3 Главные расслоения

3.9 Главное расслоение (вещественных) реперов

Определение 3.22. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $m \in M$ – произвольная точка. Рассмотрим касательное пространство $T_m(M)$ и фиксируем в нем базис $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда совокупность $(m, e_1, \ldots, e_n)$ называется *линейным репером* многообразия M с вершиной в точке m, а базис $(e_1, \ldots, e_n)$ называется *базисной частью линейного репера*, а точка m называется *вершиной* репера.

Обозначим $BM = \{(m, e_1, \ldots, e_n), m \in M\}$ – множество всех реперов во всех точках многообразия M. Это множество пока не обладает никакой дополнительной структурой. Докажем, что на нем существует структура главного расслоения.

Рассмотрим отображение (очевидно, сюръективное) $\pi : BM \to M$, ставящее в соответствие каждому реперу его вершину. Подмножество $\pi^{-1}(m)$, состоящее из всех реперов с вершиной в точке m, назовем слоем над точкой m. Для этого множества существует биективное отображение на множество всех базисов касательного пространства $T_m(M)$. Как мы знаем, это линейное пространство, а значит, на нем существует каноническая структура n^2- мерного гладкого многообразия, диффеоморфного группе Ли $GL(n, \mathbf{R})$. Этот диффеоморфизм строится следующим образом: фиксируется произвольный базис b в касательном пространстве $T_m(M)$ и каждому базису β из $T_m(M)$ ставится в соответствие матрица перехода от базиса β к базису b.

Задача 3.15. Докажите, что построенное отображение является диффеоморфизмом.

На n^2-мерном многообразии $\pi^{-1}(m)$ естественно определено свободное правое действие группы $GL(n, \mathbf{R})$. Эти действия в слоях $\pi^{-1}(m)$ определяют свободное правое действие этой группы на множестве BM. В явном виде это действие задается формулой $(m, e_1, \ldots, e_n)g = (m, g_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, g_n^{i_n} e_{i_n}$, $g \in GL(n, \mathbf{R})$.

Задача 3.16. Докажите, что это действие свободное, то есть если существует точка $p \in BM$ такая, что $pg = p$, то $g = I_n$ – единичная матрица порядка n (единица группы $GL(n, \mathbf{R})$).

Из сказанного следует, что если p_1, p_2 – два репера,то $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ тогда и только тогда, когда существует $g \in GL(n, \mathbf{R})$: $p_1 g = p_2$, то есть в качестве g берется матрица перехода от базисной части репера p_1 к базисной части репера p_2. Этим условием характеризуются орбиты действия группы. Значит, слои есть ни что иное, как орбиты действия группы $GL(n, \mathbf{R})$.

Далее, нужно определить гладкую структуру на множестве BM и доказать, что действие группы Ли будет гладким. Построим гладкую структуру на BM, используя гладкую структуру многообразия M. Именно, пусть (U, φ) – локальная карта на многообразии M с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Построим отображение $F_U : \pi^{-1}(U) \to GL(n, \mathbf{R})$, положив $F_U(p) = g$, где g – матрица перехода от натурального репера $p_0 = (e_1^0 = \frac{\partial}{\partial x^1}|_m, \ldots, e_n^0 = \frac{\partial}{\partial x^n}|_m)$ к реперу p, то есть элемент g однозначно определяется соотношением $p_0 g = p$. Заметим, что по определению элементы матрицы перехода $g = (g_j^i)$ определяются по формуле $g_j^i = dx^i(e_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $(dx^1, \ldots, dx^n)$ – кобазис, дуальный натуральному базису в точке m. Действительно, если $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$, то по определению матрицы перехода имеем $e_j = g_j^i e_i^0$. Применим ковектора dx^k. Тогда $dx^k(e_j) = dx^k(g_j^i e_i^0) = g_j^i dx^k(e_i^0) = g_j^i \delta_i^k = g_k^i$.

Теперь естественно определяется отображение $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times GL(n, \mathbf{R})$ по формуле $\psi_U(p) = (\pi(p), F_U(p))$.

Очевидно, ψ_U – биекция. В самом деле, пусть $\psi_U(p_1) = \psi_U(p_2)$. Тогда, в частности, $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, то есть вершины реперов p_1 и p_2 совпадают. Далее, $F_U(p_1) = F_U(p_2)$, то есть матрицы перехода от натурального репера к реперам p_1 и p_2 совпадают, то есть базисные части реперов также совпадают, то есть отображение инъективно. Это отображение также и сюръективно, так как для любой пары (m, g), $m \in U$, $g \in GL(n, \mathbf{R})$ можно построить репер $p = (m, g_1^{i_1} e_{i_1}^0, \ldots, g_n^{i_n} e_{i_n}^0)$, который будет прообразом пары (m, g).

Внесем в множество BM топологию, потребовав чтобы отображения ψ_U были гомеоморфизмами. Иначе говоря, базой топологии на BM служит система множеств $\psi^{-1}(V_1 \times V_2)$, где $V_1 \subset U$ – открытое множество, $V_2 \subset GL(n, \mathbf{R})$ – открытое множество. Тогда множество BM превратится в топологическое пространство. Из определения построенной топологии легко следует, что в ней отображение $\pi : BM \to M$ будет непрерывным. Действительно, для любого открытого $U \subset M$ полный прообраз $\pi^{-1}(U) = \psi^{-1}(U \times GL(n, \mathbf{R}))$ будет открыт как образ открытого множества при гомеоморфизме.

Пусть $p \in BM$ – произвольная точка, g_j^i – значения координатных функций на матрице $g \in GL(n, \mathbf{R})$, то есть элементы матрицы g. Пусть (U, φ) – локальная карта на многообразии M в окрестности точки $m = \pi(p)$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Введем в рассмотрение пару (W, χ), где $W = \pi^{-1}(U)$,

