1 Однородные пространсва

1.1 Действие групп на многообразиях

Пусть M – произвольное множество. С ним связана некоторая группа, а именно, группа G_M преобразований этого множества.

Определение 1.1. Пусть G – некоторая группа. Говорят, что G действует на множестве M *слева* (соответственно, *справа*) если задан гомоморфизм (соответственно антигомоморфизм) $\varphi : G \to G_M$, то есть такое отображение φ, что $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ (соответственно, $\varphi(ab) = \varphi(b) \circ \varphi(a)$).

Если обозначить $\varphi(a) = \varphi_a$ – образ элемента $a \in G$ при отображении φ, то $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$ (для левого действия) и $\varphi_{gh} = \varphi_h \circ \varphi_g$ (для правого действия).

Предложение 1.1. Задание гомоморфизма φ равносильно заданию отображения $\Phi : G \times M \to M$, обладающего свойствами:
1) $\Phi(e, m) = m$;
2) $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(gh, m)$; (соответственно, для правого действия $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(hg, m)$);

Доказательство. Пусть $\Phi(g, m) = \varphi_g(m)$, $g \in G$, $m \in M$.
1) Докажем, что отображение Φ обладает требуемыми свойствами. Во-первых, $\Phi(e, m) = \varphi_e(m)$. По свойству гомоморфизма $\varphi_e = id$, а значит, $\Phi(e, m) = m$ и первое свойство доказано. Во-вторых, проведем доказательство второго свойства для левого действия (правое аналогично). Имеем $\Phi(g, \Phi(h, m) = \varphi_g \circ \varphi_h(m) = \varphi_{gh}(m) = \Phi(gh, m)$.
2) Обратно, пусть дано Φ, обладающее указанными свойствами. Построим отображение φ по той же самой формуле, но прочитанной справа налево. Докажем, что отображение φ является гомоморфизмом. Действительно, $\varphi_{gh}(m) = \Phi(gh, m) = \Phi(g, \Phi(h, m)) = \varphi_g \circ \varphi_h(m)$. □

Определение 1.2. Отображение Φ называется *действием*, а гомоморфизм φ – *представлением* группы G на множестве M. Если φ – мономорфизм (соотв. антимономорфизм), то представление называется *точным*, а соответствующее действие *эффективным*. Говорят, что представление φ и действие Φ *ассоциированы* друг другу.

Пример 1. Пусть $G = \{z \in \mathbf{C} || z| = 1\}$. Это группа относительно операции умножения комплексных чисел. Множество G можно изобразить как окружность с центром в некоторой фиксированной точке O некоторой плоскости σ, которую принять за начало координат. Рассмотрим множество поворотов плоскости σ с центрами в упомянутой фиксированной точке O на всевозможные углы, то есть множество $G_\sigma = \{R_O^\alpha | \forall\alpha\}$. Построим отображение $\varphi : G \to G_\sigma$ по закону $z \to arg\, z$ (отметим, что $0 \leq arg\, z < 2\pi$). Тогда если $z_1 = e^{i\psi_1}$, $z_2 = e^{i\psi_2}$, то $\varphi(z_1 z_2) = \varphi(e^{\psi_1+\psi_2}) = R_O^{\psi_1+\psi_2} = R_O^{\psi_1} \circ R_O^{\psi_2} \equiv R_O^{\psi_2} \circ R_O^{\psi_1}$. Таким образом, отображение φ является левым (и в тоже время правым) действием группы $G = S^1$ на множестве точек плоскости σ.

Проверим, будет ли это действие эффективным. Нам нужно проверить, будет ли гомоморфизм φ мономорфизмом. Пусть элемент $z = e^{i\psi} \in Ker\varphi$, то есть $\varphi(z) = id \equiv R_O^0$. Тогда $\psi = 0$ и $z = 1$. Таким образом, отображение φ является мономорфизмом и действие группы G является эффективным. □

Замечание. В случае эффективного действия элемент $g \in G$ можно отождествлять с его образом φ_g. Тогда можно записать, что $gh(m) = g(h(m))$ для левого действия и $gh(m) = h(g(m))$ для правого действия. Здесь $g, h \in G$, $m \in M$. Отметим, что для правого действия удобнее обозначать $\varphi_g(m) = mg$. Тогда $m(gh) = (mg)h$. Чем и обусловлено название "правое действие".

Замечание. Если действие группы G на множестве M не является эффективным, то его можно редуцировато к эффективному действию группы $G^* = G/Ker\varphi$ на M по формуле

$$(gH)m = \varphi_g(m)$$

где $H = Ker\varphi$.

Задача 1.1. Докажите, что определение корректно в смысле независимости от выбора элемента класса gH. Докажите, что это будет эффективное действие на множестве M.

Задача 1.2. Приведите пример группы не эффективно действующей на множестве M и постройте группу G^*, которая уже эффективно действует на M.

Определение 1.3. Говорят, что группа G действует на множестве M *транзитивно*, если для любых элементов $x, y \in M$ существует $g \in G$, такой что $\varphi_g(x) = y$.

Задача 1.3. Будет ли действие примера 1 транзитивным? (Ответ: нет)

Определение 1.4. Говорят, что группа G действует на множестве M *свободно*, если для элемента $g \in G$ существует такой элемент $m \in M$, что $\varphi_g m = m$, влечет $g = e$.

Предложение 1.2. Любое свободное действие эффективно. Обратное, вообще говоря, не верно.

Доказательство. Определение эффективного действия мы можем сформулировать в другом виде: действие называется эффективным, если для элемента $g \in G$ и любого элемента $m \in M$ $\varphi_g m = m$, влечет $g = e$. После чего первое утверждение становится очевидным.

Действие из примера 1 является эффективным, но не свободным, так как существует точка O, которую оставляетс на месте не только тождественное преобразование. □

Пусть группа G действует на множестве M. Тогда любая точка $m \in M$ порождает отображение $\sigma_m : G \to M$ сопоставляющее любому элементу $g \in G$ точку $\sigma_m(g) = \varphi_g(m)$. Образ отображения σ_m называется *орбитой* точки m относительно действия группы G и обозначается $Orb(m)$.

Задача 1.4. Докажите, что $Orb(m) = M$ тогда и только тогда, когда действие транзитивно.

Предложение 1.3. Если действие свободно, то отображение $\sigma_m : G \to M$ является биекцией на соответствующую орбиту.

Доказательство. Пусть $\sigma_m(g_1) = \sigma_m(g_2)$, то есть $\varphi_{g_1}(m) = \varphi_{g_2}(m)$, то есть $\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$, то есть $\varphi_{g_2^{-1}} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$, то есть $\varphi_{g_2^{-1}g_1}(m) = m$, а значит, $g_2^{-1}g_1 = e$, так как действие свободно, следовательно, $g_1 = g_2$. □

Вывод: если группа G действует на M свободно, то M распадается в дизъюнктивное объединение орбит, находящихся в биективном соответствии с группой G.

Пример 2. Рассмотрим группу $G = S^1$ (см пример 1) и множество точек плоскости σ без точки O. Тогда действие группы G на таком множестве будет свободным и множество $\sigma \setminus O$ распадается в дизъюнктивное объединение концентрических окружностей с центром в точке O. Каждая такая окружность является орбитой действия группы G.

Определение 1.5. Пусть G – группа Ли, φ – ее гомоморфизм как абстрактной группы в группу $DiffM$ – диффеоморфизмов гладкого многообразия M. Говорят, что G *гладко действует на* M, если действие $\Phi : G \times M \to M$ – гладкое отображение.

