8 Почти эрмитовы структуры.

8.6 16 классов Грея-Хервеллы почти эрмитовых многообразий.

Грей и Хервелла показали, что все возможные классы почти эрмитовых структур на гладком многообразии могут принадлежать одному из 16-ти классов, характеризуемых в дифференциальной окрестности 1-го порядка (то есть характеризуемые тождествами в терминах ковариантных производных 1-го порядка от тензоров почти эрмитовой структуры). Тождества, полученные Греем и Хервеллой весьма громоздки и мы приведем их классификацию без доказательства, а затем покажем, что смысл этих тождеств существенно упрощается при использовании присоединенной $G-$ структуры.

Пусть $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ почти эрмитова структура на гладком многообразии M^{2n}. Обозначим $N(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ – тензор Нейенхейса (отметим, что он отличается знаком от тензора Нейенхейса, введенного нами выше). Обозначим $F(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ – *келерова форма*, $\omega = -\frac{1}{n-1}\delta F(JX)$ – *форма Ли*, где δ – оператор кодифференцирования ($(\delta F)_i = g^{jk}F_{ij,k}$). Тогда для $n \geq 6$ получим

Класс	Определяющее тождество
$\{0\} \equiv \mathcal{K}$	$\nabla F = 0$ или $\nabla J = 0$
$W_1 \equiv \mathcal{NK}$	$\nabla_X(F)(X,Y) = 0$ или $3\nabla F = dF$ или $\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0$
$W_2 \equiv \mathcal{AK}$	$dF = 0$ или $d\Omega = 0$
$W_3 \equiv \mathcal{SK} \cap \mathcal{H}$	$\delta F = N = 0$ или $\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = \delta F = 0$
W_4	$\nabla_X(F)(Y,Z) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X,Y\rangle\delta F(Z) - \langle X,Z\rangle\delta F(Y) - \langle X,JY\rangle\delta F(JZ) + \langle X,JZ\rangle\delta F(JY))$
$W_1 \oplus W_2 = \mathcal{QK}$	$\nabla_X(F)(Y,Z) + \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0$
$W_3 \oplus W_4 = \mathcal{H}$	$N = 0$ или $\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0$
$W_1 \oplus W_3$	$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = \delta F = 0$
$W_2 \oplus W_4$	$dF = F \wedge \omega$ или $Alt_{XYZ}(\nabla_X(F)(Y,Z) - \frac{1}{n-1}F(X,Y)\delta F(JZ)) = 0$
$W_1 \oplus W_4 = VG$	$\nabla_X(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X,X\rangle\delta F(Y) - \langle X,Y\rangle\delta F(X) - \langle JX,Y\rangle\delta F(JX))$
$W_2 \oplus W_3$	$Alt_{XYZ}(\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z)) = \delta F = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = \mathcal{SK}$	$\delta F = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$\nabla_X(F)(Y,Z) + \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = \frac{-1}{n-1}(\langle X,Y\rangle\delta F(Z) - \langle X,Z\rangle\delta F(Y) - \langle X,JY\rangle\delta F(JZ) + \langle X,JZ\rangle\delta F(JY))$
$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4 = G_1$	$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = 0$ или $\langle N(X,Y), X\rangle = 0$
$W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 = G_2$	$Alt_{XYZ}(\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z)) = 0$ или $Alt_{XYZ}\langle N(X,Y), JZ\rangle = 0$
W	No condition

Для почти эрмитовых многообразий размерности 4 выделены следующие классы:

Класс	Определяющее тождество
$\mathcal{K}$	$\nabla F = 0$
$W_2 = \mathcal{AK}$	$dF = 0$
$W_4 = \mathcal{H}$	$N = 0$
W	No condition

Перейдем к рассмотрению присоединенной $G-$ структуры.

Пусть V – линейное пространство. Рассмотрим ассоциированное линейное пространство тензоров типа (2,1) $\Lambda_2^1(V)$, кососимметричных по нижним индексам. В нем есть подпространство $B_2^1(V) \subset \Lambda_2^1(V)$ так называемых *бесследных тензоров*, то есть тензоров t, удовлетворяющих условию $C^{(1)}_{(1)}t = 0$, где $C^{(1)}_{(1)}$ – оператор свертки. Так же определено подпространство $C_2^1(V)$ *примитивных тензоров*, то есть тензоров типа $t^a_{bc} = \alpha_{[b}\delta^a_{c]}$, где $a,b,c = 1,\ldots,dimV$. Другими словами, тензоров вида $t = c \wedge id = \frac{1}{2}(c \otimes id - id \otimes c)$, где $c \in V^*$ – некоторый ковектор. Или еще тензор $t \in C_2^1(V)$ можно записать в виде $t(X,Y) = \frac{1}{2}(c(X)Y - c(Y)X) \in V$.

Предложение 8.3. $\Lambda_2^1(V) = B_2^1(V) \oplus C_2^1(V)$.

Доказательство. Пусть $t \in \Lambda_2^1(V)$. Надо доказать, что тензор t однозначно представляется в виде суммы $t = b + c$, где b – бесследный, а c – примитивный тензор.

1) Пусть такое представление существует. Тогда $tr(t) \equiv C^{(1)}_{(1)}(t) = C^{(1)}_{(1)}b + C^{(1)}_{(1)}c = 0 + C^{(1)}_{(1)}c = C^{(1)}_{(1)}c$. Далее, $c^a_{bh} = \alpha_{[b}\delta^a_{h]} = \frac{1}{2}(\alpha_b\delta^a_h - \alpha_h\delta^a_b)$, следовательно, $(trc)_h = (C^{(1)}_{(1)}c)_h = c^a_{ah} = \frac{1}{2}(\alpha_h - n\alpha_h) = \frac{1}{2}(1-n)\alpha_h$.

Откуда получаем $\alpha_h = \frac{2(tr\,c)_h}{1-n}$ или

$$\alpha = \tfrac{2}{1-n}(tr(t)), \quad \text{где} \quad n = dimV$$

Таким образом, $c = \alpha \wedge id$, где $\alpha = \frac{2}{1-n}(tr\,t)$, то есть если существует разложение, то эта формула однозначно определяет тензоры b и c.

2) Докажем существование такого разложения. Пусть $c = \alpha \wedge id$, где $\alpha = \frac{2}{1-n}(tr\,t)$ и $b = t - c$. Нам нужно доказать, что $b \in B_2^1(V)$, то есть бесследный тензор. Действительно, $t + (t - c) = c$. Тогда $tr(t-c) = tr\,t - tr\,c = tr\,t - tr\,t = 0$, следовательно, $t - c \in B_2^1(V)$. □

Следствие. Пусть $(M, J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – почти эрмитова многообразие, B – его виртуальный тензор. Он имеет ненулевые компоненты $\{B_{ab}{}^c, B^{ab}{}_c\}$. Тогда в любой точке многообразия числа $\{B_{ab}{}^c\}$, служащие компонентами виртуального тензора второго рода $\bar{\sigma}B$, определяют комплексный тензор типа (2,1) линейного пространства $(D_J^{\sqrt{-1}})_p$, а следовательно, по доказанному однозначно представляются в виде суммы $\bar{\sigma} = \gamma + \beta$, где γ – бесследный тензор, а β – примитивный тензор, то есть $\gamma^a_{ab} = 0$, $\beta^a_{bc} = \alpha_{[b}\delta^a_{c]}$, где α – подходящий ковектор.

С другой стороны, рассмотрим пространство $\Lambda_{1,2}(V)$ тензорное поле типа (3,0) на V, кососимметричных по последней паре индексов. Мы знаем, что в пространстве $\mathcal{T}_3^0(V)$, в частности, в его подпространстве $\Lambda_{1,2}(V)$ действует проектор Alt на подпространство $\Lambda_3(V)$ кососимметричных 3-форм, причем $\Lambda_{1,2}(V) = \Lambda_3(V) \oplus Ker\,Alt$ (известно из общей теории проекторов). Элемент t из $\Lambda_3(V)$ характеризуется тем, что $t_{[abc]} = t_{abc}$, то есть $Altt = t$. Элементы из ядра $Ker\,Alt$ характеризуются тем, что $t_{[abc]} = 0$, то есть $Alt\,t = 0$. Такие тензоры назовем *квазисимметричными*. Итак, доказана

Теорема 8.5. Линейное пространство $\Lambda_{1,2}$ распадается в прямую сумму подпространств кососимметричных и квазисимметричных тензоров. □

В частности, структурный тензор C почти эрмитова многообразия кососимметричнй по последней паре индексов. Поскольку C характеризуется набором $\{B_{abc}, B^{abc} = \bar{B}_{abc}\}$, набор чисел $\{B_{abc}\}$ определяет элемент пространства $\Lambda_{1,2}(V)$, а именно, рассмотрим $\hat{C}(X,Y,Z) = H(X, C(Y,Z)) = 2\langle X, \tau \circ C(Y,Z)\rangle$, где H – каноническая эрмитова метрика комплексификации касательного расслоения.