$\chi : W \to \mathbf{R}^{n^2+n}$ – отображение, заданное формулой $\chi(p) = (\varphi \circ \pi(p), F_U(p))$. Из определения введенной топологии легко следует, что $W \subset BM$ – открытое множество, а отображение χ является гомеоморфизмом на область в $\mathbf{R}^{n^2+n}$. Следовательно, пара (W, χ) является локальной картой в топологическом пространстве BM. Ее координатные функции (y^i, y^i_j) вычисляются по формулам

$$y^i = x^i \circ \pi; \quad y^i_j = g^i_j \circ F_U$$

Докажем, что построенные на BM карты гладко согласованы. Пусть $(\tilde{W}, \tilde{\chi})$ – другая локальная карта в окрестности точки p с координатами $(\tilde{y}^i, \tilde{y}^i_j)$. Пусть ей соответствует локальная карта $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ с координатами $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ в окрестности точки $m = \pi(p)$. Тогда $\tilde{y}^i = \tilde{x}^i \circ \pi$, $\tilde{y}^i_j = g^i_j \circ \tilde{F}_U$. Заметим, что отображение $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$ является диффеоморфизмом областей евклидовых пространств, поскольку эти карты гладко согласованы. Пусть этот диффеоморфизм задается уравнениями $\tilde{x}^i = \alpha^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, n$.
Рассмотрим отображение $\tilde{\chi} \circ \chi^{-1} : \chi(W \cap \tilde{W}) \to \tilde{\chi}(W \cap \tilde{W})$. Получим формулы, задающее это отображение и убедимся, что они гладкие. Имеем $\tilde{y}^i = \tilde{x}^i \circ \pi = \alpha^i(x^1, \ldots, x^n) \circ \pi = \alpha^i(x^1 \circ \pi, \ldots, x^n \circ \pi) = \alpha^i(y^1, \ldots, y^n)$ – гладкое отображение, так как гладким является отображение α.
Далее, обозначим $C = (C^i_k)$ матрицу перехода от натурального репера первой карты к натуральному реперу второй карты. Тогда $\tilde{y}^i_j(p) = g^i_j(\tilde{g}) = g^i_j(Cg) = C^i_k g^k_j = C^i_k g^k_j(g) = C^i_k g^k_j \circ F_U(p) = C^i_k y^k_j$. Итак, формулы перехода от первой ко второй карте имеют вид

$$\tilde{y}^i = \alpha^i(y^1, \ldots, y^n); \quad \tilde{y}^i_j = C^i_k y^k_j$$

Мы получили гладкие функции. Они обратимы, причем обратные функции также являются гладкими. Таким образом, мы построили гладкую структуру на BM, превратив это множество в гладкое многообразие размерности $n^2 + n$.

Заметим, что относительно построенной гладкой структуры отображения π и F_U являются гладкими, так как задаются формулами $x^i = y^i$, $g^i_j = y^i_j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Далее нам нужно показать, что действие группы Ли $GL(n, \mathbf{R})$ гладкое. Заметим, что в построенных картах действие группы Ли $((y^i, y^i_j), g^i_j) \to (\tilde{y}^i, \tilde{y}^i_j)$ задается уравнениями $\tilde{y}^i = y^i$, $\tilde{y}^i_j = y^i_k g^k_j$. Эти функции гладкие, а значит, задают гладкое действие группы $GL(n, \mathbf{R})$ на многообразии BM.

Нам осталось доказать, что $F_U(pg) = F_U(p)g$, $p \in BM$, $g \in GL(n, \mathbf{R})$. Обозначим $h = F_U(p)$. Это означает, что $p_0 h = p$, где p_0 – натуральный репер в точке $m = \pi(p)$. Тогда $pg = (p_0 h)g = p_0(hg)$. В силу определения отображения F_U получим $hg = F_U(pg)$, то есть $F_U(p)g = F_U(pg)$.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что совокупность $\mathcal{B}(M) = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbf{R}))$ образует главное расслоение с базой M, естественной проекцией π, структурной группой $GL(n, \mathbf{R})$ и тотальным пространством расслоения BM. Это главное расслоение называется *главным расслоением реперов над многообразием* M.

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $m \in M$ – произвольная точка, $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ – произвольный репер в точке m. Тогда репер p можно отождествить с линейным изоморфизмом $p : \mathbf{R}^n \to T_m(M)$, действующим по формуле $p(x^1, \ldots, x^n) = x^i e_i$.

Лемма 3.7. (о реперах). При указанном отождествлении правое действие Φ группы Ли $GL(n, \mathbf{R})$ на многообразии M определяется формулой $\Phi(g, p) \equiv pg = p \circ g$.

Доказательство. Пусть $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ – произвольный элемент из BM, $g = (g^i_j) \in GL(n, \mathbf{R})$. Тогда $\Phi(g, p) = (m, g^{i_1}_1 e_{i_1}, \ldots, g^{i_n}_n e_{i_n})$. И значит, если репер pg рассматривать как линейный изоморфизм, то $(pg)(x^1, \ldots, x^n) = x^i g^j_i e_j$. С другой стороны, $p \circ g(x^1, \ldots, x^n) = p(g^1_j x^j, \ldots, g^n_j x^j) = g^i_j x^j e_i$, то есть $pg = p \circ g$. $\square$

3.10 Форма смещения.

На многообразии BM – тотальном пространстве главного расслоения реперов внутренним образом определена гладкая 1-форма ω со значениями в пространстве $\mathbf{R}^n$ по формуле

$$\omega_p(X) = p^{-1} \circ (\pi_*)_p(X)$$

$X \in T_p(BM)$, репер p в правой части формулы рассматривается как линейный изоморфизм. Так как в $\mathbf{R}^n$ фиксирован стандартный базис $(\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n = (0, \ldots, 0, 1))$, форма ω_p вполне

определена своими тензорными компонентами, то есть $\omega(X) = \omega^i(X)\varepsilon_i$, где ω^i – обычные 1-формы, то есть $\omega = \omega^i \otimes \varepsilon_i$.

Нам нужно показать, что форма ω является гладкой. Для этого фиксируем карту (W, χ) в окрестности произвольной точки $p \in BM$ с координатами (y^i, y^i_j) и вычислим компоненты формы $\omega\,|_W$ в натуральном базисе $(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^i_j})$ этой карты. Так как векторные поля $\frac{\partial}{\partial y^i_j}$ являются касательными к слою, то есть вертикальными, $\omega\,|_W\,(\frac{\partial}{\partial y^i_j}) = 0$. Далее, фиксируем точку $p \in W$. Тогда $\omega\,|_W\,(\frac{\partial}{\partial y^i}\,|_p) = p^{-1} \circ (\pi_*)_p(\frac{\partial}{\partial y^i}\,|_p) = p^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{m=\pi(p)})$. Обозначим $e_j = p((0,\dots,0,1,0,\dots,0)) \equiv p(\varepsilon_j)$, $g^{-1} = (g^{-1})^i_j$ – матрица перехода от репера p к натуральному реперу $(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{m=\pi(p)})$. Тогда, продолжая цепочку равенств, получим $\omega\,|_W\,(\frac{\partial}{\partial y^i}\,|_p) = p^{-1}((g^{-1})^j_i e_j) = (g^{-1})^j_i p^{-1}(e_j) = (g^{-1})^j_i \varepsilon_j = g^j_i(g^{-1})\varepsilon_j = g^j_i(F_U(p))^{-1}\varepsilon_j = (g^1_i(F_U(p))^{-1}, \dots, g^n_i(F_U(p))^{-1})$, то есть гладкие функции как композиции таковых.