Пример 3. Пусть $M = \mathcal{A}$ – $n-$ мерное аффинное пространство ассоциированное векторному пространству V и снабженное канонической гладкой структурой. Напомним, что под канонической гладкой структурой мы понимаем следующую структуру: пусть $r = (O, e_1, \ldots, e_n)$ – аффинный репер. Тогда он определяет глобальную карту $(\mathcal{A}, \varphi)$ на аффинном пространстве $\mathcal{A}$ следующим образом: каждой точке $X \in \mathcal{A}$ с координатами $X(x^1, \ldots, x^n)_r$ положим $\varphi(X) = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n$. Эта глобальная карта определяет гладкую структуру на аффинном пространстве, которая называется *канонической*.

Пусть $Aff(\mathcal{A})$ – группа аффинных преобразований пространства $\mathcal{A}$. Как мы знаем, аффинное преобразование задается векторной формулой $x' = f(x) + x_0$, где f – невырожденное линейное отображение пространства трансляций аффинного пространства, то есть элемент группы $Aut(V)$, а $x_0 \in V$. Композиция двух аффинных преобразований $x' = f(x) + x_0$ и $y' = g(y) + y_0$ задается формулой $y' = (g \circ f)(x) + (g(x_0) + y_0)$. Тогда группа аффинных преобразований $Aff(\mathcal{A})$ будет изоморфна группе $Aut(V) \times V$ с групповой операцией $(f, x_0) \cdot (g, y_0) = (g \circ f, g(x_0) + y_0)$. Такая группа называется *полупрямым произведением* пространств $Aut(V)$ и V и обозначается $Aut(V) \propto V$.

Итак, группа аффинных преобразований $Aff(\mathcal{A})$ изоморфна полупрямому произведению $Aut(V) \propto V$. Обозначим соответствующий изоморфизм буквой $\alpha : Aff(\mathcal{A}) \to Aut(V) \propto V$. Тогда мы получаем две группы, действующие на аффинном пространстве. Это, во-первых, группа аффинных преобразований $Aff(\mathcal{A})$ которая действует на $\mathcal{A}$ слева. В этом случае роль представления $\varphi : Aff(\mathcal{A}) \to G_{\mathcal{A}}$ играет отображение вложения.

Во-вторых, группа $Aut(V) \propto V$ действует на аффинном пространстве $\mathcal{A}$ с помощью представления $\varphi \circ \alpha^{-1}$. Это представление точно, так как α – изоморфизм.

Кроме того, соответствующее действие $\Phi : Aff(\mathcal{A}) \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ в фиксированной глобальной карте, порожденной репером r, задается соотношениями

$$(x')^i = A^i_j x^j + (x_0)^i \tag{1}$$

где (A^i_j) – матрица невырожденного линейного оператора f в репере r. Эти функции гладкие, так как имеют частные производные по x^i любого порядка, а значит, действие Φ является гладким.

Вывод: Группа Ли $Aff(\mathcal{A})$ гладко действует на аффинном пространстве $\mathcal{A}$ в смысле его канонической гладкой структуры.

Это действие транзитивно (любую точку аффинного пространства мы можем перевести в любую другую точку аффинного пространства, например, параллельным переносом). Но это действие не является свободным, хотя и эффективно. В самом деле, повороты вокруг точки оставляют эту точку неподвижной, хотя и не являются тождественным преобразованием. Если аффинное преобразование оставляет неподвижными все точки аффинного пространство, то оно с необходимостью тождественное (следует из основной теоремы аффинных преобразований).

Пример 4. Из формулы (1) следует, что на аффинном пространстве $\mathcal{A}$ гладко действует также подгруппа $Aff_O(\mathcal{A})$ центроаффинных преобразований пространства $\mathcal{A}$ (точка O – инвариантная точка). Напомним, что такие преобразования задаются формулами

$$(x')^i = A^i_j x^j \quad \text{или} \quad x' = f(x) \tag{2}$$

Это гладкие функции, а значит, действие гладкое.

Как мы знаем группа центроаффинных преобразований естественно изоморфна группе автоморфизмов $Aut(V)$ пространства трансляций V, а значит, может быть с ней отождествлена. Кроме того, множество $\mathcal{A}$ с фиксированной точкой O, которое мы назовем *центроаффинным пространством*, естественно изоморфно пространству трансляций V и может быть с ним отождествлено. С учетом этих отождествлений можно утверждать, что группа Ли $Aut(V)$ гладко действует слева на линейном пространстве V по формуле (2).

Это действие не будет транзитивным и свободным из-за неподвижной точки O.

Пример 5. (Обобщение предыдущих примеров).
Пусть G – $r-$ мерная группа Ли, $\varphi : G \to Aut(V)$ – ее представление, то есть гомоморфизм в группу $Aut(V)$ некоторого $n-$ мерного линейного пространства V.

Фиксируем локальную карту (U, ψ) на G с координатами $(x^1, \ldots, x^r)$, а также глобальную карту на V, порожденную базисом $b = (e_1, \ldots, e_n)$. Этот базис канонически порождает базис, а значит, и глобальную карту в линейном пространстве $\mathcal{T}^1_1(V) \supset Aut(V)$ тензоров типа (1,1), а именно, базис $(e^i_j = e^i \otimes e_j)$.

В этой паре карт гомоморфизм φ задается гладкими функциями (по определению гомоморфизма групп Ли)

$$t^i_j = t^i_j(x^1, \ldots, x^r); \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Тогда действие $\Phi : G \times V \to V$ задается в этих картах уравнениями

$$\tilde{X}^i = t^i_j(x^1, \ldots, x^r) X^j$$

где $X(X^1, \ldots, X^n)_b$. Следовательно, отображение Φ является гладким, так как существуют непрерывные частные производные по всем переменным.

Вывод: всякое линейное представление группы Ли порождает ее гладкое действие в соответствующем линейном пространстве.

Особенно важным частным случаем линейного представления группы Ли является так называемое присоединенное представление группы Ли G.

Пример 6. (Присоединенное представление группы Ли).
Пусть G – группа Ли, $\mathbf{g}$ – ее алгебра Ли, то есть множество левоинвариантных векторных полей на группе G. Группа Ли G действует на себя слева посредством так называемых *внутренних автоморфизмов*. Именно, любой элемент $a \in G$ порождает отображение $A_a : G \to G$ по формуле $A_a(x) = axa^{-1}$, $x \in G$. Это гомоморфизм групп, так как $A_a(xy) = a(xy)a^{-1} = (axa^{-1})(axa^{-1}) = A_a(x)A_a(y)$.
Более того, так как $A_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$, где L_a – левый сдвиг на элемент a, $R_{a^{-1}}$ – правый сдвиг на элемент a^{-1}, то отображение A_a является диффеоморфизмом как композиция таковых. Следовательно, A_a есть изоморфизм группы Ли G.

Далее, $A_a \circ A_b(x) = A_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = A_{ab}(x)$ для любого $x \in G$, то есть $A_a \circ A_b = A_{ab}$. Таким образом, имеется отображение $A : G \to Aut(G) \subset G_G$ по формуле $A(g) = A_g$. Так как групповые операции гладки, отображение A будет гладким. Следовательно, A является представлением гладкого действия группы G на себе. Само действие $\Phi : G \times G \to G$ задается по формуле $\Phi(g, x) = A_g(x) = gxg^{-1}$.

Пусть $g \in G$ и $A_g : G \to G$ – внутренний автоморфизм. Тогда его дифференциал $(A_g)_* : \mathbf{g} \to \mathbf{g}$ является, как мы знаем, автоморфизмом соответствующей алгебры Ли. Этот автоморфизм обозначается $Ad(g)$, то есть $Ad(g) = (A_g)_*$. При этом $Ad(gh) = (A_{gh})_* = (A_g \circ A_h)_* = (A_g)_* \circ (A_h)_* = Ad(g) \circ Ad(h)$.

