3 Главные расслоения

* отмечены доказательства, которые можно пропустить при первом прочтении.

3.1 Действие групп на многообразиях

Определение 3.1. Говорят, что группа G *действует на множестве* M *слева* (соответственно, *справа*), если задан гомоморфизм (соответственно, антигомоморфизм) φ этой группы в группу G_M преобразований этого множества. Этот гомоморфизм называется *представлением* группы G на множестве M. Если φ – мономорфизм (соответственно, антимономорфизм), действие называется *эффективным*, а представление – *точным*.

Если обозначить φ_g образ элемента $g \in G$ при отображении φ, то φ называется гомоморфизмом (соответственно, антигомоморфизмом), если $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$ (соответственно, $\varphi_{gh} = \varphi_h \circ \varphi_g$).

Задание отображения φ равносильно заданию отображения $\Phi : G \times M \to M$, называемого *левым* (соответственно, *правым*) действием, обладающего следующими свойствами:
(1) $\Phi(e, m) = m$, $m \in M$, e – единица группы G;
(2) $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(gh, m)$ (соответственно, $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(hg, m)$), $m \in M$, $g, h \in G$;
(3) $\forall g \in G$ отображение $m \to \varphi_g(m) \equiv \Phi(g, m)$ – преобразование множества M (то есть биективное отображение множества M на себя).

Представление φ и действие Φ называются *ассоциированными.*

Задача 3.1. Докажите, что группа преобразований G_M множества M, а значит, и любая подгруппа $H \subset G_M$ этой группы эффективно действует на M слева. Роль гомоморфизма φ в этом случае играет отображение вложения $i : H \subset G_M$. Действие $\Phi : G \times M \to M$ в этом случае задается формулой $\Phi(h, m) = h(m)$.

Очевидно, всякое действие группы G на множестве M порождает эффективное действие группы $G/ker\varphi$ на этом множестве. С другой стороны, если действие эффективно, то элемент $g \in G$ мы будем часто обозначать gm (соответственно, mg). При этом условия, определяющие левой (соответственно, правое) действие группы на множестве запишутся в виде

$$g(hm) = (gh)m; \; m(gh) = (mg)h; \; g, h \in G, \; m \in M$$

Определение 3.2. Говорят, что группа G действует на множестве M *транзитивно*, если для любых элементов $x, y \in M$ существует элемент $g \in G$ такой, что $\varphi_g(x) = y$.

Определение 3.3. Говорят, что группа G действует на множестве M *свободно*, если

$$(\exists m \in M \exists g \in G : \varphi_g m = m) \Longrightarrow g = e$$

где e – единица группы G.

Задача 3.2. Докажите, что любое свободное действие группы эффективно.

Пусть группа G действует на множестве M. Тогда каждый элемент $m \in M$ порождает отображение $\sigma_m : G \to M$, сопоставляющее элементу $g \in G$ элемент $\sigma_m(g) = \varphi_g(m) \equiv \Phi(g, m) \in M$. Образ этого отображения называется *орбитой* элемента m и обозначается $Orb\, m$.

Задача 3.3. Докажите, что действие транзитивно тогда и только тогда, когда для любого элемента $m \in M$ $Orb\, m = M$.

Задача 3.4. Докажите, что действие свободно, то отображение σ_m является биекцией группы G на соответствующую орбиту.

Определение 3.4. Если G – группа Ли, φ – ее гомоморфизм (как абстрактной группы) в группу $DiffM$ диффеоморфизмов гладкого многообразия M и Φ – гладкое отображение, то говорят, что G *гладко действует на многообразии* M.

3.2 Фундаментальные векторные поля

Пусть группа Ли G действует гладко на многообразии P (для определенности справа) и пусть $\Phi : P \times G \to P$ – соответствующее действие; $\mathbf{g}$ – алгебра Ли группы Ли G. Тогда внутренним образом определено отображение $\lambda : \mathbf{g} \to \mathcal{X}(P)$, где множество гладких векторных полей на многообразии P рассматривается как бесконечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Именно, любая точка $p \in P$ индуцирует отображение $\sigma_p : G \to P$ по формуле $\sigma_p(g) = \varphi_g(p) \equiv pg \equiv$

$\Phi(p,g)$ (образом отображения σ_p является орбита точки p). Если $X \in \mathbf{g}$ – левоинвариантное векторное поле, $g(t)$ – соответствующая однопараметрическая подгруппа, то определим отображение

$$\Psi(p,t) = \sigma_p(exp\, tX) \equiv \Phi(exp\, tX, p)$$

Очевидно, отображение Ψ является потоком на многообразии P, причем глобальным, так как однопараметрическая подгруппа левоинвариантного векторного поля определена для всех вещественных значений t. Этот глобальный поток порождает полное векторное поле $X^\flat$ по формуле

$$(X^\flat)_p = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \Psi(p,t) \equiv \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \sigma_p(exp\, tX)$$

Тогда положим $\lambda(X) = X^\flat$.
Так как отображение Ψ – гладкое, то векторное поле $X^\flat$ гладко зависит от точки p и, следовательно, является гладким векторным полем. Кроме того, $(X^\flat)_p = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \sigma_p(exp\,tX)(\sigma_p)_* \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ exp\,tX = (\sigma_p)_* X_e$. Отсюда следует, что

$$(\lambda(X))_p = (\sigma_p)_* X_e$$

Предложение 3.1. Отображение λ является гомоморфизмом $\mathbf{R}$-линейных пространств.

Доказательство. Как мы знаем, дифференциал отображения является $\mathbf{R}$-линейным отображением, то есть $(\sigma_p)_*$ – $\mathbf{R}$-линейным отображением.□

Теорема 3.1. Отображение λ является гомоморфизмом алгебр Ли, то есть $\lambda[X,Y] = [\lambda X, \lambda Y]$.

Доказательство.* Пусть $X, Y \in \mathbf{g}$, $X^\flat = \lambda(X)$, $Y^\flat = \lambda(Y)$. Тогда $[X^\flat, Y^\flat] = \mathcal{L}_{X^\flat} Y^\flat =$
$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(Y^\flat - (F_t)_* Y^\flat\right)$, где F_t – однопараметрическая группа диффеоморфизмов, соответствующая векторному полю $X^\flat$, то есть $F_t = \varphi_{exp\,tX}$ – однопараметрическая подгруппа, отвечающая потоку Ψ, порожденному полем $X^\flat$. Тогда $((F_t)_*)Y^\flat)_p = ((F_t)_*\lambda(Y))_p = (F_t)_*(\lambda Y)_{F_t^{-1}(p)} = (F_t)_*(\sigma_{F_t^{-1}(p)})_* Y_e = (F_t \circ \sigma_{F_t^{-1}(p)})_* Y_e$. Итак,

$$((F_t)_*)Y^\flat)_p = (F_t \circ \sigma_{F_t^{-1}(p)})_* Y_e$$

Фиксируем $g \in G$. Тогда так как $F_t(p) = \Phi(exp\,tX, p)$ имеем $F_t \circ \sigma_{F_t^{-1}(p)}(g) = F_t(\Phi(g, F_t^{-1}(p))) = \Phi(exp\,tX, \Phi(g, \Phi(exp(-tX), p)))$. Так как действие Φ – правое, $\Phi(exp\,tX, \Phi(g, \Phi(exp(-tX), p))) =$
$= \Phi(exp(-tX)g exp(tX), p) = \Phi(A_{exp(-tX)}g, p) = \sigma_p(A_{exp(-tX)}g$. (Напомним, что $A_g(h) = ghg^{-1}$, $Ad(g) = ((A_g)_*)_e$, $ad = Ad_*\,|_{\mathrm{g}}$). Итак,

$$F_t \circ \sigma_{F_t^{-1}(p)} = \sigma_p \circ A_{exp(-tX)}$$

С учетом этого получаем $(F_t \circ \sigma_{F_t^{-1}(p)})_* = (\sigma_p)_* \circ Ad(exp(-tX))$. Имеем $[X^\flat, Y^\flat]_p =$
$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y_p^\flat - (\sigma_p)_* \circ Ad(exp(-tX))Y_e\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((\sigma_p)_* Y_e - (\sigma_p)_* \circ Ad(exp(-tX))Y_e\right) =$
$= (\sigma_p)_*\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y_e - Ad(exp(-tX))Y_e)\right) = -(\sigma_p)_*\left(\left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ Ad(exp\,t(-X))\right)Y\right)_e = -(\sigma_p)_*(ad_{-X}Y)_e =$
$(\sigma_p)_*[X,Y]_e = (\lambda[X,Y])_p = ([X,Y]^\flat)_p$ для любой точки $p \in P$, то есть $[X^\flat, Y^\flat] = [X,Y]^\flat$. □
Итак, действие группы Ли G на многообразии P индуцирует $\mathbf{R}$-гомоморфизм $\lambda : \mathbf{g} \to \mathcal{X}(P)$ соответствующих алгебр Ли. Образ этого гомоморфизма есть конечномерная подалгебра Ли $\mathbf{f} \subset \mathcal{X}(P)$, элементы которой называются *фундаментальными векторными полями* на многообразии P. Алгебра Ли $\mathbf{f}$ называется *алгеброй Ли фундаментальных векторных полей на многообразии* P.

Заметим, что алгебра Ли $\mathbf{f}$ порождает подмодуль $\mathcal{F} = \mathbf{f} \otimes C^\infty(P)$ модуля $\mathcal{X}(P)$ (модули рассматриваются над кольцом $C^\infty(P)$).

Предложение 3.2. Если группа G действует на эффективно на многообразии P, то гомоморфизм λ является мономорфизмом, в частности, алгебра Ли $\mathbf{f}$ изоморфна алгебре Ли $\mathbf{g}$. Более того, если G действует свободно на P, то ненулевые фундаментальные векторные поля не имеют особых точек, то есть нигде не обращаются в нуль.

Доказательство. 1) Пусть G действует эффективно на многообразии P. Надо доказать, что $ker\lambda = \{0\}$. Пусть $X \in ker\lambda$, то есть $\lambda X = 0$. Тогда соответствующая локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем λX, тривиальна, то есть $F_t = id$ для любого вещественного t. Имеем $F_t(p) = \varphi_{exp(tX)} = id$. А так как действие эффективно, то $exp(tX) = e$ для любого вещественного t, то есть $\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ exp(tX) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ e = 0$, то есть $X_e = 0$, то есть $X = 0$ (так как левоинвариантные поля не имеют особенностей). Итак, $ker\lambda = \{0\}$.