В силу сказанного выше C однозначно представляется в виде суммы $C = \delta + \varepsilon$, где $\delta \in \Lambda_3(V)$, ε – квазисимметричный тензор.

Вывод: для любой почти эрмитовой структуры $B = \gamma + \beta$, $C = \delta + \varepsilon$, γ – бесследный тензор, β – примитивный тензор, δ – кососимметричный тензор, ε – квазисимметричный тензор, причем это представление однозначно.

Итак, мы получаем таблицу

γ	0		0	0	0			0	0		0	0				
β	0	0		0	0		0		0	0			0			
δ	0	0	0		0	0		0		0				0		
ε	0	0	0	0		0	0				0				0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Эта таблица позволяет естественным образом выделить 16 классов почти эрмитовых структур.

1	$B^{ab}{}_c = 0$	$B^{abc} = 0$; и ф.к.с.	$\mathcal{K}$	$\{0\}$	Келеровы
2	$B^{ab}{}_a = 0$	$B^{abc} = 0$; и ф.к.с.	$\mathcal{SK} \cap \mathcal{H}$	W_3	
3	$B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta_c^{b]}$	$B^{abc} = 0$ и ф.к.с.	$lc\mathcal{K}$ $(dimM > 4)$	W_4	Локально конформно келеровы $(dimM > 4)$
4	$B^{ab}{}_c = 0$	$B^{[abc]} = B^{abc}$; и ф.к.с.	$\mathcal{NK}$	W_1	Приближенно келеровы
5	$B^{ab}{}_c = 0$	$B^{[abc]} = 0$; и ф.к.с.	$\mathcal{AK}$	W_2	Почти келеровы
6		$B^{abc} = 0$;и ф.к.с.	$\mathcal{H}$	$W_3 \oplus W_4$	Эрмитовы
7	$B^{ab}{}_a = 0$;	$B^{[abc]} = B^{abc}$; и ф.к.с.		$W_1 \oplus W_3$	
8	$B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta_c^{b]}$	$B^{[abc]} = 0$ и ф.к.с.		$W_2 \oplus W_4$	
9	$B^{ab}{}_c = 0$	и ф.к.с.	QK	$W_1 \oplus W_2$	Квазикелеровы
10	$B^{ab}{}_a = 0$;	$B^{[abc]} = 0$ и ф.к.с.		$W_2 \oplus W_3$	
11	$B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta_c^{b]}$;	$B^{[abc]} = B^{abc}$ и ф.к.с.	VG	$W_1 \oplus W_4$	Вайсмана-Грея
12	$B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta_c^{b]}$	и ф.к.с.		$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	
13	$B^{ab}{}_a = 0$	и ф.к.с.	SK	$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$	Семикелеровы
14		$B^{[abc]} = 0$ и ф.к.с.	G_2	$W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	
15		$B^{[abc]} = B^{abc}$ и ф.к.с.	G_1	$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$	
16	no condition		$\mathcal{AH}$	$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	

Здесь и далее "ф.к.с." обозначает "формулы комплексно сопряженные".

Чтобы доказать, что классификация Грея-Хервеллы и классификация В.Ф. Кириченко совпадают, нам нужно научиться переводить тождества, характеризующие многообразия в терминах инвариантного исчисления Кошуля (классификация Грея-Хервеллы) в термины присоединенной $G-$ структуры. Мы проведем перевод одного тождества с языка инвариантного исчисления Кошуля на язык присоединенной $G-$ структуры и одного тождества с языка присоединенной $G-$ структуры на язык инвариантного исчисления Кошуля. Перевод остальных тождеств предоставляется читателю в виде упражнения.

Пример. Рассмотрим класс многообразий Вайсмана-Грея (или класс $W_1 \oplus W_4$). В классификации Грея-Хервеллы этот класс задается тождеством

$$\nabla_X(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}\left(\langle X,X\rangle \delta F(Y) - \langle X,Y\rangle \delta F(X) - \langle JX,Y\rangle \delta F(JX)\right) \tag{1}$$

Напомним, что $dimM = 2n > 1$, $F(X,Y) = \langle JX,Y\rangle$ – келерова форма, δ – оператор кодифференцирования.

Определение 8.6. Пусть Ω – $r-$ форма на псевдоримановом многообразии M. Ее *кодифференциалом* называется $(r-1)-$ форма с компонентами

$$(\delta\Omega)_{i_1\dots i_{r-1}} = g^{i_r j}\Omega_{i_1\dots i_r,j}$$

Здесь $\Omega_{i_1\dots i_r,j}$ – компоненты ковариантного дифференциала формы Ω в римановой связности метрики g.

Договоримся, что индексы $i,j,k,l,\dots$ пробегают значения от 1 до $2n = dimM$.

В частности, для келеровой формы F имеем

$$(\delta F)_i = g^{jk}F_{ij,k}$$

Пусть $p = (m, e_1, \dots, e_{2n})$ – произвольный произвольный репер. Тогда из определения келеровой формы получаем $F(e_i,e_j) = \langle Je_i, e_j\rangle$ или $F_{ij} = \langle J_i^k e_k, e_j\rangle$ или

$$F_{ij} = g_{kj}J_i^k \tag{2}$$

Если рассматривать не все реперы, а только $A-$ реперы, то мы получим, что векторы $A-$ репера делятся на две группы $p = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$. Договоримся, что индексы a,b,c,d,e,f,g,h принимают значения от 1 до n, а для второй половины векторов $A-$ базиса примем обозначение $\hat{a},\hat{b},\dots$, то

есть те же буквы, но с крышками. Таким образом, получаем, что $\hat{a} = a + n$, причем a, по-прежнему, пробегает значения от 1 до n. С учетом сделанных замечаний, мы получаем, что индексы $i, j, k, \ldots$ могут находиться либо в группе индексов "без крышки", либо в группе индексов "с крышкой". Тогда свободные индексы i, j в тождестве (2) могут принимать следующие значения:
1) $i = a$, $j = b$, то есть оба индекса находятся в группе векторов $A-$ базиса "без крышки". В этом случае (2) принимает вид

$$F_{ab} = g_{kb} J_a^k$$

Обратите внимание, индекс k мы пока не тронули. Это индекс суммирования, причем мы знаем, что он пробегает все значения от 1 до $2n$, то есть сначала он бежит по индексам "без крышки", а затем по индексам "с крышкой", а значит, мы можем заменить индекс k двумя индексами c и $\hat{c}$, а именно,

$$F_{ab} = g_{cb} J_a^c + g_{\hat{c}b} J_a^{\hat{c}} \tag{3}$$

Договоримся называть переход от индекса суммирования, пробегающего индексы от 1 до 2n в виде суммы слагаемых, первое из которых содержит индекс суммирования, пробегающий значения от 1 до n, а второе – индекс суммирования, пробегающий значения от $n+1$ до $2n$, *переходом к сумме "без крышки – с крышкой"*.

Мы помним, что на пространстве присоединенной $G-$ структуры системы функций $\{J_j^i\}$ и $\{g_{ij}\}$ имеют вид: $J_b^a = \sqrt{-1}\delta_b^a$, $J_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\delta_{\hat{a}}^{\hat{b}}$, $J_{\hat{b}}^a = J_b^{\hat{a}} = 0$ и $g_{ab} = g_{\hat{a}\hat{b}} = 0$, $g_{\hat{a}b} = \delta_{\hat{a}}^a$, $g_{a\hat{b}} = \delta_{\hat{a}}^{\hat{b}}$. С учетом этого (3) принимает вид

$$F_{ab} = \sum_{c=1}^{n} \delta_b^c J_a^{\hat{c}} = J_a^{\hat{b}}$$

2. $i = \hat{a}$, $j = b$. Аналогично получаем

$$F_{\hat{a}b} = g_{cb} J_{\hat{a}}^c + g_{\hat{c}b} J_{\hat{a}}^{\hat{c}} = J_{\hat{a}}^{\hat{b}}$$

Два оставшихся случая просчитайте самостоятельно. В результате получим

$$F_{ab} = J_a^{\hat{b}} = 0; \quad F_{\hat{a}b} = J_{\hat{a}}^{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta_b^a; \quad F_{a\hat{b}} = J_a^b = \sqrt{-1}\delta_a^b; \quad F_{\hat{a}\hat{b}} = J_{\hat{a}}^b = 0$$

Прежде чем расписать тождество (1) на пространстве присоединенной $G-$ структуры, мы проведем так называемый *процесс поляризации*. Тождество (1) верно для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, в частности, оно останется верным, если мы заменим X на $X + Z$, где $Z \in \mathcal{X}(M)$ – произвольное векторное поле. Таким образом, мы получаем новое тождество

$$\nabla_{X+Z}(F)(X+Z, Y) = \frac{-1}{2(n-1)} \left(\langle X+Z, X+Z\rangle \delta F(Y) - \langle X+Z, Y\rangle \delta F(X+Z) - \langle J(X+Z), Y\rangle \delta F(J(X+Z))\right) \tag{4}$$