Итак, доказано, что ω является гладкой формой со значениями в $\mathbf{R}^n$.

Определение 3.23. Построенная 1-форма на многообразии BM называется *формой смещения*.

Теорема 3.17. Форма смещения ω обладает следующими свойствами:
1) ω – горизонтальная форма, то есть обращается в нуль на любом вертикальном векторе;
2) $(R_g)^*\omega = g^{-1} \circ \omega$, $g \in GL(n, \mathbf{R})$.

Доказательство. 1) Очевидно, в силу определения вертикального векторного поля $\pi_* X = 0$, $X \in \mathcal{V}$.
2) $((R_g)^*\omega)_p X = \omega_{pg}((R_g)_* X) = (pg)^{-1} \circ (\pi_*)((R_g)_* X) = g^{-1} \circ p^{-1} \circ (\pi \circ R_g)_* X = g^{-1} \circ \omega_p X$, $X \in T_p(BM)$, $g \in GL(n, \mathbf{R})$. Напомним, что $\pi \circ R_g = \pi$. □

Пусть в расслоении $\mathcal{B}(M)$ фиксирована связность и пусть $\mathcal{H}$ – ее горизонтальное распределение. Фиксируем вектор $\xi \in \mathbf{R}^n$. Рассмотрим произвольный репер $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in BM$. Тогда $p(\xi) \in T_m(M)$. Исходя из понятия горизонтального лифта, заключаем, что существует единственный вектор $(X_\xi)_p \in T_p(BM)$, являющийся горизонтальным лифтом вектора $p(\xi)$, то есть $(\pi_*)_p(X_\xi)_p = p(\xi)$. Возникает векторное поле $X_\xi \in \mathcal{X}(BM)$, состоящее из векторов $(X_\xi)_p$, $p \in BM$. Докажем, что оно гладкое.

Доказательство. Найдем компоненты векторного поля $(X_\xi)\,|_W$ в натуральном базисе. По определению имеем $(X_\xi)^i_j = dy^i_j(X_\xi) = 0$, так как X_ξ состоит из горизонтальных векторов. Далее, пусть $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in BM$ – произвольный репер, тогда $X^i_\xi(p) = dy^i(X_\xi)_p = (X_\xi)_p(y^i) = (X_\xi)_p(x^i \circ \pi) = ((\pi_*)_p(X_\xi)_p)(x^i) = p(\xi)(x^i) = \xi^j e_j(x^i) = \xi^j g^k_j \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \xi^j g^i_j = \xi^j(g^i_j \circ F_U(p))$ – гладкие функции. □

Векторное поле X_ξ называется *базисным векторным полем*, порожденном вектором $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Отметим характеристическое свойство базисных векторных полей, вытекающее из их определения: X – базисное векторное поле тогда и только тогда, когда $\omega(X) = \xi$ – фиксированный вектор в $\mathbf{R}^n$.
Основное свойство базисных векторных полей характеризуется следующим утверждением.

Теорема 3.18. Совокупность $\mathbf{b}$ всех базисных векторных полей на многообразии BM образует n-мерное линейное пространство ($n = dim M$), а форма смещения задает естественный изоморфизм $\omega : \mathbf{b} \to \mathbf{R}^n$ линейных пространств. При этом $(R_g)_* X_\xi = X_{g^{-1}\xi}$.

Доказательство. Заметим, что отображение ω биекция, так как p^{-1} – изоморфизм и $(\pi_*)_p\,|_{\mathcal{H}_p}$ является изоморфизмом линейных пространств. Тогда размерности пространств $\mathbf{b}$ и $\mathbf{R}^n$ равны, то есть $\mathbf{b}$ является n-мерным линейным пространством.
Далее, $\omega((R_g)_* X_\xi) = ((R_g)^*\omega)(X_\xi) = g^{-1} \circ \omega(X_\xi) = g^{-1}\xi = \omega(X_{g^{-1}\xi})$. Так как отображение ω является линейным изоморфизмом, $(R_g)_* X_\xi = X_{g^{-1}\xi}$. □

Теорема 3.19. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $\mathcal{H}$ – горизонтальное распределение некоторой связности на BM. Тогда $C^\infty(BM) \otimes \mathbf{b} = \mathcal{H}$. В частности, горизонтальное распределение $\mathcal{H}$ параллелизуемо, то есть оно допускает глобальный базис, состоящий из необращающихся в нуль векторных полей. При этом $C^\infty(BM) \otimes (\mathbf{f} \oplus \mathbf{b}) = \mathcal{X}(BM)$.

Доказательство. В силу доказанной теоремы любой базис $(\xi_1, \dots, \xi_n) \subset \mathbf{R}^n$ порождает базис $(X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_n}) \subset \mathbf{b}$. Более того, базисные векторные поля не обращаются в нуль ни в одной точке многообразия BM. Это следует из формулы $(R_g)_* X_\xi = X_{g^{-1}\xi}$. Тогда если хотя бы в одной точке слоя базисное векторное поле не обращается в нуль, то есть $(X_\xi)_p \neq 0$, то оно не обращается в нуль в любой точке этого слоя, так как получается из вектора $(X_\xi)_p$ дифференциалом правого сдвига, а это отображение является линейным изоморфизмом. Отсюда следует, что система векторных полей $(X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_n})$ образуют базис горизонтального распределения $\mathcal{H}$. Таким образом, модуль $\mathcal{H}$ параллелизуем.

С другой стороны, как мы знаем, вертикальное распределение $\mathcal{V}$ допускает глобальный базис, состоящий из фундаментальный векторных полей $(X_1^\flat, \ldots, X_{n^2}^\flat)$. Тогда, объединяя два построенных базиса, мы получим базис модуля $\mathcal{X}(BM) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} = C^\infty(BM) \otimes (\mathbf{f} \oplus \mathbf{b})$. $\square$

Следствие. Пространство расслоения реперов над любым гладким многообразием параллелизуемо. (Напомним, что многообразие называется *параллелизуемым*, если его модуль векторных полей допускает глобальный базис.)

Доказательство. Здесь мы исходим из того, что любое главное расслоение допускает связность. $\square$

Пример. Еще одним примером параллелизуемого многообразия является группа Ли, так как $\mathcal{X}(G) = C^\infty(G) \otimes \mathbf{g}$, а алгебра Ли левоинвариантных векторных полей имеет базис, состоящий из $r = dimG$ векторных полей, который и будет базисом модуля $\mathcal{X}(G)$.