2) Пусть группа G действует на многообразии P свободно. По определению имеем, что $\exists p \in P : \varphi_g(p) = p \Longrightarrow g = e$. Пусть существует точка $p \in P$ такая, что $X^\flat_p = 0$. Отсюда следует, что p является неподвижной точкой однопараметрической группы диффеоморфизмов $\{F_t\}$, то есть $F_t(p) = \varphi_{exp(tX)}(p) = p$. Так как действие свободно, то $exp(tX) = e$. Откуда как и выше получаем, что $X = 0$. $\square$

Теорема 3.2. Пусть группа Ли G гладко действует справа на многообразии P. Тогда для любого $g \in G$ следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} & \xrightarrow{Ad(g^{-1})} & \mathbf{g} \\ \lambda\downarrow & & \downarrow\lambda \\ \mathbf{f} & \xrightarrow{(\varphi_g)_*} & \mathbf{f} \end{array}$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathbf{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле, $X^\flat = \lambda X \in \mathbf{f}$ – соответствующее фундаментальное векторное поле на многообразии P. Оно порождает глобальный поток $\Psi : P \times \mathbf{R} \to P$ по формуле $\Psi(p,t) = \varphi_{exp(tX)}(p)$. Пусть $g \in G$ – произвольный элемент группы Ли. Ему отвечает диффеоморфизм $\varphi_g : P \to P$. Как мы знаем из свойств локальных потоков, увлеченному им векторному полю $(\varphi_g)_* X^\flat$ отвечает поток $\Psi_{(\varphi_g)_* X^\flat}(p,t) = \varphi_g \circ \Psi_{X^\flat}(\varphi_g^{-1}(p), t) = \varphi_g \circ \varphi_{exp(tX)} \circ \varphi_g^{-1}(p) = \varphi_{g^{-1}exp(tX)g}(p) = \varphi_{A_{g^{-1}}exp(tX)}(p)$.
Итак, векторному полю $(\varphi_g)_* X^\flat$ отвечает поток, порожденный однопараметрической подгруппой $A_{g^{-1}}(exp(tX))$. В частности, векторное поле $(\varphi_g)_* X^\flat$ будет фундаментальным, то есть $(\varphi_g)_* X^\flat = \lambda Y$, где Y – генератор этой подгруппы, то есть $Y_e = \frac{d}{dt}|_{t=0} A_{g^{-1}}(exp(tX)) = (A_{g^{-1}})_* \frac{d}{dt}|_{t=0} exp(tX) = Ad(g^{-1})X_e$. Следовательно, $Y = Ad(g^{-1})X$. Следовательно, $(\varphi_g)_* \lambda(X) = (\varphi_g)_* X^\flat = \lambda Y = \lambda(Ad(g^{-1})X)$ для любого $X \in \mathbf{g}$, то есть $(\varphi_g)_* \circ \lambda = \lambda \circ Ad(g^{-1})$. $\square$

3.3 Главные расслоения

Определение 3.5. *Главным расслоением* называется четверка (P, M, G, π), где P – гладкое многообразие, G – группа Ли, гладко и свободно справа действующая на многообразии P, M – пространство орбит $Orb_G P$, являющееся гладким многообразием, $\pi : P \to M$ – гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке $p \in P$ ее орбиту. При этом должно выполняться так называемое *свойство локальной тривиальности главного расслоения*, а именно, многообразие M должно допускать открытое покрытие $\mathcal{U}$, которое называется *покрытием локальной тривиальности*, такое, что $\forall U \in \mathcal{U}$ существует гладкое отображение $F_U : \pi^{-1}(U) \to G$, удовлетворяющее свойствам:
(F1) $F_U(pg) = F_U(p)g$, $p \in P$, $g \in G$;
(F2) отображение $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, определенное формулой $\psi_U(p) = (\pi(p), F_U(p))$ является диффеоморфизмом.
Многообразие P называется *тотальным пространством расслоения*, группа Ли G называется *структурной группой*, многообразие M называется *базой* расслоения, отображение π называется *естественной проекцией*, отображение ψ_U называется *диффеоморфизмом локальной тривиальности*, элементы $U \in \mathcal{U}$ называются *областями локальной тривиальности*. Для любой точки $m \in M$ множество $\pi^{-1}m$ называется *слоем* над m.

Пример. Тривиальные расслоения.
Рассмотрим четверку (P, M, G, p_1), где M и G – гладкое многообразие и группа Ли соответственно, $P = M \times G$ – декартово произведение многообразий, $p_1 : M \times G \to M$ – проекция на первый сомножитель, задаваемая формулой $p_1(m,g) = m$. Пусть группа Ли действует справа на P по формуле $(m,g)h = (m,gh)$, $h \in G$.

Задача 3.5. Докажите, что это гладкое, свободное, правое действие.
Орбиты этого действия есть классы вида $(m,g)G = \bigcup_{h\in G}(m,g)h = \bigcup_{h\in G}(m,gh) = \bigcup_{g\in G}(m,g) \equiv (m,G)$. Этот класс мы можем отождествить с точкой $m \in M$, то есть $M = Orb_G P$.
В силу этого отождествления естественная проекция $\pi : P \to M$ $\pi(p) = Orb_G p = (m,G)$ канонически отождествляется с отображением p_1.
В качестве покрытия локальной тривиальности выбирается покрытие, состоящее из единственного элемента $\mathcal{U} = \{M\}$. При этом $F_U(p) = F_U((m,g)) = g = p_2(p)$ – естественная проекция на второй сомножитель. При этом $p_2(pg) = p_2((m,h),g) = p_2((m,hg)) = hg = (p_2((m,h)))g$, то есть свойство (F1)

выполняется. При этом $\psi(p) = (p_1(p), p_2(p)) = p$, то есть $\psi_U = id$, а значит, является диффеоморфизмом.
Итак, мы доказали, что четверка (P, M, p_1, G) является главным расслоением. Оно называется *тривиальным главным расслоением.*

Задача 3.6. Пусть дано произвольное главное расслоение (P, M, π, G). Докажите, что для любой точки $m \in M$ существует окрестность U_m такая, что четверка $(\pi^{-1}(U_m), U_m, \pi|_{\pi^{-1}(U_m)}, G)$ – тривиальное главное расслоение.

Определение 3.6. Пусть даны два главных расслоения $\mathcal{B}_1 = (P_1, M, \pi_1, G_1)$ и $\mathcal{B}_2 = (P_2, M, \pi_2, G_2)$. Гомоморфизмом расслоения $\mathcal{B}_1$ в расслоение $\mathcal{B}_2$ называется пара (f, ρ), где $f : P_1 \to P_2$ – гладкое отображение, $\rho : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групп Ли. При этом должны выполняться два условия:
1) отображение f послойно, то есть $\pi_1 = \pi_2 \circ f$;
2) отображение f согласовано с действиями структурных групп, то есть для любой $p \in P_1$ и любого элемента $g \in G_1$ имеем $f(pg) = f(p)\rho(g)$.
В частности, если (P_1, f) – подмногообразие в P_2, а (G_1, ρ) – подгруппа Ли в G_2, то (P_1, M, π_1, G_1) называется *подрасслоением* главного расслоения $\mathcal{B}_2 = (P_2, M, \pi_2, G_2)$.

Если f – диффеоморфизм, ρ – изоморфизм групп Ли, то пара (f, ρ) называется *изоморфизмом* или *эквивалентностью главных расслоений* $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$.

Определение 3.7. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение. Гладкое отображение $s : M \to P$ называется *сечением* расслоения $\mathcal{B}$, если $\pi \circ s = id$.

Теорема 3.3. Главное расслоение $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ допускает сечение тогда и только тогда, когда оно эквивалентно тривиальному расслоению.

Доказательство. $\Leftarrow$). Пусть (f, ρ) – изоморфизм данного расслоения на тривиальное расслоение $\mathcal{B}_0 = (M \times G, M, p_1, G)$. Построим отображение $s : M \to P$, положив $s = f^{-1} \circ i_1$, где $i_1(m) = (m, e)$, e – единица группы G. Очевидно, s – гладкое отображение, как композиция таковых. Кроме того, так как f послойно, получим $\pi \circ s(m) = \pi(f^{-1}(m, e)) = p_1 \circ f(f^{-1}(m, e)) = m$, то есть $\pi \circ s = id$.
$\Rightarrow$). Пусть расслоение $\mathcal{B}$ допускает сечение $s : M \to P$. Построим отображение $F : P \to G$, положив $F(p) = g$, где g с необходимостью единственный элемент, переводящий $s \circ \pi(p)$ в p (напомним, что действие группы G свободно). Таким образом, g определяется как единственное решение уравнения $\Phi(g, s \circ \pi(p)) = p$, где Φ – действие группы Ли G на многообразии P. Из теоремы о неявной функции получаем, что решение этого уравнения $g = F(p)$ является гладким.
Докажем, что отображение F удовлетворяет условию (F1). Действительно, пусть $F(p) = g$, то есть $(s \circ \pi(p))g = p$. Тогда для любого $h \in G$ имеем $(s \circ \pi(ph))gh = ((s \circ \pi(p))g)h = ph$, то есть $F(ph) = gh = F(p)h$.
Наконец, отображение $\psi : P \to M \times G$ такое, что $\psi(p) = (\pi(p), F(p))$ является диффеоморфизмом. Действительно, это отображение гладко как композиция гладких отображений и легко написать обратное отображение $\psi^{-1}(m, g) = \Phi(g, s(m))$.

Задача 3.7. Докажите, что $\psi \circ \psi^{-1} = \psi^{-1} \circ \psi = id$.
Мы видим, что отображение ψ^{-1} также является гладким, а значит, ψ является диффеоморфизмом, следовательно, пара (ψ, id) является изоморфизмом главного расслоения $\mathcal{B}$ на тривиальное расслоение $\mathcal{B}_0$. □

Замечание. Условия (F1) и (F2) означают, что если $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $U \in \mathcal{U}$ – область локальной тривиальности, ψ_U – диффеоморфизм локальной тривиальности, то пара (ψ_U, id) является эквивалентностью главного расслоения $(\pi^{-1}(U), U, \pi\Big|_{\pi^{-1}(U)}, G)$ на тривиальное расслоение $\mathcal{B}_0 = (U \times G, U, p_1, G)$. В частности, получаем, что любое главное расслоение допускает локальные сечения, а именно, сечения над любой областью локальной тривиальности.

3.4 Структурные уравнения главного расслоения

Определение 3.8. Отображение $\varphi : M \to N$ называется *иммерсией*, если
1) φ – гладкое;
2) $ker(\varphi_*)_p = \{0\}$, для любой точки $p \in N$.

Определение 3.9. Гладкое отображение $\varphi : M \to N$ называется *субмерсией*, если для любой точки $m \in M$ $(\varphi_*)_m$ – отображение "на", то есть $rg(\varphi_*)_m = dimN$.

Теорема 3.4. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение. Тогда отображение $\pi : P \to M$ будет субмерсией.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $p \in M$. Обозначим $\pi(p) = m$, $\xi \in T_m(M)$ – произвольный вектор. Пусть гладкая кривая γ – представитель класса $[\gamma] = \xi$. В силу свойства локальной тривиальности существует окрестность U_m и существует гладкое сечение s главного расслоения над этой окрестностью (то есть гладкое отображение $s : U_m \to P : \pi \circ s = id$). Без ограничения общности можно считать, что $s(m) = p$. В самом деле, если это не так, то пусть $s(m) = q$. Тогда существует единственный элемент $g \in G$ такой, что $\varphi_g(q) = p$ (так как группа G действует свободно, а на слое транзитивно). Тогда $\tilde{s} = \varphi_g \circ s$ снова сечение, причем $\tilde{s}(m) = \varphi_g(s(m)) = p$.

Обозначим $\tilde{\gamma} = s(\gamma)$. Это гладкий путь с началом в точке p. Пусть η – касательный вектор $\tilde{\gamma}$ в точке p, то есть $\eta = \frac{d}{dt}\left|_{t=0} \tilde{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\right|_{t=0} s \circ \gamma(t)$. Следовательно, $\pi_* \eta = \pi_* \frac{d}{dt}\left|_{t=0} s \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi \circ s \circ \gamma(t) = \xi$ (так как по определению сечения $\pi \circ s = id$).
Итак, мы доказали, что для любого вектора $\xi \in T_m(M)$ существует вектор $\eta \in T_p(P)$ такой, что $\pi_* \eta = \xi$, то есть отображение $(\pi_*)_p$ сюръективно для любой точки $p \in P$, то есть π – субмерсия. $\square$

Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение. Обозначим $\mathcal{X}_\pi(P)$ – линейное пространство векторных полей на P π -связанных с векторными полями на M. Такие векторные поля называются *проектируемыми.*

$$\mathcal{X}_\pi(P) = \{X \in \mathcal{X}(P) : \exists Y \in \mathcal{X}(M)\ \pi_* X = Y\}$$

Очевидно, что совокупность проектируемых векторных полей есть $\mathbf{R}$-линейное пространство, так как отображение π_* линейно.