Следовательно, $Ad : G \to Aut\mathbf{g}$ – линейное представление группы Ли. Это представление называется *присоединенным представлением.*

По доказанному это представление порождает гладкое действие группы Ли на своей алгебре Ли.

Вывод: всякая группа Ли гладко действует на своей алгебре посредством присоединенного представления.

Замечание. Присоединенное представление, будучи гомоморфизмом групп Ли, индуцирует гомоморфизм соответствующих алгебр Ли, который обозначается $ad : \mathbf{g} \to \mathbf{g}(Aut\mathbf{g}) \equiv End\mathbf{g}$. Можно доказать, что $ad(X)(Y) = [X, Y]$.

Пример 7. Пусть V – $n-$ мерное линейное пространство. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех его базисов. На этом множестве внутренним образом определено действие группы Ли $GL(n, \mathbf{R})$. Именно, пусть $b = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathcal{B}$, $g = (g_{ij}) \in GL(n, \mathbf{R})$. Положим $\varphi_g(b) = \Phi(g, b) = (g_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, g_n^{i_n} e_{i_n})$. В силу невырожденности матрицы, векторы $\varepsilon_i = g_i^j e_j$, $i, j = 1, \ldots, n$ линейно независимы, то есть образуют базис. Значит, $\varphi_g(b) \in \mathcal{B}$. Очевидно, φ_g – биекция, то есть преобразование множества $\mathcal{B}$, то есть $\varphi_g \in G_{\mathcal{B}}$.

Пусть $g, h \in GL(n, \mathbf{R})$. Тогда $\varphi_h \circ \varphi_g(b) = (\varphi_h \circ \varphi_g(e_1, \ldots, e_n) = \varphi_g(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = (h_1^{i_1} \varepsilon_{i_1}, \ldots, h_n^{i_n} \varepsilon_{i_n}) = (h_1^{i_1} g_{i_1}^{j_1} e_{j_1}, \ldots, h_n^{i_n} g_{i_n}^{j_n} e_{j_n}) = ((gh)_1^{j_1} e_{j_1}, \ldots, (gh)_n^{j_n} e_{j_n}) = \varphi_{gh}(b)$ для любого базиса $b \in \mathcal{B}$, то есть $\varphi_{gh} = \varphi_h \circ \varphi_g$.

Таким образом, полная линейная группа $GL(n, \mathbf{R})$ действует на множестве всех базисов $\mathcal{B}$ линейного пространства V справа.

Так как для любых двух базисов $b, \beta \in \mathcal{B}$ существует единственный элемент $g \in GL(n, \mathbf{R})$, такой что $\varphi_g(b) = \beta$ (а именно, матрица g – это матрица перехода от базиса b к базису β), то это действие является транзитивным и свободным.

Этот факт позволяет естественным образом ввести на множестве $\mathcal{B}$ структуру гладкого многообразия, диффеоморфного группе Ли $GL(n, \mathbf{R})$. Заметим, что само многообразие $\mathcal{B}$ не несет структуру группы.

Фиксируем базис $b_0 \in \mathcal{B}$. Тогда возникает соответствие $\sigma_{b_0} : GL(n, \mathbf{R}) \to \mathcal{B}$, сопоставляющее матрице $g = (g_j^i)$ базис $\varphi_g(b)$. Обозначим $\psi = \sigma_{b_0}^{-1}$ обратное отображение, которое сопоставляет базису $b \in \mathcal{B}$ матрицу $C(b_0, b)$ перехода от базиса b_0 к базису b. Внесем во множество $\mathcal{B}$ топологию, потребовав, чтобы это отображение было гомеоморфизмом, то есть открытыми множествами в $\mathcal{B}$ назовем полные прообразы открытых множеств в $GL(n, \mathbf{R})$ при отображении ψ. Покажем, что эта топология не зависит от выбора базиса b_0. Пусть $\beta_0 \in \mathcal{B}$ – другой фиксированный базис. Он определяет отображение $\tilde{\psi} : \mathcal{B} \to M_{n,n}$, сопоставляющее произвольному базису b матрицу $\tilde{\psi}(b) = \tilde{C}(\beta_0, b)$. Имеем, $\varphi_C(b_0) = b$; $\varphi_{\tilde{C}}(\beta_0) = b$. Пусть $C_0 = C(\beta_0, b_0)$ – матрица перехода от базиса β_0 к базису b_0, то есть $\varphi_{C_0}(\beta_0) = b_0$. Тогда $\varphi_{\tilde{C}}(\beta_0) = b = \varphi_C(b_0) = \varphi_C \circ \varphi_{C_0}(\beta_0) = \varphi_{C_0 C}(\beta_0)$. Так как действие φ свободно, то $C_0 C = \tilde{C}$, то есть $\tilde{\psi} = L_{C_0} \circ \psi$ (так как $\tilde{\psi}(b) = \tilde{C} = C_0 C = L_{C_0} C = L_{C_0} \psi(b)$ для любого базиса $b \in \mathcal{B}$). Таким образом, $\tilde{\psi}$ – гомеоморфизм $\Leftrightarrow$ ψ – гомеоморфизм, а значит, топологии, определяемые этими отображениями будут совпадать.

Следовательно, пара $(\mathcal{B}, \psi)$ – глобальная карта на топологическом пространстве $\mathcal{B}$. Обозначим $\tilde{C} = (\tilde{x}_j^i)$, $C = (x_j^i)$, $C_0 = (c_j^i)$. Тогда отображение $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1} : GL(n, \mathbf{R}) \to GL(n, \mathbf{R})$ задается уравнениями $\tilde{x}_j^i = c_k^i x_j^k$, а значит, является диффеоморфизмом областей евклидова пространства $M_{n,n} \equiv \mathbf{R}^{n^2}$.

Вывод: Эти карты гладко связаны, следовательно, определяют гладкую структуру. Из ее определения следует, что картирующее отображение есть диффеоморфизм многообразия $\mathcal{B}$ на многообразие $GL(n, \mathbf{R})$.

Покажем, что относительно построенной структуры действие группы Ли $GL(n, \mathbf{R})$ на $\mathcal{B}$ гладкое.

Фиксируем глобольную карту $(\mathcal{B}, \psi)$ порожденную базисом b_0. Пусть $g = (g_j^i) \in GL(n, \mathbf{R})$ – произвольный элемент, $b \in \mathcal{B}$; $\psi(b) = C$, то есть $b = \varphi_C(b_0)$. Пусть $\tilde{b} = \varphi_g(b)$, $\psi(\tilde{b}) = \tilde{C}$, то есть $\tilde{b} = \varphi_{\tilde{C}}(b_0)$. Тогда $\varphi_{\tilde{C}}(b_0) = \tilde{b} = \varphi_g(b) = \varphi_g \circ \varphi_C(b_0) = \varphi_{Cg}(b_0)$. Так как действие свободно, из этого получим $\tilde{C} = Cg$, то есть $\tilde{x}_j^i = x_k^i g_j^k$. Это гладкие функции, а значит, действие $\Phi : GL(n, \mathbf{R}) \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ – гладкое.

Вывод: Группа Ли $GL(n, \mathbf{R})$ гладко, свободно и транзитивно действует на гладком многообразии $\mathcal{B}$.

