1 Анализ на многообразиях

1.9 Алгебра Грассмана гладкого многообразия. Оператор внешнего дифференцирования.

Пусть $\mathcal{T}_*(V) = \oplus_{r=0}^{\infty}\mathcal{T}_r^0(V)$ – ковариантная тензорная алгебра рефлексивного K-модуля V. В модуле $\mathcal{T}_r^0(V)$ естественным образом действует симметрическая группа S_r порядка r (группа подстановок)ю Именно, если $t \in \mathcal{T}_r^0(V)$, $\sigma \in S_r$, то

$$(\sigma t)(X_1, \dots, X_r) = t(\mathcal{X}_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)})$$

Задача 1.34. Докажите, что $\forall \sigma, \tau \in S_r$ $(\sigma \circ \tau)t = \sigma(\tau t)$, то есть этим определяется (левое) действие группы S_r.

Определение 1.25. Тензор $t \in \mathcal{T}_r^0(V)$ называется *симметричным*, если $\forall \sigma \in S_r \Rightarrow \sigma t = t$. Тензор $t \in \mathcal{T}_r^0(V)$ называется *кососимметричным*, если

$$\forall \sigma \in S_r \Rightarrow \sigma t = \varepsilon(\sigma)t$$

где $\varepsilon(\sigma)$ – индекс подстановки σ, равный 1 для четной и -1 для нечетной подстановки.

Задача 1.35. Докажите, что тензор t симметричен (соответственно, кососимметричен) тогда и только тогда, когда он не меняет (соответственно, меняет) знак при любой транспозиции своих аргументов (то есть меняем местами два аргумента).

Задача 1.36. Докажите, что симметричные (соответственно, кососимметричные) тензоры образуют подмодули модуля $\mathcal{T}_r^0(V)$, обозначаемые, соответственно, $S_r(V)$ и $\Lambda_r(V)$.

Напомним, что проектором модуля V называется линейное отображение $P : V \to V$ (то есть эндоморфизм модуля V)такое, что $P^2 = P$.

Задача 1.37. Докажите, что эндоморфизмы Sym и Alt модуля $\mathcal{T}_r^0(V)$, определяемые формулами

$$Sym(t) = \tfrac{1}{r!}\textstyle\sum_{\sigma \in S_r} \sigma t; \quad Alt(t) = \tfrac{1}{r!}\textstyle\sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma)\sigma t$$

являются проекторами на подмодули $S_r(V)$ и $\Lambda_r(V)$, соответственно. Они называются операторами *симметризации* и *альтернирования.*

С помощью оператора Alt естественным образом определяется операция *внешнего умножения*

$$\wedge : \Lambda_r(V) \times \Lambda_s(V) \to \Lambda_{r+s}(V)$$

по формуле

$$\omega \wedge \theta = \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(\omega \otimes \theta)$$

Задача 1.38. Докажите, что (1) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$
(2) $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3$
(3) $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$.

Операция внешнего умножения, продолженная по линейности, превращает K-модуль

$$\Lambda(V) = \oplus_{r=0}^{\infty}\Lambda_r(V),\ \Lambda_0(V) = K, \Lambda_1(V) = V^*$$

в ассоциативную алгебру, называемую *внешней алгеброй* модуля V. Элементы внешней алгебры называются *внешними формами.* Если $\omega \in \Lambda_r(V)$, то форма ω называется *однородной формой степени* r или r-*формой.*

Задача 1.39. Докажите, что если V – n-мерное линейное пространство над полем K, $(e_1, \dots, e_n)$, $(e^1, \dots, e^n)$ – дуальный базис, то r- формы вида $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}$, $i_1 < \dots < i_r$, образуют базис линейного пространства $\Lambda_r(V)$. Отсюда следует, в частности, что размерность $dim\Lambda_r(V) = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Докажите, что координаты $(\theta_{i_1 \dots i_r})$ r-формы θ в этом базисе равны $\frac{1}{r!}\theta(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$.

Пусть K – вещественная алгебра, ω, θ – формы на K-модуле V степеней r и s соответственно, со значениями в модуле $K \otimes \mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ – вещественная алгебра Ли. (Напомним, что *алгеброй Ли* (над полем F) называется линейное пространство $\mathbf{g}$ над полем F, в котором фиксирована бинарная билинейная операция $[\cdot,\cdot] : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \to \mathbf{g}$, называемая *операцией коммутирования* или *коммутатором* и обладающая свойствами

1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (антикоммутативность)
2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (тождество Якоби),
$X, Y, Z \in \mathbf{g}$.)
Тогда внутренним образом определена $(r+s)$-форма $[\omega, \theta]$ со значениями в том же модуле, по формуле

$$[\omega, \theta](X_1, \dots, X_{r+s}) = \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)[\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}), \theta(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)})]$$

$X_1, \dots, X_{r+s} \in V$. Эта форма называется *коммутатором форм* ω и θ.

Пример. Если θ – 1-форма на V, то $[\theta, \theta](X, Y) = \{[\theta(X), \theta(Y)] - [\theta(Y), \theta(X)]\} = 2[\theta(X), \theta(Y)]$. Если в алгебре Ли $\mathbf{g}$ фиксирован базис $(e_1, \dots, e_N)$, то $\theta = \theta^a \otimes e_a$, $a = 1, \dots, N$, а значит,
$[\theta, \theta](X, Y) = [\theta^a \otimes e_a, \theta^b \otimes e_b](X, Y) = 2[\theta^a(X) \otimes e_a, \theta^b(Y) \otimes e_b] =$
$= 2\theta^a(X)\theta^b(Y) \otimes [e_a, e_b]$.
Далее, $[\theta, \theta](X, Y) = 2\theta^a(X)\theta^b(Y) \otimes [e_a, e_b] = 2\theta^b(X)\theta^a(Y) \otimes [e_b, e_a] = -2\theta^b(X)\theta^a(Y) \otimes [e_a, e_b]$.
Почленно складывая эти соотношения, получим, что $[\theta, \theta](X, Y) = (\theta^a \wedge \theta^b) \otimes [e_a, e_b](X, Y)$, а значит,

$$[\theta, \theta] = (\theta^a \wedge \theta^b) \otimes [e_a, e_b]$$

Пусть W – вещественное линейное пространство, θ, ω – формы на K-модуле V со значениями в модулях $K \otimes End(W)$ и $K \otimes W$ (напомним, что $End(W)$ – это множество всех отображений $W \to W$), соответственно. Тогда внутренним образом определена $r+s$-форма $\theta\omega$ со значениями в модуле $K \otimes W$ по формуле

$$\theta\omega(X_1, \dots, X_{r+s}) = \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\theta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \left(\omega(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)})\right)$$

где $X_1, \dots, X_{r+s} \in V$. Эту форму назовем *операторным произведением* формы θ на форму ω.

Пример. Пусть ω и θ – 1-формы со значениями в пространстве $\mathbf{R}^n$ и полной матричной алгебре $M_{n,n} = End(\mathbf{R}^n)$ соответственно, $\omega = \omega^k \otimes e_k$, $\theta = \theta^i_j \otimes e^j_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда
$\theta\omega(X, Y) = \{\theta(X)(\omega(Y)) - \theta(Y)(\omega(X))\} = \left\{\theta^i_j(X)\omega^j(Y)e_i - \theta^i_j(Y)\omega^j(X)e_i\right\} =$
$= \left((\theta^i_j \otimes \omega^j)(X, Y)e_i - (\theta^i_j \otimes \omega^j)(Y, X)e_i\right) = \theta^i_j \wedge \omega^j \otimes e_i(X, Y)$ и, таким образом,

$$\theta\omega = \theta^i_j \wedge \omega^j \otimes e_i$$

Пусть M – гладкое многообразие. Внешняя алгебра $\Lambda(\mathcal{X}(M))$ обозначается $\Lambda(M)$ и называется *алгеброй Грассмана* гладкого многообразия M, а ее элементы называются *дифференциальными формами.* В алгебре Грассмана внутренним образом определен дифференциальный оператор, двойственный операции коммутирования векторных полей и играющий фундаментальную роль дифференциальной геометрии. Этот оператор описывается в следующей теореме:

Теорема 1.9. Пусть M – гладкое многообразие. Существует, и притом единственное, $\mathbf{R}$-линейное отображение $d : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$, обладающее свойствами:

(d1) $d(\Lambda_r(M)) \subset \Lambda_{r+1}(M)$, $r = 0, 1, 2, \dots$;

(d2) $df(X) = X(f)$, $f \in C^\infty(M) = \Lambda_0(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$;

(d3) $d \circ d = 0$

(d4) $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta$, $\omega \in \Lambda_r(M), \theta \in \Lambda(M)$.