Обозначим $\tilde{\mathcal{V}} = ker\pi_*$. Тогда на многообразии P возникает распределение $\mathcal{V} = C^\infty \otimes \tilde{\mathcal{V}}$.

Определение 3.10. Распределение $\mathcal{V} = C^\infty \otimes \tilde{\mathcal{V}}$ называется *вертикальным* распределением на многообразии P.

Заметим, что в силу доказанной теоремы это будет распределение определенной размерности. Именно, если $p \in P$ – произвольная точка, то $dim\mathcal{V}_p = dim\tilde{\mathcal{V}}_p = dimker\pi_* = dimT_pP - rg(\pi_*)_p = dimP - dimM$.

Площадки $\tilde{\mathcal{V}}$ состоят из касательных пространств к слою. Итак, вертикальное распределение задается $dimP - dimM$- мерными в каждой точке из p, причем эти площадки есть ни что иное как касательные пространства к слою расслоения, проходящего через эту точку. Чтобы доказать это, посмотрим на вертикальное распределение с иной точки зрения. Напомним, что группа G действует справа на многообразии P и это действие порождает гомоморфизм $\lambda : \mathbf{g} \to \mathcal{X}(P)$. Образ этого гомоморфизма мы обозначили $\mathbf{f}$ и назвали подпространством фундаментальных векторных полей на P. Так как группа G действует эффективно (и более того свободно), $dim\mathbf{f} = dim\mathbf{g}$. Так как G действует свободно, ненулевые векторные поля в $\mathbf{f}$ не имеют особенностей, то есть не обращаются в нуль ни в одной точке многообразия P. В частности, если $(X_1, \ldots, X_r)$ – базис $\mathbf{g}$, то $(X_1^\flat, \ldots, X_r^\flat)$ – базис в $\mathbf{f}$, так как гомоморфизм λ является в этом случае изоморфизмом. Более того, так как векторные поля $(X_1^\flat, \ldots, X_r^\flat)$ не имеют особенностей, то они же образуют базис распределения $\mathcal{F} = C^\infty(P) \otimes \mathbf{f}$. Действительно, пусть $Y = \sum_{i=1}^N f^i Y_i \in \mathcal{F}$ – произвольный элемент ($f^i \in C^\infty(P)$, $Y_i \in \mathbf{f}$). Разложим каждый элемент Y_i по базису $(X_1^\flat, \ldots, X_r^\flat)$ и получим разложение для Y.

Теорема 3.5. Распределения $\mathcal{V}$ и $\mathcal{F}$ на многообразии P совпадают.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой точки $p \in P$ $\mathcal{V}_p = \mathcal{F}_p$. Имеем $\mathcal{F}_p = (C^\infty(P) \otimes \mathbf{f})_p = (C^\infty(P))_p \otimes \mathbf{f}_p = \mathbf{R} \otimes \mathbf{f}_p = \mathbf{f}_p = T_p(Orbp)$, так как $(\lambda X)_p = (\sigma_p)_* X_e$ и λ – изоморфизм. С другой стороны, $\mathcal{V}_p = (C^\infty(P))_p \otimes \tilde{\mathcal{V}}_p = \mathbf{R} \otimes \tilde{\mathcal{V}}_p = \tilde{\mathcal{V}}_p = ker(\pi_*)_p$. Так как $\pi|_{Orbp} = const$ – постоянное отображение, то дифференциал этого отображения в любой точке $p \in Orbp$ – нулевое отображение, то есть $T_p(Orbp) \subset ker(\pi_*)_p$, то есть $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{V}_p$. С другой стороны, $dim\mathcal{F}_p = dim\mathbf{f} = dim\mathbf{g} = dimG = dimP - dimM = dim\tilde{\mathcal{V}}_p = dim\mathcal{V}_p$. Докажем, что $dimP = dimG + dimM$. Это следует из локальной тривиальности расслоения. Если $U \subset M$ – область локальной тривиальности, то есть $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, то так как $dimM = dimU$ и $dimP = dim\pi^{-1}(U)$, получим $dimP = dim\pi^{-1}(U) = dim(U \times G) = dimU + dimG = dimM + dimG$. Здесь мы учли, что ψ_U – диффеоморфизм, а значит, сохраняет размерность.
Итак, $\mathcal{F}_p = \mathcal{V}_p$ для любой точки $p \in P$, то есть $\mathcal{F} = \mathcal{V}$. $\square$
Следствие. $\mathcal{V} = C^\infty(P) \otimes \mathbf{f}$.
В частности, $\mathcal{V}_p = (C^\infty(P))_p \otimes \mathbf{f}_p = \mathbf{f}_p = T_p(Orbp)$.

Предложение 3.3. Вертикальное распределение инволютивно, а значит, и вполне интегрируемо. Его интегральные многообразия максимальной размерности являются подмногообразиями вида (G, σ_p).

Доказательство. Инволютивность вертикального распределения очевидна. Если $X, Y \in \mathcal{V}$, то $\pi_* X = 0$, $\pi_* Y = 0$ и $\pi_*[X,Y] = [\pi_* X, \pi_* Y] = 0$, то есть $[X,Y] \in \mathcal{V}$. По теореме Фробениуса вертикальное распределение вполне интегрируемо. Впрочем вполне интегрируемость следует и из предыдущей теоремы. В соответствии с ней пары (G, σ_p) являются интегральными многообразиями этого распределения, так как $\mathcal{F}_p$ – касательное пространство к (G, σ_p) в точке p и $\mathcal{F}_p = \mathcal{V}_p$. Причем это интегральное многообразие будет максимальной размерности, так как его размерность равна $dimG = dimP - dimM = dim\mathcal{V}_p$. □

Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $\mathcal{V}$ – его вертикальное распределение. Условимся, что индексы $a, b, c, d, \ldots = 1, \ldots, r = dimG$, $i, j, k, \ldots = r+1, \ldots, r+n$ $(n = dimM)$, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, = 1, \ldots, r+n$. Фиксируем базис $(E_1, \ldots, E_r)$ алгебры Ли $\mathbf{g}$. Пусть $(\sigma^1, \ldots, \sigma^r)$ – дуальный базис. Уравнения Маурера-Картана структурной группы G имеют вид

$$d\sigma^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \sigma^b \wedge \sigma^c$$

Так как $\lambda : \mathbf{g} \to \mathbf{f}$ – изоморфизм, векторные поля $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat)$ образуют базис линейного пространства $\mathbf{f}$ фундаментальных векторных полей, а также распределения $\mathcal{F} = \mathcal{V}$.

Лемма 3.1. Пусть D – r-мерное распределение на гладком многообразии M^n. Тогда любой (локальный) базис распределения D можно дополнить до локального базиса модуля $\mathcal{X}(M)$.

Доказательство. Имеем для любой точки $p \in M$ существует окрестность U_p и набор векторных полей $(E_1, \ldots, E_r) \subset \mathcal{X}(U_p)$, который служит базисом модуля $D|_{U_p}$. Фиксируем точку $p \in M$. Пусть в некоторой окрестности U этой точки задан базис $(E_1, \ldots, E_r)$ модуля D_U. Тогда $((E_1)_p, \ldots, (E_r)_p)$ – линейно независимая система векторов. Дополним ее векторами $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ до базиса пространства $T_p(M)$. Тогда существуют векторные поля $(E_{r+1}, \ldots, E_n) \subset \mathcal{X}(U)$ такие, что их значения в точке p равны соответственно векторам $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$. По непрерывности эти векторные поля будут линейно независимы в каждой точке окрестности U (в случае необходимости мы можем сузить окрестность U). Тогда система векторных полей $(E_1, \ldots, E_n)$ будет искомым локальным базисом модуля $\mathcal{X}(M)$. □

Вернемся к главному расслоению. Пусть $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}(P)$ – вертикальное распределение. По доказанному оно допускает глобальный базис фундаментальных векторных полей $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat)$, который можно достроить до локального базиса модуля $\mathcal{X}(P)$ гладкими векторными полями $Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+n}$, то есть для любой точки $p \in P$ существует окрестность U и набор гладких векторных полей $Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+n} \in \mathcal{X}(U)$ такой, что $(E_1^\flat|_U \equiv Y_1, \ldots, E_r^\flat|_U \equiv Y_r, Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+n})$ – базис $\mathcal{X}(U)$. Пусть $(\omega^1, \ldots, \omega^{r+n})$ – дуальный базис. Тогда формы $\{\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \; (\alpha < \beta)\}$ образуют (локальный) базис 2-форм. В частности, 2-формы $d\omega^\alpha$ раскладываются по этому базису, а именно,

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma; \; R\alpha_{\beta\gamma} = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma) \tag{1}$$

Лемма 3.2. Формы $\{\omega^i\}$ образуют систему Пфаффа вертикального распределения $\mathcal{V}$.

Доказательство. Имеем $X = X^\alpha Y_\alpha = X^a E_a^\flat + X^i Y_i$. Тогда $X \in \mathcal{V} \Leftrightarrow X = X^a E_a^\flat \Leftrightarrow X^i Y_i = 0 \Leftrightarrow \omega^i(X) = 0$. □

Так как вертикальное распределение вполне интегрируемо, существуют (локально определенные 1-формы) ω^i_j такие, что

$$d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j \tag{2}$$

С другой стороны, согласно (1) имеем
$d\omega^i = \frac{1}{2} R^i_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = \frac{1}{2} R^i_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + \frac{1}{2} R^i_{aj} \omega^a \wedge \omega^j + \frac{1}{2} R^i_{ja} \omega^j \wedge \omega^a + \frac{1}{2} R^i_{kj} \omega^k \wedge \omega^j$. Так как по определению $R^\alpha_{\beta\gamma} = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma) = -d\omega^\alpha(Y_\gamma, Y_\beta) = -R^\alpha_{\gamma\beta}$, то $\frac{1}{2} R^i_{aj} \omega^a \wedge \omega^j + \frac{1}{2} R^i_{ja} \omega^j \wedge \omega^a = R^i_{aj} \omega^a \wedge \omega^j$. Тогда $d\omega^i = \frac{1}{2} R^i_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + R^i_{aj} \omega^a \wedge \omega^j + \frac{1}{2} R^i_{kj} \omega^k \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R^i_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + (R^i_{aj} \omega^a + \frac{1}{2} R^i_{kj} \omega^k) \wedge \omega^j$. Сравнивая это соотношение с (2) получим $R^i_{ab} = 0$. Итак, мы получили систему дифференциальных уравнений

$$d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j \equiv (R^i_{aj} \omega^a + \frac{1}{2} R^i_{kj} \omega^k) \wedge \omega^j$$

Они называются *первой группой структурных уравнений главного расслоения.*

Рассмотрим формы $d\omega^a = \frac{1}{2} R^a_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} R^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c + (R^a_{bk} \omega^b + \frac{1}{2} R^a_{jk} \omega^j) \wedge \omega^k$. Обозначим $R^a_{bk} \omega^b + \frac{1}{2} R^a_{jk} \omega^j = \omega^a_k$. Тогда

$$d\omega^a = \frac{1}{2} R^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_k \wedge \omega^k \tag{3}$$

Лемма 3.3. $R^a_{bc} = -C^a_{bc}$, где C^a_{bc} – структурные константы группы Ли G.