Пример 8. Пусть X – полное векторное поле без особенностей на гладком многообразии M (например, левоинвариантное векторное поле на группе Ли, либо векторное поле на любом компактном многообразии). Мы знаем, что задание такого поля равносильно заданию глобальной однопараметрической группы диффеоморфизмов многообразия $\{F_t\}$ или глобального потока $\Phi_X(p, t) = F_t(p)$. При этом $\Phi_X : \mathbf{R} \times M \to M$ – гладкое отображение и $F_{t_1+t_2}(p) = F_{t_1} \circ F_{t_2}(p)$. Это отображение является гладким действием (группа Ли $\mathbf{R}$ коммутативна, а значит, все равно правое или левое действие) группы Ли $\mathbf{R}$ на многообразии M. Очевидно, орбиты этого действия есть траектории потока (или интегральные линии этого потока). Очевидно, что если $dimM > 1$, то данное действие не транзитивно.

Действие группы Ли G на многообразии M порождает на нем отношение эквивалентности: для любых $x, y \in M$ $x \sim y \Leftrightarrow$ сущетвует $g \in G$, такой что $y = \varphi_g(x)$. Элементы соответствующего фактормножества есть ни что иное как орбиты действия. Это фактормножество обозначается $Orb_G M$ или $Orb(M)$. Если действие гладкое, то во множестве $Orb_G M$ естественно вводится фактортопология. Однако, гладкой структуры на нем, вообще говоря, не индуцируется. Можно лишь утверждать следующее

Предложение 1.4. Пусть группа Ли G гладко действует на многообразии M. Тогда проекция $\pi : M \to Orb_G M$ является непрерывным открытым отображением.

Доказательство. Напомним, что фактортопология определяется следующим образом. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, на котором введено отношение эквивалентности R. Тогда в фактормножестве $X/R = \{D_\alpha\}$ топология вводится следующим образом. Подмножество $V \subset \{D_\alpha\}$ называется открытым тогда и только тогда, когда объединение $\cup D_\alpha$, $D_\alpha \in V$, рассматриваемых как подмножества в X, открыто в пространстве (X, τ).

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным, если полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества $V \subset Y$ открыт в X.

Сравнивая определение непрерывного отображения и определение фактортопологии, мы убеждаемся, что отображение π непрерывно.

Докажем, что оно открыто. Пусть $U \subset M$ – произвольное открытое подмножество. Надо доказать, что $\pi(U)$ открыто в $Orb_G M$, то есть $\pi^{-1}(\pi(U))$ открыто в M. Но $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{p \in U} Orb\, p = \bigcup_{g \in G} \varphi_g U$. Так как φ_g – диффеоморфизм, а U – открыто, то $\varphi_g U$ открыто, а следовательно, $\bigcup_{g \in G} \varphi_g U$ открыто в M. □

1.2 Дискретное действие.

Определение 1.6. Гладкое действие группы Ли G на многообразии M называется *дискретным*, если
1) G – дискретная группа, то есть G снабжена дискретной топологией;
2) для любой точки $p \in M$ существует окрестность U_p, такая что для любого $g \in G \backslash \{e\} \Rightarrow U_p \cap g U_p = \emptyset$.

Определение 1.7. Пусть X, Y – топологические пространства. Непрерывное отображение $\pi : Y \to X$ называется *накрывающим отображением*, если для любой точки $p \in X$ существует окрестность U_p, такая что $\pi^{-1}(U_p) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U_p$ – гомеоморфизм и для $\alpha \neq \beta$ $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$. Здесь A – некоторое непустое множество, называемое *множеством индексов*. Если π – накрывающее отображение, то окрестность U_p называется *хорошо накрытой*.

Пример 9. Рассмотрим отображение $p : \mathbf{R} \to S^1$ по формуле $p(t) = e^{2\pi i t}$. Прямая накручивается на окружность. Отображение p является локальным гомеоморфизмом, а значит, отображение p является накрывающим.

Теорема 1.1. Если группа Ли G дискретно действует на многообразии M, то естественная проекция $\pi : M \to Orb_G M$ является накрывающим отображением.

Доказательство. Пусть $a \in Orb_G M$ – произвольная точка и $p \in \pi^{-1}(a)$, U_p – ее окрестность, упомянутая в определении дискретного действия. Так как π – открытое отображение, то $V = \pi(U_p)$ – окрестность точки a. Имеем $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g U_p$. По определению U_p $U_p \cap g U_p = \emptyset$, если $g \neq e$, а значит, $g_1 U_p \cap g_2 U_p = \emptyset$, если $g_1 \neq g_2$. Кроме того, пусть $x, y \in U_p$, такие что $\pi(x) = \pi(y)$. Тогда x, y принадлежат одной орбите, то есть существует элемент $g \in G$, такой что $y = g(x)$. В силу определения дискретного действия $g = e$, то есть $x = y$. Итак, $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x = y$, то есть $\pi|_{U_p}$ – инъективно, а значит, $\pi|_{U_p}$ – биекция между U_p и $\pi(U_p) = V$.

По доказанному выше отображение π непрерывно и открыто, а значит, $\pi|_{U_p}$ – непрерывная открытая биекция, то есть гомеоморфизм. В силу равноправия всех подмножеств вида gU_p, $g \in G$, $\pi|_{gU_p} : gU_p \to V$ будет гомеоморфизмом.

Итак, для любого $a \in Orb_G M$ существует окрстность V точки a, такая что $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g U_p$, причем $g_1 U_p \cap g_2 U_p = \emptyset$, если $g_1 \neq g_2$ и $\pi|_{gU_p} \to V$ – гомеоморфизм. Итак, π – накрывающее отображение. □

Следствие. Если группа Ли G дискретно действует на гладком многообразии M, то на множестве орбит $Orb_G M$ существует естественная гладкая структура, относительно которой естественная проекция π является гладким накрывающим отображением.

Доказательство. Пусть $a \in Orb_G M$, V_a – ее хорошо накрытая окрестность, $p \in \pi^{-1}(a)$; U_p – соответствующая окрестность, такая что $\pi|_{U_p} : U_p \to V_a$ – гомеоморфизм. Без ограничения общности можно считать, что U_p – область локальной карты (U_p, φ). Тогда пара (V_a, ψ), где $\psi = \varphi \circ (\pi|_{U_p})^{-1}$ – локальная карта в окрестности точки a. Легко видеть, что эти карты гладко связаны, а значит, определяют атлас на пространстве $Orb_G M$, дополняемый до гладкой структуры. □

Пример 10. Рассмотрим гиперсферу $S^{n-1}_R \subset \mathbf{R}^n$. На ней дискретно действует группа $\mathbf{Z}_2 = \{id, -id\}$. Именно, пусть $p \in S^{n-1}_R$ – произвольная точка. Если она принадлежит области карты $U_k = U_k^S \cup U_k^N$, то ее орбитой будет пара точек p и $-p$. В качестве непересекающихся окрестностей этих точек, очевидно, можно взять окрестности U_k^N и U_k^S. Пространство орбит действия этой группы канонически отождествляется с вещественным проективным пространством $\mathbf{R}P^{n-1}$. Именно, если $(p, -p) \in Orb_{\mathbf{Z}_2} S^{n-1}_R$, то этой паре ставится в соответствие прямая, проходящая через эту пару точек. Заметим, что эта прямая проходит через точку $O = (0, \ldots, 0)$. Именно, эту прямую можно параметрически задать уравнением $r(t) = -p + 2pt$. Тогда $r(\frac{1}{2}) = 0$. Следовательно, эта прямая отождествляется со своим направляющим подпространством (одномерным), то есть с точкой вещественного проективного пространства $\mathbf{R}P^{n-1}$. Очевидно, это биекция. Надо проверить, что оно является диффеоморфизмом.