3.11 Обобщенная лемма Картана

Теорема 3.20. Пусть $\Lambda(V)$ – внешняя алгебра свободного модуля V с конечным числом образующих. Уравнения $\theta_a \wedge \omega^a = 0$, $a = 1, \ldots, n$, где θ_a – внешние формы произвольной стерени r, ω^a – линейно независимые 1-формы, которые можно дополнить до базиса модуля V^*, выполняются тогда и только тогда, когда $\theta_a = \theta_{ab} \wedge \omega^b$, где $\{\theta_{ab}\}$ – некоторые $(r-1)$- формы, такие, что $\theta_{ab} \wedge \omega^a \wedge \omega^b = 0$.

Доказательство. Условимся, что индексы $a, b, c, \ldots = 1, \ldots, n$; $i, j, k, l, \ldots = 1, \ldots, N = dimV$; $\xi = n+1, \ldots, N$.

$\Leftarrow$). Имеем $\theta_a \wedge \omega^a = \theta_{ab} \wedge \omega^b \wedge \omega^a = 0$.

$\Rightarrow$). Пусть $\theta_a \wedge \omega^a = 0$. Дополним семейство 1-форм $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ до базиса модуля V^* и разложим формы θ_a по этому базису. Полученные слагаемые сгруппируем следующим образом

$$\theta_a = \hat{\theta}_{a1} + \hat{\theta}_{a2} + \ldots + \hat{\theta}_{an}$$

где $\hat{\theta}_{a1}$ состоит из всех мономов, содержащих ω^1; $\hat{\theta}_{a2}$ состоит из всех оставшихся мономов, содержащих ω^2 и так далее.

Очевидно, $\hat{\theta}_{a1} = \theta_{a1} \wedge \omega^1$, причем ни один из мономов, содержащихся в θ_{a1} не содержит ω^1. Аналогично, $\hat{\theta}_{a2} = \theta_{a2} \wedge \omega^2$, причем ни один из мономов, содержащихся в θ_{a2} не содержит ω^1, ω^2 и так далее. Для любого $k_0 = 1, \ldots, N$ имеем $\hat{\theta}_{ak_0} = \theta_{ak_0} \wedge \omega^{k_0}$, причем ни один из мономов, содержащихся в θ_{ak_0} не содержит ω^1, ..., ω^{k_0}. Следовательно, $\theta_a = \theta_{ak} \wedge \omega^k = \theta_{ab} \wedge \omega^b + \theta_{a\xi} \wedge \omega^\xi$. Тогда $0 = \theta_a \wedge \omega^a = \theta_{ab} \wedge \omega^b \wedge \omega^a + \theta_{a\xi} \wedge \omega^\xi \wedge \omega^a$. Таким образом,

$$\theta_{ab} \wedge \omega^b \wedge \omega^a + \theta_{a\xi} \wedge \omega^\xi \wedge \omega^a = 0 \tag{1}$$

Так как ни один из мономов $\theta_{a\xi}$ не содержит форм $\omega^1, \ldots, \omega^n$, то суммы $\theta_{ab} \wedge \omega^a \wedge \omega^b$ и $\theta_{a\xi} \wedge \omega^a \wedge \omega^\xi$ не содержат подобных членов, то в силу линейной независимости базисных форм выражение (1) распадается на два

$$\theta_{ab} \wedge \omega^b \wedge \omega^a = 0 \quad \theta_{a\xi} \wedge \omega^\xi \wedge \omega^a = 0$$

Первое из этих равенств дает утверждение теоремы. Что же касается второго равенства, то так как $\theta_{a\xi}$ не содержит форм $\omega^1, \ldots, \omega^\xi$, то это соотношение равносильно $\theta_{a\xi} = 0$. В самом деле, пусть $\theta_{a\xi} = A_{a\xi i_1 \ldots i_{r-1}} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{r-1}}$, где $i_1, \ldots, i_{r-1} = \xi+1, \ldots, N$. Тогда $0 = \theta_{a\xi} \wedge \omega^a \wedge \omega^\xi = A_{a\xi i_1 \ldots i_{r-1}} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{r-1}} \wedge \omega^a \wedge \omega^\xi$. В силу линейной независимости базисных форм получим $A_{a\xi i_1 \ldots i_{r-1}} = 0$, то есть $\theta_{a\xi} = 0$. $\square$

Следствие 1. (Лемма Картана)

В принятых обозначениях уравнения $\theta_a \wedge \omega^a = 0$, где $a = 1, \ldots, n$, θ_a – 1-формы, ω^a – линейно независимые 1-формы, которые можно дополнить до базиса V^*, выполняются тогда и только тогда, когда $\theta_a = A_{ab}\omega^b$, где $\{A_{ab}\}$ – подходящие скаляры, причем $A_{ab} = A_{ba}$.

Доказательство. Немедленно следует из обобщенной леммы Картана с учетом того, что θ_{ab} будут 0-формами, то есть скалярами, которые мы обозначим A_{ab}, а значит, $\theta_a = A_{ab}\omega^b$. Далее, из соотношения $A_{ab}\omega^a \wedge \omega^b = 0$ в силу линейной независимости базисных форм получим $A_{[ab]} = 0$, то есть $A_{ab} = A_{ba}$. $\square$

Следствие 2. В принятых обозначениях $\theta_{[ab]} \equiv 0 (mod\, \omega^1, \ldots, \omega^n)$.

Доказательство. Обозначим $\hat{\theta}_{ab} \equiv \theta_{ab} (mod \omega^1, \ldots, \omega^n)$, то есть эти формы отличаются на сумму мономов, каждый из которых содержит хотя бы одну из форм $\omega^1, \ldots, \omega^n$. Тогда разложим $(r-1)$-формы

θ_{ab} по базису, порожденному базисом $(\omega^1, \ldots, \omega^N)$ пространства V^*.

$$\theta_{ab} = A_{i_1 \ldots i_{r-1}} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{r-1}}$$

Следовательно, можно считать, что

$$\hat{\theta}_{ab} = A_{\xi_1 \ldots \xi_{r-1} ab} \omega^{\xi_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{\xi_{r-1}}$$

Тогда $0 = A_{\xi_1 \ldots \xi_{r-1} ab} \omega^{\xi_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{\xi_{r-1}} \wedge \omega^b \wedge \omega^a$. Можно считать, что $A_{\xi_1 \ldots \xi_{r-1} ab}$ кососимметричны по индексам $\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}$. Так как ни один из мономов полинома $\hat{\theta}_{ab}$ не содержит форм вида $\omega^1, \ldots, \omega^n$, то в силу линейной независимости базисных форм получим $A_{\xi_1 \ldots \xi_{r-1} ab} = 0$. Значит, $\hat{\theta}_{[ab]} = 0$, следовательно, $\theta_{[ab]} (mod\, \omega^1, \ldots, \omega^n)$. $\square$

Следствие 3. В принятых обозначениях имеем если θ_a – 2-формы, то $\theta_{[ab]} = A_{abc} \omega^c$.