Доказательство. Пусть (E_a) – базис алгебры Ли $\mathbf{g}$, (σ^a) – дуальный кобазис, $(E^\flat_a)$ – базис $\mathbf{f}$, (E_i) – дополнение базиса $\mathbf{f}$ до локального базиса $\mathcal{X}(P)$, (ω^a, ω^i) – дуальный кобазис локального базиса $\mathcal{X}(P)$. Определим отображение $\lambda^* : \mathbf{f}^* \to \mathbf{g}^*$ формулой $\lambda^*(\omega)(X) = \omega(\lambda X)$ для $\forall\omega \in \mathbf{f}^*$, $\forall X \in \mathbf{g}$. Докажем, что $\lambda^*(\omega^a) = \sigma^a$. Действительно, $\lambda^*(\omega^a)(E_b) = \omega^a(\lambda E_b) = \omega^a(E^\flat_b) = \delta^a_b$. С учетом этого получим $R^a_{bc} = d\omega^a(E^\flat_b, E^\flat_c) = E^\flat_b(\omega^a(E^\flat_c)) - E^\flat_c(\omega^a(E^\flat_b)) - \omega^a([E^\flat_b, E^\flat_c]) = -\omega^a([E^\flat_b, E^\flat_c]) = -\omega^a([\lambda E_b, \lambda E_c]) = -\omega^a(\lambda[E_b, E_c]) = -\lambda^*\omega^a([E_b, E_c]) = -\sigma^a([E_b, E_c]) = -\sigma^a(C^h_{bc}E_h) = -C^h_{bc}\delta^a_h = -C^a_{bc}$. □ Итак, из (3) получаем

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_k \wedge \omega^k$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *второй группой структурных уравнений главного расслоения.* Объединяя первую и вторую группы структурных уравнений, получим *полную группу структурных уравнений главного расслоения*:

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j \\ d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_k \wedge \omega^k \end{cases}$$

3.5 Связности в главных расслоениях

Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}(P)$ – его вертикальное распределение.
Напомним, что *проектором* K-модуля V называется K-линейное отображение $P : V \to V$ такое, что $P^2 = P$. Отображение $Q = id - P$ также является проектором и называется *дополнительным проектором.* Задание на K-модуле V проектора P равносильно распадению этого модуля в прямую сумму ядра и образа проектора P, то есть $V = kerP \oplus ImP$.

Определение 3.11. Проектор $C^\infty(P)$-модуля $\mathcal{X}(P)$ на подмодуль $\mathcal{V}$ называется *вертикальным проектором.*

Определение 3.12. Говорят, что эндоморфизм (то есть $C^\infty(P)$-линейное отображение) F модуля $\mathcal{X}(P)$ *инвариантен* относительно действия структурной группы расслоения, если для любого $g \in G$ имеем $(\varphi_g)_* \circ F = F \circ (\varphi_g)_*$.

Так как по определению главного расслоения группа G действует справа на многообразии P в дальнейшем будем обозначать $\varphi_g = R_g$. Таким образом, $R_g(p) = \varphi_g(p) = pg = \Phi(g, p)$.

Лемма 3.4. Вертикальное распределение инвариантно относительно действия структурной группы, то есть $(R_g)_*\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ для любого $g \in G$. В частности, фундаментальные векторные поля инвариантны относительно увлечений, порождаемых действием структурной группы.

Доказательство. Напомним, что вертикальное распределение можно рассматривать как тензорное произведение $\mathcal{V} = C^\infty(P) \otimes \lambda(\mathbf{g})$, где $(\lambda X)_p = (\sigma_p)_* X_e$, $p \in P$, $X \in \mathbf{g}$. Тогда для произвольного фундаментального векторного поля $\lambda X = X^\flat$ имеем $(R_g)_* X^\flat = (R_g)_*(\lambda X) = \lambda(Ad(g^{-1})X) \in \mathcal{V}$. Так как вертикальное распределение допускает глобальный базис из фундаментальных векторных полей, то для любого векторное поля $X \in \mathcal{V}$ имеем $(R_g)_* X \in \mathcal{V}$. □

Определение 3.13. *Связностью* в главном расслоении $\mathcal{B}$ называется вертикальный проектор, инвариантный относительно действия структурной группы.
Таким образом, отображение $\Pi \in End(\mathcal{X}(P))$ называется связностью, если
1) $\Pi^2 = \Pi$;
2) $Im\Pi = \mathcal{V}$;
3) $\forall g \in G \Rightarrow (R_g)_* \circ \Pi = \Pi \circ (R_g)_*$.

Пусть Π_V – вертикальный проектор, $\Pi_H = id - \Pi_V$ – дополнительный проектор. Распределение $\mathcal{H} = ker\Pi_V = Im\Pi_H$ назовем *псевдогоризонтальным распределением*, а проектор Π_H – *псевдогоризонтальным проектором.*

В частности, пусть Π_V является связностью, то есть проектор Π_V инвариантен относительно действия структурной группы G. Тогда дополнительный проектор также инвариантен относительно действия структурной группы.

Задача 3.8. Докажите.
Следовательно, распределение $\mathcal{H} = Im\Pi_H$ также инвариантно относительно действия G. В самом деле, пусть $X \in \mathcal{H}$, $g \in G$ – произвольные элементы. Тогда $\Pi_H((R_g)_*X) = (R_g)_*(\Pi_H X) = (R_g)_* X \in Im\Pi_H = \mathcal{H}$.

Итак, псевдогоризонтальное распределение связности инвариантно относительно действия структурной группы G.

Обратно, пусть модуль $\mathcal{X}(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ распадается в прямую сумму вертикального распределения и некоторого распределения $\mathcal{H}$, инвариантного относительно действия группы Ли G, то есть $(R_g)_*\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, $g \in G$. Обозначим Π_V, Π_H – проекторы на распределения $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$, соответственно. Докажем, что эти проекторы инвариантны относительно действия структурной группы, в частности, проектор Π_V является связностью.

В самом деле, пусть $X \in \mathcal{X}(P)$ – произвольный элемент. Тогда $X = X_V + X_H$, $X_V \in \mathcal{V}$, $X_H \in \mathcal{H}$. По условию для любого элемента $g \in G$ имеем $(R_g)_*X_H \in \mathcal{H}$, то есть $\Pi_V((R_g)_*X_H) = 0$. Следовательно, $\Pi_V \circ (R_g)_*X = \Pi_V((R_g)_*X_V + (R_g)_*X_H) = \Pi_V((R_g)_*X_V) = (R_g)_*X_V = (R_g)_* \circ \Pi_V(X_V) = (R_g)_* \circ \Pi_V(X_V + X_H) = (R_g)_* \circ \Pi_V(X)$, $\forall X \in \mathcal{X}(P)$. Следовательно, $\Pi_V \circ (R_g)_* = (R_g)_* \circ \Pi_V$, то есть проектор Π_V инвариантен относительно действия структурной группы, в частности, связность. Тем самым доказана

Теорема 3.6. Задание связности в главном расслоении расслоении $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ равносильно заданию распределения $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}(P)$ такого, что

1) $\mathcal{X}(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$;

2) $\forall g \in G \Rightarrow (R_g)_*\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. □

Определение 3.14. Распределение $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}(P)$, обладающее свойствами

1) $\mathcal{X}(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$;

2) $\forall g \in G \Rightarrow (R_g)_*\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ называется *горизонтальным распределением.*

Другими словами, горизонтальное распределение – это псевдогоризонтальное распределение, инвариантное относительно действия структурной группы. Мы доказали, что задание связности равносильно заданию горизонтального распределения.

Оказывается связность допускает еще одно определение. Заметим, что изоморфизм $\lambda : \mathbf{g} \to \mathbf{f}$ индуцирует изоморфизм $C^\infty(P)$- модулей

$$\Lambda = id \otimes \lambda : C^\infty(P) \otimes \mathbf{g} \to C^\infty(P) \otimes \mathbf{f} = \mathcal{F} = \mathcal{V}$$

который задается формулой $\Lambda(1 \otimes X) = \lambda(X)$ или в другой форме записи $\Lambda(\sum_{k=1}^N f^k X_k) = \sum_{k=1}^N f^k \lambda(X_k)$, $f^k \in C^\infty(P)$, $X_k \in \mathbf{g}$.

Тогда определен гомоморфизм $C^\infty(P)$-модулей $\theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi$, где Π – связность в главном расслоении $\mathcal{B}$.

Определение 3.15. Гомоморфизм $\theta : \mathcal{X}(P) \to C^\infty(P) \otimes \mathbf{g}$ называется *формой связности.*

Если фиксировать точку $p \in P$, то $\theta_p : T_p(P) \to \mathbf{g}$. Поэтому форму θ называют формой со значениями в $\mathbf{g}$. Рассмотрим основные свойства формы связности.

Предложение 3.4. Во введенных обозначениях $\theta \circ \Lambda = id$. В частности, $\theta \circ \lambda = 1 \otimes id$.

Доказательство. Так как $\lambda(X) \in \mathcal{V}$ для любого $X \in \mathbf{g}$ имеем $\theta \circ \Lambda(1 \otimes X) = \Lambda^{-1} \circ \Pi \circ \circ \lambda(X) = \Lambda^{-1} \circ \lambda(X) = \Lambda^{-1} \circ \Lambda(1 \otimes X) = 1 \otimes X$. Следовательно, для любой функции $f \in C^\infty(P)$ имеем $\theta \circ \Lambda(f \otimes X) = f \otimes X$, то есть $\theta \circ \Lambda = id$. Кроме того, $\theta \circ \lambda(X) = \theta \circ \Lambda(1 \otimes X) = 1 \otimes X$, $\forall X \in \mathbf{g}$, то есть $\theta \circ \lambda = 1 \otimes id$. □

Следствие. $\theta(fX^\flat) = f \otimes X$, где $X \in \mathbf{g}$, $X^\flat = \lambda(X)$.

Доказательство. $\theta(fX^\flat) = \theta(f\lambda(X)) = f(\theta \circ \lambda)(X) = f \otimes X$. □

Присоединенное представление Ad структурной группы по алгебре Ли $\mathbf{g}$ индуцирует представление этой группы на $C^\infty(P)$-модуле $C^\infty(P) \otimes \mathbf{g}$, которое мы будем обозначать тем же символом Ad. Именно,

$$Ad(g)(f \times X) = (f \circ R_g) \otimes Ad(g)X$$

$g \in G$, $f \in C^\infty(P)$, $X \in \mathbf{g}$. В самом деле, $Ad(g_1 g_2)(f \otimes X) = (f \circ R_{g_1 g_2}) \otimes Ad(g_1 g_2)(X) = ((f \circ R_{g_1}) \circ R_{g_2}) \otimes (Ad(g_1) \circ Ad(g_2)X = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)(f \otimes X)$, то есть $Ad(g_1 g_2) = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)$. Следовательно, Ad – представление. □

Теорема 3.7. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, θ – форма связности на $\mathcal{B}$. Тогда следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(P) & \xrightarrow{(R_g)_*} & \mathcal{X}(P) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ C^\infty(P) \otimes \mathbf{g} & \xrightarrow{Ad(g^{-1})} & C^\infty(P) \otimes \mathbf{g} \end{array}$$

или $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (R_g)_*$. Это свойство называется *эквивариантностью* формы связности.