Распишем суммы по линейности, сгруппируем слагаемые и учтем (1). В результате получим

$$\nabla_X(F)(Z,Y) + \nabla_Z(F)(X,Y) = \tfrac{-1}{2(n-1)}(2\langle X, Z\rangle \delta F(Y) - \langle X, Y\rangle \delta F(Z) - \langle Z, Y\rangle \delta F(X) - \langle JX, Y\rangle \delta F(JZ) - \\ - \langle JZ, Y\rangle \delta F(JX))$$

Теперь мы можем записать это тождество в компонентах. Возьмем произвольный вещественный репер $p = (e_1, \ldots, e_{2n})$. Положим $X = e_i$, $Y = e_j$, $Z = e_k$. Тогда левая часть (??) примет вид
$\nabla_{e_i}(F)(e_k, e_j) + \nabla_{e_k}(F)(e_i, e_j) = F_{kj,i} + F_{ij,k}$. Правая часть (??) примет вид $\frac{-1}{2(n-1)}(2\langle e_i, e_k\rangle \delta F(e_j) - \langle e_i, e_j\rangle \delta F(e_k) - \langle e_k, e_j\rangle \delta F(e_i) - \langle Je_i, e_j\rangle \delta F(Je_k) - \langle Je_k, e_j\rangle \delta F(Je_i)) = \frac{-1}{2(n-1)}(2g_{ik}(\delta F)_j - g_{ij}(\delta F)_k - g_{kj}(\delta F)_i - J_i^l g_{lj}(\delta F)_k - J_k^l g_{lj}(\delta F)_r J_i^r$.

$$F_{kj,i} + F_{ij,k} = \frac{-1}{2(n-1)}(2g_{ik}(\delta F)_j - g_{ij}(\delta F)_k - g_{kj}(\delta F)_i + J_j^l g_{li}(\delta F)_t J_k^t + g_{kl} J_j^l (\delta F)_t J_i^t)$$

Выразим кодифференциал келеровой формы через ковариантный дифференциал почти комплексной структуры. Напомним, что $F(X,Y) = g(JX,Y)$, а значит, $F = C_{(1)}^{(1)}(g \otimes J)$, следовательно, применяя оператор ковариантного дифференцирования и учитывая $\nabla g = 0$, получим $\nabla F = C_{(1)}^{(1)}(g \otimes \nabla J)$ или $\nabla_Z(F)(X,Y) = g(\nabla_Z(J)X, Y)$ или в компонентах

$$F_{ij,k} = g_{lj} J_{i,k}^l \tag{5}$$

Замечание. Тот же результат можно получить, используя запись в компонентах. Имеем $F_{ij} = g_{lj} J^l_i$. Дифференцируем как произведение функций по правилу Лейбница $F_{ij,k} = g_{lj,k} J^l_i + g_{lj} J^l_{i,k}$. Так как в римановой связности ковариантный дифференциал римановой метрики равен нулю, то есть $g_{lj,k} = 0$, получим $F_{ij,k} = g_{lj} J^l_{i,k}$. $\square$

Вернемся к кодифференциалу келеровой формы. По определению кодифференциала имеем $(\delta F)_i = g^{jk} F_{ij,k}$. Подставим (5).

$$(\delta F)_i = g^{jk} g_{lj} J^l_{i,k} = J^k_{i,k}$$

Тогда определение класса многообразий Вайсмана-Грея в компонентах будет выглядеть следующим образом (мы подставили (5) и последнее соотношение)

$$g_{lj} J^l_{k,i} + g_{lj} J^l_{i,k} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(2g_{ik} J^l_{j,l} - g_{ij} J^l_{k,l} - g_{kj} J^l_{i,l} + g_{il} J^l_j J^m_{t,m} J^t_k + g_{kl} J^l_j J^m_{t,m} J^t_i \right)$$

Запишем это соотношение на пространстве присоединенной $G-$ структуры.

1) $i = a$, $j = b$, $k = c$.

$g_{lb} J^l_{c,a} + g_{lb} J^l_{a,c} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(2g_{ac} J^l_{b,l} - g_{ab} J^l_{c,l} - g_{cb} J^l_{a,l} + g_{al} J^l_b J^m_{t,m} J^t_c + g_{cl} J^l_b J^m_{t,m} J^t_a \right)$

Учтем, что $g_{ab} = g_{\hat{a}\hat{b}} = 0$, $J^a_{\hat{b}} = J^{\hat{a}}_b = 0$, $J^a_{b,k} = J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0$. При переходе к сумме "без крышки – с крышкой" мы не будем писать слагаемые заведомо равные нулю. Тогда мы получим

$g_{\hat{d}b} J^{\hat{d}}_{c,a} + g_{\hat{d}b} J^{\hat{d}}_{a,c} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(0 - 0 - 0 + g_{a\hat{d}} J^{\hat{d}}_b J^m_{t,m} J^t_c + g_{c\hat{d}} J^{\hat{d}}_b J^m_{t,m} J^t_a \right)$. Мы видим, что и оставшиеся слагаемые равны нулю (найдите в каждом слагаемом нулевой множитель). Таким образом, мы получаем соотношение 0=0.

2) $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$.

Опять мы не будем писать заведомо нулевые слагаемые. Получаем

$g_{\hat{d}b} J^{\hat{d}}_{c,\hat{a}} + g_{\hat{d}b} J^{\hat{d}}_{\hat{a},c} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(2g_{\hat{a}c} J^{\hat{d}}_{b,\hat{d}} - g_{\hat{a}b} J^{\hat{d}}_{c,\hat{d}} - 0 + g_{\hat{a}d} J^d_b J^{\hat{f}}_{e,\hat{f}} J^e_c + g_{c\hat{d}} J^{\hat{d}}_b J^m_{t,m} J^t_{\hat{a}} \right)$

$J^{\hat{b}}_{c,\hat{a}} + J^{\hat{b}}_{\hat{a},c} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(2\delta^a_c J^{\hat{d}}_{b,\hat{d}} - \delta^a_b J^{\hat{d}}_{c,\hat{d}} - \delta^a_b J^{\hat{d}}_{c,\hat{d}} \right)$

$J^{\hat{b}}_{c,\hat{a}} = \frac{-1}{2(n-1)} \left(\delta^a_c J^{\hat{d}}_{b,\hat{d}} - \delta^a_b J^{\hat{d}}_{c,\hat{d}} \right)$. Умножим обе части этого тождества на $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ и вспомним, что при выводе первой группы структурных уравнений почти эрмитова многообразия мы ввели обозначение

$$B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \quad B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},c} \tag{6}$$

С учетом этого обозначения полученное выше тождество запишется в виде

$$B_{bc}{}^a = \frac{-1}{2(n-1)} \left(\delta^a_c B_{db}{}^d - \delta^a_b B_{dc}{}^d \right) \tag{7}$$

Это соотношение уже похоже на то, которое нам нужно получить (напомним, что мы переводим критерий класса многообразий Вайсмана-Грея с языка инвариантного исчисления Кошуля на язык присоединенной $G-$ структуры). Нам осталось разобраться со сверткой виртуального тензора.

Напомним, что мы ввели 1-форму $\omega = \frac{-1}{n-1} \delta F \circ J$. Обозначим ее компоненты $\{\alpha_i\}$. Тогда $\alpha_i = \frac{-1}{n-1} (\delta F)_j J^j_i = \frac{-1}{n-1} J^k_{j,k} J^j_i$. На пространстве присоединенной $G-$ структуры это тождество примет вид:

а) $\alpha_a = \frac{-1}{n-1} J^{\hat{c}}_{b,\hat{c}} J^b_a = \frac{-2}{n-1} \frac{\sqrt{-1}}{2} \delta^b_a J^{\hat{c}}_{b,\hat{c}} = \frac{-2}{n-1} B_{ca}{}^c$. Аналогично получим $\alpha_{\hat{a}} = \frac{-2}{n-1} B^{ca}{}_c$.

Замечание. Рассмотрим операцию поднятия и опускания индекса на пространстве присоединенной $G-$ структуры. Имеем $\alpha_{\hat{a}} = g_{\hat{a}j} \alpha^j = g_{\hat{a}b} \alpha^b + g_{\hat{a}\hat{b}} \alpha^{\hat{b}} = \delta^a_b \alpha^b + 0 = \alpha^a$. Итак,

$$\alpha_{\hat{a}} = \alpha^a$$

С учетом этого замечания последние соотношения для формы Ли примут вид

$$\alpha_a = \frac{-2}{n-1} B_{ca}{}^c \quad \alpha^a = \frac{-2}{n-1} B^{ca}{}_c$$

С учетом этого (7) примет вид

$$B_{bc}{}^a = \frac{1}{2} \left(\delta^a_c \alpha_b - \delta^a_b \alpha_c \right) = \alpha_{[b} \delta^a_{c]}$$

3) $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$, $k = \hat{c}$. Аналогичные рассуждения позволяют получить $g_{d\hat{b}} J^d_{\hat{c},\hat{a}} + g_{d\hat{b}} J^d_{\hat{a},\hat{c}} = 0$ или

$$J^b_{\hat{c},\hat{a}} + J^b_{\hat{a},\hat{c}} = 0 \tag{8}$$

Напомним, что при выводе первой группы структурных уравнений почти эрмитовой структуры, мы ввели обозначения

$$B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad B_{abc} = \frac{-\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,c}$$

С учетом этих обозначений и (8) получим $B^{bca} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^b_{[\hat{c},\hat{a}]} = \frac{\sqrt{-1}}{4} \left(J^b_{\hat{c},\hat{a}} - J^b_{\hat{a},\hat{c}} \right) = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^b_{\hat{c},\hat{a}}$. Итак,

$$B^{bca} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^b_{\hat{c},\hat{a}}$$

Докажем, что $J^b_{\hat{c},\hat{a}} = -J^c_{\hat{b},\hat{a}}$.