Доказательство. Разложим формы θ_{ab} по базису $(\omega^1, \ldots, \omega^N)$.

$$\theta_{[ab]} = A_{abk} \omega^k = A_{abc} \omega^c + A_{ab\xi} \omega^\xi$$

В силу следствия 2 $A_{ab\xi} \omega^\xi = 0$, то есть $\theta_{[ab]} = A_{abc} \omega^c$. $\square$

3.12 Структурные уравнения главного расслоения реперов.

Переходим к главному расслоению (вещественных) реперов. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие. Фиксируем локальную карту (U, φ) на нем с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Обозначим $W = \pi^{-1}(U)$ – область канонической локальной карты пространства расслоения с координатами (y^i, y^i_j), где $y^i = x^i \circ \pi$, $y^i_j = g^i_j \circ F_U$. Согласно определению главного расслоения $F_U(pg) = F_U(p)g$, $p \in BM$, $g \in GL(n, \mathbf{R})$.

Пусть $X \in \mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ – произвольный элемент, $g(t) = exp\, tX$ – соответствующая ему однопараметрическая подгруппа. Тогда согласно выше сказанному $F_U(pg(t)) = F_U(p)g(t)$. Применяя к обеим частям оператор $\frac{d}{dt}|_{t=0}$, получим

1) $\frac{d}{dt}|_{t=0}\, F_U(pg(t)) = (F_U)_* \frac{d}{dt}|_{t=0}\, pg(t) = (F_U)_* X^\flat_p$.

2) $\frac{d}{dt}|_{t=0}\, F_U(p)g(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, L_{F_U(p)}(g(t)) = (L_{F_U(p)})_* \frac{d}{dt}|_{t=0}\, g(t) = (L_{F_U(p)})_* X_e = X_{F_U(p)}$. Итак, $(F_U)_* X^\flat_p = (L_{F_U(p)})_* X_e = X_{F_U(p)}$ для любой точки $p \in W$, то есть

$$(F_U)_* (X\,|_W) = X\,\Big|_{F_U(W)}$$

Пусть $b = (E^i_j)$ – стандартный базис алгебры Ли $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ структурной группы, полученный разнесением с левых сдвигов стандартного базиса (e^i_j) полной матричной алгебры $M_{n,n}$, то есть базиса $(e^i_j)^k_l = \delta^i_l \delta^k_j$. Этому базису отвечает базис $(\mathcal{E}^i_j)$ линейного пространства $\mathbf{f}$ фундаментальных векторных полей, а также вертикального распределения $\mathcal{V}$, именно,

$$\mathcal{E}^i_j = (E^i_j)^\flat$$

Далее, пусть $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ – стандартный базис арифметического пространства $\mathbf{R}^n$. Ему соответствует система базисных векторных полей $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$, принадлежащая горизонтальному распределению $\mathcal{H}$ (если в расслоении реперов фиксирована связность).

Заметим, что мы находимся в области $W = \pi^{-1}(U)$, причем главное расслоение $(W, U, \pi|_W, GL(n, \mathbf{R}))$ эквивалентно тривиальному. Следовательно, в нем естественно возникает связность, горизонтальное распределение которой образовано n-мерными площадками вида $\mathcal{H}_p = (\psi_U^{-1})_* (T_m(U) \times \{0\})$, где $\psi_U(p) = (m, g)$, $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in BM$, $g = F_U(p)$ – матрица перехода от натурального репера к данному, $m = \pi(p)$.

Задача 3.17. Докажите, что распределение $\mathcal{H}$ является горизонтальным.

Тогда базисные векторные поля $X_{\varepsilon_k} \equiv \mathcal{E}_k$, $k = 1, \ldots, n$ можно взять относительно построенной тривиальной связности.

Вывод: определено два семейства векторных полей, во-первых, фундаментальные векторные поля $\mathcal{E}^i_j = (E^i_j)^\flat$, которые определены на главном расслоении реперов BM глобально и, во-вторых, базисные векторные поля $\mathcal{E}_k$, которые определены только в области W. Эти два семейства векторных полей $(\mathcal{E}^i_j, \mathcal{E}_k)$ определяют базис модуля $\mathcal{X}(W)$. Рассмотрим дуальный базис (ω^i_j, ω^k), $i, j, k = 1, \ldots, n = dim M$ и изучим строение его элементов. Заметим, что по доказанному выше $(F_U)_*(\mathcal{E}^i_j) = E^i_j$ (разумеется

речь идет о векторных полях $\mathcal{E}^i_j\,|_W$). Значит, если (π^i_j) – базис, дуальный базису $b = (E^i_j)$ алгебры Ли $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$, то

$$(F_U)^*\pi^i_j = \omega^i_j$$

Задача 3.18. Докажите.

Лемма 3.8. Во введенных обозначениях $(E^i_j)_g = g^r_j e^i_r$, где $g = (g^i_j) \in GL(n, \mathbf{R})$, $i, j, r = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Мы уже отмечали, что $(e^i_j)^k_m = \delta^i_m \delta^k_j$. Тогда $(E^i_j)_g = (L_g)_*(e^i_j) = g \cdot e^i_j$, где точка обозначает обычное умножение в матричной алгебре. Вычислим компоненты матрицы $(E^i_j)_g$. Имеем $((E^i_j)_g)^k_m = (g \cdot e^i_j)^k_m = g^k_r (e^i_j)^r_m = g^k_r \delta^i_m \delta^r_j = g^k_j \delta^i_m$. С другой стороны, $(g^r_j e^i_r)^k_m = g^r_j (e^i_r)^k_m = g^r_j \delta^i_m \delta^k_r = g^k_j \delta^i_m$. □

Лемма 3.9. Во введенных обозначениях $(\pi^i_j)_e = (dg^i_j)_e$, где $g^i_j(g) = g^i_j$ – координатные функции на слое расслоения.

Доказательство. Имеем (π^i_j) – кобазис, дуальный (E^i_j); $(\pi^i_j)_e$ – кобазис, дуальный $(E^i_j)_e) = (e^i_j) = (\frac{\partial}{\partial g^i_j}\,|_e)$. □

Лемма 3.10. Пусть (e_i) – базис некторого модуля V, (e^i) – соответствующий ему кобазис. Тогда $e^i \otimes e_i = id$.