Доказательство.* 1. Единственность. Пусть оператор d существует на многообразии M и на любом его открытом подмногообразии. Фиксируем точку $p \in M$. Пусть (U, φ) – локальная карта с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности этой точки. Фиксируем окрестность V_p точки p, компактное замыкание $\bar{V}_p$ которой входит в U. Рассмотрим систему 1-форм $(dx^1, \dots, dx^n)$ на U, где $dx^i = d(x^i \circ \varphi)$, $i = 1, \dots, n$. Из $(d2)$ следует, что
$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = d(x^i \circ \varphi)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)((x^i \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}) =$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(x^i \circ (\varphi \circ \varphi^{-1})) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j,\ i, j = 1, \ldots, n,$
то есть эти формы образуют базис модуля $\mathcal{X}^*(U)$, дуальный натуральному базису. Следовательно,

$$\forall \omega \in \Lambda_r(U) \Rightarrow \omega = \frac{1}{r!} a_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_r}$$

где $\{a_{i_1 \ldots i_r}\} \subset C^\infty(U)$ – компоненты формы ω в натуральном базисе данной карты. С учетом второго принципа локализации получим системы функций $\{\psi_{i_1 \ldots i_r}\}$, $\{\varphi^i\} \subset C^\infty(M)$, таких, что

$$\psi_{i_1 \ldots i_r} \big|_{V_p} = a_{i_1 \ldots i_r} \big|_{V_p}\ ;\ \varphi^i \big|_{V_p} = x^i \big|_{V_p}$$

Тогда определена r-форма $\theta = \frac{1}{r!} \psi_{i_1 \ldots i_r} d\varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi^{i_r} \in \Lambda_r(M)$. Очевидно, что

$$\omega \big|_{V_p} = \theta \big|_{V_p} \tag{1}$$

Пусть, далее, $f \in C^\infty(M)$, $f = \begin{cases} 1, \text{на} \bar{V}_p \\ 0, \text{вне} U \end{cases}$ Тогда $df \big|_{V_p} = 0$, поскольку $\forall X \in \mathcal{X}(V_p)$ имеем $df(X) = X(f) = X(1) = 0$.
Далее, согласно (d4), имеем на V_p

$$d(f(\omega - \theta)) = df \wedge (\omega - \theta) + f(d\omega - d\theta)$$

При этом, согласно (1), левая часть этого тождества равна нулю на V_p. Следовательно,

$$(d\omega) \big|_{V_p} = (d\theta) \big|_{V_p}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\forall f \in C^\infty(M) \Rightarrow (df) \big|_{V_p} = d(f \big|_{V_p})$$

Таким образом, с учетом (d3) и (d4), $(d\omega) \big|_{V_p} = (d\theta) \big|_{V_p} = \frac{1}{r!} d(\psi_{i_1 \ldots i_r} \big|_{V_p}) \wedge d(\varphi^{i_1} \big|_{V_p}) \wedge \ldots \wedge d(\varphi^{i_r} \big|_{V_p}) + \frac{1}{r!}(\psi_{i_1 \ldots i_r} \big|_{V_p}) \wedge d^2(\varphi^{i_1} \big|_{V_p}) \wedge d(\varphi^{i_2} \big|_{V_p}) \wedge \ldots \wedge d(\varphi^{i_r} \big|_{V_p}) + \ldots =$
$= \frac{1}{r!} d(a_{i_1 \ldots i_r} \big|_{V_p}) \wedge d(x^{i_1} \big|_{V_p}) \wedge \ldots \wedge d(x^{i_r} \big|_{V_p}) = d(\omega \big|_{V_p})$. Следовательно, в атласе $\{(V_p, \varphi \big|_{V_p})\}_{p \in M}$ имеем

$$(d\omega) \big|_{V_p} = d(\omega \big|_{V_p}) = \frac{1}{r!} da_{i_1 \ldots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \tag{2}$$

(в правой части, конечно, имеются в виду сужения соответствующих функций на V_p). Прямым подсчетом можно убедиться, что это соотношение эквивалентно своему бескоординатному аналогу:
$(d\omega)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{r+1}) +$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{r+1}) \tag{3}$$

Задача 1.40. Докажите эту формулу сначала для частного случая (r=2 или 3), затем постарайтесь доказать для общего случая.

Тем самым мы доказали, что если оператор, удовлетворяющий условиям (d1) – (d4) существует, то он должен задаваться последней полученной формулой, то есть он единственен.

2. Существование. Проверим, что оператор d, заданный формулой (3) удовлетворяет требуемым свойствам.

Задача 1.41. С учетом того, что (см. свойства скобки Ли)

$$[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y],\ X, Y \in \mathcal{X}(M),\ f \in C^\infty(M)$$

докажите, что правая часть (3) задает $C^\infty(M)$ - линейное по каждому аргументу кососимметрическое отображение, то есть $r+1$-форму на M. Откуда следует выполнение условия (d1).

Условие (d2) получаем из формулы (3), если подставим вместо ω функцию f. Далее, из (d2) следует, что $d(fg)(X) = X(fg) = X(f)g + fX(g) = df(X)g + fdg(X)$, то есть $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$, $f, g \in C^\infty(M)$. Из этого соотношения и из (3) непосредственными вычислениями получим (d4).

Задача 1.42. Проведите эти вычисления сначала для частного случая $\omega, \theta \in \Lambda_1(M)$, а затем в общем виде.

Наконец, с учетом (d4) и определения скобки Ли для любой гладкой функции на многообразии M или U получим
$d(df)(X,Y) = X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X,Y]) = X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X,Y](f) = 0$. Тогда из (2) с учетом (d4) получим $d(d\omega) = 0$. □

Определение 1.26. Оператор $d : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ называется *оператором внешнего дифференцирования.*

Следствие. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, (U,φ) – локальная карта на M с координатами $(x^1,\ldots,x^n)$.
1. Дифференциальные 1-формы $(dx^1,\ldots,dx^n)$ на U образуют кобазис модуля $\mathcal{X}(U)$, дуальный натуральному базису.
2. Пусть $f \in C^\infty(M)$. Тогда в локальной карте

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

3. Если в локальной карте $\omega = \frac{1}{r!} a_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$, то

$$d\omega = \frac{1}{r!} \frac{\partial a_{i_1\ldots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$$

Пусть θ – r-форма на M со значениями в линейном пространстве W. Фиксируем в W базис $b = (e_1,\ldots,e_N)$. Тогда $\theta = \theta^a \otimes e_a$, $a = 1,\ldots,N$, где $\{\theta^a\}$ – тензорные компоненты формы θ. Определим $(r+1)$-форму $d\theta$ на M со значениями в линейном пространстве W формулой $d\theta = d\theta^a \otimes e_a$.
Докажем, что $d\theta$ не зависит от выбора базиса в W. Рассмотрим другой базис $\beta = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)$. Обозначим матрицу перехода от базиса b к базису β через $C = (C_a^b)$, C_a^b – константы из поля, над которым определено линейное пространство W. Тогда $\theta = \tilde\theta^a \otimes \varepsilon_a$ и

$$d\tilde\theta^a \otimes \varepsilon_a = d\tilde\theta^a \otimes (C_a^b e_b) = d(C_a^b \tilde\theta^a) \otimes e_b = d\theta^b \otimes e_b$$

Определение 1.27. Построенная выше $(r+1)$-форма $d\theta$ называется *внешним дифференциалом* r-формы θ.

1.10 Компоненты тензорных полей в натуральном базисе.

Определение 1.28. Пусть (U,φ) – локальная карта на многообразии M с координатами $(x^1,\ldots,x^n)$, $(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n})$ – натуральный базис, $(dx^1,\ldots,dx^n)$ – дуальный кобазис. Пусть $t \in \mathcal{T}_r^s(M)$ – тензорное поле на этом многообразии. Система функций $\{t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}\}$ на многообразии U, определяемая формулой

$$t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} = t\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, dx^{j_1},\ldots,dx^{j_s}\right)$$

называется *системой компонент* тензорного поля t в натуральном базисе.
Пусть дана другая карта (V,ψ) с координатами $(y^1,\ldots,y^n)$ такая, что $V \cap U \neq \emptyset$. Пусть относительно этой карты тензорное поле t имеет компоненты $\{\tilde t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}\}$. Найдем связь между компонентами тензорного поля t в области пересечения карт (U,φ) и (V,ψ). Пусть локальные координаты данных карт связаны соотношениями $x^i = x^i(y^1,\ldots,y^n)$, $i = 1,\ldots,n$ или, короче, $x^i = x^i(y^a)$, $a = 1,\ldots,n$. Тогда для любой функции $f \in C^\infty(U \cap V)$ по правилу дифференцирования сложной функции имеем $\frac{\partial f}{\partial y^a} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^a}$, то есть

$$\frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Матрица $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\right)$ называется *матрицей Якоби* диффеоморфизма $x^i = x^i(y^a)$. Для дуальных базисов имеем $dy^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} dx^i$. Подставим эти соотношения в формулу для компонент тензора t:
$\tilde t_{a_1\ldots a_r}^{b_1\ldots b_s} = t\left(\frac{\partial}{\partial y^{a_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^{a_r}}, dy^{b_1},\ldots,dy^{b_s}\right) = t\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{a_r}}\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, \frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{j_1}}dx^{j_1},\ldots,\frac{\partial y^{b_s}}{\partial x^{j_s}}dx^{j_s}\right)$. В силу линейности тензорного поля получим

$$\tilde t_{a_1\ldots a_r}^{b_1\ldots b_s} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}}\ldots\frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{a_r}}\frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{j_1}}\ldots\frac{\partial y^{b_s}}{\partial x^{j_s}} t_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}$$

Этот закон преобразования компонент тензорного поля называется *тензорным.*

Задача 1.43. Запишите формулы преобразования компонент векторного и ковекторного полей.

