8 Почти эрмитовы структуры.

8.8 Компоненты классических тензоров почти эрмитова многообразия на пространстве присоединенной $G-$ структуры

Если дальнейшее изложение будет не понятно, то почитайте файл difs12-1.ps, в котором тоже самое вычисляется в более простом случае приближенно келеровых многообразий.

Напомним, что для почти эрмитова многообразия мы получили

$$\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},k}^{\hat{a}} \omega^k; \quad \omega_{\hat{b}}^{a} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},k}^{a} \omega^k; \tag{1}$$

и ввели обозначения

$$\begin{aligned} B^{ab}{}_c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},c}^{a}; \quad & B_{ab}{}^c &= \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}; \\ B^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{[\hat{b},\hat{c}]}^{a}; \quad & B_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} J_{[\hat{b},c]}^{\hat{a}}; \\ C^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},\hat{c}}^{a}; \quad & C_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},c}^{\hat{a}}; \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений (1) можно записать в виде $\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},c}^{\hat{a}} \omega^c + \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}} \omega^{\hat{c}} = -C_{abc}\omega^c + B_{ab}{}^c \omega_c$. Второе соотношение аналогично. Итак, мы получаем

$$\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -C_{abc}\omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c; \quad \omega_{\hat{b}}^{a} = -C^{abc}\omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c; \tag{2}$$

8.8.1 Тензор Римана-Кристоффеля.

Напомним, что структурные уравнения римановой связности на пространстве расслоения всех реперов имеют вид

$$d\omega_j^i = \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l \tag{3}$$

где $\{R_{jkl}^i\}$ – система функций, задающих тензор Римана-Кристоффеля.

На пространстве присоединенной $G-$ структуры эти уравнения примут вид

1. $i = a$, $j = b$. Тогда $d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \omega_{\hat{c}}^a \wedge \omega_b^{\hat{c}} + \frac{1}{2} R_{bkl}^a \omega^k \wedge \omega^l$. Подставим (2) и сравним со второй группой структурных уравнений почти эрмитова многообразия.

$$\begin{aligned} &(-C^{acd}\omega_d + B^{ac}{}_d\omega^d) \wedge (-C_{cbh}\omega^h + B_{cb}{}^h\omega_h) + \tfrac{1}{2} R_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d + \tfrac{1}{2} R_{b\hat{c}\hat{d}}^a \omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{d}} + R_{b\hat{c}d}^a \omega^{\hat{c}} \wedge \omega^d = \\ &\quad = (2B^{ahd}B_{bhc} + A_{bc}^{ad})\omega^c \wedge \omega_d + (B^{ah}{}_{[c}B_{d]bh} + A_{bcd}^a)\omega^c \wedge \omega^d + (-B_{bh}{}^{[c}B^{d]ah} + A_b^{acd})\omega_c \wedge \omega_d \end{aligned}$$

Воспользуемся линейной независимостью базисных форм.

$$\begin{aligned} \omega^c \wedge \omega_d: &\quad R_{\hat{a}bc\hat{d}} = 2B^{ahd}B_{bhc} + C^{ahd}C_{hbc} - B^{ah}{}_c B_{hb}{}^d + A_{bc}^{ad}; \\ \omega_c \wedge \omega_d: &\quad R_{\hat{a}b\hat{c}\hat{d}} = 2(C^{ah[c}B_{hb}{}^{d]} - B_{bh}{}^{[c}B^{d]ah} + A_b^{acd}); \\ \omega^c \wedge \omega^d: &\quad R_{\hat{a}bcd} = 2(B^{ah}{}_{[c}B_{d]bh} + A_{bcd}^a + B^{ah}{}_{[c}C_{|hb|d]}); \end{aligned}$$

Чтобы получить остальные компоненты тензора Римана-Кристоффеля, продифференцируем внешним образом соотношение $\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -C_{abc}\omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c$.

$$d\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -dC_{abc} \wedge \omega^c - C_{abc}d\omega^c + dB_{ab}{}^c \wedge \omega_c + B_{ab}{}^c d\omega_c \tag{4}$$