Действительно, по определению почти эрмитовой структуры имеем $g(JX, JY) = g(X, Y)$. Это верно для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Заменим векторное поле Y на векторное поле JY. Тогда получим $g(JX, -Y) = g(X, JY)$. (Мы воспользовались здесь тем, что $J^2 = -id$.) Итак,

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$$

Распишем это соотношение в координатах:

$$g_{kj} J^k_{i,l} + g_{ik} J^k_{j,l} = 0$$

На пространстве присоединенной $G-$ структуры при $i = \hat{c}$, $j = \hat{b}$, $k = \hat{c}$ получим $g_{d\hat{b}} J^d_{\hat{c},\hat{a}} + g_{\hat{c}d} J^d_{\hat{b},\hat{a}} = 0$ или $J^b_{\hat{c},\hat{a}} = -J^c_{\hat{b},\hat{a}}$, что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что структурный тензор B^{abc} кососимметричен по первой паре индексов (по последней паре индексов он кососимметричен в силу своего определения). Действительно, $B^{bca} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^b_{\hat{c},\hat{a}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^c_{\hat{b},\hat{a}} = -B^{cba}$. Таким образом, структурный тензор B^{abc} кососимметричен по любой паре индексов, а значит, является кососимметрическим тензором, следовательно, $B^{[abc]} = B^{abc}$. И мы получаем второе тождество из определения структуры Вайсмана-Грея.

Задача 8.12. Пусть известно, что $B^{[abc]} = B^{abc}$ и $B^{abc} = -B^{acb}$. Докажите, что $B^{abc} = -B^{bac}$.

Оставшиеся случаи для индексов i, j, k просчитываются аналогично и выдадут нам комплексно сопряженные соотношения $B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta^{b]}_c$ и $B_{[abc]} = B_{abc}$, либо тождество вида 0=0. Проведите эти выкладки самостоятельно.

Итак, мы получили, что тождество, определяющее структуру Вайсмана-Грея

$$\nabla_X(F)(Z,Y) + \nabla_Z(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(2\langle X, Z\rangle \delta F(Y) - \langle X, Y\rangle \delta F(Z) - \langle Z, Y\rangle \delta F(X) - \langle JX, Y\rangle \delta F(JZ) - \\ - \langle JZ, Y\rangle \delta F(JX))$$

на пространстве присоединенной $G-$ структуры приняло вид

$$B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta^{b]}_c; \quad B_{ab}{}^c = \alpha_{[a}\delta^c_{b]}; \quad B^{[abc]} = B^{abc}; \quad B_{[abc]} = B_{abc}$$

Итак, мы посмотрели способ перевода с языка инвариантного исчисления Кошуля на язык присоединенной $G-$ структуры. Рассмотрим пример обратного перевода.

Пример. Возьмем класс $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ из классификации В.Ф. Кириченко. Этот класс задается на пространстве присоединенной $G-$ структуры тождествами $B^{ab}{}_c = \alpha^{[a}\delta^{b]}_c$, $B_{ab}{}^c = \alpha_{[a}\delta^c_{b]}$. Эти два тождества комплексно сопряжены.

Рассмотрим подробнее второе из этих тождеств. С учетом обозначений (6) получим

$$J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}} = \sqrt{-1}(\alpha_b \delta^c_a - \alpha_a \delta^c_b)$$

По определению компонент тензорного поля на пространстве присоединенной $G-$ структуры получим

$$(\nabla_{\varepsilon_{\hat{c}}}(J)(\varepsilon_b))^{\hat{a}} = \sqrt{-1}(\alpha(\varepsilon_b)(\varepsilon_{\hat{c}})^{\hat{a}} - \alpha^{\hat{a}}\langle \varepsilon_{\hat{c}}, \varepsilon_b\rangle)$$

Умножим обе части последнего соотношения на $\varepsilon_{\hat{a}}$ и просуммируем по a:

$$(\nabla_{\varepsilon_{\hat{c}}}(J)(\varepsilon_b))^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{-1}(\alpha(\varepsilon_b)(\varepsilon_{\hat{c}})^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} - \alpha^{\hat{a}}\langle \varepsilon_{\hat{c}}, \varepsilon_b\rangle\varepsilon_{\hat{a}})$$

Мы знаем, что любой вектор на пространстве присоединенной $G-$ структуры представляется в виде $X = \sigma(X)+\bar{\sigma}(X) = X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}$, а значит, $X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} = \bar{\sigma}(X)$. Воспользуемся этим фактом в нашем случае.

$$\bar{\sigma}(\nabla_{\varepsilon_{\hat{c}}}(J)(\varepsilon_b)) = \sqrt{-1}\left(\alpha(\varepsilon_b)\bar{\sigma}(\varepsilon_{\hat{c}}) - \bar{\sigma}(\alpha^\sharp)g(\varepsilon_{\hat{c}},\varepsilon_b)\right)$$

Здесь α – 1-форма на многообразии M, компоненты которой на пространстве присоединенной $G-$ структуры суть функции $\{\alpha_a, \alpha_{\hat{b}}\}$; а $\alpha^\sharp$ – векторное поле на M с компонентами $\{\alpha^a, \alpha^{\hat{b}}\}$. Если мы воспользуемся правилом поднятия (опускания индекса) на пространстве присоединенной $G-$ структуры, то мы увидим, что форма α и векторное поле $\alpha^\sharp$ двойственны, то есть $\alpha(X) = g(X,\alpha^\sharp)$.

Умножим обе части последнего полученного соотношения на X^b, $Y^{\hat{c}}$ и просуммируем по индексам $b, \hat{c}$.

$$\bar{\sigma}(\nabla_{Y^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{c}}}(J)(X^b\varepsilon_b)) = \sqrt{-1}\left(\alpha(X^b\varepsilon_b)\bar{\sigma}(Y^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{c}}) - \bar{\sigma}(\alpha^\sharp)g(Y^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{c}}, X^b\varepsilon_b)\right)$$

Так как $X^a\varepsilon_a = \sigma(X)$ и $X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} = \bar{\sigma}(X)$, получаем

$$\bar{\sigma}\left(\nabla_{\bar{\sigma}Y}(J)\sigma X\right) = \sqrt{-1}\left(\alpha(\sigma X)\bar{\sigma}Y - \bar{\sigma}(\alpha^\sharp)g(\sigma X,\bar{\sigma}Y)\right) \tag{9}$$

Напомним, что проекторы $\sigma : \mathcal{X}(M) \to D^{\sqrt{-1}}$ и $\bar{\sigma} : \mathcal{X}(M) \to D^{-\sqrt{-1}}$ определялись следующим образом

$$\sigma(X) = \tfrac{1}{2}\left(X - \sqrt{-1}JX\right); \quad \bar{\sigma}(X) = \tfrac{1}{2}\left(X + \sqrt{-1}JX\right);$$

Докажем некоторые полезные с технической точки зрения свойства этих проекторов.

Лемма 8.9. $\langle \sigma X, Y\rangle = \langle X, \bar{\sigma}Y\rangle$.

Доказательство. Распишем левую часть равенства с учетом определения проектора σ и согласованности почти комплексной и метрической структур $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$. Получим $\langle \sigma X, Y\rangle = \langle \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX), Y\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle X, Y\rangle - \sqrt{-1}\langle JX, Y\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\langle X, Y\rangle + \sqrt{-1}\langle X, JY\rangle\right) = \langle X, \frac{1}{2}(Y + \sqrt{-1}JY)\rangle = \langle X, \bar{\sigma}Y\rangle$. □

Лемма 8.10. $\sigma\nabla_Y(J)X = \nabla_Y(J)\bar{\sigma}X$, $\bar{\sigma}\nabla_Y(J)X = \nabla_Y(J)\sigma X$.