Доказательство. Имеем $e^i \otimes e_i(X) = e^i(X)e_i = X^i e_i = X$ для любого $X \in V$, то есть $e^i \otimes e_i = id$. □

Вернемся к главному расслоению реперов. С учетом лемм получим $id = (\pi^i_j)_g \otimes (E^j_i)_g = (\pi^i_j)_g \otimes (g^r_i e^j_r) = g^r_i (\pi^i_j)_g \otimes e^j_r$. С другой стороны, так как $(\pi^i_j)_e)$ образуют кобазис, дуальный базису (e^i_j), имеем $id = (\pi^j_i)_e \otimes e^i_j = (dg^i_j)_e \otimes e^i_j$. Следовательно, $g^j_r (\pi^j_i)_g \otimes e^i_j = (dg^j_i)_e \otimes e^i_j$, то есть

$$(dg^j_i)_e = g^j_r (\pi^r_i)_g$$

Обозначим матрицу, обратную матрице g через $g^{-1} = \tilde{g}$. Тогда

$$(\pi^r_i)_g = \tilde{g}^r_j (dg^j_i)_e$$

Лемма 3.11. В принятых обозначениях $(\omega^i_j)_p = \tilde{y}^i_r dy^r_j$, где $\tilde{y}^r_j = (g^{-1})^r_j \circ F_U$.

Доказательство. ?????????????????????????????? □

Более того, эту формулу можно переписать иначе. Заметим, что по определению обратных матриц $\tilde{y}^i_r y^r_j = \delta^i_j$. Применим к обеим частям этого тождества оператор d: $d\tilde{y}^i_r y^r_j + y^i_r \tilde{y}^r_j = 0$, следовательно,

$$(\omega^i_j)_p = -y^r_j d\tilde{y}^i_r \tag{2}$$

Мы выяснили локальное строение двухиндексных форм. Перейдем к изучению локального строения одноиндексных форм ω^i.

Предложение 3.13. Формы ω^i есть ни что иное, как тензорные компоненты $\tilde{\omega}^i$ формы смещения ω относительно стандартного базиса пространства $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Имеем $\omega = \tilde{\omega}^i \otimes \varepsilon_i$. Тогда $(\tilde{\omega}^i)_p(\mathcal{E}_j) = (\omega_p(X_{\varepsilon_j}))^i = (p^{-1} \circ \pi_*(X_{\varepsilon_j}))^i = (\varepsilon_j)^i = \delta^i_j$. С другой стороны, в силу горизонтальности формы смещения $\tilde{\omega}^i_p(\mathcal{E}^k_r) = 0$. Значит, $(\tilde{\omega}^i)$ – элементы кобазиса, дуального базису $(\mathcal{E}^i_j, \mathcal{E}_k)$, то есть $\tilde{\omega}^i = \omega^i$. □

Вычислим компоненты форм ω^i в натуральном базисе $(\frac{\partial}{\partial y^j})$. Имеем $\omega^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \omega^i(\tilde{y}^k_j \mathcal{E}_k) = \tilde{y}^k_j \omega^i(\mathcal{E}_k) = \tilde{y}^i_j$. Так как компоненты формы в натуральном базисе совпадают с ее координатами в кобазисе (dy^i), то

$$\omega^i = \tilde{y}^i_j dy^j$$

Продифференцируем это соотношение внешним образом с учетом формулы (2) $d\omega^i = d\tilde{y}^i_j \wedge dy^j = -\tilde{y}^r_j \omega^i_r \wedge dy^j = -\omega^i_r \wedge (\tilde{y}^r_j dy^j) = -\omega^i_r \wedge \omega^r$. Итак, мы получили

$$d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j$$

Эти соотношения называются *первой группой структурных уравнений* главного расслоения (вещественных) реперов.

Замечание. Обратим внимание, что в отличие от случая произвольного главного расслоения, формы ω^i_j определены однозначно.

Формы (ω^i_j, ω^k) образуют локальный базис модуля $\mathcal{X}(BM)$, который является дифференциальной алгеброй относительно операции внешнего дифференцирования. Чтобы иметь полную информацию об этой дифференциальной алгебре, нужно научиться дифференцировать любые дифференциальные формы любой степени, а для этого в силу свойств оператора внешнего дифференцирования, достаточно научиться дифференцировать базисные 1-формы, то есть формы ω^i_j и ω^i. Дифференцирование одноиндексных форм описаны в первой группе структурных уравнений. Чтобы найти формулу для внешнего дифференцирования двухиндексных форм, воспользуемся так называемой процедурой *дифференциального продолжения* первой группы структурных уравнений главного расслоения реперов.

Продифференцируем внешним образом первую группу структурных уравнений расслоения реперов: $0 = -d\omega^i_j \wedge \omega^j + \omega^i_j \wedge d\omega^j = -d\omega^i_j \wedge \omega^j - \omega^i_j \wedge \omega^j_k \wedge \omega^k$. Тогда

$$(d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j) \wedge \omega^j = 0 \tag{3}$$

Обозначим $\Delta\omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$ – два формы. ω^i – линейно независимые 1-формы и $\Delta\omega^i_j \wedge \omega^j = 0$. Тогда по следствию из обобщенной леммы Картана получим, что $\Delta\omega^i_j = \omega^i_{jk} \wedge \omega^k$, где (ω^i_{jk}) – локально определенные 1-формы на многообразии BM. При этом $\omega^i_{[ik]} = A^i_{jkl}\omega^l$, где $\{A^i_{jkl}\}$ – локально определенные гладкие функции на многообразии BM. С учетом определения $\Delta\omega^i_j$ получим

$$d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_{jk} \wedge \omega^k$$

Эти уравнения называются *второй группой структурных уравнений* главного расслоения реперов.

Итак, полная группа структурных уравнений главного расслоения реперов имеет вид

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j \\ d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_{jk} \wedge \omega^k \end{cases}$$

где $\omega^i_{[jk]} = A^i_{jkl}\omega^l$, $\{A^i_{jkl}\}$ – локально определенная система гладких функций на многообразии BM.

В этих уравнениях содержится вся информация о дифференциальной алгебре главного расслоения реперов, а значит, и о геометрии этого расслоения, в частности, в них содержится вся информация о геометрии исходного многообразия M.

3.13 Основная теорема тензорного анализа.