Подставим в это соотношение

$$\begin{aligned} &dB_{ab}{}^c + B_{db}{}^c\omega_a^d + B_{ad}{}^c\omega_b^d - B_{ab}{}^d\omega_d^c = B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d\omega^d; \\ &dC_{abc} + C_{dbc}\omega_a^d + C_{adc}\omega_b^d + C_{abd}\omega_c^d = C_{abcd}\omega^d + C_{abc}{}^d\omega_d; \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений мы уже получали, а второе легко следует из того, что $C_{abc} = B_{abc} + B_{cba} + B_{bca}$ и аналогичного дифференциального уравнения для структурного тензора B_{abc}.

Задача 8.12. Проведите расчеты самостоятенльно и, за одно, выразите C_{abcd} и $C_{abc}{}^d$ через соответствующие функции B_{abcd}, $B_{abc}{}^d$ структурного тензора.

С другой стороны, из (3) получаем

$$d\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \omega_{\hat{c}}^{\hat{a}} \wedge \omega_b^c + \omega_{\hat{c}}^{\hat{a}} \wedge \omega_b^{\hat{c}} + \frac{1}{2} R_{bkl}^{\hat{a}} \omega^k \wedge \omega^l$$

Приравнивая это соотношение и (4), получаем

$$-(C_{abcd}\omega^d + C_{abc}{}^d\omega_d - C_{dbc}\omega_a^d - C_{adc}\omega_b^d - C_{abd}\omega_c^d)\wedge\omega^c - C_{abc}(\omega_d^c\wedge\omega^d + B^{cdh}\omega_d\wedge\omega_h + B^{ch}{}_d\omega^d\wedge\omega_h) +$$
$$+(B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d\omega^d - B_{db}{}^c\omega_a^d - B_{ad}{}^c\omega_b^d + B_{ab}{}^d\omega_d^c)\wedge\omega_c + B_{ab}{}^c(-\omega_c^d\wedge\omega_d + B_{cd}{}^h\omega^d + B_{cdh}\omega^d\wedge\omega^h) =$$
$$= (-C_{acd}\omega^d + B_{ac}{}^d\omega_d)\wedge\omega_b^c - \omega_a^c\wedge(-C_{cbd}\omega^d + B_{cb}{}^d\omega_d) + \tfrac{1}{2}R^{\hat{a}}_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d + \tfrac{1}{2}R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}}\omega^{\hat{c}}\wedge\omega^{\hat{d}} + R^{\hat{a}}_{bc\hat{d}}\omega^c\wedge\omega^{\hat{d}};$$

Все слагаемые с двухидексными омегами взаимно уничтожатся (проверьте!). Для оставшихся слагаемых опять применим линейную независимость базисных форм.

$$\omega^c\wedge\omega^d: \quad R_{abcd} = 2(C_{ab[cd]} + B_{ab}{}^hB_{hcd});$$
$$\omega_c\wedge\omega_d: \quad R_{ab\hat{c}\hat{d}} = -2(C_{abh}B^{hcd} + B_{ab}{}^{[cd]});$$

Все остальные компоненты тезора Римана-Кристоффеля мы можем получить, используя его вещественность (при комплексном сопряжении индексы с крышкой меняются на индексы без крышки и наоборот) и свойства симметрии (кососимметричность по первой и последней парам индексов). Итак, для тензора Римана-Кристоффеля мы получили четыре основные группы компонент:

$$R_{abcd} = 2(C_{ab[cd]} + B_{ab}{}^hB_{hcd});$$
$$R_{\hat{a}bcd} = 2(B^{ah}{}_{[c}B_{d]bh} + A^a_{bcd} + B^{ah}{}_{[c}C_{|hb|d]});$$
$$R_{ab\hat{c}\hat{d}} = -2(C_{abh}B^{hcd} + B_{ab}{}^{[cd]});$$
$$R_{\hat{a}bc\hat{d}} = 2B^{ahd}B_{bhc} + C^{ahd}C_{hbc} - B^{ah}{}_cB_{hb}{}^d + A^{ad}_{bc};$$

8.8.2 Тензор Риччи.