Доказательство. Так как $J^2 = -id$, то есть $C^{(2)}_{(1)}(J\otimes J) = -id$ получаем $C^{(2)}_{(1)}(\nabla J\otimes J) + C^{(2)}_{(1)}(J\otimes \nabla J) = 0$ или $\nabla_X(J)JY + J\nabla_X(J)Y = 0$. Тогда $\sigma\nabla_Y(J)X = \frac{1}{2}(\nabla_Y(J)X - \sqrt{-1}J\nabla_Y(J)X) = \frac{1}{2}(\nabla_Y(J)X + \sqrt{-1}\nabla_Y(J)JX) = \nabla_Y(J)(\frac{1}{2}(X + \sqrt{-1}JX)) = \nabla_Y(J)\bar{\sigma}X$. Второе соотношение доказывается аналогично. □

Вернемся к соотношению (9) с учетом доказанных лемм.

$$\nabla_{\bar{\sigma}Y}(J)(\sigma\circ\sigma X) = \sqrt{-1}\left(\alpha(\sigma X)\bar{\sigma}Y - \bar{\sigma}(\alpha^\sharp)\langle X, \bar{\sigma}\circ\bar{\sigma}Y\rangle\right)$$

Так как σ и $\bar{\sigma}$ – проекторы, $\sigma\circ\sigma = \sigma$, $\bar{\sigma}\circ\bar{\sigma} = \bar{\sigma}$. Тогда

$$\nabla_{\bar{\sigma}Y}(J)(\sigma X) = \sqrt{-1}\left(\alpha(\sigma X)\bar{\sigma}Y - \bar{\sigma}(\alpha^\sharp)\langle X, \bar{\sigma}Y\rangle\right)$$

Распишем определение проекторов σ, $\bar{\sigma}$ и сразу сократим на $\frac{1}{4}$, которая появится в обеих частях соотношения.

$$\nabla_{Y+\sqrt{-1}JY}(J)(X-\sqrt{-1}JX) = \sqrt{-1}\left(\alpha(X - \sqrt{-1}JX)(Y + \sqrt{-1}JY) - (\alpha^\sharp + \sqrt{-1}J\alpha^\sharp)(\langle X, Y\rangle + \sqrt{-1}\langle X, JY\rangle)\right)$$

Распишем это соотношение по линейности. Мы получим сумму, среди членов которой будут слагаемые с $\sqrt{-1}$ и слагаемые без $\sqrt{-1}$. Сгруппируем их следующим образом $(\ldots) + \sqrt{-1}(\ldots) = (\ldots) + \sqrt{-1}(\ldots)$.

$$\begin{aligned}(\nabla_Y(J)X + \nabla_{JY}(J)(JX)) + \sqrt{-1}(\nabla_{JY}(J)X - \nabla_Y(J)(JX)) = (\alpha(JX)Y - \alpha(X)JY + J\alpha^\sharp\langle X, Y\rangle + \\ + \alpha^\sharp\langle X, JY\rangle) + \sqrt{-1}\left(\alpha(X)Y + \alpha(JX)JY - \alpha^\sharp\langle X, Y\rangle + J\alpha^\sharp\langle X, JY\rangle\right)\end{aligned}$$

Слагаемые в скобках являются вещественными функциями, так как все тензоры, входящие в них вещественны, а значит, в каждой точке многообразие мы получаем равенство двух комплексных чисел,

у которых выделены вещественная и мнимая части. Мы знаем, что два вещественных числа равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части. Тогда мы получаем два соотношения

$$\nabla_Y(J)X + \nabla_{JY}(J)(JX) = \alpha(JX)Y - \alpha(X)JY + J\alpha^\sharp\langle X,Y\rangle + \alpha^\sharp\langle X,JY\rangle$$
$$\nabla_{JY}(J)X - \nabla_Y(J)(JX) = \alpha(X)Y + \alpha(JX)JY - \alpha^\sharp\langle X,Y\rangle + J\alpha^\sharp\langle X,JY\rangle$$

Заметим, что второе соотношение получается из первого, если заменить Y на JY, а значит, начальное соотношение $B_{ab}{}^c = \alpha_{[a}\delta^c_{b]}$ на языке инвариантного исчисления Кошуля приняло вид

$$\nabla_Y(J)X + \nabla_{JY}(J)(JX) = \alpha(JX)Y - \alpha(X)JY + J\alpha^\sharp\langle X,Y\rangle + \alpha^\sharp\langle X,JY\rangle$$

Аналогичные рассуждения, проведенные для комплексно сопряженного соотношения, дадут, очевидно, такой же результат.

Выясним геометрический смысл формы α. Рассмотрим соотношение $B_{ab}{}^c = \alpha_{[a}\delta^c_{b]}$ или в развернутом виде

$$B_{ab}{}^c = \frac{1}{2}(\alpha_a\delta^c_b - \alpha_b\delta^c_a) \tag{10}$$

Свернем это соотношение по индексам (a,c), то есть из всего множества равенств, которые записаны в (10) выберем уравнения с одинаковыми значениями индексов a, c и сложим их. Технически это выглядит так:

$$B_{ab}{}^a = \frac{1}{2}(\alpha_a\delta^a_b - \alpha_b\delta^a_a)$$

Рассмотрим отдельно суммы, стоящие в правой части. Во-первых, посмотрим на сумму $\alpha_a\delta^a_b$. В этой сумме n слагаемых, но все они кроме одного равны 0. Единственное слагаемое, отличное от нуля получается, когда в символе Кронекера δ^a_b индексы $a = b$. Таким образом, $\alpha_a\delta^a_b = \alpha_b$. Во-вторых, вычислим $\delta^a_a = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \ldots + \delta^n_n = 1 + \ldots + 1 = n$. Итак, окончательно мы получаем $B_{ab}{}^a = \frac{1}{2}(\alpha_a\delta^a_b - \alpha_b\delta^a_a) = \frac{1}{2}(\alpha_b - n\alpha_b)$. Отсюда мы можем выразить $\alpha_b = -\frac{2}{n-1}B_{ab}{}^a$. Переведем это соотношение на язык инвариантного исчисления Кошуля. Выше мы выяснили, что точно таким же образом выражаются компоненты формы Ли, а значит, форма α, которую мы ввели переводя выражение с языка присоединенной $G-$ структуры на язык инвариантного исчисления Кошуля, есть ни что иное как форма Ли. Двойственный ей вектор $\alpha^\sharp$ называется *вектором Ли* почти эрмитовой структуры.

8.7 Вторая группа структурных уравнений почти эрмитова многообразия.

В этом пункте мы получим вторую группу структурных уравнений произвольного почти эрмитова многообразия. Напомним, что для почти эрмитова многообразия мы имеем первую группу структурных уравнений

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b$$
$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b$$

где

$$B^{abc} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad B^{ab}{}_c = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c};$$
$$B_{abc} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[\hat{b},c]}; \quad B_{ab}{}^c = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{\hat{b},\hat{c}};$$
$$B^{abc} = \bar{B}_{abc}; \qquad B^{ab}{}_c = \bar{B}_{ab}{}^c;$$

Вторая группа структурных уравнений получается с помощью стандартной процедуры дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений. Рассмотрим ее подробнее.

Возьмем первое уравнение первой группы структурных уравнений и применим к нему оператор d внешнего дифференцирования. Напомним, что для $r-$ формы ω и произвольной формы θ есть формула

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r\omega \wedge d\theta$$

Мы работаем с 1-формами ω^a, ω^a_b и 0-формами (функциями) B_{abc} и т.д., а значит, наша формула приобретает вид $d(B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c) = dB^{abc} \wedge (\omega_b \wedge \omega_a) + (-1)^0 B^{abc}d(\omega_b \wedge \omega_a) = dB^{abc} \wedge (\omega_b \wedge \omega_a) + B^{abc}d\omega_b \wedge \omega_c + (-1)^1 B^{abc}\omega_b \wedge d\omega_c$. Остальные слагаемые первого уравнения первой группы структурных уравнений дифференцируются по тому же принципу.

Кроме того, мы помним, что $d(d\omega)=0$. С учетом всего вышесказанного приступим к дифференцированию первого уравнения.

$$0=d\omega^a_b\wedge\omega^b-\omega^a_b\wedge d\omega^b+dB^{abc}\wedge\omega_b\wedge\omega_c+B^{abc}d\omega_b\wedge\omega_c-B^{abc}\omega_b\wedge d\omega_c+\\+dB^{ab}{}_c\wedge\omega^c\wedge\omega_b+B^{ab}{}_cd\omega^c\wedge\omega_b-B^{ab}{}_c\omega^c\wedge d\omega_b$$

Подставим в полученное равенство первую группу структурных уравнений.

$$0=d\omega^a_b\wedge\omega^b-\omega^a_b\wedge(\omega^b_c\wedge\omega^c+B^{bcd}\omega_c\wedge\omega_d+B^{bc}{}_d\omega^d\wedge\omega_c)+dB^{abc}\wedge\omega_b\wedge\omega_c+B^{abc}(-\omega^d_b\wedge\omega_d+\\+B_{bdf}\omega^d\wedge\omega^f+B_{bd}{}^f\omega_f\wedge\omega^d)\wedge\omega_c-B^{abc}\omega_b\wedge(-\omega^d_c\wedge\omega_d+B_{cdf}\omega^d\wedge\omega^f+B_{cd}{}^f\omega_f\wedge\omega^d)+dB^{ab}{}_c\wedge\omega^c\wedge\omega_b+\\+B^{ab}{}_c(\omega^c_d\wedge\omega^d+B^{cdf}\omega_d\wedge\omega_f+B^{cd}{}_f\omega^f\wedge\omega_d)\wedge\omega_b-B^{ab}{}_c\omega^c\wedge(-\omega^d_b\wedge\omega_d+B_{bdf}\omega^d\wedge\omega^f+B_{bd}{}^f\omega_f\wedge\omega^d)$$