Задача 1.44. Докажите, что задание в каждой локальной карте системы гладких функций $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$, преобразующихся при переходе от карты к карте по тензорному закону, корректно определяет тензорное поле типа (r,s) на многообразии M.

1.11 Гладкие отображения. Дифференциал гладкого отображения

Определение 1.29. Пусть M^n и N^m – гладкие многообразия. Отображение $\phi : M \to N$ называется *гладким,* если

$$\forall f \in C^\infty(N) \Rightarrow f \circ \phi \in C^\infty(M)$$

Задача 1.45. Докажите, что отображение $\phi : M \to N$ является гладким тогда и только тогда, когда для каждой пары точек $p \in M$ и $q = \phi(p) \in N$ существуют карта (U, φ) на M в окрестности точки p и карта (V, ψ) на N в окрестности точки q с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ и $(y^1, \dots, y^m)$, соответственно, такие, что отображение $\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ является гладким отображением областей евклидовых пространств. (Указание: вспомните определение гладкой функции на многообразии).

Отображение $\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$, задаваемое уравнениями $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ $i = 1, \dots, m$ называется *координатным выражением* отображения ϕ в данной паре карт.

Определение 1.30. Если гладкое отображение ϕ обратимо и обратное отображение ϕ^{-1} является гладким отображением, то отображение ϕ называется *диффеоморфизмом.*

Задача 1.46. Докажите, что сфера с выколотой точкой диффеоморфна плоскости. Обобщите результат на случай n-мерной сферы.

Задача 1.47. Докажите, что все гладкие многообразия, задаваемые гладкими структурами $(\mathbf{R}^1, \varphi_0), \dots, (\mathbf{R}^1, \varphi_k), \dots,$, где $\varphi_k(x) = x^{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots,$, диффеоморфны.

Замечание. Последняя задача отражает общую ситуацию. Как уже отмечалось, если на многообразии M^n существует хотя бы одна гладкая структура, то на M^n существует бесконечно много гладких структур, однако определяемые ими гладкие многообразия большей частью диффеоморфны. Например, известно, что все гладкие структуры на $\mathbf{R}^n$, $n \neq 4$, задают диффеоморфные многообразия; все гладкие структуры на S^n, $n = 1, 2, 3, 5, 6, 12$ задают диффеоморфные многообразия. Известно также, что если размерность многообразия меньше 4, то из гомеоморфности многообразий следует их диффеоморфность, то есть для многообразий размерности меньше 4, дифференцируемая и топологическая классификации совпадают.

Возникает естественный вопрос: существуют ли гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия? Этот вопрос был решен Дж. Милнором в 1956 году. Он показал, что существует ровно 28 гладких многообразий (сферы Милнора), гомеоморфных S^7, но не диффеоморфных друг другу. Сферы Милнора можно задать как подмногообразия в $\mathbf{R}^{10} = \mathcal{C}^5 = \{(z_1, \dots, z_5)\}$ системой двух уравнений $z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0$, $|z_1|^2 + \dots + |z_5|^2 = 1$, $k = 1, 2, \dots, 28$. Открытие Милнором существования гомеоморфных, но не диффеоморфных многообразий положило начало выделению дифференциальной топологии в самостоятельную область математики. В 1987 году К.Таубс показал, что существует несчетное множество гладких многообразий, гомеоморфных $\mathbf{R}^4$, но не диффеоморфных друг другу.

Фиксируем точку $p \in M$. Тогда внутренним образом определено отображение

$$(\phi_*)_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N)$$

по формуле $\forall \xi \in T_p(M)$ $(\phi_*)_p(\xi)(f) = \xi(f \circ \phi)$, $f \in C^\infty(N)$.

Задача 1.48. Докажите, что $\eta = (\phi_*)_p(\xi) \in T_{\phi(p)}(N)$, то есть является инфинитазимальным дифференцированием алгебры $C^\infty(N)$.

Задача 1.49. Докажите, что отображение $(\phi_*)_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N)$ $\mathbf{R}$ - линейно.

Это отображение называется *дифференциалом* отображения ϕ в точке p.

Найдем его запись в локальных координатах. Пусть (U, φ) – локальная карта с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки p, (V, ψ) – локальная карта с координатами $(y^1, \dots, y^m)$ в окрестности точки $\phi(p)$, $\left(e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right)$, $i = 1, \dots, n$ – натуральный базис пространства $T_p(M)$, $\left(\varepsilon_j = \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\phi(p)}\right)$, $j = 1, \dots, m$ – натуральный базис пространства $T_{\phi(p)}(N)$. Тогда

$(\phi_*)_p(e_i)(f) = e_i(f \circ \phi) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} f \circ \phi \circ \varphi^{-1} =$

$= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} (f\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\phi\circ\varphi^{-1}) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\psi\circ\phi(p)} f\circ\psi^{-1} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \varepsilon_j(f),\ f\in C^\infty(N)$. Следовательно,

$$(\phi_*)_p(e_i) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \varepsilon_j$$

где $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\right)$ – матрица отображения $(\phi_*)_p$ относительно пары натуральных базисов. Она называется *матрицей Якоби.*

Дифференциал гладкого отображения можно записать иначе – в терминах альтернативного описания касательных векторов. Именно, пусть $\xi\in T_p(M)$ рассматривается как класс $[\gamma]$ эквивалентных путей в точке $p\in M$. Тогда естественно определен класс $\eta=[\phi\circ\gamma]\in T_{\phi(p)}(N)$. Выразим отображение $\xi \xrightarrow{\tau} \eta$ в локальных координатах. Пусть в соответствующем натуральном базисе вектор ξ имеет координаты $\xi^i=\frac{d}{dt}|_{t=0}\, x^i\circ\gamma^*(t)$, $i=1,\ldots,n$, а вектор η – координаты η^j, $j=1,\ldots,m$. Тогда
$\eta^j=\frac{d}{dt}|_{t=0}\, y^j\circ(\phi\circ\gamma)^*(t)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\, y^j\circ(\psi\circ\phi\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma)(t)=$
$=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\frac{d}{dt}|_{t=0}\, x^i\circ(\varphi\circ\gamma)(t)=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\frac{d}{dt}|_{t=0}\, x^i\circ\gamma^*(t)=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\xi^i$. Откуда следует, что отображение τ, сопоставляющее вектору ξ вектор η, совпадает с отображением $(\phi_*)_p$. Введем обозначение

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\gamma(t)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\, x^i\circ\varphi\circ\gamma(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}$$

С использованием введенных определений и обозначений имеем
$\xi=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p=\frac{d}{dt}|_{t=0}\, x^i\circ(\varphi\circ\gamma)(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\gamma(t)$. Следовательно, $\xi=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\gamma(t)$, $\gamma(t)\in[\gamma]=\xi$.
В этих обозначениях отображение $(\phi_*)_p$ запишется так: $(\phi_*)_p\xi=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\phi\circ\gamma(t)$, $\gamma(t)\in\xi$ или

$$(\phi_*)_p\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\gamma(t)\right)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\phi\circ\gamma(t) \tag{4}$$

Эта формула будем многократно использоваться нами в дальнейшем.

Предложение 1.12. Реперное отображение $r_\varphi: T_p(M)\to\mathbf{R}^n$, сопоставляющее касательному вектору $\xi\in T_p(M)$ набор его координат в данной карте (U,φ), совпадает с отображением $(\varphi_*)_p$.

Доказательство. Если $\gamma(t)\in\xi$, то с использованием (4) получим $r_\varphi(\xi)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\varphi\circ\gamma(t)=(\varphi_*)_p\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\gamma(t)=(\varphi_*)_p\xi$, то есть $r_\varphi=(\varphi_*)_p$. □

Напомним, что если задано K-линейное отображение $h:V\to V'$ из K-модуля V в K-модуль V' (в частности, они могут быть векторными пространствами) и дана полилинейная r-форма α на модуле V'. Тогда на модуле V определяется полилинейная r-форма $h^*\alpha$ по формуле

$$h^*\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_r)=\alpha(h\xi_1,\ldots,h\xi_r)$$

$\xi_1,\ldots,\xi_r\in V$.

Задача 1.50. Докажите.