Доказательство. 1) Пусть $X_H \in \mathcal{H}$. Тогда $\theta \circ (R_g)_*(X_H) = \Lambda^{-1} \circ \Pi \circ (R_g)_*(X_H) = 0$, так как $(R_g)_*(X_H) \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H} = ker\Pi$. С другой стороны, $Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_H) = Ad(g^{-1}) \circ \Lambda^{-1} \circ \Pi(X_H) = 0$.
2) Пусть $X_V \in \mathcal{V}$. Тогда фиксируем базис $(E_1, \ldots, E_r)$ алгебры Ли $\mathbf{g}$. Он порождает базис $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat)$ распределения $\mathcal{F} = \mathcal{V}$. Следовательно, любое вертикальное векторное поле раскладывается по этому базису $X_V = f^a E_a^\flat$, $f^a \in C^\infty(P)$, $a = 1, \ldots, r$.
Заметим, что $((R_g)_*(fX))(p) = (R_g)_*(fX)_{R_{g^{-1}}(p)} = (R_g)_*\left(f(R_{g^{-1}}(p))(R_g)_*X_{R_{g^{-1}}(p)}\right) =$
$= f(R_{g^{-1}}(p))(R_g)_*X_{R_{g^{-1}}(p)} = f(R_{g^{-1}}(p))((R_g)_*X)(p)$ для любой точки $p \in P$, то есть

$$(R_g)_*(fX) = (f \circ R_{g^{-1}})(R_g)_*X$$

С учетом этого получим $\theta \circ (R_g)_*X_V = \theta \circ (R_g)_*(f^a E_a^\flat) = \theta\left((f^a \circ R_{g^{-1}})(R_g)_*E_a^\flat\right) =$
$= \theta\left((f^a \circ R_{g^{-1}})((R_g)_*\lambda(E_a))\right) = \theta\left((f^a \circ R_{g^{-1}})(\lambda \circ Ad(g^{-1})(E_a))\right)$. Здесь мы использовали свойство изоморфизма λ, а именно, $(R_g)_* \circ \lambda = \lambda \circ Ad(g^{-1})$. Воспользуемся линейностью формы связности θ и вынесем функции $(f^a \circ R_{g^{-1}})$ за знак θ. Так как $\theta \circ \lambda = 1 \otimes id$, получим, продолжая прерванные выкладки $= (f^a \circ R_{g^{-1}})Ad(g^{-1})(E_a) = (Ad(g^{-1})(f^a \otimes E_a) = Ad(g^{-1}) \circ \theta \circ \Lambda(f^a \otimes E_a) = Ad(g^{-1}) \circ \theta(f^a E_a^\flat) =$ $Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_V)$.
3) Пусть $X \in \mathcal{X}(P)$ – произвольное векторное поле. Тогда $\theta \circ (R_g)_*X = \theta \circ (R_g)_*(X_V + X_H) =$ $\theta \circ (R_g)_*(X_V) + \theta \circ (R_g)_*(X_H) = Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_V) + Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_H) = Ad(g^{-1}) \circ \theta(X)$. □

Теорема 3.8. Задание связности в главном расслоении $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ равносильно заданию 1-формы θ на пространстве расслоения со значениями в алгебре Ли структурной группы, обладающей свойствами
1) $\theta \circ \Lambda = id$; в частности, $\theta(fX^\flat) = f \otimes X$;
2) $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (R_g)_*$, где $f \in C^\infty(P)$, $X \in \mathbf{g}$, $g \in G$.

Доказательство. 1) Если Π – связность на $\mathcal{B}$, то по доказанному 1-форма $\theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi$ обладает требуемыми свойствами.

2) Обратно, пусть форма θ, заданная на многообразии P обладает указанными свойствами. Построим отображение $\Pi : \mathcal{X}(P) \to \mathcal{V}$ по формуле $\Pi = \Lambda \circ \theta$.
Тогда $\Pi^2 = (\Lambda \circ \theta) \circ (\Lambda \circ \theta) = \Lambda \circ \theta = \Pi$.
В силу 1) получаем, что для любого $X \in C^\infty(P) \otimes \mathbf{g}$ имеем $\theta(\Lambda X) = X$, то есть для любого $X \in C^\infty(P) \otimes \mathbf{g}$ существует прообраз (ΛX) при отображении θ, то есть θ – эпиморфизм, а значит, отображение Π также является эпиморфизмом, то есть отображением "на". Итак, отображение Π является проектором на $\mathcal{V}$. Нам осталось показать, что этот проектор инвариантен относительно действия структурной группы. Для этого достаточно доказать, что его псевдогоризонтальное распределение $\mathcal{H} = ker\Pi$ инвариантно относительно действия структурной группы. Пусть $X_H \in \mathcal{H}$, $g \in G$. Тогда $\Pi \circ (R_g)_*X_H = \Lambda \circ \theta \circ (R_g)_*X_H = \Lambda \circ Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_H) = 0$, так как $ker\Pi = ker\theta$ (докажите!). Следовательно, $\Pi \circ (R_g)_*X_H \in ker\Pi = \mathcal{H}$. Значит, Π – связность. При этом ее форма связности $\Lambda^{-1} \circ \Pi = \Lambda^{-1} \circ \Lambda \circ \theta = \theta$ совпадает с исходной формой θ. □

3.6 Горизонтальный лифт (горизонтальное поднятие)

Предложение 3.5. Пусть Π_V – вертикальный проектор в главном расслоении $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$, $\mathcal{H}$ – соответствующее псевдогоризонтальное распределение. Тогда для любой точки $p \in P$ отображение $(\pi_*)_p\,|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \to T_{\pi(p)}(M)$ является изоморфизмом линейных пространств.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $p \in P$. Так как для главного расслоения отображение pi является субмерсией, то отображение $(\pi_*)_p : T_p(P) \to T_{\pi(p)}(M)$ является эпиморфизмом. Кроме того, по определению $\mathcal{V}_p = ker(\pi_*)_p$. Пусть Π_H – горизонтальный проектор, то есть проектор на распределение $\mathcal{H}$. Тогда $\Pi_V + \Pi_H = id$, следовательно, $(\pi_*)_p = (\pi_*)_p \circ (\Pi_V)_p + (\pi_*)_p \circ (\Pi_H)_p =$ $(\pi_*)_p \circ (\Pi_H)_p$, так как $(\pi_*)_p \circ (\Pi_V)_p = 0$. Итак,

$$(\pi_*)_p = (\pi_*)_p \circ (\Pi_H)_p$$

В частности, $(\pi_*)_p\,|_{\mathcal{H}_p}$ – эпиморфизм. В самом деле, пусть $X \in T_m(M)$. Так как $(\pi_*)_p$ – эпиморфизм, существует вектор $Y \in T_p(P)$ такой, что $(\pi_*)_pY = X$. Тогда $X = (\pi_*)_pY = (\pi_*)_p \circ (\Pi_H)_pY = (\pi_*)_pZ$, где $Z = (\Pi_H)_pY \in \mathcal{H}_p$.

Наконец, $ker((\pi_*)_p\,|_{\mathcal{H}_p}) = ker(\pi_*)_p \cap \mathcal{H}_p = \mathcal{V}_p \cap \mathcal{H}_p = \{0\}$. Следовательно, отображение $(\pi_*)_p\,|_{\mathcal{H}_p}$ – мономорфизм, а значит, и изоморфизм. □

Теорема 3.9. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}(P)$ – (псевдо)горизонтальное распределение на P. Тогда для любого векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ существует единственное векторное поле $Y \in \mathcal{H}$ такое, что $\pi_* Y = X$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{X}(M)$ – произвольное векторное поле. Согласно доказанному предложению для любой точки $p \in P$ существует единственный вектор $Y_p \in \mathcal{H}_p$ такой, что $(\pi_*)_p Y_p = X_{\pi(p)}$. Следовательно, на многообразии P однозначно определено семейство векторов $Y = \{Y_p : p \in P\}$. Покажем, что это семейство векторов определяет на многообразии P гладкое векторное поле. Пусть $p \in P$ – произвольная точка, $m = \pi(p)$, $U \subset M$ – область локальной тривиальности, содержащая точку m. Пусть $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ – диффеоморфизм локальной тривиальности. Тогда на открытом подмногообразии $\pi^{-1}(U) \subset P$ определено гладкое векторное поле $Z = (\psi_U)_*^{-1}(X|_U, 0) \in \mathcal{X}(\pi^{-1}(U))$. Утверждается, что $\Pi_H(Z) = Y\Big|_{\pi^{-1}(U)}$. В самом деле, $(\pi_*)_p (\Pi_H)_p Z_p = (\pi_*)_p Z_p = (\pi_*)_p \circ ((\psi_U^{-1})_*)_{\psi_U(p)}(X_m, 0) = ((\pi \circ \psi_U^{-1})_*)_{\psi_U(p)}(X_m, 0)$. Так как $\pi \circ \psi_U^{-1} = p_1$ – проекция на первый сомножитель, получим $(\pi_*)_p (\Pi_H)_p Z_p = p_1(X_m, 0) = X_m = (\pi_*)_p Y_p$. Итак,

$$(\pi_*)_p (\Pi_H Z_p) = (\pi_*)_p Y_p$$

Так как $\Pi_H Z_p, Y_p \in \mathcal{H}_p$, то в силу изоморфности отображения $(\pi_*)_p$ на площадке $\mathcal{H}_p$, получим $\Pi_H Z_p = Y_p$, то есть $\Pi_H Z\Big|_{\pi^{-1}(U)} = Y\Big|_{\pi^{-1}(U)}$. Так как $\Pi_H Z$ – гладкое векторное поле на $\pi^{-1}(U)$, то векторное поле $Y\Big|_{\pi^{-1}(U)}$ также является гладким. Так как U покрывает M, то $\pi^{-1}(U)$ покрывает многообразие P, а значит, векторное поле Y гладко на многообразии P, то есть $Y \in \mathcal{X}(P)$. □

Определение 3.16. Пусть $\mathcal{H}$ – псевдогоризонтальное распределение на многообразии P, X – произвольное векторное поле на многообразии M. Векторное поле $Y \in \mathcal{X}(P)$ однозначно определяемое условиями

1) $\pi_* Y = X$

2) $Y \in \mathcal{H}$

называется *горизонтальным лифтом* или *горизонтальным поднятием* векторного поля X и обозначается $X^\sharp$.

Важное замечание. Из определения главного расслоения следует, что для любого элемента $g \in G$ $\pi \circ R_g = \pi$, а значит,

$$\pi_* \circ (R_g)_* = \pi_*$$

Отсюда следует, что если $\mathcal{H}$ – горизонтальное распределение, то горизонтальные лифты векторных полей базы инвариантны относительно отображений увлечений, порожденных действием структурной группы, то есть

$$\forall g \in G, \forall X \in \mathcal{X}(M) \Rightarrow (R_g)_* X^\sharp = X^\sharp$$

Действительно, $(\pi)_*((R_g)_* X^\sharp) = (\pi \circ R_g)_* X^\sharp = \pi_* X^\sharp = X$. В силу единственности горизонтального лифта получим требуемое равенство.

Итак, при фиксации связности в главном расслоении $\mathcal{B}$ естественно возникает гомоморфизм $\mathbf{R}$-линейных пространств $\sharp : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(P)$, сопоставляющий векторному полю $X \in \mathcal{X}(M)$ его горизонтальный лифт $X^\sharp$.

Задача 3.9. Докажите, что $\sharp$ – гомоморфизм, то есть для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ и любых вещественных чисел α, β имеет место соотношение $(\alpha X + \beta Y)^\sharp = \alpha X^\sharp + \beta Y^\sharp$. (Воспользуйтесь отображением π_* и единственностью горизонтального лифта.)