Обозначим это соответствие через τ. Тогда в паре соответствующих карт $(\omega(U_k), \varphi_k)$ на $\mathbf{R}P^{n-1}$ отображение $\omega : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}P^{n-1}$ – естественная проекция, $(\pi(U_k), \varphi_k \circ (\pi_{U_k})^{-1})$ на $Orb_{\mathbf{Z}_2}(S^{n-1}_R)$ отображение τ задается уравнениями

$$y^i = \pm \frac{x^i}{\sqrt{R^2 - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} (x^j)^2}}, \; i = 1, \ldots, n; i \neq k$$

где знаки $\pm$ отвечают областям U_k^N и U_k^S соответственно. Следовательно, τ является регулярной гладкой биекцией, то есть диффеоморфизмом.

Вывод: Пространство $Orb_{\mathbf{Z}_2} S^{n-1}_R$ канонически отождествляется с $\mathbf{R}P^{n-1}$.

Пример 11. Группа $\mathbf{Z}$ целых чисел дискретно действует на евклидовом пространстве $\mathbf{R}$. Именно, пусть $t \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{Z}$. Положим $m(t) = m + t$. Очевидно, что это гладкое действие (все равно левое или правое, так как группа коммутативна). В качестве непересекающихся окрестностей соответственных точек можно выбрать окрестности $U_\varepsilon(p)$ при $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, следовательно, это будет дискретное действие. Пространство орбит $Orb_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ этого действия канонически отождествляется с окружностью S^1.

Пример 12. Аналогично, группа $\mathbf{Z}^n = \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}}_{n \text{ раз}}$ дискретно действует на $\mathbf{R}^n$. И пространство орбит $Orb_{\mathbf{Z}^n}\mathbf{R}^n$ канонически отождествляется с $\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n\text{раз}} = T^n$ – n– мерный тор.

1.3 Однородные пространства.

Определение 1.8. *Однородным пространством* M называется гладкое многообразие, на котором фиксирована гладкое транзитивное действие группы Ли G, называемой *фундаментальной группой преобразований* этого однородного пространства.

Пусть M – однородное пространство, G – его фундаментальная группа преобразований. Будем предполагать действие группы левым, а M – связным многообразием.

Фиксируем точку $p \in M$, рассмотрим подмножество $H_p = \{g \in G | \varphi_g(p) = p\}$. Очевидно, $H_p \subset G$ – замкнутая подгруппа, следовательно группа Ли. Эта группа Ли называется группой изотропии многообразия M в точке p. Если $q \in M$ – другая точка, то существует $g \in G$, такой что $g(p) = q$ (в силу транзитивности).

Рассмотрим внутренний автоморфизм $A_g : G \to G$ $A_g(h) = ghg^{-1}$. Утверждается, что $A_g(H_p) = H_q$. В самом деле, если $h \in H_p$, то есть $h(p) = p$, то $A_g(h)(q) = ghg^{-1}(q) = gh(p) = g(p) = q$, то есть $A_g(H_p) \subset H_q$. Кроме того, $(A_g)^{-1} = A_{g^{-1}} : H_q \to H_p$. Следовательно, $A_g : H_p \to H_q$ – биективный гомоморфизм, то есть изоморфизм подгрупп. В этом случае подгруппы изотропии называются *сопряженными* посредством элемента g. Таким образом, подгруппы изотропии относительно любой пары точек связного однородного пространства будут изоморфны и даже сопряжены. Поэтому можно просто говорить о группе изотропии однородного пространства, определенных с точностью до изоморфизма.

1.4 Каноническая модель однородного пространства.

Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – ее замкнутая подгруппа. Рассмотрим множество левых смежных классов группы G по подгруппе H, которое обозначается G/H.

Именно, напомним, что фиксация $H \subset G$ определяет отношение эквивалентности на G: элементы $a, b \in G$ называются эквивалентными и обозначаются $a \sim b$, если $ab^{-1} \in H$.

Фактормножество $G/\sim$ называется множеством левых смежных классов по подгруппе H и обозначается G/H. Заметим, что на множестве G/H, вообще говоря, не идуцируется групповой структуры. Такая структура индуцируется тогда и только тогда, когда H – нормальный делитель, то есть подгруппа инвариантная относительно внутренних автоморфизмов группы G. Именно, если H – нормальный делитель, то есть для любого $g \in G$ и любого $h \in H$ имеем $ghg^{-1} \in H$, то положим $(aH)(bH) = (ab)H$. Это определение корректно в смысле независимости от выбора $a \in aH$, $b \in bH$. Действительно, если $a' \in aH$, $b' \in bH$ – другие представители, то $a'a^{-1} \in H$, $b'b^{-1} \in H$, то есть $a' = ah_1$, $b' = bh_2$, следовательно, $a'b' = ah_1bh_2 =$
Воспользуемся тем, что H – нормальный делитель.
$= a(bh_1')h_2 = (ab)(h_1'h_2) \in (ab)H$.

Аксиомы группы выполняются тривиальным образом, следовательно, G/H – группа. Группа G/H с построенной групповой структурой называется *факторгруппой.*

Итак, если $H \subset G$ – замкнутая подгруппа, не являющаяся нормальным делителем, то множество G/H не имеет естественной групповой структуры (не явяется группой), а тем более группой Ли.

Тем не менее множество левых смежных классов имеет каноническую структуру гладкого многообразия. Более того, справедлива

Теорема 1.2. Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – замкнутая подгруппа и пусть G/H множество левых смежных классов по подгруппе H и $\pi : G \to G/H$ естественная проекция $\pi(g) = gH$. Тогда на множестве G/H существует единственная гладкая структура:
1) $\pi : G \to G/H$ – гладкое отображение;
2) существуют локальные гладкие сечения проекции, то есть для любого $gH \in G/H$ существует окрестность U_{gH} и существует гладкое отображение $s : U_{gH} \to G$, такое что $\pi \circ s = id$. (без доказательства)

Определение 1.9. Указанная гладкая структура на множестве G/H называется *канонической.*

Предложение 1.5. Пусть N – гладкое многообразие. В обозначениях предыдущей теоремы отображение $f : G/H \to N$ будет гладким тогда и только тогда, когда $f \circ \pi : G \to N$ – гладкое отображение.

Доказательство. 1) Если f – гладкое, то $F = f \circ \pi$ – гладко как композиция таковых.

2) Обратно, пусть F гладко. Фиксируем точку $gH \in G/H$. Рассмотрим локальное сечение $s : U \to G$ над соответствующей окрестностью U в точке gH (они существуют по предыдущей теореме). Тогда отображение $f = f \circ id = f \circ (\pi \circ s) = (f \circ \pi) \circ s$ – гладкое как композиция таковых. □

Пусть группа Ли G гладко и транзитивно действует на многообразии M. Фиксируем точку $p \in M$. Пусть H – группа изотропии в точке p. Определим отображение $\beta : G/H \to M$ следующим образом $\beta(gH) = g(p)$, $g \in G$. Это отображение определено корректно, так как если $g' \in gH$ – другой представитель класса gH, то $g'(p) = g(h(p)) = g(p)$, $h \in H$.

Отображение β сюръективно, так как если $q \in M$ – произвольная точка, то в силу транзитивности существует элемент $g \in G$, такой что $q = g(p)$. Тогда этот элемент g определяет класс gH, для которого $\beta(gH) = g(p) = q$.

Наконец, β инъективно. В самом деле, $\beta(g_1H) = \beta(g_2H)$, то есть $g_1(p) = g_2(p)$, то есть $g_2^{-1}g_1(p) = p$, то есть $g_2^{-1}g_1 \in H$, то есть $g_1H = g_2H$.

Вывод: Фиксируя точку $p \in M$, мы получаем биекцию $\beta : G/H \to M$.