Применим эту конструкцию для $\mathbf{R}$-линейного отображения $(\phi_*)_p: T_p(M)\to T_{\phi(p)}(N)$ – дифференциала гладкого отображения $\phi: M\to N$. Пусть $\omega\in\Lambda_r(T_{\phi(p)}(N))$ – произвольный r-ковектор. Тогда определен r-ковектор $\phi^*\omega\in\Lambda_r(T_p(M))$ по формуле

$$\phi^*\omega(\xi_1,\ldots,\xi_r)=\omega((\phi_*)_p\xi_1,\ldots,(\phi_*)_p\xi_r)$$

$\xi_1,\ldots,\xi_r\in T_p(M)$. Будем называть эту операцию *антиувлечением r-ковектора.*

1.12 ϕ-связанные векторные поля. Увлечение и антиувлечение тензоров при гладких отображениях

Определение 1.31. Пусть $\phi: M\to N$ – гладкое отображение. Векторные поля $X\in\mathcal{X}(M)$, $Y\in\mathcal{X}(N)$ называется ϕ-связанными, если

$$\forall f\in C^\infty(N)\ \Rightarrow\ X(f\circ\phi)=Y(f)\circ\phi$$

Теорема 1.10. Векторные поля X и Y ϕ-связаны тогда и только тогда, когда $\forall p\in M\ \Rightarrow (\phi_*)_pX_p=Y_{\phi(p)}$.

Доказательство. Пусть $f \in C^\infty(N)$ – произвольная функция. Тогда Векторные поля X и Y ϕ-связаны $\Leftrightarrow X(f\circ\phi) = Y(f)\circ\phi \Leftrightarrow \forall p \in M\, X(f\circ\phi)(p) = Y(f)\circ\phi(p) \Leftrightarrow X_p(f\circ\phi) = Y_{\phi(p)}(f) \Leftrightarrow (\phi_*)_p(X_p)(f) = Y_{\phi(p)}(f)$. □

В силу этого результата принято обозначение $Y = \phi_* X$. Векторное поле $Y = \phi_* X$, если оно определено, называется *увлечением векторного поля* X при отображении ϕ.

Предложение 1.13. Если $Y_1 = \phi_* X_1$, $Y_2 = \phi_* X_2$, то $[Y_1, Y_2] = \phi_*[X_1, X_2]$.

Доказательство. По условию, $X_1(f\circ\phi) = Y_1(f)\circ\phi$, $X_2(f\circ\phi) = Y_2(f)\circ\phi$. С учетом этих соотношений имеем
$[X_1, X_2](f\circ\phi) = X_1(X_2(f\circ\phi)) - X_2(X_1(f\circ\phi)) = X_1(Y_2(f)\circ\phi) - X_2(Y_1(f)\circ\phi) = Y_1(Y_2(f))\circ\phi - Y_2(Y_1(f))\circ\phi = [Y_1, Y_2](f)\circ\phi$. □
Другая формулировака этого утверждения: если $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$, причем существуют векторные поля $\phi_* X_1$, $\phi_* X_2$, то существует векторное поле $\phi_*[X_1, X_2]$, причем

$$\phi_*([X_1, X_2]) = [\phi_* X_1, \phi_* X_2] \tag{5}$$

Определение 1.32. Пусть $\phi : M \to N$ – гладкое отображение и пусть $\omega \in \Lambda_r(N)$. Тогда на многообразии M канонически определена r-форма $\phi^*(\omega) \in \Lambda_r(M)$, обладающая свойством

$$\phi^*(\omega)(X_1, \ldots, X_r) = \omega(\phi_* X_1, \ldots, \phi_* X_r)\circ\phi;\ X_i \in \mathcal{X}(M),\ i = 1, \ldots, r$$

и называемая *антиувлечением* формы ω. Она однозначно определяется соотношением

$$(\phi^*\omega)_p(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \omega_{\phi(p)}((\phi_*)_p\xi_1, \ldots, (\phi_*)_p\xi_r)$$

где $p \in M$, $\xi_i \in T_p(M)$, $i = 1, \ldots, r$. Из этой формулы легко видеть, что антиувлечение r-формы ω и антиувлечение r-ковектора связаны соотношением

$$(\phi^*\omega)_p = \phi^*(\omega_{\phi(p)})$$

Кроме того, если $f \in C^\infty(N)$, рассматриваемая как 0-форма, то полагают

$$\phi^*(f) = f\circ\phi$$

Тогда по линейности определено отображение $\phi^* : \Lambda(N) \to \Lambda(M)$, являющееся гомоморфизмом $\mathbf{R}$-линейных пространств.

Предложение 1.14. Отображение ϕ^* обладает свойствами:

$$\begin{array}{l} 1)\ \phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \phi^*(\omega_1) \wedge \phi^*(\omega_2); \\ 2)\ \phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega) \end{array} \tag{6}$$

Доказательство. Первое соотношение проверяется непосредственными вычислениями (проверьте!). Для доказательства второго свойства предварительно докажем:

Лемма 1.1. Пусть $\phi : M \to N$ – гладкое отображение. Тогда
$X((\phi^*\omega)(Y_1, \ldots, Y_r)) = (\phi_* X)(\omega(\phi_* Y_1, \ldots, \phi_* Y_r)\circ\phi) = (\phi_* X)(\omega(\phi_* Y_1, \ldots, \phi_* Y_r))\circ\phi$, $X, Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Lambda(N)$. □ Проверим (6_2) в случае $r = 1$. Общий случай проверяется аналогично, но вычисления более громоздкие.
По теореме о вычислении внешнего дифференциала формы имеем $d(\phi^*\omega)(X, Y) = X(\phi^*\omega(Y)) - Y(\phi^*\omega(X)) - \phi^*\omega([X, Y]) = \phi_* X(\omega(\phi_* Y))\circ\phi - \phi_* Y(\omega(\phi_* X))\circ\phi - \omega(\phi_*[X, Y])\circ\phi = d\omega(\phi_* X, \phi_* Y)\circ\phi = \phi^*(d\omega)(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Замечание. Очевидно, аналогичным образом можно определить антиувлечение любых тензоров типа $(r, 0)$. При этом если $t_1 \in T^0_r(N)$, $t_2 \in T^0_s(N)$, то $\phi^*(t_1 \otimes t_2) = \phi^* t_1 \otimes \phi^* t_2$.

Если $\phi : M \to N$ – диффеоморфизм, то в силу ϕ-связанности векторных полей, для всякого векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ определено его увлечение $\phi_* X$. В силу (5), отображение $\phi_* : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$ является изоморфизмом алгебр Ли как $\mathbf{R}$-векторных пространств. Отображение $\phi_*^{-1} : \mathcal{X}(N) \to \mathcal{X}(M)$ обозначается ϕ^* и называется *антиувлечением векторных полей.* Аналогично, отображение $\phi_* = (\phi^*)^{-1} : \Lambda(M) \to \Lambda(N)$ называется *увлечением* дифференциальных форм. Наконец, отображение

$$\phi_* : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(N)$$

определенное формулой

$$\phi_*(t)(X_1,\ldots,X_r,u^1,\ldots,u^s)=t(\phi^*X_1,\ldots,\phi^*X_r,\phi^*u^1,\ldots,\phi^*u^s)\circ\phi^{-1}$$

называется *увлечением* тензорных полей, а отображение

$$\phi^*=(\phi_*)^{-1}:\mathcal{T}(N)\to\mathcal{T}(M)$$

определенное формулой

$$\phi^*(t)(X_1,\ldots,X_r,u^1,\ldots,u^s)=t(\phi_*X_1,\ldots,\phi_*X_r,\phi_*u^1,\ldots,\phi_*u^s)\circ\phi$$

называется *антиувлечением* тензорных полей при диффеоморфизме ϕ.

Задача 1.51. Докажите, что эти отображения являются изоморфизмами тензорных алгебр $\mathcal{T}(M)$ и $\mathcal{T}(N)$, а также алгебр Грассмана $\Lambda(M)$ и $\Lambda(N)$.

1.13 Подмногообразия гладкого многообразия

Теорема 1.11. Пусть $\phi:N\to M$ – гладкое отображение, $p\in N$. Отображение $(\phi_*)_p:T_p(N)\to T_{\phi(p)}(M)$ является изоморфизмом линейных пространств в том и только в том случае, когда $\exists U_p\subset N$ $\exists V_{\phi(p)}\subset M$ такие, что $\phi\,|_{U_p}:U_p\to V_{\phi(p)}$ – диффеоморфизм открытых подмногообразий.

Доказательство. Немедленно следует из классической теоремы о неявных функциях, если записать локальное координатное выражение отображения ϕ в соответствующих локальных картах. □

Определение 1.33. Гладкое отображение $\phi:N\to M$ называется *регулярным* в точке $p\in N$, если его дифференциал в этой точке невырожден. Отображение ϕ называется *регулярным*, если оно регулярно в каждой точке из N, то есть

$$\forall p\in N\Rightarrow ker(\phi_*)_p=\{0\}$$

Пара (N,ϕ) в этом случае называется *погруженным* в M *подмногообразием* в M. В этом случае $\phi(N)$ наследует из N структуру гладкого многообразия, топология которого, однако, может отличаться от топологии, индуцированной вложением $\phi(N)\subset M$.

