,Y) = \bar{z}B(X,Y)$. Аналогично, $B(X,zY) = B(X, \alpha Y + \beta JY) = \alpha B(X,Y) + \beta B(X,JY) = \alpha B(X,Y) + \beta JB(X,Y) = zB(X,Y)$. Итак,

$$B(zX,Y) = \bar{z}B(X,Y); \quad B(X,zY) = zB(X,Y)$$

Следствие. $\sigma B(X,Y) = B(\bar{\sigma}X, Y) = B(X, \sigma Y)$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Доказательство. Заметим, что $\bar{\sigma}X \in \mathcal{X}(M)^C$, а значит, под B мы понимаем расширение введенного отображения B по линейности, то есть под обозначением B мы понимаем B^C. Поэтому наше следствие должно выглядеть так: $\sigma B^C(X,Y) = B^C(\bar{\sigma}X, Y) = B^C(X, \sigma Y)$, но следуя традиции, мы опускаем знак комплексификации. Тогда $B(\bar{\sigma}X, Y) = \frac{1}{2}B(X + \sqrt{-1}JX, Y) = \frac{1}{2}(B(X,Y) + \sqrt{-1}B(JX,Y)) = \frac{1}{2}(B(X,Y) - \sqrt{-1}JB(X,Y)) = \sigma B(X,Y)$. Докажем второе равенство: $B(X, \sigma Y) = \frac{1}{2}B(X, Y - \sqrt{-1}JY) = \frac{1}{2}(B(X,Y) - \sqrt{-1}JB(X,Y)) = \sigma B(X,Y)$. $\square$

Замечание. Аналогично из доказанной леммы следует, что тензор $\nabla_X(J)Y$ будет антилинеен по второму аргументу, а для его комплексификации будет иметь место соотношение $\nabla_X(J)(\sigma Y) = \bar{\sigma}\nabla_X(J)Y$.

Задача 8.11. Проведите доказательство.

Далее, согласно определению отображения B, получим $B(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c) = B^{ag}{}_h (\varepsilon_{\hat{b}})_g (\varepsilon_c)^h \varepsilon_a + B_{ag}{}^h (\varepsilon_{\hat{b}})^g (\varepsilon_b)_h \varepsilon^a = B^{ag}{}_h \delta^b_g \delta^h_c \varepsilon_a + 0 = B^{ab}{}_c \varepsilon_a$.

Таким образом, $B(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c) = B^{ab}{}_c \varepsilon_a = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},c} \varepsilon_a == -\frac{\sqrt{-1}}{2} (\nabla_{\varepsilon_c}(J)\varepsilon_{\hat{b}})^a \varepsilon_a = -\frac{1}{2}(\nabla_{\varepsilon_c}(J)\varepsilon_{\hat{b}})^a \sqrt{-1}\varepsilon_a = -\frac{1}{2}(\nabla_{\varepsilon_c}(J)\varepsilon_{\hat{b}})^a J(\varepsilon_a) = -frac12J((\nabla_{\varepsilon_c}(J)\varepsilon_{\hat{b}})^a \varepsilon_a)$. Итак,
$B(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c)^a \varepsilon_a = -frac12J((\nabla_{\varepsilon_c}(J)\varepsilon_{\hat{b}})^a \varepsilon_a)$ или $\sigma B(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c) = -\frac{1}{2}\sigma \circ J \circ \nabla_{\varepsilon_c}(J)\varepsilon_{\hat{b}}$ или $\sigma B(\bar{\sigma}(e_b), \sigma(e_c)) = -\frac{1}{2}\sigma \circ J \circ \nabla_{\sigma(e_c)}(J)(\bar{\sigma}(e_b))$. Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис $T_m(M)$, $m \in M$, рассматриваемого как $\mathbf{C}-$ модуль, для любых $X, Y \in T_m(M)$ имеем $\sigma B(\bar{\sigma}(X), \sigma(Y)) = -\frac{1}{2}\sigma \circ J \circ \nabla_{\sigma(Y)}(J)(\bar{\sigma}(X))$ для любой точки $m \in M$, а значит, это соотношение верно для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Используя доказанное выше следствие, получим $\sigma^3 B(X,Y) = -\frac{1}{2}\sigma^2 \circ J \nabla_{\sigma Y}(J)(X)$. Так как $\sigma^2 = \sigma$, то