Более того, отображение β будет гладким по доказанному выше предложению. В самом деле, фиксируя точку $p \in M$, получим $\beta \circ \pi(g) = \beta(gH) = g(p) = \Phi(g, p) = \Phi \circ i_p(g)$, где Φ – соответствующее гладкое действие, $i_p : G \to G \times M$ – вложение $i_p(g) = (g, p)$, $\forall g \in G$. Итак, $\beta \circ \pi : G \to M$ – гладко и по доказанному предложению $\beta : G/H \to M$ гладко.

Итак, мы построили гладкую биекцию β. Можно показать, что β регулярно, то есть его дифференциал не вырожден в каждой точке, следовательно, β диффеоморфизм. Тем самым доказана

Теорема 1.3. Пусть M – однородное пространство, G – его фундаментальная группа преобразований, $H \subset G$ группа изотропии. Тогда M канонически диффеоморфно многообразию G/H, снабженному канонической гладкой структурой. $\square$

Замечание. Гладкое многообразие G/H само является однородным пространством с фундаментальной группой преобразований G и группой изотропии H.

В самом деле, непосредственно проверяется , что отображение $\Phi : G \times G/H \to G/H$, определенное формулой $\Phi(a, bH) = (ab)H$, является левым действием. То есть группа Ли G действует слева на множестве левых смежных. Это действие гладкое, так как если $bH \in G/H$ – произвольная точка, то в некоторой ее окрестности U определено локальное сечение $s : U \to G$, причем Φ представляется в виде $\Phi = \pi \circ \mu(id \times s)$, где $\mu(g, h) = g \cdot h$ (умножение в группе Ли), так как $(\pi \circ \mu(id \times s))\,(a, bH) = \pi \circ \mu(a, s(bH)) = \pi(a \cdot s(bH)) = \pi(a \cdot b_1) = (a \cdot b_1)H = a(bH) = \Phi(a, bH)$. Таким образом, Φ гладко как композиция гладких отображений.

Итак, G гладким образом действует на G/H. При этом группа изотропии этого действия есть группа H. Действительно, если $g \in G$ принадлежит группе изотропии в точке $H \in G/H$ тогда и только тогда, когда $gH = H$, то есть $g \in H$.

Вывод: группа G действует слева и гладко на многообразии G/H; действие транзитивно и H является группой изотропии (с точностью до изоморфизма). $\square$

Определение 1.10. Однородное пространство G/H называется *канонической моделью* однородного пространства с фундаментальной группой преобразований G и группой изотропии H.

Как мы видели, любое другое однородное пространство с такими данными ему изоморфно.

1.5 Примеры однородных пространств.

Пример 13. Группа Ли G действует на окружности $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ по формуле если $a \in \mathbf{R}$, то $a(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i (t+a)}$.
Это действие эффективно и транзитивно. Оно гладко, так как задается формулой $\tilde{t} = t + a$. Вычислим группу изотропии. Возьмем точку $p = 1 \in S^1$ (выбор точки не важен, так как все группы изотропии изоморфны.) Пусть $a \in H_p$, то есть $e^{2\pi i a} = 1 = e^{2\pi i n}$, то есть $a = n \in \mathbf{Z}$. Таким образом, $H_p \cong \mathbf{Z}$ – подгруппа изотропии. Следовательно, $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Пример 14. Как мы знаем группа Ли $AutV$ гладко действует на линейном пространстве V. Если $V = \mathbf{R}^n$, то $AutV = GL(n, \mathbf{R})$ и действует на $\mathbf{R}^n$ следующим образом. Пусть $X = (x^i) \equiv (x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$, $g = (A^i_j) \in GL(n, \mathbf{R})$, $Y = \varphi_g(X)$. Тогда $Y^i = A^i_j X^j$, $i = 1, \dots, n$. Мы можем рассматривать $X, Y \in \mathbf{R}^n$ как вектор-столбцы, то есть как матрицы размера $n \times 1$. Тогда в матричной форме действие полной линейной группы $GL(n, \mathbf{R})$ на арифметическом векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ будет задаваться формулой $Y = AX$.

В матричном виде можно записать и стандартное скалярное произведение

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} X^i Y^i = (X^1, \dots, X^n) \begin{pmatrix} Y^1 \\ \dots \\ Y^n \end{pmatrix} = X^T Y$$

Итак,

$$\Phi(A, X) = AX; \quad \langle X, Y \rangle = X^T Y$$

В частности, получим $\langle AX, AY \rangle = (AX)^T (AY) = X^T A^T A Y$, то есть $\langle AX, AY \rangle = X^T (A^T A) Y$.

Лемма 1.1. Если $(\varepsilon_1, \dots, e_n)$ – стандарный базис в $\mathbf{R}^n$, то для любой $B = (B^i_j) \in M_{n,n} \Rightarrow (\varepsilon_i)^T B e_j = B^i_j$.

Доказательство. Записать в виде столбцов, строк, матриц и перемножить. $\square$

Предложение 1.6. Группа Ли $O(n, \mathbf{R})$ совпадает с группой автоморжизмов стандартного скалярного произведения в $\mathbf{R}^n$. Иначе говоря, для элемента $A \in GL(n, \mathbf{R})$ имеем $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ тогда и только тогда, когда $A \in O(n, \mathbf{R})$.

Доказательство. 1) Пусть $A \in O(n, \mathbf{R})$, то есть ортогональная матрица, то есть $A^{-1} = A^T$, то есть $A^T A = I$, $AA^T = I$. Тогда $\langle AX, AY \rangle = (AX)^T (AY) = X^T (A^T A) Y = X^T Y = \langle X, Y \rangle$.
2) Обратно, пусть выполняется $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$. Тогда с учетом леммы $(A^T A)^i_j = (\varepsilon_i)^T (A^T A) \varepsilon_j = \langle A\varepsilon_i, A\varepsilon_j \rangle = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta^i_j$, то есть $A^T A = I$, то есть $A^{-1} = A^T$. $\square$

Следствие 1. Действие группы $O(n,\mathbf{R})$ на $\mathbf{R}^n$ сохраняет гиперсферу в $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Напомним, что гиперсферой в $\mathbf{R}^n$ называется множество точек $S_R^{n-1} = \{(X^1,\dots,X^n) \in \mathbf{R}^n | \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = R^2\} \equiv \{X = (X^1,\dots,X^n) \in \mathbf{R}^n | \langle X, X\rangle = R^2\}$. Если $X \in S_R^{n-1}$, $A \in O(n,\mathbf{R})$, то $\langle AX, AX\rangle = \langle X, X\rangle = R^2$, то есть $AX \in S_R^{n-1}$. $\square$

Можно доказать, что сужение действия группы $O(n,\mathbf{R})$ на гиперсферу S_R^{n-1}, то есть отображение $O(n,\mathbf{R}) \times S_R^{n-1} \to S_R^{n-1}$ гладкое. (Это следует из того, что $S_R^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ – вложенное подмногообразие.

Вывод: стандартное действие группы Ли $GL(n,\mathbf{R})$ на $\mathbf{R}^n$ индуцирует гладкое действие ее подгруппы Ли $O(n,\mathbf{R})$ на гиперсферу S_R^{n-1}.

Лемма 1.2. Действие $O(n,\mathbf{R})$ на гиперсфере S_R^{n-1} транзитивно.