Наконец, если (N,ϕ) – подмногообразие в M, причем отображение ϕ открыто (то есть образ каждого открытого в N подмножества открыт в индуцированной на $\phi(N)\subset M$ топологии), пара (N,ϕ) называется *вложенным в M подмногообразием*, а отображение ϕ называется *вложением*. В этом случае ϕ – гомеоморфизм на образ, снабженный индуцированной топологией, а значит, топология $\phi(N)$ как гладкого многообразия совпадает с топологией, индуцированной вложением $\phi(N)\subset M$.

1.14 Распределения и интегрируемость

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие.

Определение 1.34. *Распределением* на M называется подмодуль D модуля $\mathcal{X}(M)$. Распределение D называется *r-мерным*, если существует атлас на многообразии M, в каждой карте (U,φ) которого $D\,|_U=\{X\,|_U\,,X\in D\}$ есть свободный модуль с r образующими, являющимися векторными полями, линейно независимыми в каждой точке многообразия M. Если эти векторные поля определены на многообразии M глобально, распределение называется *параллелизуемым*. Многообразие M называется *параллелизуемым*, если параллелизуем модуль $\mathcal{X}(M)$.

Задание r-мерного распределения на многообразии M равносильно заданию семейства $\{D_p\subset T_p(M)|dimD_p=r\}_{p\in M}$ подпространств, такого что в каждой карте (U,φ) некоторого атласа существует система $(X_1,\ldots,X_r)\subset\mathcal{X}(U)$ гладких векторных полей на U, такая, что $D_p=\mathcal{L}((X_1)_p,\ldots,(X_r)_p)$, $p\in U$. Эти подпространства называются *интегральными элементами распределения*, карты указанного атласа называются *допустимыми картами* распределения D, а система $(X_1,\ldots,X_r)$ – *локальным базисом распределения* D.

Определение 1.35. Распределение D называется *инволютивным*, если D – подалгебра Ли алгебры Ли $\mathcal{X}(M)$, рассматриваемое как бесконечномерное $\mathbf{R}$-линейное пространство, то есть

$$\forall X,Y\in D\Rightarrow[X,Y]\in D$$

Определение 1.36. *Кораспределением* на M называется подмодуль $\mathbf{C}$ модуля $\mathcal{X}^*(M)$. Как и выше, определяются r-мерное кораспределение.

Каждое кораспределение $\mathbf{C}$ на многообразии M порождает идеал

$$\mathcal{T}(\mathbf{C}) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \omega_i \wedge \Omega_i | \omega_i \in \mathbf{C}, \Omega_i \in \Lambda(M) \right\} \subset \Lambda(M)$$

Определение 1.37. Идеал $\mathcal{T} \subset \Lambda(M)$ называется *дифференциальным идеалом*, если $d(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$.

Определение 1.38. Пусть D – распределение на M. Подмодуль

$$\mathbf{C}_D = \{\omega \in \Lambda_1(M) | \omega(X) = 0 \, \forall X \in D\}$$

называется *кораспределением, ассоциированным распределению* D.

Предложение 1.15. Если $dim D = r$, то $dim \mathbf{C}_D = n - r$.

Доказательство. Пусть $(X_1, \ldots, X_r)$ – локальный базис распределения D. Дополним его до базиса $(X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_n)$ модуля $\mathcal{X}(U)$, где (U, φ) – соответствующая локальная карта. Пусть $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ – дуальный базис. Пусть $\omega \in \mathcal{X}^*(U)$ – произвольная 1-форма. Тогда $\omega = a_i \omega^i$, где $a_i = \omega(X_i)$. Имеем $\omega \in \mathbf{C}_D \Leftrightarrow \omega(X) = 0 (X \in D) \Leftrightarrow a_k = \omega(X_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, r) \Leftrightarrow \omega = a_{r+1}\omega^{r+1} + \ldots + a_n \omega^n$. Поскольку формы $(\omega^{r+1}, \ldots, \omega^n)$ линейно независимы, отсюда следует, что они образуют локальный базис модуля $\mathbf{C}_D$. В частности, $dim \mathbf{C}_D = n - r$. □

Определение 1.39. Локальный базис ассоциированного кораспределения называется *системой Пфаффа* r-мерного распределения.

Определение 1.40. *Аннулятором* распределения D называется множество

$$Ann D = \{\Omega \in \Lambda(M) | \Omega(X_1, \ldots, X_N) = 0; X_1, \ldots, X_N \in D\}$$

Теорема 1.12. $Ann D = \mathcal{T}(\mathbf{C}_D)$.

Доказательство. Пусть $\Omega \in \mathcal{T}(\mathbf{C}_D)$ – форма степени s. Тогда Ω – конечная сумма форм вида $\omega \wedge \Theta$, где $\omega \in \mathbf{C}_D$, а каждая такая форма обращается в нуль на любом наборе аргументов из D. Следовательно, $\Omega \in Ann D$, то есть $\mathcal{T}(\mathbf{C}_D) \subset Ann D$.

Обратно, пусть $\Omega \in Ann D$ – s-форма. Пусть $(\omega^1, \ldots, \omega^{n-r})$ – система Пфаффа распределения D. Дополним ее до базиса модуля $\Lambda_1(U)$ формами $(\theta^1, \ldots, \theta^r)$. Пусть $(X_1, \ldots, X_n)$ – дуальный базис, причем обозначения выбраны так, что $(X_1, \ldots, X_r)$ – локальный базис распределения D. Имеем, далее,

$$\Omega \mid_U = \Omega_{i_1 \ldots i_s} \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_s} + \Theta_{i_1 \ldots i_s} \omega^{i_1} \wedge \zeta^{i_2} \wedge \ldots \wedge \zeta^{i_s}$$

где $\zeta^{i_2}, \ldots, \zeta^{i_s}$ – элементы построенного базиса. Таким образом,

$$\Omega \mid_U = \Omega_{i_1 \ldots i_s} \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_s} + \Theta \mid_U, \; \Theta \in \mathcal{T}(\mathbf{C}_D)$$

и поскольку $\mathcal{T}(\mathcal{C}_D) \subset Ann D$, то $\Omega_{i_1 \ldots i_s} \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_s} \in Ann D \mid_U$. Следовательно, $\Omega_{i_1 \ldots i_s} = \Omega(X_{i_1}, \ldots, X_{i_s}) = 0$ по всем наборам индексов, пробегающих значения от 1 до r, и, значит, $\Omega = \Theta \in \mathcal{T}(\mathbf{C}_D)$, то есть $Ann D \subset \mathcal{T}(\mathbf{C}_D)$, откуда следует, что $Ann D = \mathcal{T}(\mathbf{C}_D)$. □

Теорема 1.13. Распределение D инволютивно тогда и только тогда, когда идеал, порожденный ассоциированным кораспределением $\mathbf{C}_D$, является дифференциальным идеалом.

Доказательство. Пусть D – инволютивное распределение на M. Чтобы доказать, что $\mathcal{T}(\mathbf{C}_D)$ является дифференциальным идеалом, в силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что $d(\mathbf{C}_D) \subset Ann D$. Если $\omega \in \mathbf{C}_D$, то $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = 0$ для $X, Y \in D$, то есть $d(\mathbf{C}_D) \subset Ann D$.

Обратно, пусть выполнено соотношение $d(\mathbf{C}_D) \subset Ann D$ и $X, Y \in D$, $\omega \in \mathbf{C}_D$. Тогда $0 = d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$, следовательно, $\omega([X, Y]) = 0$ $(X, Y \in D)$. В частности, это соотношение верно для форм Пфаффа распределения D, то есть $[X, Y]^k = \omega^k([X, Y]) = 0$, $k = r + 1, \ldots, n$, то есть векторное поле $[X, Y]$ локально раскладывается по локальному базису $(X_1, \ldots, X_r)$ распределения D, то есть $[X, Y] \in D$, если $X, Y \in D$, то есть D – инволютивное распределение. □

Следствие. Пусть $\{\omega^\alpha\}$ – система Пфаффа распределения D. Тогда D инволютивно в том и только том случае, когда

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta; \; \omega^\alpha_\beta \subset \Lambda_1(U) \tag{7}$$

где $U \subset M$ – область определения системы Пфаффа. □
Уравнения (7) иногда называют *структурными уравнениями распределения* D.

Определение 1.41. Пусть D – r-мерное распределение на многообразии M. Подмногообразие $N \subset M$ называется *интегральным многообразием* распределения D, если $\mathcal{X}(N) \subset D|_N$, и называется интегральным *многообразием максимальной размерности*, если $\mathcal{X}(N) = D|_N$. Распределение называется *вполне интегрируемым*, если через каждую точку многообразия M проходит интегральное многообразие максимальной размерности.

В заключение приведем две важные теоремы без доказательства.

Теорема 1.14. (Фробениуса)
Распределение на гладком многообразии вполне интегрируема тогда и только тогда, когда оно инволютивно.

Теорема 1.15. Пусть $f : N \to M$ – гладкое отображение, такое, что $f(N) \subset \varphi(P)$, где (P, φ) – интегральное многообразие максимальной размерности инволютивного распределения на многообразии M. Тогда отображение f, рассматриваемое как отображение из N в P, то есть отображение $\varphi^{-1} \circ f : N \to P$, является гладким отображением. Иначе говоря, естественно определено отображение $\tilde{f} : N \to P$, такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ f\downarrow & & \downarrow\varphi \\ M & = & M \end{array}$$

коммутативна.