$$\sigma B(X,Y) = -\frac{1}{2}\sigma \circ J \circ \nabla_{\sigma Y}(J)X$$

Напомним, что $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)$. Тогда последнее равенство запишется в виде $B(X,Y) - \sqrt{-1}JB(X,Y) = -\frac{1}{2}J\nabla_{\sigma Y}(J)X - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\nabla_{\sigma Y}(J)X$ или $B(X,Y) - \sqrt{-1}JB(X,Y) = -\frac{1}{4}(J\nabla_Y(J)X - \sqrt{-1}J\nabla_{JY}(J)X + \sqrt{-1}\nabla_Y(J)X + \nabla_{JY}(J)X)$. Приравнивая вещественную и мнимую части, получим

$$B(X,Y) = -\frac{1}{4}(J\nabla_Y(J)X + \nabla_{JY}(J)X)$$

Мнимая часть умножением на J приводится к такому же виду. Итак,

$$B(X,Y) = -\frac{1}{4}(J\nabla_Y(J)X + \nabla_{JY}(J)X) = -\frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X - \nabla_Y(J)(JX))$$

– безындексное выражение для виртуального тензора. Заметим, что $B(X,Y) = (\sigma + \bar{\sigma})B(X,Y) = \sigma \circ B(X,Y) + \bar{\sigma} \circ B(X,Y)$, где $\sigma \circ B(X,Y)$ задается системой функций $\{B^{ab}{}_c\}$, а $\bar{\sigma} \circ B(X,Y)$ задается системой функций $\{B_{ab}{}^c\}$. Другими словами, вещественный виртуальный тензор распадается в сумму двух комплексных тензором: виртуального тензора 1-го рода и виртуального тензора 2-го рода.

Совершенно аналогично можно ввести в рассмотрение тензор

$$\tilde{C}(X,Y) = C^{abc} X_b Y_c \varepsilon_a + C_{abc} X^b Y^c \varepsilon^a$$

где $C^a bc = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},\hat{c}}$, $C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,c}$.

1) $\tilde{C}$ – вещественный тензор, то есть $\tau\tilde{C}(X,Y) = C(X,Y)$.

2) $\tilde{C}(JX,Y) = \tilde{C}(X,JY) = -J\tilde{C}(X,Y)$. Проверяется также как для виртуального тензора. Другими словами, $\tilde{C}$ антилинеен по каждому аргументу. Откуда следует, что

$$\tilde{C}(\sigma X,Y) = \tilde{C}(X,\sigma Y) = \bar{\sigma}\tilde{C}(X,Y); \quad \tilde{C}(\bar{\sigma}X,Y) = \tilde{C}(X,\bar{\sigma}Y) = \sigma\tilde{C}(X,Y); \tag{1}$$

Аналогично виртуальному тензору имеем $\tilde{C}(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_{\hat{c}}) = C^{abc}\varepsilon_a = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},\hat{c}}\varepsilon_a = \frac{\sqrt{-1}}{2}(\nabla_{\varepsilon_{\hat{c}}}(J)\varepsilon_{\hat{b}})^a\varepsilon_a =$ $= \frac{1}{2}(\nabla_{\varepsilon_{\hat{c}}}(J)\varepsilon_{\hat{b}})^a J(\varepsilon_a) = \frac{1}{2}\sigma \circ J \circ \nabla_{\varepsilon_{\hat{c}}}(J)(\varepsilon_{\hat{b}})$. Тогда $\sigma\tilde{C}(\bar{\sigma}e_b,\bar{\sigma}e_c) = \frac{1}{2}\sigma \circ J \circ \nabla_{\bar{\sigma}e_c}(J)(\bar{\sigma}e_b)$. Согласно (1) получим $\sigma^3\tilde{C}(e_b,e_c) = \frac{1}{2}\sigma^2 \circ J \circ \nabla_{\bar{\sigma}e_c}(J)e_b$ или $\sigma\tilde{C}(X,Y) = \frac{1}{2}\sigma \circ J \circ \nabla_{\bar{\sigma}e_c}(J)e_b$. Распишем σ и $\bar{\sigma}$: $(id - \sqrt{-1}J)\tilde{C}(X,Y) = \frac{1}{4}(id - \sqrt{-1}J) \circ J \circ \nabla_{Y+\sqrt{-1}JY}(J)X$. Расписывая это равенство по линейности и приравнивая вещественную и мнимую части, получим

$$\tilde{C}(X,Y) = -\frac{1}{4}\left(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_X(J)(JY)\right)$$