Раскроем скобки.

$$0=d\omega^a_b\wedge\omega^b-\omega^a_b\wedge\omega^b_c\wedge\omega^c-B^{bcd}\omega^a_b\wedge\omega_c\wedge\omega_d-B^{bc}{}_d\omega^a_b\wedge\omega^d\wedge\omega_c+dB^{abc}\wedge\omega_b\wedge\omega_c-B^{abc}\omega^d_b\wedge\omega_d\wedge\omega_c+\\+B^{abc}B_{bdf}\omega^d\wedge\omega^f\wedge\omega_c+B^{abc}B_{bd}{}^f\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega_c-B^{abc}\omega^d_c\wedge\omega_b\wedge\omega_d-B^{abc}B_{cdf}\omega_b\wedge\omega^d\wedge\omega^f-\\-B^{abc}B_{cd}{}^f\omega_b\wedge\omega_f\wedge\omega^d+dB^{ab}{}_c\wedge\omega^c\wedge\omega_b+B^{ab}{}_c\omega^c_d\wedge\omega^d\wedge\omega_b+B^{ab}{}_cB^{cdf}\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega_b+\\+B^{ab}{}_cB^{cd}{}_f\omega^f\wedge\omega_d\wedge\omega_b-B^{ab}{}_c\omega^d_b\wedge\omega^c\wedge\omega_d-B^{ab}{}_cB_{bdf}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^f-B^{ab}{}_cB_{bd}{}^f\omega^c\wedge\omega_f\wedge\omega^d$$

Сначала рассмотрим два слагаемых этой длинной суммы:
$B^{abc}B_{bdf}\omega^d\wedge\omega^f\wedge\omega_c-B^{abc}B_{cdf}\omega_b\wedge\omega^d\wedge\omega^f$. Мы утверждаем, что эти слагаемые подобны. Чтобы в этом убедиться, нужно согласовать в них индексы суммирования (мы помним, что индекс суммирования может обозначаться любой буквой). Заменим в первом слагаемом $b\to h$, $c\to f$, $f\to b$; а во втором – $b\to f$, $c\to h$, $f\to b$. Тогда получим $B^{ahf}B_{hdb}\omega^d\wedge\omega^b\wedge\omega_f-B^{afh}B_{hdb}\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega^b$. Воспользуемся, во-первых, тем, что структурные тензоры кососимметричны по последней паре индексов и, во-вторых, тем, что внешнее произведение 1-форм антикоммутативно:
$-B^{afh}B_{hdb}\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega^b-B^{afh}B_{hdb}\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega^b=-2B^{afh}B_{hdb}\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega^b$.

Вернемся к длинной сумме. Сначала выделим из нее слагаемые, которые образуют "основную теорему тензорного анализа" для структурного и виртуального тензоров, переобозначая в случае необходимости индексы суммирования, и введем обозначения.

$$\left(dB^{abc}-B^{dbc}\omega^a_d-B^{adc}\omega^b_d-B^{abd}\omega^c_d\right)\wedge\omega_b\wedge\omega_c=\Delta B^{abc}\wedge\omega_b\wedge\omega_c;$$
$$\left(dB^{ab}{}_c-B^{db}{}_c\omega^a_d-B^{ad}{}_c\omega^b_d+B^{ab}{}_d\omega^d_c\right)\wedge\omega^c\wedge\omega_b=\Delta B^{ab}{}_c\wedge\omega^c\wedge\omega_b;$$

Здесь мы можем проверить правильность своих вычислений: там, где идет суммирование по верхним индексам тензора должен стоять знак "минус", а где идет суммирование по нижним индексам тензора будет знак "плюс".

Остальные слагаемые можно сгруппировать разными способами. Мы сгруппируем "по минимуму" и введем еще одно обозначение, а имеено,

$$\Delta\omega^a_b=d\omega^a_b-\omega^a_c\wedge\omega^c_b$$

В новых обозначениях длинная сумма примет вид:

$$0=\Delta\omega^a_b\wedge\omega^b+\Delta B^{abc}\wedge\omega_b\wedge\omega_c+\Delta B^{ab}{}_c\wedge\omega^c\wedge\omega_b-2B^{afh}B_{hdb}\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega^b+B^{abc}B_{bd}{}^f\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega_c-\\-B^{abc}B_{cd}{}^f\omega_b\wedge\omega_f\wedge\omega^d+B^{ab}{}_cB^{cdf}\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega_b+B^{ab}{}_cB^{cd}{}_f\omega^f\wedge\omega_d\wedge\omega_b-B^{ab}{}_cB_{bdf}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^f-\\-B^{ab}{}_cB_{bd}{}^f\omega^c\wedge\omega_f\wedge\omega^d \tag{11}$$

ΔB^{abc} и $\Delta B^{ab}{}_c$ суть 1-формы на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры, а значит, раскладываются по базису 1-форм $\{\omega^a_b,\omega^a,\omega^b\}$. Запишем эти разложения.

$$\Delta B^{abc}=B^{abcd}{}^f_d\omega^f_d+B^{abcd}\omega^d+B^{abc}{}_d\omega^d;$$
$$\Delta B^{ab}{}_c=B^{ab}{}_c{}^d_f\omega^f_d+B^{ab}{}_{cd}\omega^d+B^{ab}{}_c{}^d\omega_d;$$

$\Delta\omega^a_b$ является 2-формой на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры, а значит, раскладывается по базису 2-форм $\{\omega^a_b\wedge\omega^c_d((a,b)<(c,d)),\omega^a_b\wedge\omega^c,\omega^a_b\wedge\omega_c,\omega^a\wedge\omega^b(a<b),\omega^a\wedge\omega_b,\omega_a\wedge\omega_b(a<b)\}$.

$$\Delta\omega^a_b=A^{acf}_{bdh}\omega^d_c\wedge\omega^h_f+A^{acf}_{bd}\omega^d_c\wedge\omega_f+A^{ac}_{bdf}\omega^d_c\wedge\omega^f+A^{ac}_{bd}\omega^d\wedge\omega_c+A^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d+A^a_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d$$

Подставим разложение 2-формы $\Delta\omega^a_b$ и 1-форм ΔB^{abc}, $\Delta B^{ab}{}_c$ в (11).

$$A^{acf}_{bdh}\omega^d_c\wedge\omega^h_f\wedge\omega^b + A^{acf}_{bd}\omega^d_c\wedge\omega_f\wedge\omega^b + A^{ac}_{bdf}\omega^d_c\wedge\omega^f\wedge\omega^b + A^{ac}_{bd}\omega^d\wedge\omega_c\wedge\omega^b + A^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b +$$
$$+A^a_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^b + B^{abcd}{}_f\omega^f_d\wedge\omega_b\wedge\omega_c + B^{abcd}\omega^d\wedge\omega_b\wedge\omega_c + B^{abc}{}_d\omega^d\wedge\omega_b\wedge\omega_c + B^{ab}{}_{cf}{}^d\omega^f_d\wedge\omega^c\wedge\omega_b +$$
$$+B^{ab}{}_{cd}\omega^d\wedge\omega^c\wedge\omega_b + B^{ab}{}_c{}^d\omega_d\wedge\omega^c\wedge\omega_b + B^{abc}B_{bd}{}^f\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega_c - B^{abc}B_{cd}{}^f\omega_b\wedge\omega_f\wedge\omega^d +$$
$$+B^{ab}{}_cB^{cdf}\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega_b + B^{ab}{}_cB^{cd}{}_f\omega^f\wedge\omega_d\wedge\omega_b - B^{ab}{}_cB_{bdf}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^f - B^{ab}{}_cB_{bd}{}^f\omega^c\wedge\omega_f\wedge\omega^d -$$
$$-2B^{afh}B_{hdb}\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega^b = 0$$

Далее мы должны собрать коэффициенты при базисных 3-формах. Делать мы будем это также как в случае приближенно келеровых многообразий (см. difs12-1.ps). Если дальнейшие действия не понятны, то обратитесь к файлу difs12-1.ps.