1.15 Локальные потоки на многообразии

Простейшими примерами распределений на многообразии служат одномерные распределения. Пусть D^1 – одномерное распределение на гладком многообразии M.

Предложение 1.16. Одномерное распределение всегда инволютивно и, следовательно, в силу теоремы Фробениуса всегда вполне интегрируемо.

Доказательство. Пусть $X, Y \in D^1$. Фиксируем точку $p \in M$. Пусть e – локальный базис модуля D^1 в некоторой окрестности U точки p. Тогда $X|_U = fe$, $Y|_U = ge$, $f, g \in C^\infty(U)$. Следовательно, $[X,Y]|_U = [X|_U, Y|_U] = (f \cdot e(g) - g \cdot e(f))\, e \in D|_U$. В частности, $[X,Y]_p \in D^1_p$, $(p \in M)$, а значит, $[X,Y] \in D^1$. □

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $X \in \mathcal{X}(M)$. Пусть (U, φ) – локальная карта на M с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки $p \in M$. Пусть в этой карте $\varphi(p) = (x^1_0, \ldots, x^n_0)$, $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Определение 1.42. Точка $p \in M$ называется *особой точкой* или *особенностью* векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$, если $X_p = 0$.

Очевидно, совокупность всех особых точек векторного поля X является замкнутым множеством, а следовательно, его дополнение M_0 – открытым подмногообразием многообразия M, которое мы назовем *неособым подмногообразием*. Векторное поле однозначно определяет на многообразии M_0 одномерное распределение $D^1 = \{fX \,|\, f \in C^\infty(M)\}$. По доказанному, это распределение инволютивно. Вполне интегрируемость этого распределения вытекает из классической теоремы существования и единственности решения задачи Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1, \ldots, x^n); \\ x^i(0) = x^i_0;\ i = 1, \ldots, n \end{array} \right. \tag{8}$$

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Теорема 1.16. Задание векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ на гладком многообразии M равносильно заданию гладкого отображения

$$\Phi_X : M \times (-t(p), t(p)) \to M;\ (-t(p), t(p)) \subset \mathbf{R}; p \in M$$

однозначно определяемого свойствами

$$1)\ \Phi_X(p, 0) = p; \quad 2)\ \frac{d}{dt}\Phi_X(p,t) = X_{\Phi_X(p,t)} \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $x(t) = \{x^1(t), \dots, x^n(t)\} \equiv x^i\varepsilon_i$ – решение задачи Коши (8). Здесь $\{\varepsilon_i\}$ – канонический базис пространства $\mathbf{R}^n$. С другой стороны, пусть (V, ψ) – другая карта на многообразии M с координатами $\{\tilde{x}^1(t), \dots, \tilde{x}^n(t)\}$, в которой $\psi(p) = \{\tilde{x}_0^1(t), \dots, \tilde{x}_0^n(t)\}$, $X\mid_V = \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$. Соответствующая задача Коши в этой карте имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}^i}{dt} = \tilde{X}^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n); \\ \tilde{x}^i(0) = \tilde{x}_0^i;\ i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $\tilde{x}(t) = \tilde{x}^i\varepsilon_i$ – решение этой задачи Коши. С другой стороны, рассмотрим вектор-функцию $y(t) = \psi \circ \varphi^{-1}(x(t))$. По правилу дифференцирования сложной фукции имеем $\frac{dy^i(t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\Big|_{x(t)} \frac{dx^j(t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\Big|_{x(t)} X^j(\varphi^{-1} \circ x(t)) = \tilde{X}^i(\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1}(x(t))) = \tilde{X}^i(\psi^{-1}y(t))$

При этом $y(0) = \psi \circ \phi^{-1}x(0)) = \psi(p) = \tilde{x}(0)$. Таким образом, вектор-функции $\tilde{x}(t)$ и $y(t)$ являются решениями одной и той же задачи Коши. В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши эти решения совпадают (в некоторой окрестности начальной точки), значит, $\tilde{x}(t) = \psi \circ \phi^{-1}x(t)$ для достаточно малых $t \in \mathbf{R}$. Следовательно, выражение $\Phi_X(p,t) = \phi^{-1}(x(t))$ при достаточно малых t не зависит от выбора локальной карты. Оно задает отображение $\Phi_X : M \times (-t(p), t(p)) \to M$, где интервал $(-t(p), t(p))$ входит в область определения решения задачи Коши. В силу теоремы о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных условий вектор-функция $x(t)$ гладко зависит от переменных $(x_0^1, \dots, x_0^n)$, а значит, отображение Φ_X гладко зависит от всех аргументов, то есть является гладким. Докажем, что оно удовлетворяет соотношениям, указанным в теореме. Во-первых, $\Phi_X(p,0) = \phi^{-1}x(0) = p$. Во-вторых, $\frac{d}{dt}\mid_{t=\tau} \Phi_X(p,t) = \frac{d}{dt}\mid_{t=\tau} \phi^{-1}x(t) = \phi_*^{-1}\frac{d}{dt}\mid_{t=\tau} x(t) = \phi_*^{-1}\frac{d}{dt}\mid_{t=\tau} (x^i(t)\varepsilon_i) =$
$= \phi_*^{-1}(X^i(x(t))\varepsilon_i) = r_\varphi^{-1}(X^i(x(t))\varepsilon_i) = X_{\Phi_X(p,\tau)}$. Очевидно, что задача Коши (8) является координатным выражением соотношения (9), и поскольку задача Коши однозначно определяет вектор-функцию $x(t)$, соотношения (9) однозначно определяют отображение Φ_X. Более того, из (9) следует, что

$$\frac{d}{dt}\mid_{t=0} \Phi_X(p,t) = \Phi_X(p,0) = X_p,\ (p \in M)$$

и, таким образом, векторное поле X однозначно определяется по отображению Φ_X. $\square$

Определение 1.43. Отображение $\Phi_X : M \times (-t(p), t(p)) \to M$, построенное выше называется *локальным потоком*, порожденным векторным полем X.

Пусть Φ_X – локальный поток на многообразии M. Фиксируя точку $p \in M$, получим гладкое отображение (гладкую кривую) $\alpha(t) : (-t(p), t(p)) \to M$, определенную формулой $\alpha(t) = \Phi_X(p,t)$. Из доказанной теоремы немедленно следует, что эта кривая однозначно определяется условиями

$$1)\ \alpha(0) = p;\quad 2)\ \frac{d\alpha(t)}{dt} = X_{\alpha(t)} \tag{11}$$

В частности, на неособом подмногообразии M_0 отображение α является регулярным, а пара $((-t(p), t(p)), \alpha)$ – интегральным многообразием распределения D^1, проходящим через точку p. Таким образом, через каждую точку многообразия M_0 проходит интегральное многообразие максимальной размерности распределения D^1, проходящее через точку p, то есть сужение этого распределения на M_0 вполне интегрируемо.

Определение 1.44. Построенная кривая $\alpha(t) = \Phi_X(p,t)$ называется *траекторией* или *интегральной кривой* векторного поля X (или потока Φ_X) с началом в точке p. Траектория называется максимальной, если она является объединением всех траекторий поля X, проходящих через точку p.

Предложение 1.17. Во введенных обозначениях

$$\begin{gathered} 1)\ \Phi_X(\Phi_X(p,t_1), t_2) = \Phi_X(p, t_1 + t_2); \\ 2)\ \Phi_{cX}(p,t) = \Phi_X(p, ct) \end{gathered}$$

для всех $t_1, t_2, t, c \in \mathbf{R}$, для которых имеют смысл обе части тождества.

Доказательство. 1. Зафиксируем t_1 и положим $t_2 = t$. Введем обозначения $\alpha(t) = \Phi_X(\Phi_X(p,t_1), t)$, $\beta(t) = \Phi_X(p, t_1 + t)$. Докажем, что эти функции являются решениями одной и той же задачи Коши, записанной в виде (11). Действительно, $\alpha(0) = \Phi_X(\Phi_X(p,t_1), 0) = \Phi_X(p,t_1)$, $\beta(0) = \Phi_X(p,t_1)$, то есть $\alpha(0) = \beta(0)$. Далее, в силу (9) $\frac{d\alpha(t)}{dt} = X_{\Phi_X(\Phi_X(p,t_1),t)} = X_\alpha$, где $\alpha(t)$ – траектория с началом в точке $\Phi_X(p,t_1)$ векторного поля X. Обозначим $t + t_1 = \tau$. Тогда $\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{d\beta(\tau(t))}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau}\Phi_X(p,\tau) =$

$X_{\Phi_X(p,\tau)} = X_{\Phi_X(p,t_1+t)} = X_{\beta(t)}$, то есть $\beta(t)$ – траектория того же векторного поля с тем же началом. В силу доказанной выше теоремы обе траектории совпадают в общей области определения, то есть $\alpha(t) \equiv \beta(t)$.