Заметим, наконец, что структурный тензор C (определяемый системами функций $\{B^{abc}\}$ и $\{B_{abc}\}$) отличается от тензора $\tilde{C}$ альтернацией по аргументам X и Y, следовательно,

$$C(X,Y) = -\frac{1}{8}\left(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY)\right)$$

Эта формула позволяет выяснить геометрический смысл структурного тензора. Именно рассмотрим тензор Нейенхейса почти комплексной структуры J, входящей в почти эрмитову структуру (J,g):

$$N(X,Y) = -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

С другой стороны, метрика g определяет риманову связность без кручения, то есть $S(X,Y) = -\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X,Y] = 0$, то есть $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Тогда тензор Нейенхейса примет вид $N(X,Y) = \nabla_Y X - \nabla_X Y + \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) + J\nabla_Y(JX) - J\nabla_{JX}Y + J\nabla_{JY}X - J\nabla_X(JY) = \nabla_Y X - \nabla_X Y + \nabla_{JX}(J)Y + J\nabla_{JX}Y - \nabla_{JY}(J)X - J\nabla_{JY}X + J\nabla_Y(J)X - \nabla_Y X - J\nabla_{JX}Y + J\nabla_{JY}X - J\nabla_X(J)Y + \nabla_X Y = \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_{JY}(J)X + J\nabla_Y(J)X - J\nabla_X(J)Y = \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_{JY}(J)X - \nabla_Y(J)(JX) + \nabla_X(J)(JY) = 8C(X,Y)$. В такой записи очевидно, что N является тензором и $C(X,Y) = \frac{1}{8}N(X,Y)$. Так как тензор Нейенхейса определяется только комплексной структурой и не зависит от метрики, то при переходе от почти эрмитовой структуры (J,g) к почти эрмитовой структуре $(J,\tilde{g})$, тензор Нейенхейса не изменяется, а значит, не изменяется структурный тензор C. Так как альтернативный структурный тензор $\tilde{C}$ выражается через структурный тензор, то он также не зависит от метрики.

8.5 Основные классы почти эрмитовых структур.

Изучение почти эрмитовых структур в общем виде крайне сложно и практически не дает конкретной геометрической информации о таких структурах. Конкретная информация получается, если накладывать на почти эрмитову структуру какие-либо дополнительные требования. Классическим примером такого требования является условие $\nabla J = 0$ в римановой связности метрики g. Соответствующие почти эрмитовы структуры называются *келеровыми структурами*. Многообразия с такими структурами под названием $A-$ пространств были введены П.А. Широковым (Казань) в начале XX века и чуть позже Е. Келером (E.Kähler). Позднее такие многообразия стали называться келеровыми многообразиями. Существует много примеров келеровых многообразий и, с другой стороны, их геометрия очень глубоко разработана. Геометрия келеровых многообразий стоит на стыке таких наук как топология, алгебраическая геометрия, дифференциальная геометрия, глобальная теория эллиптических

операторов, теоретическая физика. Несмотря на глубокую разработанность этой тематики, интерес к ней не ослабевает и в настоящее время. Такое богатство свойств навело на мысль ослабить свойство келеровости, что привело к открытию новых классов почти эрмитовых многообразий.

Другое естественное требование, накладываемое на почти эрмитову структуру (J, g) – интегрируемость почти комплексной структуры J, что равносильно обращению в нуль ее тензора Нейенхейса N_J. Такие многообразия называются *эрмитовыми*. Оказывается, что условие $\nabla J = 0$ равносильно выполнению двух условий: $N_J = 0$ и $d\Omega = 0$, где $\Omega(X, Y) = g(JX, Y)$ – фундаментальная форма почти эрмитовой структуры. Тогда возникает еще одно обобщение: почти эрмитовы многообразия с требованием $d\Omega = 0$. Такие многообразия называются *почти келеровыми многообразиями* (almost Kähler manifold). Геометрия почти келеровых многообразий тесно связнана с симплектической геометрией, которая находит глубокое применение в теоретической механике.