Теорема 3.10. Во введенных обозначениях гомоморфизм $\sharp : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(P)$ обладает свойством $\Pi_H([X^\sharp, Y^\sharp]) = [X, Y]^\sharp$, где Π_H – горизонтальный проектор, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Доказательство. Очевидно, что в обеих частях равенства стоят горизонтальные векторные поля. Осталось доказать, что они являются горизонтальными лифтами одного и того же векторного поля $[X, Y]$, то есть $\pi_* \circ \Pi_H([X^\sharp, Y^\sharp]) = [X, Y]$. Имеем, $\pi_* \circ \Pi_H([X^\sharp, Y^\sharp]) = \pi_* \circ (id - \Pi_V)([X^\sharp, Y^\sharp]) = \pi_*([X^\sharp, Y^\sharp]) = [\pi_* X^\sharp, \pi_* Y^\sharp] = [X, Y]$. Здесь мы учли, что $\Pi_V([X^\sharp, Y^\sharp]) \in \mathcal{V} = ker \pi_*$ и функториальность отображения π_*. □

Так как $\sharp : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(P)$ – гомоморфизм $\mathbf{R}$-линейных пространств, он однозначно расширяется до гомоморфизма $C^\infty(P)$- модулей $\natural : C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(P)$ по формуле $\natural(f \otimes X) = f X^\sharp$, $f \in C^\infty(P)$.

Из доказанного следует, что $\pi \circ \natural(1 \otimes X) = X$, $\pi \circ \sharp = id$.

Предложение 3.6. Гомоморфизм $\sharp$ является мономорфизмом.

Доказательство. Пусть $X \in ker \sharp$, то есть $\sharp X = 0$. Следовательно, $\pi \circ \sharp(X) = 0$, то есть $X = 0$. □

Из этого следует, что $ker\natural = \{0\}$, так как $ker\natural = C^\infty(P) \otimes ker\sharp$, а значит, гомоморфизм $\natural$ является мономорфизмом.

Предложение 3.7. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение с фиксированной в нем связностью и $\mathcal{H}$ – соответствующее горизонтальное распределение. Тогда отображение $\sharp : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(P)_\pi \cap \mathcal{H}$ является изоморфизмом $\mathbf{R}$-векторных пространств ($\mathcal{X}(P)_\pi$ – модуль проектирумых векторных полей). В частности, $Im\sharp = \mathcal{X}(P)_\pi \cap \mathcal{H}$.

Доказательство. Как мы уже знаем, $\pi_* \circ \sharp = id$. Более того, очевидно, $\sharp \circ \pi_*|_\mathcal{H} = id$. В самом деле, пусть $Y \in \mathcal{H}_\pi$, то есть горизонтальное проектируемое векторное поле. Обозначим $X = \pi_* Y$. Тогда $X^\sharp = Y$ по определению горизонтального лифта.
Так как горизонтальный лифт является проектируемым векторным полем ($X^\sharp$ автоматически проектируемо), то $\sharp^{-1} = \pi_*|_\mathcal{H}$, то есть отображение $\sharp$ – линейное и допускает обратное, то есть является изоморфизмом $\mathbf{R}$-линейных пространств. □

Теорема 3.11. Пусть X – горизонтальное векторное поле. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
1) X – горизонтальный лифт некторого векторного поля с базы расслоения;
2) X – проектируемо;
3) X инвариантно относительно действия структурной группы.

Доказательство. 1) Пусть X – лифт некоторого векторного поля Y с базы, то есть $X = Y^\sharp$. По определению оно проектируемо, так как $\pi_* X = Y$, а в соответствии с замечанием оно инвариантно относительно действия структурной группы. Итак, из 1) следуют 2) и 3).
2) Пусть X – проектируемо. Тогда $X \in Im\sharp$ (так как по условию X – горизонтально), то есть существует векторное поле $Y \in \mathcal{X}(M)$ такое, что $X = Y^\sharp$. Тогда по доказанному X инвариантно отоносительно действия структурной группы. Итак, из 2) следуют 1) и 3).
3) Пусть X инвариантно относительно действия структурной группы. Пусть $p, q \in P$ – произвольные точки, такие, что $\pi(p) = \pi(q)$. Тогда по определению главного расслоения существует элемент $g \in G$ такой, что $q = pg$, а значит, $(\pi_*)_q X_q = (\pi_*)_q ((R_g)_* X_p) = (\pi \circ R_g)_* X_p = (\pi_*)_p X_p$, следовательно, векторное поле X проектируемо, а значит, является горизонтальным лифтом (по доказанному). □

Лемма 3.5. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение с фиксированной связностью, $\mathcal{H}$ – соответствующее горизонтальное распределение. Тогда для любой горизонтальный вектор $X_p \in \mathcal{H}_p$ можно достроить до горизонтального лифта некоторого поля с базы расслоения.

Доказательство. Обозначим $m = \pi(p)$, $Y_m = (\pi_*)_p X_p$. Достроим вектор Y_m до векторного поля $Y \in \mathcal{X}(M)$. Тогда $Y^\sharp$ будет искомым векторным полем. В силу единственности горизонтального лифта $(Y^\sharp)_p = X_p$. □

Предложение 3.8. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение с фиксированной связностью, $\mathcal{H}$ – соответствующее горизонтальное распределение. Тогда гомоморфизм $\natural : C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}(M) \to \mathcal{H}$ является изоморфизмом $C^\infty(P)$- модулей.

Доказательство. Как уже отмечалось, отображение $\natural$ является мономорфизмом. Далее, из леммы следует, что распределение на P, являющееся образом гомоморфизма $\natural$, определяет в любой точке $p \in P$ площадку, совпадающую с $\mathcal{H}_p$. Но распределение $\mathcal{H}$ также образует в любой точке $p \in P$ такую же площадку. Следовательно, $Im\natural = \mathcal{H}$. Так как отображение $\natural$ является мономорфизмом, то оно будет изоморфизмом. □

Теорема 3.12. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение. Тогда $\mathcal{X}(P) = C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}_\pi(P)$ или, как говорят, $C^\infty(P)$-модуль $\mathcal{X}(P)$ является $C^\infty(P)$-расширением линейного пространства $\mathcal{X}_\pi(P)$.

Доказательство. Фиксируем связность в главном расслоении $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{H}$ – ее горизонтальное распределение. Очевидно, что разложение $\mathcal{X}(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ индуцирует разложение $\mathcal{X}_\pi(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}_\pi$. Следовательно, $C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}_\pi(P) = C^\infty(P) \otimes (\mathcal{V} \oplus \mathcal{H}_\pi) = C^\infty(P) \otimes \mathcal{V} \oplus C^\infty(P) \otimes \mathcal{H}_\pi = \mathcal{V} \oplus C^\infty(P) \otimes \mathcal{H}_\pi$, так как распределение $\mathcal{V}$ является $C^\infty(P)$-модулем. Согласно доказанному выше, гомоморфизм $\sharp : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{H}_\pi$ является изоморфизмом линейных пространств, а значит, гомоморфизм $\natural : C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}(M) \to C^\infty(P) \otimes \mathcal{H}_\pi$ – изоморфизм $C^\infty(P)$-модулей. По предложению 3.6 образом этого изоморфизма является распределение $\mathcal{H}$ и, значит, $C^\infty(P) \otimes \mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}$. Тогда $C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}_\pi(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{X}(P)$. □

Следствие. Гомоморфизм $\mathbf{R}$-линейных пространств $\pi_* : \mathcal{X}_\pi(P) \to \mathcal{X}(M)$ индуцирует гомоморфизм $C^\infty(P)$-модулей $\varpi = id \otimes \pi_* : \mathcal{X}(P) = C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}_\pi(P) \to C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}(M)$. Этот гомоморфизм однозначно определяется формулой $\varpi(\sum_{k=1}^N f_k \otimes X_k) = \sum_{k=1}^N f_k \otimes \pi_* X_k$, $f_k \in C^\infty(P)$, $X_k \in \mathcal{X}_\pi(P)$ или формулой $\varpi(1 \otimes X) = 1 \otimes \pi_* X$.

Напомним, что $\pi_* \circ \sharp = id$. Тогда $\varpi \circ \natural = id$.

Действительно, $\varpi \circ \natural(1 \otimes X) = \varphi(1 \otimes X^{\sharp}) = 1 \otimes \pi_* X^{\sharp} = 1 \otimes X$. $\square$

Отсюда, в частности, следует, что $\natural$ – мономорфизм, ϖ – эпиморфизм.

Действительно, пусть $X \in ker\natural$, то есть $\natural(X) = 0$. Тогда $0 = \varphi \circ \natural(X) = id(X) = X$, то есть $\natural$ – мономорфизм. Далее, для любого векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ имеем $\varphi \circ \natural(X) = X$. Обозначим $\natural(X) = Y$. Отсюда следует, что для любого $X \in \mathcal{X}(M)$ существует векторное поле $Y = \natural(X)$ такое, что $\varpi(Y) = X$, то есть ϖ – эпиморфизм. $\square$

Более того, $ker\varphi = C^\infty(P) \otimes ker\pi_* = C^\infty(P) \otimes \mathcal{V} = \mathcal{V}$.

Замечание. Напомним, что *последовательностью* K-модулей $(V_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ называется семейство гомоморфизмов (f_k)

$$\ldots \xrightarrow{f_{k-1}} V_{k-1} \xrightarrow{f_k} V_k \xrightarrow{f_{k+1}} V_{k+1} \rightarrow \ldots$$

при этом для любого целого k имеем $Imf_k \subset kerf_{k+1}$. Последовательность модулей называется *точной в члене* V_k, если $Imf_k = kerf_{k+1}$. Последовательность точная в каждом члене называется *точной* последовательностью.

Последовательность модулей, состоящая из трех ненулевых членов называется *короткой последовательностью*:

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C \xrightarrow{0} 0$$

Ее точность означает, что $0 = Im0 = kerf_1$, то есть отображение f_1 является мономорфизмом. Далее, $Imf_2 = ker0 = C$, то есть отображение f_2 является эпиморфизмом. Кроме того, $Imf_1 = kerf_2$ (точность во втором члене). $\square$

Вернемся к нашим отображениям. Из них мы можем составить короткую последовательность:

$$0 \rightarrow C^\infty(P) \otimes \mathbf{g} \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{X}(P) \xrightarrow{\varpi} C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow 0$$

Задача 3.10. Докажите, что эта последовательность точная.

Определение 3.17. Говорят, что короткая точная последовательность $0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C \xrightarrow{0} 0$ *расщепляется*, если задан гомоморфизм $g : C \rightarrow B$ такой, что $f_2 \circ g = id$. Гомоморфизм g называется *расщепляющим гомоморфизмом.*

Задача 3.11. Докажите, что гомоморфизм g является мономорфизмом.

Возвращаясь к фундаментальной последовательности расслоения, замечаем, что она расщепляется. В качестве расщепляющего гомоморфизма можно взять гомоморфизм $\natural : C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(P)$, так как по доказанному $\varpi \circ \natural = id$. Итак, мы получили

Предложение 3.9. Фиксация связности в главном расслоении индуцирует расщепление фундаментальной последовательности главного расслоения с помощью гомоморфизма $\natural$. $\square$

Более того, справедливо и обратное

Теорема 3.13. Задание связности в главном расслоении $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ равносильно заданию расщепляющего гомоморфизма i_H фундаментальной последовательности такого, что $(R_g)_* \circ i_H = i_H$ для любого элемента $g \in G$.

Доказательство. 1) Если в расслоении $\mathcal{B}$ фиксирована связность, то по доказанному выше гомоморфизм $\natural$ является расщепляющим.