Напомним, что тензор Риччи r_{ij} определяется формулой

$$r_{ij} = R^k_{ijk} \equiv g^{kl}R_{kijl}$$

Используя компоненты тензора Римана-Кристоффеля легко вычислить компоненты тензора Риччи.
1) $i = a$, $j = b$. Тогда $r_{ab} = g^{kl}R_{kabl} = g^{\hat{c}d}R_{\hat{c}abd} + g^{c\hat{d}}R_{cab\hat{d}} = \sum_c(R_{\hat{c}abc} + R_{cab\hat{c}}) =$
Воспользуемся свойствами симметрии тензора Римана-Кристоффеля и во втором слагаемом "переведем" $\hat{c}$ на первое место.
$= \sum_c(R_{\hat{c}abc} + R_{\hat{c}bac}) = 2(A^c_{abc} + B^{ch}{}_{[b}B_{c]ah} - C_{ha[b}B^{ch}{}_{c]} + A^c_{bac} + B^{ch}{}_{[a}B_{c]bh} - C_{hb[a}B^{ch}{}_{c]});$
2) $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$. Тогда $r_{\hat{a}\hat{b}} \equiv r^a_b = R^k_{\hat{a}bk} = R^c_{\hat{a}bc} + R^{\hat{c}}_{\hat{a}b\hat{c}} = \sum_c(R_{\hat{c}\hat{a}bc} + R_{c\hat{a}b\hat{c}}) = \sum_c(R_{\hat{c}\hat{a}bc} - R_{\hat{a}cb\hat{c}}) =$
$-2(C^{cah}B_{hbc} + B^{ca}{}_{[bc]}) - 2B^{ahc}B_{chb} - C^{ahc}C_{hcb} + B^{ah}{}_bB_{hc}{}^c - A^{ac}_{cb}.$
Итак, компоненты тензора Риччи на пространстве присоединенной $G-$ структуры имеют вид

$$r_{ab} = 2(A^c_{abc} + B^{ch}{}_{[b}B_{c]ah} - C_{ha[b}B^{ch}{}_{c]} + A^c_{bac} + B^{ch}{}_{[a}B_{c]bh} - C_{hb[a}B^{ch}{}_{c]})$$
$$r_{\hat{a}\hat{b}} = -2(C^{cah}B_{hbc} + B^{ca}{}_{[bc]}) - 2B^{ahc}B_{chb} - C^{ahc}C_{hcb} + B^{ah}{}_bB_{hc}{}^c - A^{ac}_{cb}$$

Остальные компоненты тензора Риччи получаются с учетом симметрии и вещественности.

8.8.3 Скалярная кривизна

Напомним, что скалярная кривизна определяется формулой

$$\kappa = g^{ij}r_{ij}$$

Тогда $\kappa = 2g^{\hat{a}b}r_{\hat{a}b} = 2r^a_a = -2(C^{cah}B_{hac} + B^{ca}{}_{[ac]}) - 2B^{ahc}B_{cha} - C^{ahc}C_{hca} + B^{ah}{}_aB_{hc}{}^c - A^{ac}_{ca}.$

8.9 Конформные преобразования почти эрмитовых многообразий.

Определение 8.6. *Конформным преобразованием* почти эрмитовой структуры (J, g) гладкого многообразия M называется переход к почти эрмитовой структуре $(J, \tilde{g} = e^{2f}g)$, где f – гладкая функция на многообразии M.

Каждое из почти эрмитовых многообразий (M, J, g) и $(M, J, \tilde{g})$ обладает своей присоединенной $G-$ структурой. Получим формулы, которые связывают компоненты основных тензоров, заданных каждый на своей присоединенной $G-$ структуре.