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие. Фиксируем точку $m \in M$. Тогда на многообразии $\pi^{-1}(m) \subset BM$ внутренним образом определены n функций $\{e_1, \ldots, e_n\}$ со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$, а именно, функция e_i сопрставляет точке $p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in \pi^{-1}(m)$ вектор e_i, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что в канонической карте (W, χ) имеем $e_i(p) = y^j_i e^0_j$, где $e^0_j = \frac{\partial}{\partial x^j}|_m$ – векторы натурального репера. Следовательно, отображение $e_i \circ \chi^{-1} : \mathbf{R}^{n^2+n} \to \mathbf{R}^n$ задается уравнениями $(e_i)^j = y^j_i$ – гладкие функции, то есть отображения e_i являются гладкими. Продифференцируем эту функцию внешним образом: $de_i = dy^j_i \otimes e^0_j = dy^j_i \otimes \tilde{y}^k_j e_k = \omega^k_i \otimes e_k$. Итак,

$$de_i = \omega^k_i \otimes e_k$$

Эта формула имеет смысл лишь на многообразии $W = \pi^{-1}(U)$. Аналогично, на многообразии $W = \pi^{-1}(U)$ определены n функций $\{e^1, \ldots, e^n\}$ со значениями в пространстве $T^*_m(M)$. А именно, функция e^i сопоставляет реперу $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ i-й вектор дуального корепера. Очевидно, в карте (W, χ) эти функции задаются уравнениями

$$e^i(p) = \tilde{y}^i_j e^j_0 \tag{4}$$

где $e^j_0 = dx^j$, $j = 1, \ldots, n$ – ковекторы корепера, дуального натуральному реперу. Следовательно, отображение $(e^i \circ \chi^{-1})$ задается уравнениями $(e^i)_j = \tilde{y}^i_j$, то есть вектор-функции e^i – гладкие функции. Дифференцируя соотношение (4), получим $de^i = d\tilde{y}^i_j \otimes y^j_k e^k = -\omega^i_k \otimes e^k$. Итак,

$$de^i = -\omega^i_k \otimes e^k$$

Пусть t – тензорное поле типа (r, s) на многообразии M. Оно порождает семейство функций $\{t^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\}$ на многообразии BM, определенных формулой

$$t^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(p) = (t_{\pi(p)})^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = (t_{\pi(p)})(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_s})$$

$p = (m, e_1, \ldots, e_n) \in BM$. Покажем, что эти функции гладкие. В карте (W, χ) имеем

$$t^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = y^{k_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot y^{k_r}_{i_r} \tilde{y}^{j_1}_{m_1} \cdot \ldots \cdot y^{j_s}_{m_s} (\hat{t}^{m_1 \ldots m_s}_{k_1 \ldots k_r} \circ \pi)$$

где $\hat{t}^{m_1 \ldots m_s}_{k_1 \ldots k_r} = (t_{\pi(p)}) \left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{k_r}}, dx^{m_1}, \ldots, dx^{m_s} \right)$. Эти функции являются гладкими как композиция таковых.

Пусть, в частности, $X \in \mathcal{X}(M)$, то есть тензор типа (0,1), $\{X^i\}$ – соответствующие гладкие функции на многообразии BM. Фиксируем точку $m \in M$. Тогда на подмногообразии $\pi^{-1}(m) \subset BM$ внутренним образом порождается функция $X_m : \pi^{-1}(m) \to T_m(M)$ со значениями в касательном пространстве $T_m(M)$. В точке $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ она определяется формулой

$$X_m(p) = X^i(p) e_i$$

Очевидно, что эта функция постоянная, так как ее значение в точке p равно значению векторного поля X в точке $m = \pi(p)$. Применим к этой функции оператор внешнего дифференцирования. Получим $0 = d(X_m) = dX^i(p) \otimes e_i + X^i(p) de_i = dX^i(p) \otimes e_i + X^i(p) \omega^j_i \otimes e_j = (dX^i(p) + X^j(p) \omega^i_j) \otimes e_i$. В силу линейной независимости базисных векторов, получим $dX^i + X^j \omega^i_j = 0$. Напомним, что эта формула верна только на слое $\pi^{-1}(m)$. Итак,

$$\left(dX^i + X^j \omega^i_j \right) \Big|_{\pi^{-1}(m)} = 0$$

Мы получили, что формы $\left(dX^i + X^j \omega^i_j \right)$ аннулируются на интегральных подмногообразиях вертикального распределения. Следовательно, эти формы принадлежат кораспределению $\mathcal{C}_\mathcal{V}$, ассоциированному вертикальному распределению, а значит, раскладываются по базисным формам ассоциированного кораспределения $\mathcal{C}_\mathcal{V}$, то есть по формам Пфаффа (ω^i). С учетом этого в области W имеем $dX^i + X^j \omega^i_j = X^i{}_j \omega^j$, где $\{X^i{}_j\} \subset C^\infty(W)$ – некоторые подходящие функции. Итак, мы доказали

Предложение 3.14. Функции $\{X^i\}$, определенные на многообразии BM векторным полем X, удовлетворяют системе уравнений вида

$$dX^i + X^j \omega^i_j = X^i{}_j \omega^j \tag{5}$$

где $\{X^i{}_j\} \subset C^\infty(W)$ – некоторые подходящие функции. □

Обратно, пусть задана система гладких функций $\{X^i\}$, $i = 1, \ldots, n$ на многообразии BM, которая в каждой канонической координатной окрестности (W, χ) удовлетворяет уравнениям (5). Фиксируем точку $m \in M$. Получим, что на подмногообразии $\pi^{-1}(m)$, которое задается уравнениями $\omega^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, эти соотношения принимают вид $dX^i + X^j \omega^i_j = 0$, то есть $dX^i + X^j \tilde{y}^i_k dy^k_j = 0$, то есть $y^k_i dX^i + X^j dy^k_j = 0$ или $d(y^k_j X^j) = 0$. Откуда следует, что $y^i_j X^j = const$, $i, j = 1, \ldots, n$, а именно, $y^i_j X^j = X^i_0$, где $\{X^i_0 = X^i(p_0)\}$ – значения данных функций в натуральном репере. Это дает возможность корректно определить вектор $X_m \in T_m(M)$ по формуле $X_m = X^i(p) e_i$, где $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ – произвольная точка из $\pi^{-1}(m)$. Действительно, пусть точка $q \in \pi^{-1}(m)$ – другая точка слоя. Тогда $X^i(q) \hat{e}_i = X^i(q) y^j_i(q) e^0_j = X^j(p_0) e^0_j$. С другой стороны, $X^i(p) e_i = X^i(p) y^j_i(p) e^0_j = X^j(p_0) e^0_j$. Таким образом, $X^i(q) \hat{e}_i = X^i(p) e_i$ и вектор X_m определен корректно.