Доказательство. Пусть $X, Y \in S_1^{n-1}$ – произвольная пара точек на гиперсфере единичного радиуса. Тогда это единичные векторы пространства $\mathbf{R}^n$, следовательно, их можно дополнить до ортонормированных базисов $b = \{e_1 = X, e_2, \dots, e_n\}$; $\beta = \{\varepsilon_1 = Y, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$. Известно, что для любой пары ортонормированных базисов существует единственная матрица $A \in O(n,\mathbf{R})$, такая что $\beta = Ab$. В частности, $Ae_1 = \varepsilon_1$, то есть $AX = Y$. $\square$

Свободным это действие не будет, так как вектор X можно дополнить до ортонормированных базисов различными способами, следовательно, существуют не единичные ортогональные матрицы, переводящие X в себя. Отметим, что это действие будет эффективным.

Итак, гиперсфера S_R^{n-1} является однородным пространством с фундаментальной группой $O(n,\mathbf{R})$.

Построим его каноническую модель. Для этого нам нужно вычислить группу изотропии относительно какой-либо точки $p \in S^{n-1}$. Возьмем $p = \varepsilon_n$ канонического базиса. Имеем, $A = (A_j^i) \in H_p$ тогда и только тогда, когда $A\varepsilon_n = \varepsilon_n$ тогда и только тогда, когда $\begin{pmatrix} A_n^1 \\ \vdots \\ A_n^{n-1} \\ A_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ тогда и только тогда, когда $A_n^i = 0; i = 1,\dots,n-1$; $A_n^n = 1$.

Более того, так как $AA^T = I$, имеем $1 = (AA^T)_n^n = A_i^n (A^T)_n^i = \sum_{i=1}^{n-1} (A_i^n)^2 + A_n^n = \sum_{i=1}^{n-1} (A_i^n)^2 + 1$, то есть $\sum_{i=1}^{n-1} (A_i^n)^2 = 0$, то есть $A_i^n = 0$; $i = 1,\dots,n-1$.

Кроме того,

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n = AA^T = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}\tilde{A}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

следовательно, $\tilde{A}\tilde{A}^T = I_{n-1}$, то есть $\tilde{A} \in O(n-1,\mathbf{R})$.

Вывод: $A \in H_p \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\tilde{A} \in O(n-1,\mathbf{R})$.

Обратно, любая матрица $A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\tilde{A} \in O(n-1,\mathbf{R})$ является ортогональной и сохраняет вектор ε_n, следовательно, принадлежит группе изотропии H_p.

Итак, группа изотропии $H_p = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A} \in O(n-1,\mathbf{R}) \right\}$. Зададим вложение $O(n-1,\mathbf{R}) \subset O(n,\mathbf{R})$ по формуле $\tilde{A} \to \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Оно позволяет отождествить группу H_p и группу $O(n-1,\mathbf{R})$. Следовательно, гиперсфера S_R^{n-1} диффеоморфна однородному пространству $O(n,\mathbf{R})/O(n-1,\mathbf{R})$ (радиус не существенен, так как все сферы диффеоморфны.)

Замечание. Проводя аналогичные рассуждения в ориентированном пространстве $\mathbf{R}^n$, мы получим другую каноническую модель гиперсферы

$$S_R^{n-1} = SO(n,\mathbf{R})/SO(n-1,\mathbf{R})$$

Замечание. Пусть, в частности, $n = 2$. Тогда $SO(2,\mathbf{R}) \equiv S^1 = \{z \in \mathbf{C} | z| = 1\}$, $SO(1,\mathbf{R}) = \{1\}$, следовательно, $SO(2,\mathbf{R})/\{1\}$ является канонической моделью S_R^1. В частности, S^1 имеет структуру группы Ли.

Пример 15. (комплексная версия предыдущего примера)
Группа Ли $GL(n,\mathbf{C})$ действует на комплексном арифметическом пространстве $\mathbf{C}^n$ посредством матричного умножения $\Phi : GL(n,\mathbf{R}) \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ по формуле $W = CZ$, где $C \in GL(n,\mathbf{C})$, $Z \in \mathbf{C}^n$ (записывается как столбец). Или в индексной форме $W^i = C_j^i Z^j$.

Отметим, что в $\mathbf{C}^n$ определено стандартное эрмитово скалярное произведение по формуле

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{X}^i Y^i = \bar{X}^T Y$$

Предложение 1.7. Группа Ли $U(n)$ совпадает с группой автоморфизмов стандартного эрмитова скалярного произведения.

Доказательство. Напомним, что $U(n) = \{C \in GL(n, \mathbf{C}) | \bar{C}^T = C^{-1}\}$. Тогда

$$\langle\langle CZ, CW\rangle\rangle = \overline{(CZ)}^T (CW) = \bar{Z}^T \bar{C}^T CW = \bar{Z}^T W = \langle\langle Z, W\rangle\rangle \square$$

Следствие 2. Действие $U(n)$ на $\mathbf{C}^n$ сохраняет подмножество $S_R^{2n-1} = \{Z \in \mathbf{C}^n | \langle\langle Z, Z\rangle\rangle = R^2\}$.

Это подмножество есть ни что иное как гиперсфера в овеществлении $\mathbf{R}^{2n}$ пространства $\mathbf{C}^n$. Заметим также, что действие $GL(n, \mathbf{C})$ на $\mathbf{C}^n$ индуцирует гладкое действие ее овеществления $GL(n, \mathbf{C})^{\mathbf{R}}$ на овеществлении $\mathbf{C}^n$, то есть на $\mathbf{R}^{2n}$.

Именно, пусть $C = A + \sqrt{-1}B \in GL(n, \mathbf{C})$ и $W = U + \sqrt{-1}V \in \mathbf{C}^n$, $Z = X + \sqrt{-1}Y \in \mathbf{C}^n$. Тогда $W = CZ$, то есть $U + \sqrt{-1}V = (A + \sqrt{-1}B)(X + \sqrt{-1}Y) = AX - BY + \sqrt{-1}(BX + AY)$. Таким образом, действие задается формулами

$$\begin{cases} U = AX - BY \\ V = BX + AY \end{cases}$$

Назовем это действие овеществленным действием группы $GL(n, \mathbf{C})$. Как мы видели, это овеществленное действие индуцирует овеществленное действие подгруппы $U(n)$ на $\mathbf{R}^{2n}$. Причем это действие сохраняет гиперсферу S_R^{2n-1}. Так как гиперсфера является вложенным подмногообразием, то сужение этого действия на S_R^{2n-1}, является гладким. Покажем, что это действие транзитивно. Пусть $W, Z \in S_R^{2n-1}$ – произвольная пара точек, рассматриваемых как векторы из $\mathbf{C}^n$. Дополним их до ортонормированных базисов $b = (e_1 = Z, e_2, \ldots, e_n)$, $\beta = (\varepsilon_1 = W, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ относительно стандартного скалярного произведения. Тогда существует единственная матрица $C \in U(n)$, такая что $C(b) = \beta$, в частности, $C(Z) = W$.

Аналогично предыдущему случаю вычисляется подгруппа изотропии.

$$C \in H_p \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tilde{C} \in U(n-1)$$

Здесь $U(n-1) \subset U(n)$ – вложение, описанное этим способом и тогда

$$S_R^{2n-1} = U(n)/H_p = U(n)/U(n-1)$$

Более того, проводя такие же рассуждения в ориентированном пространстве $\mathbf{C}^n$, получим

$$S_R^{2n-1} = SU(n)/SU(n-1)$$

Замечание. Пусть, в частности, $n = 2$. Тогда $SU(1) = \{1\}$ и $S_R^3 = SU(2)/\{1\} = SU(2)$. Таким образом, группа Ли $SU(2)$ диффеоморфна трехмерной сфере.

Следствие 3. Сферы S_R^1 и S_R^3 допускают структуры групп Ли $SO(2) \equiv U(1)$ и $SU(2)$ соответственно.

Замечание. Адамс доказал (используя аппарат алгебраической топологии), что сфера допускает структуру группы Ли тогда и только тогда, когда ее размерность равна 1 или 3.