Пусть $(P, M, \pi, U(n))$ – присоединенная $G-$ структура почти эрмитова многообразия (M, J, g), а $(\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, U(n))$ – присоединенная $G-$ структура почти эрмитова многообразия $(M, J, \tilde{g})$. Рассмотрим отображение $\psi : P \to \tilde{P}$, заданное формулой

$$\psi : p = (m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}) \to p' = (m, \tilde{\varepsilon}_1 = e^{-f}(m)\varepsilon_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_n = e^{-f}(m)\varepsilon_n, \\ \tilde{\varepsilon}_{\hat{1}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{n}})$$

где $m = \pi(p) = \pi'(p') \in M$. Очевидно, что при этом для кореперов имеет место соотношение

$$\psi : (m, \omega^1, \ldots, \omega^n, \omega^{\hat{1}}, \ldots, \omega^{\hat{n}}) \to (m, \tilde{\omega}^1 = e^{f}(m)\omega^1, \ldots, \tilde{\omega}^n = e^{f}(m)\omega^n, \\ \tilde{\omega}^{\hat{1}} = e^{f}(m)\omega^{\hat{1}}, \ldots, \tilde{\omega}^{\hat{n}} = e^{f}(m)\omega^{\hat{n}})$$

Докажем, что отображение ψ определено корректно.

Лемма 8.9. $\tilde{p} \in \tilde{P}$ для любой $p \in P$.

Доказательство. Нам достаточно показать, что компоненты почти комплексной структуры J и римановой метрики $\tilde{g}$ в репере $p' = \psi(p)$, $p \in P$ имеют вид

$$(\tilde{J}^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (\tilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

где $\{\tilde{J}^i_j\}$ – компоненты почти комплексной структуры J в реперах $p' = \psi(p)$, $\{\tilde{g}_{ij}\}$ – компоненты римановой метрики $\tilde{g}$.

Напомним, что *компонентами тензорного поля* t в реперe $p = (m, \varepsilon_i)$ называются функции $t^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r}$, определенные на пространстве присоединенной $G-$ структуры, и вычисляемые по формуле

$$t^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r}(p) = t_m(\varepsilon_{j_1}, \ldots, \varepsilon_{j_r}, \omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_s})$$

По определению компонент тензорного поля имеем

$$\tilde{J}^i_j(p') = J_m(e^{-f}(m)\varepsilon_j, e^{f}(m)\omega^i) = J^i_j(p)$$

Таким образом, матрица компонент тензорного поля J в точках $p' = \psi(p)$ имеет требуемый вид.

Для метрики $\tilde{g}$ доказательство аналогично. $\square$

Тогда очевидно, что пара (ψ, id), где $id : U(n) \to U(n)$ – тождественное отображение, является изоморфизмом главных расслоений $(P, M, \pi, U(n))$ и $(\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, U(n))$.

Обозначим $\omega = \{\omega^i\}$ и $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}^i\}$ формы смещения присоединенных $G-$ структур почти эрмитовых многообразий (M, J, g) и $(M, J, \tilde{g})$ соответственно.

Лемма 8.10. $(\psi^*\tilde{\omega}^i)(p) = e^f(m)\omega^i(p)$, где ψ^* – отображение антиувлечения.

Доказательство. Напомним, что любой базис $\{\xi_1, \ldots, \xi_{2n}\}$ арифметического векторного пространства $\mathbf{R}^{2n}$ порождает базис $\{X_{\xi_1}, \ldots, X_{\xi_{2n}}\}$ линейного пространства всех базисных векторных полей пространства расслоения реперов. Рассмотрим, в частности, в качестве такого базиса стандартный базис арифметического пространства $\xi_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, …, $\xi_{2n} = (0, \ldots, 0, 1)$. Очевидно, что $\tilde{\pi} \circ \psi = \pi$, а значит, для дифференциалов данных отображений имеет место равенство $\tilde{\pi}_* \circ \psi_* = \pi_*$. Тогда по определению формы смещения получим

$$(\psi^*\tilde{\omega})_p(X_{\xi_i}) = \tilde{\omega}_{\psi(p)}(\psi_* X_{\xi_i}) = (p')^{-1} \circ \tilde{\pi}_*(\psi_* X_{\xi_i}) = (p')^{-1} \circ \pi_* X_{\xi_i} = (p')^{-1}(\varepsilon_i) = \\ = e^f(m)\xi_i = e^f(m)\omega_p(X_{\xi_i})$$

Так как базисные векторные поля являются базисом горизонтального распределения и форма смещения является горизонтальной формой, полученное соотношение верно для любых векторных полей на многообразии P. $\square$