2) Обратно, пусть задан $i_H : C^\infty(P) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(P)$ гомоморфизм $C^\infty(P)$-модулей такой, что $\varpi \circ i_H = id$ и $(R_g)_* \circ i_H = i_H$. В силу этого i_H – мономорфизм, а значит, распределение $\mathcal{H} = Imi_H$ является n-мерным распределением на многообразии P, где $n = dimM$. Покажем, что $\mathcal{H}$ – псевдогоризонтальное распределение, то есть $\mathcal{X}(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$. Рассмотрим гомоморфизм $p_H = i_H \circ \varpi$. Он является проектором, так как $p_H^2 = i_H \circ \varpi \circ i_H \circ \varpi = p_H$. Так как ϖ – эпиморфизм, образ проектора p_H совпадает с распределением $\mathcal{H}$. Кроме того, если p_V – дополнительный проектор, то есть $p_V = id - p_H$, то с учетом того, что i_H – мономорфизм и точностью короткой последовательности расслоения имеем $Imp_V = \ker p_H = ker\varpi = Im\Lambda = \mathcal{F} = \mathcal{V}$. Итак, мы получили проектор p_V такой, что $Imp_V = \mathcal{V}$, то есть p_V – проектор на $\mathcal{V}$. Значит, $\mathcal{X}(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, то есть $\mathcal{H}$ – псевдогоризонтальное распределение.

Докажем, что $\mathcal{H}$ инвариантно относительно действия структурной группы. Пусть $g \in G$ – произвольный элемент. Тогда $p_H \circ (R_g)_* = i_H \circ \varpi \circ (R_g)_* = i_H \circ (id \otimes (\pi_* \circ (R_g)_*) = i_H \circ \pi_* = p_H$. С другой стороны, $(R_g)_* \circ p_H = (R_g)_* \circ i_H \circ \varpi = i_H \circ \varpi = p_H$. Следовательно, $p_H \circ (R_g)_* = (R_g)_* \circ p_H$, а значит, $p_V \circ (R_g)_* = (R_g)_* \circ p_V$, то есть p_V – связность, а $\mathcal{H}$ – ее горизонтальное распределение. Очевидно, что ее расщепляющий гомоморфизм есть $\natural$. $\square$

3.7 Структурные уравнения связности. Теорема Картана-Лаптева.

Теорема 3.14. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение со связной структурной группой. Тогда псевдогоризонтальное распределение $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}(P)$ является горизонтальным тогда и только тогда, когда $[\lambda\mathbf{g}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$.

Доказательство.* 1) По условию $\mathcal{X}(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ – горизонтальное распределение. Пусть $X \in \mathbf{g}$, $Y \in \mathcal{H}$ – произвольные векторные поля. Как обычно, $X^\flat = \lambda(X)$, Φ – действие структурной группы, Ψ – поток на P, порожденный фундаментальным векторным полем $X^\flat$. Напомним, что это глобальный поток, так как векторное поле $X^\flat$ полное. По определению имеем $\Psi(p,t) = \Phi(exp\, tX, p)$. Пусть $F_t = R_{exp\, tX}$ – однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная полем $X^\flat$. Тогда $[X^\flat, Y] = \mathcal{L}_{X^\flat} Y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(Y - (F_t)_* Y) \in \mathcal{H}$.
2) Обратно, пусть $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}(P)$ – псевдогоризонтальное распределение такое, что $[\lambda\mathbf{g}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$. Пусть Π – вертикальный проектор, ядро которого совпадает с $\mathcal{H}$, то есть $ker\Pi = \mathcal{H}$, то есть проектор, дополнительный проектору на распределение $\mathcal{H}$. Покажем, что для любого $\xi \in \mathbf{f} = \lambda\mathbf{g}$ следует $\mathcal{L}_\xi(\Pi) = 0$.
Пусть $Y \in \mathcal{X}(P)$ – произвольный элемент. Мы можем разложить его на вертикальную и горизонтальную составляющую: $Y = Y_V + Y_H$, где $Y_V = \Pi(Y)$, $Y_H = Y - \Pi(Y)$. Тогда $\Pi(Y_V) = Y_V$, $\Pi(Y_H) = 0$, откуда получим $\mathcal{L}_\xi(\Pi)(Y) = \mathcal{L}_\xi(\Pi Y) - \Pi(\mathcal{L}_\xi Y) = [\xi, \Pi Y] - \Pi[\xi, Y] = [\xi, Y_V] - \Pi[\xi, Y_V] - \Pi[\xi, Y_H] = [\xi, Y_V] - \Pi[\xi, Y_V] = 0$.
Итак, мы доказали, что $\mathcal{L}_\xi(\Pi) = 0$, а значит, по определению производной Ли $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\Pi - (F_t)_*\Pi) = 0$, то есть $\frac{d}{dt}|_{t=0} (F_t)_*\Pi = 0$.
Далее, для любого вещественного $s \in \mathbf{R}$ имеем $\frac{d}{dt}|_{t=s} (F_t)_*\Pi = \frac{d}{dt}|_{\tau=0} (F_{\tau+s})_*\Pi \frac{d\tau}{dt}|_{t=s} = \frac{d}{dt}|_{\tau=0} (F_s)_* \circ (F_\tau)_*(\Pi) = ((F_s)_*)_* \frac{d}{dt}|_{\tau=0} (F_\tau)_*\Pi = 0$. Итак, для любого вещественного $s \in \mathbf{R}$ получаем $\frac{d}{dt}|_{t=s} (F_t)_*\Pi = 0$, то есть $(F_s)_*\Pi = \Pi$, $\forall s \in \mathbf{R}$.

Пусть теперь $g \in U$, где $U = U_e$ – нормальная окрестность единицы $e \in G$. Тогда $(R_g)_*(\Pi) = (R_{exp\,X})_*(\Pi) = (F_1)_*(\Pi) = \Pi$. Пусть, наконец, $g \in G$ – произвольный элемент. Так как G связна, она порождается любой окрестностью единицы, в частности, существуют элементы $g_1, g_2, \ldots, g_N \in U$, что $g = g_N \cdot \ldots \cdot g_1$. Тогда $(R_g)_*(\Pi) = (R_{g_1} \circ \ldots R_{g_N})_*(\Pi) = (R_{g_1})_* \circ (R_{g_N})_*(\Pi) = \Pi$.
Итак, для любого $g \in G$ получаем $(R_g)_*(\Pi) = \Pi$. Осталось заметить, что $((R_g)_*(\Pi) = (R_g)_* \circ \Pi \circ (R_g)_*^{-1}$. В самом деле, для любых $X \in \mathcal{X}(P)$, $u \in \mathcal{X}^*(P)$ имеем $(R_g)_*(\Pi)(X, u) = \Pi((R_g)^*X, (R_g)^*u) \circ R_g^{-1} = ((R_g)^*u)(\Pi((R_g)^*X) \circ R_g^{-1} = u((R_g)_*\Pi((R_g)^*X)) \circ R_g \circ R_g^{-1} = u((R_g)_* \circ \Pi \circ (R_g)_*^{-1}X) = (R_g)_* \circ \Pi \circ (R_g)_*^{-1}(X, u)$.
Вывод: $\forall g \in G$ имеем $\Pi = (R_g)_*(\Pi) = (R_g)_* \circ \Pi \circ (R_g)_*^{-1}$, то есть $(R_g)_* \circ \Pi = \Pi \circ (R_g)_*$. Следовательно, Π – вертикальный проектор, инвариантный относительно действия структурной группы, то есть связность. Тогда $\mathcal{H}$ явяется горизонтальным распределением этой связности. $\square$

Вернемся к изучению структурных уравнений главного расслоения. Напомним, что если фиксировать базис $(E_1, \ldots, E_r)$ алгебры Ли $\mathbf{g}$, то векторные поля $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat)$ образуют базис линейного пространства $\mathbf{f}$, а также базис распределения $C^\infty(P) \otimes \mathbf{f} = \mathcal{F} = \mathcal{V}$. Этот базис можно дополнить до локального базиса модуля $\mathcal{X}(P)$ векторными полями $(E_{r+1}, \ldots, E_{r+n})$. Если на многообразии P фиксировано псевдогоризонтальное распределение, например, фиксирована связность, то в качестве последних n векторов можно выбрать горизонтальные лифты векторных полей базы, образующих локальный базис модуля $\mathcal{X}(M)$. Например, можно взять векторные поля $X_{r+1} = \frac{\partial}{\partial x^1}$, ..., $X_{r+n} = \frac{\partial}{\partial x^n}$. Тогда положим $E_{r+1} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^\sharp$, ..., $E_{r+n} = \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^\sharp$. Назовем построенный базис $(E_1^\flat, \ldots, E_r^\flat, E_{r+1}, \ldots, E_{r+n})$ называется *базисом, адаптированным связности* или, более обще, *псевдогоризонтальному распределению*, короче, *CA-базисом*. Пусть $(\omega^1, \ldots, \omega^{r+n})$ – дуальный базис. Тогда 1-формы $(\omega^1, \ldots, \omega^r)$ образуют систему Пфаффа распределения $\mathcal{H}$. В самом деле, для любого $X \in \mathcal{X}(P)$ имеем $X = X^a E_a^\flat + X^i E_i = \omega^a(X) E_a^\flat + \omega^i(X) E_i$. Тогда $X \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \omega^a(X) = 0$, $a = 1, \ldots, r$.
Как мы знаем вторая группа структурных уравнений главного расслоения имеют вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega^a_j \wedge \omega^j$$

где $\omega^a_j = R^a_{bj}\omega^b + \frac{1}{2}R^a_{kj}\omega^k$. С учетом доказанной выше теоремы (для связной структурной группы), если $\mathcal{H}$ – горизонтальное распределение, получим
$R^a_{bj} = d\omega^a(E_b^\flat, E_j) = E_b^\flat \omega^a(E_j) - E_j\omega^a(E_b^\flat) - \omega^a([E_b^\flat, E_j]) = 0$, так как по доказанному $[E_b^\flat, E_j] \in \mathcal{H}$, то есть

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2} R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j$$

Обратно, если $R^a_{bj} = 0$, то для любого векторного поля $X^b \in \mathbf{f}$, любого горизонтального векторного поля $Y_H \in \mathcal{H}$ имеем $\omega^a(X^b) \in \mathbf{R}$, так как фундаментальные векторные поля образуют линейное пространство $\mathbf{f}$, следовательно, коэффициентами разложения вектора по базису будут вещественные числа. Значит, $\omega^a([X^b, Y_H]) = d\omega^a(X^b, Y_H) - X^b(\omega^a(Y_H)) + Y_H(\omega^a(X^b)) = d\omega^a(X^b, Y_H) = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c(X^b, Y_H) + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j(X^b, Y_H) = 0$, то есть $\omega^a([X^b, Y_H]) = 0$, то есть $[X^b, Y_H] \in \mathcal{H}$. По доказанному $\mathcal{H}$ является горизонтальным распределением некоторой связности. Тем самым доказана следующая теорема

Теорема 3.15. (Картана-Лаптева)
Псевдогоризонтальное распределение на пространстве главного расслоения $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ является горизонтальным (следовательно, определяет связность) тогда и только тогда, когда его специальная система Пфаффа (ω^a) удовлетворяет соотношениям

$$d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \; \Box$$

Замечание. В теореме Картана-Лаптева структурная группа G предполагается связной, иначе берется сужение расслоения на связную компоненту группы G.