Симплектической структурой называется замкнутая 2-форма максимального ранга на многообразии. Задание симплектической структуры равносильно заданию почти келеровой структуры. Но взаимно однозначного соответствия нет, так как симплектическую структуру можно достроить до почти келеровой различными способами.

В начале 50-х годов XX века возник еще один интересный класс почти эрмитовых многообразий – класс приближенно келеровых многообразий (nearly Kähler manifold). Это многообразия, у которых фундаментальная форма Ω является формой Киллинга, то есть $\nabla\Omega = d\Omega$. В 70-80-е годы XX века бум исследований по этой тематике. Был найдены конкретные примеры приближенно келеровых многообразий.

Итак, перечислим основные классы почти эрмитовых многообразий (полную классификацию почти эрмитовых многообразий приведем ниже).

Название структуры	Обозначение	Характеристическое тождество
Келерова	$\mathcal{K}$	$\nabla_X(J)Y = 0$
Эрмитова	$\mathcal{H}$	$\nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)JY = 0$
Квазикелерова	$\mathcal{QK}$	$\nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)JY = 0$
Приближенно келерова	$\mathcal{NK}$	$\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0$
Почти келерова	$\mathcal{AK}$	$d\Omega = 0$

Теорема 8.2. Почти эрмитова структура является эрмитовой тогда и только тогда, когда ее почти комплексная структура интегрируема, то есть $N_J \equiv 0$.

Доказательство. 1) Прежде всего заметим, что почти эрмитова структура является эрмитовой тогда и только тогда, когда $\nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)JY = 0 \Leftrightarrow \nabla_{JX}(J)Y + \nabla_X(J)(JY) = 0 \Leftrightarrow \tilde{C}(X, Y) = 0$. С другой стороны, как мы видели $N(X, Y) = 8C(X, Y) = 4(\tilde{C}(X, Y) - \tilde{C}(Y, X))$. Поэтому если структура (J, g) эрмитова, то $N(X, Y) = 0$, то есть $N_J \equiv 0$, то есть J интегрируема.

2) Обратно, пусть J – интегрируема, то есть $N_J \equiv 0$, то есть $\tilde{C}(X, Y) = \tilde{C}(Y, X)$.
Докажем, что имеет место тождество $\langle\tilde{C}(X, Y), Z\rangle + \langle X, \tilde{C}(Z, Y)\rangle = 0$.
В самом деле, $\langle\tilde{C}(X, Y), Z\rangle = \langle-\frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX)), Z\rangle = -\frac{1}{4}\langle\nabla_{JY}(J)X, Z\rangle - \frac{1}{4}\langle\nabla_Y(J)(JX), Z\rangle = \frac{1}{4}\langle X, \nabla_{JY}(J)Z\rangle + \frac{1}{4}\langle JX, \nabla_Y(J)Z\rangle = \frac{1}{4}\langle X, \nabla_{JY}(J)Z - J\nabla_Y(J)Z\rangle = \frac{1}{4}\langle X, \nabla_{JY}(J)Z + \nabla_Y(J)JZ\rangle = -\langle X, \tilde{C}(Z, Y)\rangle$.
Тогда $\langle\tilde{C}(X, Y), Z\rangle = -\langle X, \tilde{C}(Z, Y)\rangle = -\langle\tilde{C}(Z, Y), X\rangle = -\langle\tilde{C}(Y, Z), X\rangle = \langle Y, \tilde{C}(X, Z)\rangle = \langle\tilde{C}(X, Z), Y\rangle = \langle\tilde{C}(Z, X), Y\rangle = -\langle Z, \tilde{C}(Y, X)\rangle = -\langle\tilde{C}(Y, X), Z\rangle = -\langle\tilde{C}(X, Y), Z\rangle$, то есть $\langle\tilde{C}(X, Y), Z\rangle = 0$ и в силу невырожденности метрики $\tilde{C}(X, Y) = 0$. Напомним, что $\tilde{C}(X, Y) = -\frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX))$. Следовательно, $\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) = 0$ и, заменяя $Y \to JY$, получим $\nabla_Y(J)X - \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$, то есть почти эрмитова структура (J, g) является эрмитовой. □

Следствие. Почти эрмитова структура (J, g) является эрмитовой $\Leftrightarrow N_J \equiv 0 \Leftrightarrow \tilde{C} = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Leftrightarrow B^{abc} = B_{abc} = 0 \Leftrightarrow C^{abc} = C_{abc} = 0$.