Пусть ∇ и $\tilde{\nabla}$ – римановы связности на почти эрмитовых многообразиях (M, J, g) и $(M, J, \tilde{g})$ соответственно. Обозначим $\{\theta^a_b\}$ и $\{\tilde{\theta}^a_b\}$ линейно независимые на пространстве присоединенной $G-$ структуры тензорные компоненты форм этих связностей. Пусть

$$\psi^*\tilde{\theta}^a_b = A^{ac}_{bd}\theta^d_c + B^a_{bc}\omega^c + B^{ac}_b\omega_c \tag{5}$$

где $\{A^{ac}_{bd}\}$, $\{B^a_{bc}\}$, $\{B^{ac}_b\}$ – некоторые функции на пространстве присоединенной $G-$ структуры, которые мы должны найти. Для этого нам нужна будет первая группа структурных уравнений. Напомним,

что первая группа структурных уравнений римановой связности $d\omega^i = \theta^i_j \wedge \omega^j$ на пространстве присоединенной $G-$ структуры почти эрмитова многообразия (M, J, g) принимает вид

$$d\omega^a = \theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b;$$
$$d\omega_a = -\theta^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b$$

где

$$B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}; \quad B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}};$$
$$B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]};$$

Эти уравнения называются первой группой структурных уравнений почти эрмитова многообразия. Здесь $\{J^i_{j,k}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала почти комплексной структуры J в римановой связности метрики g.

Запишем первое уравнение первой группы структурных почти эрмитовой структуры $(J, \tilde{g})$ и применим к нему отображение ψ^*.

$$d\psi^*\tilde{\omega}^a = \psi^*\tilde{\theta}^a_b \wedge \psi^*\tilde{\omega}^b + (\tilde{B}^{abc} \circ \psi)\psi^*\tilde{\omega}_b \wedge \psi^*\tilde{\omega}_c + (\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi)\psi^*\tilde{\omega}^c \wedge \psi^*\tilde{\omega}_b$$

Поставим (5) и учтем формулы для преобразования формы смещения.

$$d(e^f\omega^a) = (A^{ac}_{bd}\theta^d_c + B^a_{bc}\omega^c + B^{ac}_b\omega_c) \wedge (e^f\omega^b) + e^{2f}(\tilde{B}^{abc} \circ \psi)\omega_b \wedge \omega_c + e^{2f}(\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi)\omega^c \wedge \omega_b$$

Продифференцируем левую часть этого равенства и введем обозначение $df = \beta$ – 1-форма на многообразии M, а значит, $\pi^*\beta \equiv \beta = \beta_i\omega^i$. Тогда в силу линейной независимости базисных форм получим

$$A^{ac}_{bd} = \delta^a_d\delta^c_b; \qquad B^a_{bc} = -\beta_b\delta^a_c;$$
$$e^f(\tilde{B}^{abc} \circ \psi) = B^{abc}; \quad \beta^c\delta^a_b - B^{ac}{}_b = B^{ac}_b - e^f(\tilde{B}^{ac}{}_b \circ \psi);$$

Аналогичные вычисления, проведенные для второго уравнения первой группы структурных уравнений почти эрмитова многообразия позволяют получить следующие соотношения

$$B^{ac}_b = \beta^a\delta^c_b; \qquad e^f(\tilde{B}_{abc} \circ \psi) = B_{abc};$$
$$\beta_c\delta^a_b - B_{ac}{}^b = -B^b_{ac} - e^f(\tilde{B}_{ac}{}^b \circ \psi);$$

Подставим найденные значения функций A^{ac}_{bd}, B^a_{bc}, B^{ac}_b в (5).

$$\psi^*\tilde{\theta}^a_b = \theta^a_b + \beta^a\omega_b - \beta_b\omega^a \tag{6}$$

Кроме того, мы получаем формулы, связывающие компоненты структурных и виртуальных тензоров исходного и конформно преобразованного многообразий. А именно, доказана теорема.