2. Введем обозначения $\alpha(t) = \Phi_X(p, ct)$, $\beta(t) = \Phi_{cX}(p,t)$. Имеем, как и выше, $\alpha(0) = p$, $\beta(0) = p$ (докажите). Кроме того, обозначив $ct = \tau$, получим $\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{d\alpha(\tau(t))}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = c\frac{d\alpha(\tau(t))}{d\tau} = c\frac{d}{d\tau}\Phi_X(p,\tau) = cX_{\Phi_X(p,ct)}$; $\frac{d\beta(t)}{dt} = cX_{\beta(t)}$. Значит, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – траектории одного и того же векторного поля cX с одинаковым началом, следовательно, $\alpha(t) \equiv \beta(t)$ в общей области определения. □

Предложение 1.18. Пусть $X \in \mathcal{X}(M)$, $\varphi : M \to M$ – диффеоморфизм. Тогда

$$\Phi_{\varphi_* X}(p,t) = \varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, t)$$

Доказательство. Введем обозначения $\alpha(t) = \Phi_{\varphi_* X}(p,t)$, $\beta(t) = \varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, t)$. Имеем $\alpha(0) = p$, $\beta(0) = \varphi \circ \varphi^{-1}(p) = p$, то есть $\alpha(0) = \beta(0)$. Кроме того, $\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{d}{dt}\Phi_{\varphi_* X}(p,t) = (\varphi_* X)_{\Phi_{\varphi_* X}(p,t)} = (\varphi_* X)_{\alpha(t)}$; $\frac{d}{dt}\beta(t) = \varphi_*\left(\frac{d}{dt}\Phi_X(\varphi^{-1}p,t)\right) = \varphi_*(X_{\Phi_X(\varphi^{-1}p,t)}) = (\varphi_* X)_{\varphi\circ\Phi_X(\varphi^{-1}p,t)} = (\varphi_* X)_{\beta(t)}$. Таким образом, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – траектории одного и того же векторного поля $\varphi_* X$ с одинаковым началом, а значит, они совпадают в общей области определения. □

Пусть Φ_X – локальный поток на многообразии M. Фиксируя число $t_0 \in \mathbf{R}$, получим отображение $F_{t_0} : M_{t_0} \to M$, определенное на множестве

$$M_{t_0} = \{p \in M : |t(p)| > |t_0|\} \tag{12}$$

формулой $F_{t_0}(p) = \Phi_X(p, t_0)$. Заметим, что $M_{t_0} \subset M$ – открытое подмногообразие. В самом деле, из теоремы о непрерывной зависимости решений задачи Коши от начальных условий следует, что для любой точки $p \in M_{t_0}$ существует окрестность U_p и существует положительно число $\varepsilon(p)$ такое, что решение задачи Коши (8) с начальными данными из $\varphi(U_p)$ определено по крайней мере в интервале $(-\varepsilon(p), \varepsilon(p))$, содержащим интервал $(-t_0, t_0)$, а значит, $U_p \subset M_{t_0}$. Отсюда следует, что M_{t_0} – открытое подмножество в M. Отображение F_{t_0} гладко в силу гладкости потока Φ_X. Кроме того, из свойств локального потока имеем

$$1)\ F_0 = id; \quad 2)\ F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2}$$

причем последнее равенство справедливо при всех вещественных t_1, t_2, для которых имеют смысл обе части равенства. Из этого, в частности, следует, что для любого отображения F_{t_0} существует обратное $F_{t_0}^{-1} = F_{-t_0}$, значит, отображение F_{t_0} является диффеоморфизмом открытого подмногообразия M_{t_0}.

Определение 1.45. Семейство $\{F_t\}$, $t \in \mathbf{R}$ диффеоморфизмов открытых подмногообразий M_t, $t \in \mathbf{R}$, называется *локальной однопараметрической группой диффеоморфизмов* многообразия M.

Заметим, что из (12) следует, что

$$|t_1| < |t_2| \Rightarrow M_{t_2} \subset M_{t_1} \tag{13}$$

Особый интерес представляет случай, когда существует число t_0 такое, что $M_{t_0} = M$. В этом случае отображение Φ_X определено по меньшей мере в области $W = M \times (-t_0, t_0)$, причем из (13) следует, что для любого $t \in (-t_0, t_0)$ отображение $F_t : M \to M$ – диффеоморфизм. Более того, в этом случае, используя предложение 1.15 можно доказать, что отображение Φ_X определено на всем многообразии $M \times \mathbf{R}$.

Заметим, что утверждение о том, что отображение Φ_X определено на всем многообразии $M \times \mathbf{R}$ равносильно утверждению о том, что все максимальные траектории потока Φ_X определены на всей числовой оси, а также утверждению о том, что по крайней мере одно из отображений $F_t (t \neq 0)$, (а значит, и все отображения $\{F_t\}_{t\in\mathbf{R}}$) являются диффеоморфизмами многообразия M. В связи с этим введем определение

Определение 1.46. Векторное поле на гладком многообразии M называется *полным*, если любая его максимальная траектория определена на всей числовой оси. В этом случае локальный поток и локальная группа диффеоморфизмов многообразия, порожденные этим полем, называются *глобальным потоком и глобальной группой диффеоморфизмов* соответственно.

Заметим, что на одном и том же многообразии могут существовать как полные, так и не полные векторные поля. Однако существует простое топологическое условие, гарантирующее полноту любого векторного поля на данном многообразии.

Теорема 1.17. Всякое векторное поле X на компактном многообразии M полно.

Доказательство. Как мы уже отметили выше, из теоремы о непрерывной зависимости решений задачи Коши от начальных условий следует, что для любой точки $p \in M_{t_0}$ существует окрестность U_p и существует положительно число $\varepsilon(p)$ такое, что решение задачи Коши (8) с начальными данными из $\varphi(U_p)$ определено по крайней мере в интервале $(-\varepsilon(p), \varepsilon(p))$. Рассмотрим открытое покрытие многообразия M такими окрестностями U_p, $p \in M$. В силу компактности многообразия, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{U_1, \ldots, U_N\}$. Пусть $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ – константы, отвечающие соответственным элементам этого покрытия. Обозначим $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Отображение Φ_X определено на каждой из областей $U_k \times (-\varepsilon, \varepsilon)$; $k = 1, \ldots, N$, а значит, и на их объединении, то есть на $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. По отмеченному выше отображение Φ_X определено на всем многообразии $M \times \mathbf{R}$. Следовательно, поток Φ_X глобальный, а соответствующее ему поле X – полное. □

В заключение отметим, что траектории потока на неособом подмногообразии, будучи регулярными отображениями, являются, вообще говоря, погруженными подмногообразиями. Однако, будучи интегральными многообразиями одномерного распределения, они не могут самопересекаться, а могут лишь замыкаться. Более того, справедливо

Предложение 1.19. Максимальные траектории глобального потока, не являющиеся подмногообразиями, являются периодическими кривыми.

Доказательство. Пусть $\alpha(t)$ – максимальная траектория потока Φ_X на многообразии M с началом в точке p. Эта траектория не является подмногообразием тогда и только тогда, когда отображение α не является инъективным, а значит, существуют вещественные числа $t_0, T \in \mathbf{R}$ такие, что $\alpha(t_0) = \alpha(t_0 + T)$. Но тогда в силу свойств локальных потоков имеем $\alpha(t + T) = \Phi_X(p, t + T) = \Phi_X(p, t_0 + T + t - t_0) = \Phi_X(\Phi_X(p, t_0 + T), t - t_0) = \Phi_X(\alpha(t_0), t - t_0) = \Phi(p, t_0 + t - t_0) = \alpha(t)$. Следовательно, $\alpha(t)$ – периодическая кривая с периодом T. □

1.16 Дифференцирование Ли

Основная трудность построения инвариантного дифференциального исчисления на многообразиях заключается в невозможности внутренним образом отождествить касательные пространства к многообразию в различных его точках, а следовательно, внутренним образом определить параллельный перенос геометрических объектов из одной точки многообразия в другую. Эту трудность можно обойти, фиксируя на многообразии некоторые дополнительные структуры. Простейшую возможность такого рода дает фиксация на многообразии векторного поля, а значит, и соответствующей ему локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов многообразия.

Определение 1.47. Пусть M – гладкое многообразие, X – векторное поле на M, $\{F_t\}$ – соответствующая ему локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия, T – тензорное поле типа (r, s) на M. *Производной Ли* тензорного поля T в направлении векторного поля X называется тензорное поле $\mathcal{L}_X T$ на M, в каждой точке $p \in M$ определяемое формулой

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((F_{-t})_* T_{F_t(p)} - T_p \right) \tag{14}$$

Оператор $\mathcal{L}_X : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$, сопоставляющий тензорному полю $T \in \mathcal{T}(M)$ тензорное поле $\mathcal{L}_X T$, называется *оператором дифференцирования Ли в направлении векторного поля* X.