Теорема 8.3. Почти эрмитова структура (J, g) является квазикелеровой тогда и только тогда, когда $B = 0$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $(J, g) \in \mathcal{QK} \Leftrightarrow \nabla_X(J)Y + \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$ и, заменяя $X \to JX$, получим равносильное тождество $\nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY) = 0 \Leftrightarrow B(Y, X) = 0, \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.
□

Следствие. Почти эрмитова структура (J, g) является квазикелеровой $\Leftrightarrow B = 0 \Leftrightarrow B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0$.

Теорема 8.4. Почти эрмитова структура (J, g) является келеровой тогда и только тогда, когда $B = C = 0$.

Доказательство. Если (J, g) – келерова, то по определению $\nabla_X(J)Y = 0$. В частности, $B(X, Y) = -\frac{1}{4}(J\nabla_Y(J)X + \nabla_{JY}(J)X) = 0$ и $C(X, Y) = -\frac{1}{8}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY)) = 0$.

Обратно, пусть $B = C = 0$. Так как альтернативный структурный тензор $\tilde{C}$ выражается через структурный тензор C (см. выше), то $C = 0$ следует, что $\tilde{C} = 0$. Тогда имеем $B(X,Y) = -\frac{1}{4}(J\nabla_Y(J)X + \nabla_{JY}(J)X) = 0$ и $\tilde{C}(X,Y) = -\frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX)) = 0$. Складывая эти два тождества, получим $\nabla_Y(J)(JX) = 0$. Заменяя $X \to JX$, получим $\nabla_Y(J)X = 0$, то есть структура (J,g) является келеровой. $\square$

Следствие. Почти эрмитова структура (J,g) является келеровой $\Leftrightarrow B = C = 0 \Leftrightarrow B = \tilde{C} = 0 \Leftrightarrow B^{abc} = B_{abc} = 0, B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0 \Leftrightarrow C^{abc} = C_{abc} = 0, B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0$.

Следствие. $\mathcal{H} \cap \mathcal{QK} = \mathcal{K}$.

Предложение 8.1. Любая приближенно келерова структура является квазикелеровой структурой, то есть $\mathcal{NK} \subset \mathcal{QK}$.

Доказательство. По определению почти эрмитова структура (J,g) принадлежит классу приближенно келеровых структур $\Leftrightarrow \nabla_X(J)Y = -\nabla_Y(J)X$. Тогда $\nabla_{JX}(J)(JY) = -J\nabla_{JX}(J)Y = J\nabla_Y(J)(JX) = -J^2\nabla_Y(J)X = \nabla_Y(J)X = -\nabla_X(J)Y$. Таким образом, $\nabla_X(J)Y + \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$, а значит, структура (J,g) – квазикелерова. $\square$

Следствие. Почти эрмитова структура (J,g) является приближенно келеровой $\Leftrightarrow B = 0, \tilde{C}(X,Y) = -\tilde{C}(Y,X)$.

Доказательство. Если (J,g) – приближенно келерова, то она квазикелерова, а значит, $B = 0$. Далее, так как (J,g) – приближенно келерова, то $\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0$. В частности, $\tilde{C}(X,Y) = -\frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX)) = -\frac{1}{4}(-\nabla_X(J)(JY) - \nabla_{JX}(J)Y) = -\tilde{C}(Y,X)$.
Обратно, если выполнены эти условия, то из того, что $B = 0$ следует $\nabla_{JY}(J)X - \nabla_Y(J)(JX) = 0$ и $\nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY) = 0$. Из того, что $\tilde{C}(X,Y) = -\tilde{C}(Y,X)$ следует, что $\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) = -\nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY)$. Складывая первое и третье тождества и вычитая из них второе тождество, получим $2\nabla_{JY}(J)X = -2\nabla_X(J)(JY)$. Заменяя $Y \to JY$, получим $\nabla_Y(J)X + \nabla_X(J)Y = 0$, то есть структура (J,g) – приближенно келерова. $\square$

Следствие. Почти эрмитова структура (J,g) является приближенно келеровой $\Leftrightarrow B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0$, $C^{abc} = -C^{acb} \Leftrightarrow B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0$, $B^{[abc]} = B^{abc}$. $\square$

Лемма 8.8. Пусть θ – $r-$ форма на римановом многообразии $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$, ∇ – риманова связность метрики g. Тогда $d\theta = Alt(\nabla\theta)$.