Теорема 8.5. Пусть $\{B^{abc}, B_{abc}, B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$ – компоненты структурыных и виртуальных тензоров почти эрмитова многообразия (M, J, g); $\{\tilde{B}^{abc}, \tilde{B}_{abc}, \tilde{B}^{ab}{}_c, \tilde{B}_{ab}{}^c\}$ – компоненты структурных и виртуальных тензоров конформно преобразованного почти эрмитова многообразия $(M, J, \tilde{g})$. Тогда

$$e^f(\tilde{B}^{abc} \circ \psi) = B^{abc}; \quad e^f(\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi) = B^{ab}{}_c + \beta^a\delta^b_c - \beta^b\delta^a_c;$$
$$e^f(\tilde{B}_{abc} \circ \psi) = B_{abc}; \quad e^f(\tilde{B}_{ab}{}^c \circ \psi) = B_{ab}{}^c + \beta_a\delta^c_b - \beta_b\delta^c_a;$$

где $df = \beta = \beta_i\omega^i$.

Получим вспомогательные формулы для ковариантного дифференциала формы β в римановой связности ∇. Напомним, что по основной теореме тензорного анализа имеем

$$dJ^i_j - J^k_j\theta^i_k + J^i_k\theta^k_j = J^i_{j,k}\omega^k$$

Из этих уравнений, в частности, следует, что

$$\theta^a_{\hat{b}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},k}\omega^k = -C^{abc}\omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c;$$
$$\theta^{\hat{a}}_b = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k = -C_{abc}\omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c \tag{7}$$

где $C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},\hat{c}}$, $C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,c}$.

По основной теореме тензорного анализа для 1-формы β имеем

$$d\beta_i + \beta_j\theta_i^j = \beta_{i,j}\omega^j$$

где $\{\beta_{i,j}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала формы β в римановой связности ∇ метрики g. Распишем эти уравнения на пространстве присоединенной $G-$ структуры почти эрмитова многообразия (M, J, g), подставим (7) и воспользуемся линейной независимостью базисных форм.

$$\begin{array}{ll}\beta_{a,c} = \beta_{a,c} - \beta^d C_{dab}; & \beta_{a,}{}^{c} = \beta_a{}^c + \beta^d B_{da}{}^c;\\ \beta^{a,c} = \beta^{ac} - \beta_d C^{dac}; & \beta^a{}_{,c} = \beta^a{}_c + \beta_d B^{da}{}_c\end{array}$$

где введены обозначения

$$d\beta_a + \beta_b\theta_a^b = \beta_{ab}\omega^b + \beta_a{}^b\omega_b; \quad d\beta^a - \beta^b\theta_b^a = \beta^{ab}\omega_b + \beta^a{}_b\omega^b$$

Напомним, что формой Ли почти эрмитова многообразия называется 1-форма α, задаваемая формулой

$$\alpha = -\frac{1}{n-1}\delta F \circ J$$

где $F(X,Y) = g(JX,Y)$ – *келерова форма*, δ – оператор кодифференцирования.

Получим формулу, связывающую компоненты форм Ли почти эрмитовых многообразий (M, J, g) и $(M, J, \tilde{g})$ на соответствующих $G-$ структурах. В статье Грея и Хервеллы "16 классов почти эрмитовых многообразий и их линейные инварианты" на странице 44 есть формула, связывающая кодифференциалы келеровых форм исходного и конформно преобразованного многообразий:

$$\tilde{\delta}\tilde{F}(JX) = \delta F(JX) - 2(n-1)df(X)$$

$X \in \mathcal{X}(M)$. Мы воспользуемся этой формулой. Разделим ее на $n-1$ и получим $\tilde{\alpha} = \alpha + 2df$. Обозначим $\{\alpha_i\}$ и $\{\tilde{\alpha}_i\}$ компоненты форм Ли почти эрмитовых многообразий (M, J, g) и $(M, J, \tilde{g})$ на соответствующих $G-$ структурах. Тогда $\tilde{\alpha}_i(p') = \tilde{\alpha}_m(\varepsilon_i) = e^{-f}(\alpha_i + 2\beta_i)(p)$. Итак,