Пример 16. Действие группы Ли $AutV$ на линейном пространстве V индуцирует ее действие на множестве всех одномерных подпространств этого пространства, то есть на проективном пространстве $P(V)$. Именно, если $X \in V$ – произвольный ненулевой вектор, $[X]$ – соответствующее ему одномерное подпространство, то есть точка из $P(V)$, $g \in AutV$ – произвольный автоморфизм, то положим

$$\Phi(g, [X]) = [gX]$$

Действие Φ определено корректно. Действительно, если $\tilde{X} \in [X]$ – другой представитель класса $[X]$, то есть $\tilde{X} = \lambda X$, $\lambda \in \mathbf{R}$, то $g\tilde{X} = \lambda gX \in [gX]$.

Непосредственно проверяется, что это действие является левым. Однако, в отличии от других примеров, это действие не является эффективным. В самом деле, пусть $g \in Ker\varphi$, где $\varphi : AutV \to$

$G_{P(V)}$, $\varphi_g([X]) = [\varphi_g X]$. Тогда $g \in Ker\varphi \Leftrightarrow \varphi_g([X]) = [X]$, то есть $\Phi(g, [X]) = [X]$, то есть $[gX] = [X]$, то есть $g = \lambda id$, где $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbf{R}$.

Следовательно, элемент g принадлежит группе гомотетий $Ht(V)$ пространства V. Таким образом, ядро неэффективности $Ker\varphi = Ht(V)$. Следовательно, группа $Aut(V)/Ht(V)$ уже действует эффективно на $P(V)$. Эта группа называется *группой проективных преобразований* проективного пространства $P(V)$ и обозначается $GP(V)$.

Предложение 1.8. Группа Ли $GP(V)$ действует гладко эффективно и транзитивно на пространстве $P(V)$.

Доказательство. Эффективность действия уже проверена. Далее обозначим $Ht(V) = N$. Тогда действие $\Psi : GP(V) \times P(V) \to P(V)$ задается формулой

$$\Psi(gN, [X]) = \Phi(g, [X]) = [gX]$$

Фиксируем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в V. Он индуцирует канонический атлас $\{(U_k, \varphi_k)\}_{k=1,\ldots,n}$ на $P(V)$, где $\varphi_k : U_k \to \mathbf{R}^{n-1}$ сопоставляет точке $x = [X]$ набор вещественных чисел $\{x^i = \frac{X^i}{X^k} | i = 1, \ldots, n, i \neq k\}$, X^i – координаты вектора X в данном базисе. Под действием преобразования $g = \tilde{g}N$ точка x переходит в точку $\tilde{x} = [\tilde{g}X] \in U_m$ (вообще говоря, это будет другая карта). В этой карте $\tilde{x}$ имеет координаты $(\tilde{x}^i = \frac{\tilde{X}^i}{\tilde{X}^m})$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq m$ ($\tilde{X}^i$ – координаты $\tilde{g}X$ в фиксированном базисе). Тогда

$$\tilde{x}^i = \frac{\tilde{X}^i}{\tilde{X}^m} = \frac{g^i_j X^j}{g^m_r X^r} = \frac{g^i_j \frac{X^j}{X^k}}{g^m_r \frac{X^r}{X^k}} = \frac{g^i_j x^j}{g^m_r x^r}$$

Эти функции дробно линейные, следовательно, гладкие, то есть действие Φ – гладкое, а значит, и действие Ψ – гладкое.

Пусть $x = [X]$, $y = [Y] \in P(V)$ – произвольная пара точек. Дополним векторы X, Y до базисов $b = (e_1 = X, e_2, \ldots, e_n)$, $\beta = (\varepsilon_1 = Y, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Тогда существует единственный элемент $g \in AutV$, такой что $\varphi_g(b) = \beta$. В частности, $\varphi_g(X) = Y$, следовательно, $\Phi(g, [X]) = [Y]$, а значит, $\Psi(gN, x) = y$. $\square$

Построим каноническую модель этого однородного пространства. Пусть $V = \mathbf{R}^n$, $AutV = GL(n, \mathbf{R})$, $P(V) = \mathbf{R}P^{n-1}$.

Гладкое действие группы Ли $GL(n, \mathbf{R})$ на проективном пространстве $\mathbf{R}P^{n-1}$, как мы видели, индуцирует гладкое действие ее подгруппы $O(n, \mathbf{R})$ на $\mathbf{R}P^{n-1}$. Это действие также транзитивно (доказывается с помощью ортонормированных базисов).

Вычислим группу изотропии относительно точки $x = [\varepsilon_n]$, $\varepsilon_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Пусть $A \in O(n, \mathbf{R})$. Имеем $A \in H_x \Leftrightarrow [A\varepsilon_n] = [\varepsilon_n] \Leftrightarrow A^i_n \varepsilon_i = \pm\varepsilon_n$, то есть

$$\begin{pmatrix} A^1_n \\ \vdots \\ A^{n-1}_n \\ A^n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

то есть $A^i_n = 0$, $i < n$; $A^n_n = \pm 1$. С другой стороны, $AA^T = I_n$, то $1 = (AA^T)^n_n = A^n_i (A^t)^i_n = \sum_{i=1}^n (A^n_i)^2 = \sum_{i=1}^n (A^n_i)^2 + (A^n_n)^2 = \sum_{i=1}^n (A^n_i)^2 + 1$, то есть $A^n_i = 0$, $i < n$. Таким образом,

$$A \in H_p \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Совокупность матриц такого вида представляет собой $O(n-1, \mathbf{R}) \times O(1, \mathbf{R}) \equiv O(n-1, \mathbf{R}) \times \mathbf{Z}_2$. Таким образом, вещественное проективное пространство диффеоморфно однородному пространству $O(n, \mathbf{R})/O(n-1, \mathbf{R}) \times O(1, \mathbf{R})$. Это однородное пространство называется *канонической моделью вещественного проективного пространства.*

Аналогично, гладкое действие $GL(n, \mathbf{R})$ на вещественном проективном пространстве $\mathbf{R}P^{n-1}$ (неэффективное) индуцирует гладкое транзитивное действие своей подгруппы $SO(n, \mathbf{R})$ на $\mathbf{R}P^{n-1}$. Группа $SO(n, \mathbf{R})$ уже действует эффективно для нечетного n. Если n четно, то группа $SO(n, \mathbf{R})$ действует не эффективно.

Соответствующая подгруппа изотропии $H_p = \left\{ A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}$, где $\tilde{A} \in O(n-1, \mathbf{R})$, $detA = 1$. Так как $a = \pm 1$, то $H_p = \left\{ A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & det\tilde{A} \end{pmatrix} \right\}$. Эта формула задает вложение группы Ли $O(n-1, \mathbf{R})$ в качестве подгруппы в группу Ли $SO(n, \mathbf{R})$. Тогда получаем, что вещественное проективное пространство диффеоморфно $SO(n, \mathbf{R})/O(n-1, \mathbf{R})$.

Пример 17. Комплексной версией последнего примера является *комплексное проективное пространство* $\mathbf{C}P(V)$. Можно проверить, что $\mathbf{C}P(V)$ является однородным пространством, причем если $V = \mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}P(V)$ обозначается $\mathbf{C}P^{n-1}$ и оно допускает следующие канонические модели

$$\mathbf{C}P^{n-1} = U(n)/U(n-1) \times U(1); \quad \mathbf{C}P^{n-1} = SU(n)/U(n-1)$$

где вложение $U(n-1) \subset SU(n)$ задается соотношением

$$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{det\tilde{A}} \end{pmatrix}; \ \tilde{A} \in U(n-1)$$