Доказательство. Напомним, что крышкой мы отмечаем выбрасываемый аргумент.
$d\theta(X_1,\ldots,X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_i(\theta(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1}))+$
$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\theta([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{r+1}) =.$
Напомним, что $\nabla_{X_i}(\theta)(Y_1,\ldots,Y_r) = X_i(\theta(Y_1,\ldots,Y_r)) - \sum_{k=1}^{r}\theta(Y_1,\ldots,Y_{k-1},\nabla_{X_i}Y_k,Y_{k+1},\ldots,Y_r)$. Для римановой связности $0 = S(X,Y) = -\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X,Y]$, то есть $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Тогда возвращаясь к первому равенству получим
$= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}(\nabla_{X_i}(\theta)(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1}) + \sum_{k=1,k\neq i}^{r+1}\theta(X_1,\ldots,X_{k-1},\nabla_{X_i}X_k,X_{k+1},\ldots,X_{r+1})+$
$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\theta(\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{r+1})$.
Докажем, что $\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1,k\neq i}^{r+1}(-1)^{i+1}\theta(X_1,\ldots,X_{k-1},\nabla_{X_i}X_k,X_{k+1},\ldots,X_{r+1}) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\theta(\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{r+1}) = 0$. Преобразуем второе слагаемое: фиксируем $i = 1,\ldots,r+1$. Тогда
$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\theta(\nabla_{X_i}X_j,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{r+1})+\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\theta(\nabla_{X_j}X_i,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{r+1}) =$
$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\theta(\nabla_{X_i}X_j,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{r+1})+\sum_{j<i}(-1)^{i+j+1}\theta(\nabla_{X_i}X_j,X_1,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1}) =$
$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(-1)^{j-2}\theta(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\nabla_{X_i}X_j,\ldots,X_{r+1})+$
$+\sum_{j<i}(-1)^{i+j+1}(-1)^{j-1}\theta(X_1,\ldots,\nabla_{X_i}X_j,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1}) = \sum_{j=1,j\neq i}^{r+1}(-1)^{i}\theta(X_1,\ldots,\nabla_{X_i}X_j,\ldots,X_{r+1}.$
Итак, второе слагаемое $= \sum_{i=1}^{r+1}\sum_{j=1,j\neq i}^{r+1}(-1)^{i}\theta(X_1,\ldots,\nabla_{X_i}X_j,\ldots,X_{r+1} = (-1)\cdot$ первое слагаемое.
Окончательно получаем
$d\theta(X_1,\ldots,X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}\nabla_{X_i}(\theta)(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1}) = (Alt(\nabla\theta))(X_1,\ldots,X_r;X_{r+1})$.
Здесь $(\nabla\theta)(X_1,\ldots,X_r;Y) = \nabla_Y(\theta)(X_1,\ldots,X_r)$. $\square$

Пусть почти эрмитова структура (J,g) является почти келеровой структурой, то есть $d\Omega = 0$, то есть $d\Omega(X_1,X_2,X_3) = 0, \forall X_1,X_2,X_3 \in \mathcal{X}(M)$. С учетом леммы получим $\nabla\Omega(X_1,X_2,X_3)+\nabla\Omega(X_2,X_3,X_1)+\nabla\Omega(X_3,X_1,X_2) - \nabla\Omega(X_2,X_1,X_3) - \nabla\Omega(X_3,X_2,X_1) - \nabla\Omega(X_1,X_3,X_2) = 0$. В силу кососимметричности фундаментальной формы имеем $\Omega(X,Y) = -\Omega(Y,X)$, а значит, $\nabla_Z(\Omega)(X,Y) = -\nabla_Z(\Omega)(Y,X)$, то есть $\nabla\Omega(X,Y,Z) = -\nabla\Omega(Y,X,Z)$. Тогда $\nabla\Omega(X_1,X_2,X_3) + \nabla\Omega(X_2,X_3,X_1) + \nabla\Omega(X_3,X_1,X_2) = 0$, то есть $\nabla_X(\Omega)(Y,Z) + \nabla_Y(\Omega)(Z,X) + \nabla_Z(\Omega)(X,Y) = 0$ – это необходимое и достаточное условие того, что почти эрмитова структура многообразия M принадлежит классу почти келеровых структур.