$$e^f(\tilde{\alpha}_i \circ \psi) = \alpha_i + 2\beta_i \tag{8}$$

Лемма 8.11. Для форм $\tilde{\alpha}$ и α имеют место соотношения

$$\begin{array}{l}e^{2f}(\tilde{\alpha}_{ac} \circ \psi) = \alpha_{ac} + 2\beta_{ac} - \alpha_a\beta_c - \alpha_c\beta_a - 4\beta_a\beta_c;\\ e^{2f}(\tilde{\alpha}_a{}^c \circ \psi) = \alpha_a{}^c + 2\beta_a{}^c - \beta^c\alpha_a - 2\beta^c\beta_a + \alpha_b\beta^b\delta_a^c + 2\beta_b\beta^b\delta_a^c;\\ e^{2f}(\tilde{\alpha}^{ac} \circ \psi) = \alpha^{ac} + 2\beta^{ac} - \beta^c\alpha^a - \beta^a\alpha^c - 4\beta^a\beta^c;\\ e^{2f}(\tilde{\alpha}^a{}_c \circ \psi) = \alpha^a{}_c + 2\beta^a{}_c - \alpha^a\beta_c - 2\beta^a\beta_c + \alpha^b\beta_b\delta_c^a + 2\beta^b\beta_b\delta_c^a\end{array}$$

где $\{\alpha_{ac}, \alpha^{ac}, \alpha^a{}_c, \alpha_a{}^c\}$ – системы функций на пространстве присоединенной $G-$ структуры, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$d\alpha_a + \alpha_c\theta_a^c = \alpha_{ac}\omega^c + \alpha_a{}^c\omega_c; \quad d\alpha^a - \alpha^c\theta_c^a = \alpha^{ac}\omega_c + \alpha^a{}_c\omega^c \tag{9}$$

Доказательство. Для конформно преобразованного многообразия $(M, J, \tilde{g})$ уравнения (9) будут иметь вид

$$d\tilde{\alpha}_a + \tilde{\alpha}_c\tilde{\theta}_a^c = \tilde{\alpha}_{ac}\tilde{\omega}^c + \tilde{\alpha}_a{}^c\tilde{\omega}_c; \quad d\tilde{\alpha}^a - \tilde{\alpha}^c\tilde{\theta}_c^a = \tilde{\alpha}^{ac}\tilde{\omega}_c + \tilde{\alpha}^a{}_c\tilde{\omega}^c$$

Применим к этим уравнениям отображение ψ^*, воспользуемся формулами для формы смещения и формулами (6) и (8). Тогда в силу линейной независимости базисных форм получим требуемое соотношение. □

Напомним вторую группу структурных уравнений

$$\begin{aligned}d\theta_c^a = \theta_b^a \wedge \theta_c^b + (A_{cd}^{ah} + 2B^{abh}B_{cbd})\omega^d \wedge \omega_h + (A_{cdh}^a + B^{ab}{}_{[d}B_{|b|h]c})\omega^d \wedge \omega^h +\\ +(A_c^{adh} - B_{cb}{}^{[d}B^{|b|h]a})\omega_d \wedge \omega_h\end{aligned}$$

где $\{A_{cd}^{ah}\}$, $\{A_{cdh}^a\}$, $\{A_a^{cdh}\}$ – системы функций на пространстве присоединенной $G-$ структуры. Кроме того, у нас есть дифференциальные уравнения:

$$\begin{array}{l}dB^{abc} - B^{dbc}\theta_d^a - B^{adc}\theta_d^b - B^{abd}\theta_d^c = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d;\\ dB_{abc} + B_{dbc}\theta_a^d + B_{adc}\theta_b^d + B_{abd}\theta_c^d = B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d;\\ dB^{ab}{}_c - B^{db}{}_c\theta_d^a - B^{ad}{}_c\theta_d^b + B^{ab}{}_d\theta_c^d = B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d\omega_d;\\ dB_{ab}{}^c + B_{db}{}^c\theta_a^d + B_{ad}{}^c\theta_b^d - B_{ab}{}^d\theta_d^c = B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d\omega^d;\end{array} \tag{10}$$