Определение 3.18. Соотношения

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^i_j \wedge \omega^j \\ d\omega^a &= -\tfrac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \tfrac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \end{aligned}$$

называются *структурными уравнениями Картана или структурными уравнениями связности* (первой и второй группой, соответственно).
Замечание. Пусть $X \in \mathcal{X}(P)$. Тогда $X = X^a E^b_a + X^i E_i$. Пусть θ – форма связности на $\mathcal{B}$. Тогда $\theta(X) = \Lambda^{-1} \circ \Pi(X^a E^b_a + X^i E_i) = \Lambda^{-1}(X^a E^b_a) = X^a \otimes E_a = \omega^a(X) \otimes E_a \equiv \omega^a \otimes E_a(X)$. Итак,

$$\theta = \omega^a \otimes E_a$$

Тогда $d\theta = d\omega^a \otimes E_a$. С учетом структурных уравнений и соотношения для структурных констант $C^a_b c E_a = [E_b, E_c]$ получим $d\theta = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c \otimes E_a + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a = -\frac{1}{2}\omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c] + \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a$. Обозначим $\omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c] = [\theta, \theta]$ и $\frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a = \Phi$. Тогда с учетом этих обозначений последнее выражение запишется в виде

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \Phi$$

Здесь $\Phi = \frac{1}{2}R^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a$ – 2-форма на многообразии P со значениями в алгебре Ли $\mathbf{g}$. Она называется *формой кривизны связности.*
Эта форма определена внутренним образом, так как $\Phi = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$.

Определение 3.19. Связность в главном расслоении называется *плоской*, если $\Phi \equiv 0$.

Согласно структурным уравнениям Картана связность на главном расслоении является плоской тогда и только тогда, когда $d\omega^a = -\frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c$, то есть распределение, системой Пфаффа которого является система (ω^a), является вполне интегрируемым, то есть горизонтальное распределение $\mathcal{H}$ вполне интегрируемо. Итак,

Предложение 3.10. Связность на главном расслоении является плоской тогда и только тогда, когда ее горизонтальное распределение $\mathcal{H}$ вполне интегрируемо. $\Box$

Определение 3.20. r-форма $\omega \in \Lambda(P)$ на многообразии P называется *горизонтальной*, если она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов вертикален или, что равносильно $\Pi^*_H\omega = \omega$, где Π_H – проектор на псевдогоризонтальное распределение.

Доказательство. Напомним, что по определению $\Pi^*_H\omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(\Pi X_1, \dots, \Pi X_r)$. Тогда пусть r-форма ω обращается в нуль, если вертикален хотя бы один из ее аргументов. Тогда для любых векторных полей $X_1, \dots, X_r$ имеем $\Pi^*_H\omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(\Pi_H X_1, \dots, \Pi_H X_r) = \omega(\Pi_H X_1, \dots, \Pi_H X_r) + \omega(\Pi_V X_1, \Pi_H X_2, \dots, \Pi_H X_r) + \dots$. Мы дополнили выражение нулевыми слагаемыми, где Π_V – вертикальный проектор, дополнительный к Π_H. Продолжая цепочку равенств получим $\Pi^*_H\omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(X_1, \dots, X_r)$, то есть $\Pi^*_H\omega = \omega$.
Обратно, пусть $\Pi^*_H\omega = \omega$. Пусть $X_1, \dots, X_r$ – векторные поля, X_1 – вертикальное векторное поле. Тогда $\omega(X_1, \dots, X_r) = \Pi^*_H\omega(X_1, X_2 \dots, X_r) = \omega(\Pi_H X_1, \Pi_H X_2, \dots, \Pi_H X_r) = \omega(0, \Pi_H X_2, \dots, \Pi_H X_r) = 0$. $\Box$

Определение 3.21. Пусть на главном расслоении $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ фиксирована связность. r-форма ω называется *вертикальной*, если она обращется в нуль, если хотя бы один из ее аргументов горизонтален.

Задача 3.12. Докажите, что r-форма ω является вертикальной тогда и только тогда, когда $\Pi_H^*\omega = 0$.

Замечание. Свойство формы быть горизонтальной – внутреннее свойство главного расслоения, тогда как вертикальность формы (то есть обращение в нуль, если хотя бы один из аргументов горизонтален) зависит от выбора связности.

Лемма 3.6. q-форма ω на многообразии P горизонтальна тогда и только тогда, когда в CA-базисе

$$\omega = a_{i_1 \dots i_q}\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_q} \tag{4}$$

Доказательство. Если форма ω имеет вид (4), то ее компоненты в данном базисе, среди индексов которых хотя бы один принимает значения от 1 до r, равны нулю, так как компоненты формы с точностью до постоянного множителя совпадают с ее координатами. Тогда $\omega(X_1, \dots, X_q) = 0$, если хотя бы один из аргументов вертикален.

Обратно, если форма ω горизонтальна, то $a_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \frac{1}{q!}\omega(E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_q}) = 0$, если хотя бы один из векторов вертикален, то есть хотя бы один из индексов принимает значения от 1 до r. □

Пример. Форма кривизны связности является горизонтальной.

Задача 3.13. Докажите, что форма связности θ является горизонтальной формой.

В алгебре Грассмана $\Lambda(P)$ внутренним образом определен оператор $D = \Pi_H^* \circ d$. Он называется *оператором внешнего ковариантного дифференцирования*.

Предложение 3.11. Для формы кривизны связности

$$\Phi = D\theta$$

Доказательство. $D\theta = \Pi_H^* \circ d\theta = \Pi_H^*(-\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \Phi) = -\frac{1}{2}\Pi_H^*[\theta, \theta] + \Pi_H^*\Phi = 0 + \Phi = \Phi$. □

Задача 3.14. Докажите, что $\Pi_H^*[\theta, \theta]$, используя определение $[\theta, \theta] = C_{bc}^a\omega^b \wedge \omega^c \otimes E_a$.

Следствие. Структурное уравнение связности можно записать в виде

$$D\theta = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$$

Предложение 3.12. (тождество Бианки) $D\Phi = 0$.

Доказательство. Из структурных уравнений связности имеем $\Phi = d\theta + \frac{1}{2}\omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c]$. Применим оператор внешнего дифференцирования d и оператор Π_H^*: $\Pi_H^* \circ d\Phi = \frac{1}{2}(\Pi_H^* \circ d\omega^b \wedge \Pi_H^*\omega^c - \Pi_H^*\omega^b \wedge \Pi_H^* \circ d\omega^c) \otimes [E_b, E_c] = 0$, так как $\Pi_H^*\omega^b = 0$ в силу вертикальности форм ω^b. □

3.8 Существование связностей.

Рассмотрим тривиальное главное расслоение $\mathcal{B} = (P, M, p_1, G)$ с пространством расслоения $P = M \times G$, где p_1 – проекция на первый сомножитель. Заметим, что для каждой точки $p_0 = (m_0, g_0) \in P$ естественно определены гладкие регулярные отображения

$$\begin{aligned} i_{p_0} &: M \to P; \quad i_{p_0}(m) = (m, g_0); \\ j_{p_0} &: G \to P; \quad j_{p_0}(g) = (m_0, g); \end{aligned}$$

Очевидно, (M, i_p) и (G, j_p) – подмногообразия в P, проходящие через точку $p \in P$. Они являются максимальными интегральными многообразиями некоторых вполне итегрируемых распределений $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$. Очевидно, что $\mathcal{X}(P) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$, причем максимальные интегральные многообразия распределения $\mathcal{V}$ есть ни что иное, как слои расслоения $\mathcal{B}$, откуда вытекает, что $\mathcal{V}$ – вертикальное распределение, а значит, $\mathcal{H}$ – псевдогоризонтальное распределение. Далее, $R_g(m, a) = (m, ga)$, $a, g \in G$. Значит,

$$(R_g)_*(X, Y) = (X, (R_g)_*Y) \tag{5}$$

$X \in \mathcal{H}$, $Y \in \mathcal{V}$. Отсюда следует, что если $X \in \mathbf{g}$, то в точке $p = (m, g)$
$(\lambda X)_p = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, R_{exp\, tX}(m, g) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, (m, g\, exp\, tX) = (0, \frac{d}{dt}|_{t=0}\, g\, exp\, tX) = (0, (L_g)_*X_e) = (0, Y_g)$. Таким образом, $\lambda X = X^b$, где $X_p^b = (0, X_g)$, в частности, $(p_2)_* \circ \lambda = id$.

Далее, пусть $X \in \mathcal{X}(M)$. Очевидно, $i_p \circ \pi = id$, а значит, векторное поле $X^\natural$ определено векторами $X^\natural_p = (i_p)_* X_m = (X_m, 0)$. В силу (5) $(R_g)_* X^\natural = X^\natural$, $g \in G$.
В частности, линейное пространство $\mathcal{H}_\pi$ таких векторных полей, а следовательно, и модуль $C^\infty(P) \otimes \mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}$, инвариантны относительно действия структурной группы. Таким образом, $\mathcal{H}$ – горизонтальное распределение некоторой связности на тривиальном главном расслоении $\mathcal{B}$. Назовем эту связность *тривиальной*. Заметим, что горизонтальное распределение тривиальной связности инволютивно, а значит, эта связность плоская. Разумеется, плоская связность индуцирует связность и на любом главном расслоении (P, M, π, G), эквивалентном тривиальному главному расслоению, посредством тривиализирующего диффеоморфизма $\psi : P \to M \times G$. Эту связность мы также будем называть тривиальной.

Опираясь на факт существования связностей у тривиального главного расслоения, мы получим следующий принципиальный результат.

Теорема 3.16. На всяком главном расслоении существует связность.

Доказательство.* Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – произвольное главное расслоение. В силу свойства локальной тривиальности, многообразие M допускает открытое покрытие $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, такое, что $\forall \alpha \in A$ имеем $(\pi^{-1}(U_\alpha), U_\alpha, \pi|_{U_\alpha}, G)$ – главное расслоение, эквивалентное тривиальному. Пусть θ_α – форма тривиальной связности такого главного расслоения. Пусть $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathcal{A}$. Тогда на многообразии P корректно определена форма $\theta = \sum_{\alpha \in A} (\psi_\alpha \circ \pi)\theta_\alpha$ со значениями в алгебре Ли $\mathbf{g}$ структурной группы. Проверим, что θ – форма связности. Заметим, что $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(m) = 1$ в каждой точке $m \in M$, а значит, $\sum_{\alpha \in A} (\psi_\alpha \circ \pi)(p) = 1$ в каждой точке $p \in P$, и, таким образом,

$$\sum_{\alpha \in A} (\psi_\alpha \circ \pi) = 1$$

Тогда $\theta \circ \Lambda = \sum_{\alpha \in A} (\psi_\alpha \circ \pi)(\theta_\alpha \circ \Lambda) = id$, так как $\theta_\alpha \circ \Lambda = id$.
Далее, если $X = X_V + X_H = f^a E^\flat_a + X_H$ – произвольное векторное поле на P, то получим $Ad(g^{-1}) \circ \theta(X) = Ad(g^{-1}) \circ \left(\sum_{\alpha \in A} (\psi_\alpha \circ \pi)\theta_\alpha(f^a E^\flat_a) \right) = \sum_{\alpha \in A} Ad(g^{-1})(((\psi_\alpha \circ \pi) f^a) \otimes E_a) = \sum_{\alpha \in A} (((\psi_\alpha \circ \pi) f^a) \circ R_{g^{-1}}) \otimes Ad(g^{-1}) E_a$.
С другой стороны, $\theta \circ (R_g)_*(X) = \theta(X_H + (R_g)_*(f^a E^\flat_a)) = \theta((f^a \circ R_{g^{-1}})(R_g)_* E^\flat_a) = \sum_{\alpha \in A} (\psi_\alpha \circ \pi)\theta_\alpha((f^a \circ R_{g^{-1}})(\lambda((Ad(g^{-1})E_a))) = \sum_{\alpha \in A} (\psi_\alpha \circ \pi)(f^a \circ R_{g^{-1}}) \otimes Ad(g^{-1})E_a = \sum_{\alpha \in A} (((\psi_\alpha \circ \pi) f^a) \circ R_{g^{-1}}) \otimes Ad(g^{-1})E_a$.
Таким образом, $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (R_g)_*$. Тогда по критерию форма θ определяет связность на главном расслоении $\mathcal{B}$. $\square$