Напомним, что при разложении 2-формы $\Delta\omega^a_b$ мы ввели кососимметричные коэффициенты A^{acf}_{bdh}, A^a_{bcd}, A^{acd}_b, то есть эти функции удовлетворяют соотношению $A^{acf}_{bdh} = -A^{afc}_{bhd}$, $A^a_{bcd} = -A^a_{bdc}$, $A^{acd}_b = -A^{adc}_b$.

$$\begin{aligned}
&\omega^d_c\wedge\omega^h_f\wedge\omega^b: && A^{acf}_{bdh} = 0;\\
&\omega^d_c\wedge_f\wedge\omega^b: && A^{acf}_{bd} - B^{af}{}_b{}^c{}_d = 0;\\
&\omega^d_c\wedge\omega^f\wedge\omega^b: && A^{ac}_{[b|d|f]} = 0;\\
&\omega^f_d\wedge\omega_b\wedge\omega_c: && B^{abcd}{}_f = 0;\\
&\omega^b\wedge\omega^d\wedge\omega_c: && A^{ac}_{[bd]} + B^{ac}{}_{[db]} - B^{af}{}_{[d}B_{|f|b]}{}^c - 2B^{ach}B_{hbd} = 0;\\
&\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b: && A^{acd}_b + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} - B^{a[c|f|}B_{fb}{}^{d]} + B^{a[d}{}_fB^{|f|c]}{}_b = 0;\\
&\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^b; && A^a_{[bcd]} - B^{af}{}_{[c}B_{|f|db]} = 0;\\
&\omega_b\wedge\omega_c\omega_d: && B^{a[bcd]} + B^{a[d}{}_fB^{|f|bc]} = 0
\end{aligned}$$

В шестом тождестве есть два подобных слагаемых. Воспользовавшись кососимметричностью структурного тензора по последней паре аргументов, мы можем написать

$$A^{acd}_b + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + 2B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} + B^{a[d}{}_fB^{|f|c]}{}_b = 0$$

Аналогичным образом продифференцируем второе уравнение первой группы структурных уравнений почти эрмитова многообразия. Получим

$$0 = -d\omega^b_a\wedge\omega_b + \omega^b_a\wedge d\omega_b + dB_{abc}\wedge\omega^b\wedge\omega^c + B_{abc}d\omega^b\wedge\omega^c - B_{abc}\omega^b\wedge d\omega^c +$$
$$+dB_{ab}{}^c\wedge\omega_c\wedge\omega^b + B_{ab}{}^cd\omega_c\wedge\omega^b - B_{ab}{}^c\omega_c\wedge d\omega^b$$

Подставим первую группу структурных уравнений.

$$\begin{aligned}
0 = &-d\omega^b_a\wedge\omega_b + \omega^b_a\wedge(-\omega^c_b\wedge\omega_c + B_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d + B_{bc}{}^d\omega_d\wedge\omega^c) +\\
&+dB_{abc}\wedge\omega^b\wedge\omega^c + B_{abc}(\omega^b_d\wedge\omega^d + B^{bdh}\omega_d\wedge\omega_h + B^{bd}{}_h\omega^h\wedge\omega_d) - B_{abc}\omega^b\wedge(\omega^c_d\wedge\omega^d +\\
&+B^{cdh}\omega_d\wedge\omega_h + B^{cd}{}_h\omega^h\wedge\omega_d) + dB_{ab}{}^c\wedge\omega_c\wedge\omega^b + B_{ab}{}^c(-\omega^d_c\wedge\omega_d + B_{cdh}\omega^d\wedge\omega^h +\\
&+B_{cd}{}^h\omega_h\wedge\omega^d) - B_{ab}{}^c\omega_c\wedge(\omega^b_d\wedge\omega^d + B^{bdh}\omega_d\wedge\omega_h + B^{bd}{}_h\omega^h\wedge\omega_d)
\end{aligned}\qquad (12)$$

Сгруппируем слагаемые аналогично первому случаю. Введем новые обозначения

$$\Delta B_{abc} = dB_{abc} + B_{dbc}\omega^d_a + B_{adc}\omega^d_b + B_{abd}\omega^d_c;$$
$$\Delta B_{ab}{}^c = dB_{ab}{}^c + B_{db}{}^c\omega^d_a + B_{ad}{}^c\omega^d_b - B_{ab}{}^d\omega^c_d$$

Обозначение $\Delta\omega^b_a = d\omega^b_a - \omega^b_c\wedge\omega^c_a$ у нас уже есть (нам только нужно переобозначить индексы $a\leftrightarrow b$). Разложение 2-формы $\Delta\omega^b_a$ мы уже рассматривали и даже получили $A^{bcf}_{adh} = 0$. Разложим по базису 1-форм формы ΔB_{abc} и $\Delta B_{ab}{}^c$.

$$\Delta B_{abc} = B_{abc}{}^f_d\omega^d_f + B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d;\quad \Delta B_{ab}{}^c = B_{ab}{}^{cd}{}_f\omega^f_d + B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d\omega^d;$$

Подставим эти разложения в (12).

$$0 = -A^{bcf}_{ad}\omega^d_c\wedge\omega_f\wedge\omega_b - A^{bc}_{adf}\omega^d_c\wedge\omega^f\omega_b - A^{bc}_{ad}\omega^d\wedge\omega_c\wedge\omega_b - A^{bcd}_a\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega_b - A^b_{acd}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega_b +$$
$$+B_{abc}{}^f_d\omega^d_f\wedge\omega^b\wedge\omega^c + B_{abcd}\omega^d\wedge\omega^b\wedge\omega^c + B_{abc}{}^d\omega_d\wedge\omega^b\wedge\omega^c + B_{ab}{}^{cf}{}_d\omega^d_f\wedge\omega_c\wedge\omega^b + B_{ab}{}^{cd}\omega_d\wedge\omega_c\wedge\omega^b +$$
$$+B_{ab}{}^c{}_d\omega^d\wedge\omega_c\wedge\omega^b + 2B_{abc}B^{bdh}\omega_d\wedge\omega_h\wedge\omega^c + B_{abc}B^{bd}{}_h\omega^h\wedge\omega_d\wedge\omega^c - B_{abc}B^{cd}{}_h\omega^b\wedge\omega^h\wedge\omega_d +$$
$$+B_{ab}{}^cB_{cdh}\omega^d\wedge\omega^h\wedge\omega^b + B_{ab}{}^cB_{cd}{}^h\omega_h\wedge\omega^d\wedge\omega^b - B_{ab}{}^cB^{bdh}\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega_h - B_{cd}{}^hB^{bd}{}_h\omega_c\wedge\omega^h\wedge\omega_d$$

В силу линейной независимости базисных 3-форм получим

$$
\begin{array}{ll}
\omega_c^d \wedge \omega_f \wedge \omega_b: & A_{ad}^{[b|c|f]} = 0;\\
\omega_c^d \wedge \omega^f \wedge \omega_b: & -A_{adf}^{bc} - B_{af}{}^{bc}{}_d = 0;\\
\omega_f^d \wedge \omega^b \wedge \omega^c: & B_{abc}{}^f{}_d = 0;\\
\omega^d \wedge \omega_c \wedge \omega_b: & -A_{ad}^{[bc]} + B_{ad}{}^{[bc]} + 2B_{afd}B^{fcb} - B_{af}{}^{[b}B^{|f|c]}{}_d = 0;\\
\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b: & -A_a^{[bcd]} - B_{af}{}^{[c}B^{|f|db]} = 0;\\
\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega_b: & -A_{acd}^b + B_{acd}{}^b + B_{a[c}{}^b{}_{d]} + B_{af[c}B^{fb} + d] - B_{a[c|f|}B^{fb}{}_{d]} + B_{a[d}{}^f B_{|f|c]}{}^b = 0;\\
\omega^d \wedge \omega^b \wedge \omega^c: & B_{a[bcd]} + B_{a[c}{}^f B_{|f|db]} = 0;
\end{array}
$$

Рассмотрим соотношения, которые получились в процессе дифференциального продолжения.
1). Рассмотрим тождества $A_{[b|d|f]}^{ac} = 0$ и $A_{adf}^{bc} + B_{af}{}^{bc}{}_d = 0$. Сначала переобозначим индексы так, чтобы они были согласованы в обоих тождествах ($a \leftrightarrow b$): $A_{bdf}^{ac} + B_{bf}{}^{ac}{}_d = 0$. Проальтернируем это тождество по (b, f). Получим $A_{[b|d|f]}^{ac} + B_{[bf]}{}^{ac}{}_d = 0$. Так как виртуальные тензоры кососимметричны по нижней паре индексов, то из уравнений

$$dB_{ab}{}^c + B_{db}{}^c\omega_a^d + B_{ad}{}^c\omega_b^d - B_{ab}{}^d\omega_d^c = B_{ab}{}^{cd}{}_f\omega_d^f + B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d\omega^d$$

следует, что системы функций, стоящие в правой части этих соотношений также кососимметричны по нижним первым двум индексам. Тогда $A_{[b|d|f]}^{ac} + B_{[bf]}{}^{ac}{}_d = B_{bf}{}^{ac}{}_d = 0$, следовательно, $A_{bdf}^{ac} = 0$. Аналогично доказывается, что функции $A_{bd}^{acf} = 0$, $B^{ab}{}_c{}^d{}_f = 0$.