Используя формулы (10), по аналогии с доказательством леммы о форме Ли легко получить соотношения для ковариантных дифференциалов структурных и виртуальных тензоров:

$$e^{2f}(\tilde{B}^{abcd} \circ \psi) = B^{abcd} - \beta^d B^{abc} - \beta^a B^{dbc} - \beta^b B^{adc} - \beta^c B^{abd};$$
$$e^{2f}(\tilde{B}^{abc}{}_d \circ \psi) = B^{abc}{}_d - \beta_d B^{abc} + \beta_h B^{hbc}\delta^a_d + \beta_h B^{ahc}\delta^b_d + \beta_h B^{abh}\delta^c_d;$$

и формулы комплексно сопряженные.

$$e^{2f}(\tilde{B}^{ab}{}_c{}^d \circ \psi) = B^{ab}{}_c{}^d + \beta^{ad}\delta^b_c - \beta^{bd}\delta^a_c - \beta^d B^{ab}{}_c - 2\beta^d\beta^a\delta^b_c + 2\beta^d\beta^b\delta^a_c - \\ - B^{db}{}_c\beta^a - B^{ad}{}_c\beta^b + B^{ab}{}_h\beta^h\delta^d_c;$$
$$e^{2f}(\tilde{B}^{ab}{}_{cd} \circ \psi) = B^{ab}{}_{cd} + \beta^a{}_d\delta^b_c - \beta^b{}_d\delta^a_c - \beta_d B^{ab}{}_c - \beta_d\beta^a\delta^b_c + \beta_d\beta^b\delta^a_c + \\ + B^{hb}{}_c\beta_h\delta^a_d + \beta^h\beta_h\delta^b_c\delta^a_d + B^{ah}{}_c\beta_h\delta^b_d - \beta^h\beta_h\delta^a_c\delta^b_d - B^{ab}{}_d\beta_c$$

и формулы комплексно сопряженные. Найдем аналогичные соотношения для функций $\{A^{ah}_{cd}\}$, $\{A^a_{cdh}\}$, $\{A^{cdh}_a\}$. Запишем вторую группу структурных уравнений для конформно преобразованного многообразия $(M, J, \tilde{g})$:

$$d\tilde{\theta}^a_c = \tilde{\theta}^a_b \wedge \tilde{\theta}^b_c + (\tilde{A}^{ah}_{cd} + 2\tilde{B}^{abh}\tilde{B}_{cbd})\tilde{\omega}^d \wedge \tilde{\omega}_h + (\tilde{A}^a_{cdh} + \tilde{B}^{ab}{}_{[d}\tilde{B}_{|b|h]c})\tilde{\omega}^d \wedge \tilde{\omega}^h + \\ + (\tilde{A}^{adh}_c - \tilde{B}_{cb}{}^{[d}\tilde{B}^{|b|h]a})\tilde{\omega}_d \wedge \tilde{\omega}_h$$

и применим отображение ψ^*. Тогда с учетом формул для формы смещения и формул (6) получим

$$e^{2f}(\tilde{A}^{ah}_{cd} \circ \psi) = A^{ah}_{cd} + \beta^a{}_d\delta^h_c + \beta_c{}^h\delta^a_d - \beta^a B_{cd}{}^h - \beta_c B^{ah}{}_d - \beta^a\beta_c\delta^h_d + \beta^b\beta_b\delta^a_d\delta^h_c \qquad (11)$$

$$e^{2f}(\tilde{A}^a_{cdh} \circ \psi) = A^a_{cdh} - \beta_{c[d}\delta^a_{h]} + \beta^a B_{cdh} + \beta^b\delta^a_{[d}B_{|b|h]c} - \beta^a B_{[dh]c} - \beta_c\beta_{[h}\delta^a_{d]};$$
$$e^{2f}(\tilde{A}^{adh}_c \circ \psi) = A^{adh}_c + \beta^{a[d}\delta^{h]}_c - \beta_c B^{adh} + \beta^a\delta^{[d}_c\beta^{h]} + \beta_c B^{[dh]a} - \beta_b\delta^{[d}_c B^{|b|h]a};$$