Перейдем к комплексификации объектов и распишем это равенство на пространстве присоединенной $G-$ структуры. Пусть $X = \varepsilon_k$, $Y = \varepsilon_i$, $Z = \varepsilon_j$. Тогда получим $\Omega_{ij,k} + \Omega_{jk,i} + \Omega_{ki,j} = 0$ или $J^r_{i,k} g_{jr} + J^r_{j,i} g_{rk} + J^r_{k,j} g_{ri} = 0$, так как $\Omega_{ij} = J^k_i g_{kj}$, а значит, $\Omega_{ij,r} = J^k_{i,r} g_{kj} + J^k_i g_{kj,r} = J^k_{i,r} g_{kj}$.
Таким образом, почти эрмитова структура (J, g) принадлежит классу почти келеровых структур тогда и только тогда, когда

$$J^r_{i,k} g_{jr} + J^r_{j,i} g_{rk} + J^r_{k,j} g_{ri} = 0$$

Рассмотрим случаи:
1) $i = a$, $j = b$, $k = c$. Тогда $J^{\hat{d}}_{a,c} g_{\hat{d}b} + J^{\hat{d}}_{b,a} g_{\hat{d}c} + J^{\hat{d}}_{c,b} g_{\hat{d}a} = 0$ или $C_{dac}\delta^d_b + C_{dba}\delta^d_c + C_{dcb}\delta^d_a = 0$ или $C_{bac}+C_{cba}+C_{acb} = 0$. С учетом этого для структурного тензора получим $B_{[bac]} = \frac{1}{3}(B_{bac}+B_{cba}+B_{acb}) = \frac{1}{6}(C_{bac} - C_{bca} + C_{cba} - C_{cab} + C_{acb} - C_{abc}) = \frac{1}{6}(0 - 0) = 0$. Итак, мы получили $B_{[abc]} = 0$ и, так как $B^{abc} = \bar{B}_{abc}$, $B^{[abc]} = 0$.
2) $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$. Тогда $0 + J^{\hat{d}}_{b,\hat{a}} g_{\hat{d}c} + 0 = 0$ Или $B_{db}{}^a \delta^d_c = 0$ или $B_{cb}{}^a = 0$. Так как $B^{cb}{}_a = \bar{B}_{cb}{}^a$, то $B^{cb}{}_a = 0$.
Непосредственно проверяется, что остальные случаи новых соотношений не дадут. Итак, мы доказали

Предложение 8.2. Почти эрмитова структура (J, g) принадлежит классу почти келеровых структур тогда и только тогда, когда $B^{[abc]} = 0$, $B^{ab}{}_c = 0$ и формулы комплексно сопряженные. □

Следствие. Всякая почти келерова структура является квазикелеровой, то есть $\mathcal{AK} \subset \mathcal{QK}$.

Следствие. Имеют место следующие соотношения: $\mathcal{K} \subset \mathcal{NK} \subset \mathcal{QK}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{AK} \subset \mathcal{QK}$, $\mathcal{QK} \cap \mathcal{H} = \mathcal{K}$, $\mathcal{NK} \cap \mathcal{AK} = \mathcal{K}$.

Следствие. Альтернативное определение келеровой структуры: это такая почти эрмитова структура (J, g), для которой
1) J – интегрируема, то есть тензор Нейенхейса тождественно равен нулю $(N_J = 0)$;
2) фундаментальная форма замкнута, то есть $d\Omega = 0$.
Другими словами, келерово многообразие – это эрмитово многообразие с замкнутой фундаментальной формой.

Доказательство. Это следует из того, что $N_J = 0 \Leftrightarrow (J, g) \in \mathcal{H}$. Условие $d\Omega = 0 \Leftrightarrow (J, g) \in \mathcal{AK}$. Тогда выполнение обоих условий равносильно принадлежности почти эрмитовой структуры (J, g) классу $\mathcal{H} \cap \mathcal{AK} \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{QK} = \mathcal{K}$.
Обратно, если $(J, g) \in \mathcal{K}$, то $\nabla_X(J)Y = 0$, а значит, $\nabla\Omega = 0$ и $d\Omega = Alt(\nabla\Omega) = 0$ и $N_J = 0$, так как выражается через ∇J. □