Итак, с учетом этих результатов мы получаем

$$
\begin{array}{l}
d\omega_b^a - \omega_c^a \wedge \omega_b^c = A_{bc}^{ad}\omega^c \wedge \omega_b + A_{bcd}^a\omega^c \wedge \omega^d + A_b^{acd}\omega_c \wedge \omega_d;\\
dB^{abc} - B^{dbc}\omega_d^a - B^{adc}\omega_d^b - B^{abd}\omega_d^c = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d;\\
dB_{abc} + B_{dbc}\omega_a^d + B_{adc}\omega_b^d + B^{abd}\omega_c^d = B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d;\\
dB^{ab}{}_c - B^{db}{}_c\omega_d^a - B^{ad}{}_c\omega_d^b + B^{ab}{}_d\omega_c^d = B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d;\\
dB_{ab}{}^c + B_{db}{}^c\omega_a^d + B_{ad}{}^c\omega_b^d - B_{ab}{}^d\omega_d^c = B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d;
\end{array}
$$

Первое соотношение

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + A_{bc}^{ad}\omega^c \wedge \omega_b + A_{bcd}^a\omega^c \wedge \omega^d + A_b^{acd}\omega_c \wedge \omega_d$$

обычно называют второй группой структурных уравнений, а оставшиеся соотношения показывают, что системы функций $\{B^{abc}, B_{abc}\}$ и $\{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$ задают тензорные поля на многообразии M. Напомним, что функции $\{A_{bcd}^a\}$ мы брали кососимметричными по последней паре нижних индексов, а функции $\{A_b^{acd}\}$ – кососимметричными по последней паре верхних индексов.

На этом мы могли бы остановиться при выводе второй группы структурных уравнений. Но полученная группа структурных уравнений не согласована с результатами, которые были получены для различных подклассов почти эрмитовых многообразий. Такая ситуация возникла из-за того, что группировать слагаемые после применения оператора внешнего дифференцирования можно по-разному. Как вы помните, мы сгруппировали их "по минимуму". Другие исследователи при выводе второй группы структурных уравнений группировали слагаемые по-другому.

Для того чтобы согласовать наши результаты, возьмем вторую группу структурных уравнений многообразий Вайсмана-Грея.

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + (2B^{ahd}B_{bhc} + \tilde{A}_{bc}^{ad})\omega^c \wedge \omega_d + (B^{ah}{}_{[c}B_{d]bh} + \tilde{A}_{bcd}^a)\omega^c \wedge \omega^d + (-B_{bh}{}^{[c}B^{d]ah} + \tilde{A}_b^{acd})\omega_c \wedge \omega_d$$

Сравнивая эти уравнения с нашим результатом, получаем

$$A_{bcd}^a = B^{ah}{}_{[c}B_{d]bh} + \tilde{A}_{bcd}^a; \quad A_b^{acd} = -B_{bh}{}^{[c}B^{d]ah} + \tilde{A}_b^{acd}; \quad A_{bc}^{ad} = 2B^{ahd}B_{bhc} + \tilde{A}_{bc}^{ad}; \tag{13}$$

Мы можем подставить эти соотношения в нашу вторую группу структурных уравнений, но при этом нужно перевести полученные при дифференциальном продолжении тождества "на язык" $\tilde{A}$. Напомним, что мы получили следующие тождества.

$$
\begin{array}{ll}
A_{[bd]}^{ac} + B^{ac}{}_{[db]} + B^{af}{}_{[d}B_{b]f}{}^c - 2B^{ach}B_{hbd} = 0; & A_{ad}^{[bc]} - B_{ad}{}^{[bc]} - 2B_{afd}B^{fcb} - B_{af}{}^{[b}B^{c]f}{}_d = 0;\\
A_b^{acd} + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + 2B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} - B^{a[d}{}_fB^{c]f}{}_b = 0; & A_{[bcd]}^a - B^{af}{}_{[c}B_{|f|db]} = 0;\\
A_{acd}^b - B_{acd}{}^b - B_{a[c}{}^b{}_{d]} - 2B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + B_{a[d}{}^fB_{c]f}{}^b = 0; & A_a^{[bcd]} + B_{af}{}^{[c}B^{|f|db]} = 0;
\end{array}
$$

$B^{a[bcd]} + B^{a[d}{}_f B^{|f|bc]} = 0; \quad B_{a[bcd]} + B_{a[c}{}^f B_{|f|db]} = 0;$

Подставим в эти тождества (13).

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}^{ac}_{[bd]} - 2B^{ahc}B_{[bd]h} + B^{ac}{}_{[db]} + B^{af}{}_{[d}B_{b]f}{}^c - 2B^{ach}B_{hbd} = 0;\\
&\tilde{A}^{[bc]}_{ad} - 2B^{[bc]h}B_{ahd} - B_{ad}{}^{[bc]} - B_{af}{}^{[b}B^{c]f}{}_d - 2B_{afd}B^{fcb} = 0;\\
&\tilde{A}^{acd}_b - B_{bh}{}^{[c}B^{d]ah} + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + 2B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} - B^{a[d}{}_f B^{c]f}{}_b = 0;\\
&\tilde{A}^{b}_{acd} + B^{bh}{}_{[c}B_{d]ah} - B_{acd}{}^b - B_{a[c}{}^b{}_{d]} - 2B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + B_{a[d}{}^f B_{c]f}{}^b = 0;\\
&\tilde{A}^{a}_{[bcd]} + B^{ah}{}_{[c}B_{db]h} - B^{ah}{}_{[c}B_{|h|db]} = 0;\\
&\tilde{A}^{[bcd]}_a - B_{ah}{}^{[c}B^{db]h} + B_{af}{}^{[c}B^{|f|db]} = 0;
\end{aligned}$$

$B^{a[bcd]} + B^{a[d}{}_f B^{|f|bc]} = 0; \quad B_{a[bcd]} + B_{a[c}{}^f B_{|f|db]} = 0;$

Итак, подведем итог нашего исследования. Мы перевели полученные тождества в обозначения $\tilde{A}$. Так как мы в дальнейшем будем пользоваться только такими функциями, то будем опускать волну. Что же у нас получилось в итоге для произвольного почти эрмитова многообразия?

Первая группа структурных уравнений

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b; \quad d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b;$$

Вторая группа структурных уравнений

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + (2B^{ahd}B_{bhc} + A^{ad}_{bc})\omega^c \wedge \omega_d + (B^{ah}{}_{[c}B_{d]bh} + A^a_{bcd})\omega^c \wedge \omega^d + (-B_{bh}{}^{[c}B^{d]ah} + A^{acd}_b)\omega_c \wedge \omega_d$$

Здесь функции A^a_{bcd}, A^{acd}_b кососимметричны по последней паре индексов. Кроме того, если применить оператор комплексного сопряжения к этим уравнениям, то мы получим $\bar{A}^a_{bcd} = -A^{bcd}_a$, $\bar{A}^{ad}_{bc} = A^{bc}_{ad}$.

Дифференциальные уравнения, которые показывают, что структурные и виртуальные тензоры действительно являются тензорами

$$\begin{aligned}
&dB^{abc} - B^{dbc}\omega^a_d - B^{adc}\omega^b_d - B^{abd}\omega^c_d = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d;\\
&dB_{abc} + B_{dbc}\omega^d_a + B_{adc}\omega^d_b + B^{abd}\omega^d_c = B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d;\\
&dB^{ab}{}_c - B^{db}{}_c\omega^a_d - B^{ad}{}_c\omega^b_d + B^{ab}{}_d\omega^d_c = B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d;\\
&dB_{ab}{}^c + B_{db}{}^c\omega^d_a + B_{ad}{}^c\omega^d_b - B_{ab}{}^d\omega^c_d = B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d;
\end{aligned}$$

И, наконец, введенные системы функций удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned}
&A^{ac}_{[bd]} - 2B^{ahc}B_{[bd]h} + B^{ac}{}_{[db]} + B^{af}{}_{[d}B_{b]f}{}^c - 2B^{ach}B_{hbd} = 0;\\
&A^{[bc]}_{ad} - 2B^{[bc]h}B_{ahd} - B_{ad}{}^{[bc]} - B_{af}{}^{[b}B^{c]f}{}_d - 2B_{afd}B^{fcb} = 0;\\
&A^{acd}_b - B_{bh}{}^{[c}B^{d]ah} + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + 2B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} - B^{a[d}{}_f B^{c]f}{}_b = 0;\\
&A^{b}_{acd} + B^{bh}{}_{[c}B_{d]ah} - B_{acd}{}^b - B_{a[c}{}^b{}_{d]} - 2B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + B_{a[d}{}^f B_{c]f}{}^b = 0;\\
&A^{a}_{[bcd]} + B^{ah}{}_{[c}B_{db]h} - B^{ah}{}_{[c}B_{|h|db]} = 0;\\
&A^{[bcd]}_a - B_{ah}{}^{[c}B^{db]h} + B_{af}{}^{[c}B^{|f|db]} = 0;
\end{aligned}$$

$B^{a[bcd]} + B^{a[d}{}_f B^{|f|bc]} = 0; \quad B_{a[bcd]} + B_{a[c}{}^f B_{|f|db]} = 0;$