Семейство векторов $X = \{X_m\}$ образуют гладкое векторное поле на многообразии M. В самом деле, фиксируем натуральное сечение (то есть сечение, которое ставит в соответствие каждой точке m из U натуральный репер в этой точке) $s : U \to BM$ – локальное сечение главного расслоения BM над координатной окрестностью (оно существуют в силу локальной тривиальности главного расслоения). Тогда компоненты векторного поля X в натуральном базисе имеют вид $\hat{X}^i(m) = X^i(p_0) = X^i \circ s(m)$, то есть гладкие функции как композиция таковых. Следовательно, компоненты семейства векторов X явяются гладкими функциями, а значит, X является гладким векторным полем. Тем самым доказана следующая теорема

Теорема 3.21. Задание векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ на гладком многообразии M равносильно заданию семейства гладких функций $\{X^i\}$ на пространстве расслоения всех (вещественных) реперов BM, удовлетворяющих уравнениям (5). □

Аналогичным образом доказывается теорема

Теорема 3.22. Задание ковекторного поля $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$ на гладком многообразии M равносильно заданию семейства гладких функций $\{u_i\}$ на пространстве расслоения всех (вещественных) реперов BM, удовлетворяющих уравнениям

$$du_i - u_j \omega^j_i = u_{ij} \omega^j \tag{6}$$

где $\{u_{ij}\}$ – система подходящих гладких функций на многообразии W. $\square$

Фиксируем поле тензора t типа (r,s) на многообразии M. Оно индуцирует семейство гладких функций $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$ на многообразии BM по формуле

$$t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}(p) = t_{\pi(p)}(e_{i_1},\dots,e_{i_r},e^{j_1},\dots,e^{j_s})$$

Фиксируем r векторных полей $X_1,\dots,X_r \in \mathcal{X}(M)$ и s ковекторных полей $u^1,\dots,u^s \in \mathcal{X}^*(M)$. Пусть $\{X^{i_k}_{(k)}\}$ и $\{u^{(m)}_{i_m}\}$ соответствующие им гладкие функции на многообразии BM, $k=1,\dots,r$, $m=1,\dots,s$. Тогда на многообразии BM определена гладкая функция

$$t(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)(p) = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}X^{i_1}_{(1)}\dots X^{i_r}_{(r)}u^{(1)}_{j_1}\dots u^{(s)}_{j_s}(p)$$

Очевидно, что эта функция постоянна на слоях расслоения реперов (по сути значение этой функции в репере p есть значение действия тензорного поля t на наборе векторных и ковекторных полей, взятое в точке $m=\pi(p)$). Рассмотрим сужение этой функции на слой расслоения и применим оператор внешнего дифференцирования: $dt(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)=0$. С другой стороны, с учетом определения этой функции получим $dt(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s) = d(t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r})X^{i_1}_{(1)}\dots X^{i_r}_{(r)}u^{(1)}_{j_1}\dots u^{(s)}_{j_s} + t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}dX^{i_1}_{(1)}X^{i_2}_{(2)}\dots u^{(s)}_{j_s} + \dots + t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}X^{i_1}_{(1)}\dots u^{(s-1)}_{j_{s-1}}du^{(s)}_{j_s}$. Подставим (5) и (6) (суженные на подмногообразие $\pi^{-1}(m)$), получим $dt(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s) = \Delta t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}X^{i_1}_{(1)}\dots X^{i_r}_{(r)}u^{(1)}_{j_1}\dots u^{(s)}_{j_s}(p)$, где $\Delta t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} + t^{kj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_1}_k + \dots + t^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_s}_k - t^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_r}\omega^k_{i_1} - \dots - t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r}$. Откуда получаем $\Delta t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}X^{i_1}_{(1)}\dots X^{i_r}_{(r)}u^{(1)}_{j_1}\dots u^{(s)}_{j_s}\Big|_{\pi^{-1}(m)} = 0$. В силу произвола в выборе аргументов $X_{(i)}$, $u^{(j)}$ получаем $\Delta t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\Big|_{\pi^{-1}(m)} = 0$. Следовательно, 1-формы $\Delta t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$ принадлежат кораспределению, ассоциированному с вертикальным распределением, а значит, раскладываются по базису этого кораспределения, то есть

$$\Delta t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\omega^k \tag{7}$$

где $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\}$ – подходящие гладкие функции на на области канонической карты W.

Обратно, пусть на BM задана система гладких функций $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$, в каждой координатной окрестности W удовлетворяющих уравнениям (7). Как и выше сужение этих соотношений на подмногообразие $\pi^{-1}(m)$ принимает вид $\Delta t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}=0$. Мы получим $d(t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}X^{i_1}_{(1)}\dots X^{i_r}_{(r)}u^{(1)}_{j_1}\dots u^{(s)}_{j_s})=0$, то есть $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}X^{i_1}_{(1)}\dots X^{i_r}_{(r)}u^{(1)}_{j_1}\dots u^{(s)}_{j_s} = const$. Это позволяет в касательных пространствах $T_m(M)$, $m\in M$ корректно определить тензоры t_m типа (r,s) по формуле $t_m(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s) = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}X^{i_1}_{(1)}\dots X^{i_r}_{(r)}u^{(1)}_{j_1}\dots u^{(s)}_{j_s}$. Семейство $t=\{t_m, m\in M\}$ образует гладкое тензорное поле типа (r,s) на многообразии M. В самом деле, компоненты этого семейства в любой карте (U,φ) с координатами $(x^1,\dots,x^n)$ имеет вид $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}(m) = t_m\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},dx^{j_1},\dots,dx^{j_s}\right) = t_m(e_{i_1}\circ s,\dots,e_{i_r}\circ s,e^{j_1}\circ s,\dots,e^{j_s}\circ s)(m)$, где $s:U\to BM$ – натуральное сечение, e_i, e^k – гладкие функции на пространстве расслоения реперов, построенные выше. Таким образом, функции $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}(m)$ являются гладкими, а значит, совокупность тензоров задает гладкое тензорное поле.

Итак, мы доказали

Теорема 3.23. (основная теорема тензорного анализа)
Задание тензорного поля типа (r,s) на гладком многообразии M равносильно заданию системы гладких функций $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$ на многообразии BM, удовлетворяющий в любой координатной окрестности (W,χ) соотношениям $dt^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} + t^{kj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_1}_k + \dots + t^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}\omega^{j_s}_k - t^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_r}\omega^k_{i_1} - \dots - t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r} = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}$, где $\{t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r k}\}$ – подходящая система гладких функций в области W. $\square$