Заметим, что тождество (14) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((F_{-t})_* T - T \right) \tag{15}$$

Или, заменяя t на $-t$ в виде

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(T - (F_t)_* T \right) \tag{16}$$

Предложение 1.20. Оператор дифференцирования Ли является дифференцированием тензорной алгебры многообразия, сохраняющим тип тензоров и перестановочным со свертками.

Доказательство. То, что оператор $\mathcal{L}_X T$ сохраняет тип тензоров непосредственно следует из его определения. То, что этот оператор перестановочен с операторами свертки, то есть $C^{(i)}_{(j)} \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ C^{(i)}_{(j)}$ легко следует из соотношения равносильного определению с учетом того, что оператор свертки перестановочен с оператором увлечения и взятия предела.

Пусть T_1, T_2 – тензорные поля на многообразии M. Поскольку $(F_t)_*$ – изоморфизм тензорной алгебры многообразия, имеем

$$(F_t)_*(T_1 \otimes T_2) = (F_t)_*(T_1) \otimes (F_t)_*(T_2)$$

Используя это тождество с учетом (16) получим $\mathcal{L}_X(T_1 \otimes T_2) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_1 \otimes T_2 - (F_t)_*(T_1 \otimes T_2)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_1 \otimes T_2 - (F_t)_*(T_1) \otimes T_2 + (F_t)_*(T_1) \otimes T_2 - (F_t)_*(T_1) \otimes (F_t)_*(T_2)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((T_1 - (F_t)_*T_1) \otimes T_2) + \lim_{t\to 0}((F_t)_*(T_1) \otimes (T_2 - (F_t)_*(T_2)) = \mathcal{L}_X(T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes \mathcal{L}_X(T_2)$. Следовательно, $\mathcal{L}_X$ – дифференцирование тензорной алгебры многообразия. □

Лемма 1.2. Пусть M – гладкое многообразие, $X \in \mathcal{X}(M)$, $\{F_t\}$ – соответствующая локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M. Тогда для любой гладкой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем

$$X(f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f \circ F_t - f)$$

Доказательство. Пусть $p \in M$, (U, φ) – локальная карта на M с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки p. Имеем

$$X_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p\, X_p^i$$

и в силу теоремы о дифференцировании сложной функции, $X_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \frac{dx^i}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, f \circ \Phi_X(p,t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, f \circ F_t(p) = \lim_{t\to 0}(f \circ F_t(p) - f \circ F_0(p)) = \lim_{t\to 0}(f \circ F_t(p) - f(p))$ для любой $p \in M$. □

Предложение 1.21. В тех же обозначениях $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$.

Доказательство. В силу (15) имеем $\mathcal{L}_X(f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((F_{-t})_* f - f) = \lim_{t\to 0}((F_t^{-1})_* f - f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(F_t^* f - f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f \circ F_t - f) = X(f)$. □

Предложение 1.22. Пусть f – вещественная функция на числовой оси, определенная и гладкая в некоторой окрестности U нуля, причем $f(0) = 0$. Тогда функция $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, доопределенная в нуле по непрерывности, будет гладкой в той же окрестности нуля, причем $f'(0) = g(0)$.

Доказательство. Фиксируя $t \neq 0$, будем исходить из очевидного равенства $f(t) = \int_0^t f'(u)du$. Разделим обе части этого равенства на t:

$$\frac{f(t)}{t} = \int_0^t f'(u) d\left(\frac{u}{t}\right)$$

Обозначим $\frac{u}{t} = s$. Тогда $u = t \cdot s$, а значит, $\frac{f(t)}{t} = \int_0^1 f'(t \cdot s)ds$. Правая часть этого равенства гладко зависит от t по теореме о дифференцировании определенного интеграла по параметру. Следовательно, гладко зависит от t и его левая часть, причем ее значение в нуле находится по непрерывности. При этом $f'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to 0} g(t) = g(0)$. □

Лемма 1.3. Пусть вещественная функция $f(t,p)$ определена и гладка в некоторой области $U \times M$, где U – некоторая окрестность нуля на вещественной прямой, M – гладкое многообразие, причем $f(0,p) = 0$, $p \in M$. Тогда функция $g(t) = \frac{1}{t} f(t,p)$, доопределенная при $t = 0$ по непрерывности, будет гладкой в той же области, причем

$$\frac{\partial f(t,p)}{\partial t}|_{t\to 0} = g(0,p),\ p \in M$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей леммы, с учетом теоремы о дифференцировании определенного интеграла по параметрам, в число которых теперь входят и координаты точки p в какой-либо локальной карте. □

Лемма 1.4. Пусть M – гладкое многообразие, $X \in \mathcal{X}(M)$, $\{F_t\}$ – соответствующая локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M. Тогда для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ существует функция $g_t(p) = g(t,p)$, определенная и гладкая в области определения потока Φ_X, такая, что $f \circ F_t = f + t g_t$, причем $g_0 = X(f)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\bar{f}(t,p) = f \circ F_t(p) - f(p)$. Согласно доказанному, функция $g(t,p) = \frac{1}{t}\bar{f}(t,p)$ гладкая в указанной области, причем $g(0,p) = \frac{\partial \bar{f}(t,p)}{\partial t}|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f \circ F_t(p) - f(p)) = X_p(f)$. □

Предложение 1.23. Пусть M – гладкое многообразие. Тогда

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y];\ X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

Доказательство. Пусть $\{F_t\}$ – локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M, порожденная полем X. Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем $((F_t)_* Y)_p(f) = Y_{F_t^{-1}(p)}(f \circ F_t) = Y_{F_t^{-1}(p)}(f \circ F_t) = Y(f)(F_t^{-1}) + tY(g_t)(F_t^{-1}))$. Тогда получим
$(\mathcal{L}_X Y)_p(f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(Y - (F_t)_*)_p(f) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((Y(f)(p) - (Yf)(F_t^{-1}(p))\right) - \lim_{t\to 0} Y(g_t)(F_t^{-1}(p)) \overset{t\to -t}{=}$
$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(Y(f)(F_t(p)) - (Yf)(p)\right) - Y_p(g_0) = X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X,Y]_p$. В силу произвола в выборе точки $p \in M$ и $f \in C^\infty(M)$ получим $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$. $\square$

Теорема 1.18. Оператор дифференцирования Ли на гладком многообразии M в направлении векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ однозначно определяется следующими свойствами:
(1) $\mathcal{L}_X Y = X(f)$, $f \in C^\infty(M)$;
(2) $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$, $Y \in \mathcal{X}(M)$;
(3) оператор $\mathcal{L}_X$ является дифференцированием тензорной алгебры $\mathcal{T}(M)$, сохраняющим тип тензоров и перестановочным с операторами свертки.

Доказательство. 1. Докажем вначале, что перечисленные свойства оператора дифференцирования Ли однозначно определяют его значение на любом ковекторном поле. Зафиксируем $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $u \in \mathcal{X}^*(M)$. Рассмотрим тензор $u \otimes Y$. Это тензор типа (1,1), то есть $(u \otimes Y)^i_j = u_j Y^i$. Следовательно,

$$u(Y) = u_i Y^i = C^{(1)}_{(1)}(u \otimes Y)^i_j$$

Применяя к обеим частям этого тождества оператор $\mathcal{L}_X$, получим $X(u(Y)) = \mathcal{L}_X(C^{(1)}_{(1)}(u \otimes Y)) = C^{(1)}_{(1)}(\mathcal{L}_X(u) \otimes Y + u \otimes \mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_X(u)(Y) + u([X,Y])$, то есть

$$\mathcal{L}_X(u)(Y) = X(u(Y)) - u([X,Y])$$

2. Пусть теперь t – произвольный тензор типа (r,s) на многообразии M. Фиксируем $X_1, \ldots, X_r \in \mathcal{X}(M)$, $u^1, \ldots, u^s \in \mathcal{X}^*(M)$. Рассмотрим тензор

$$T = t \otimes X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \otimes u^1 \otimes \ldots \otimes u^s)$$

Очевидно, T – тензор типа (r+s,r+s), причем

$$T^{j_1 \ldots j_{r+s}}_{i_1 \ldots i_{r+s}} = t^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} X_1^{j_{s+1}} \ldots X_r^{j_{s+r}} u^1_{i_{r+1}} \ldots u^s_{i_{r+s}}$$

значит,

$$C^{(s+1)}_{(1)} \ldots C^{(s+r)}_{(r)} C^{(1)}_{(r+1)} \ldots C^{(s)}_{(r+s)} T = t(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s)$$

Применяя к обеим частям этого тождества оператор $\mathcal{L}_X$, аналогично первому случаю получим
$X(t(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s)) = \mathcal{L}_X(t)((X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s) + \sum_{k=1}^r t(X_1, \ldots, X_{k-1}, [X, X_k], X_{k+1}, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s) + \sum_{k=1}^s t(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^{k-1}, \mathcal{L}_X(u^k), u^{k+1}, \ldots, u^s)$. Откуда получаем выражение для $\mathcal{L}_X(t)$. $\square$

Замечание. Выражение $\mathcal{L}_X(t)((X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s)$, будучи линейным по аргументам $X_1, \ldots, u^s$, не будет таковым по аргументу X.