6 Почти комплексные структуры.

6.1 Тензорное произведение модулей.

Пусть A и B – модули над коммутативным ассоциативным кольцом K. Обозначим пару (a,b), $a \in A$, $b \in B$ символом $a \circ b$. Тогда множество таких символов является системой образующих некоторой свободной абелевой группы, которую мы обозначим $A \circ B$. Ее элементами служат конечные формальные суммы вида

$$a_1 \circ b_1 + \ldots + a_N \circ b_N$$

где N – не фиксированное натуральное число. Под суммой записей такого вида понимается последовательная их запись, соединенная символом "+". Если $z = a_1 \circ b_1 + \ldots + a_{N_1} \circ b_{N_1}$, $w = c_1 \circ d_1 + c_2 \circ d_2 + \ldots + c_{N_2} \circ d_{N_2}$, то по определению

$$z + w = a_1 \circ b_1 + \ldots + a_{N_1} \circ b_{N_1} + c_1 \circ d_1 + c_2 \circ d_2 + \ldots + c_{N_2} \circ d_{N_2}$$

порядок расстановки слагаемых не существенен (по определению), следовательно, операция коммутативна и ассоциативна.

Выделим в множестве $A \circ B$ подмножество, порожденное символами вида

$$(a_1 + a_2) \circ b + (-a_1) \circ b + (-a_2) \circ b \quad a \circ (b_1 + b_2) + (-a) \circ b_1 + (-a) \circ b_2 \quad (ra) \circ b + a \circ (-rb)$$

$r \in K$. Обозначим это подмножество H и рассмотрим фактормножество $(A \circ B)/H$, которое обозначим $A \otimes B$. Если $\pi : A \circ B \to (A \circ B)/H$ – естественная проекция, ставящая в соответствие элементу $a \circ b$ элемент $a \circ b + H$, то будем обозначать элемент $a \circ b + H = a \otimes b$. Таким образом, множество $A \otimes B$ состоит из конечных формальных сумм вида $a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_N \otimes b_N$. Оно называется *тензорным произведением* модулей A и B.

Замечание. Из определения фактормножества следует, что мы имеем отождествления элементов $(a_1+a_2)\circ b = a_1 \circ b + a_2 \circ b$, $a \circ (b_1+b_2) = a \circ b_1 + a \circ b_2$, $(ra) \circ b = a \circ (rb)$, то есть $(a_1+a_2)\circ b + H = a_1 \circ b + a_2 \circ b + H$, $a \circ (b_1 + b_2) + H = a \circ b_1 + a \circ b_2 + H$, $(ra) \circ b + H = a \circ (rb) + H$.

Предложение 6.1. Множество $A \otimes B$ обладает структурой K-модуля.

Доказательство. Введем во множестве $A \otimes B$ операции сложения и умножения на элемент из кольца K. Положим по определению $a \otimes b + c \otimes d = a \circ b + c \circ d + H$, $r(a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_N \otimes b_N) = (ra_1) \otimes b_N + \ldots + (ra_N) \otimes b_N$.

Коммутативность и ассоциативность операции сложения очевидна. В качестве нейтрального по сложению возьмем элемент $0 \otimes 0 = 0 \circ 0 + H$. Проверим, что этот элемент действительно будет нейтральным. Чтобы доказать это утверждение для произвольного элемента из $A \otimes B$ (то есть формальной суммы элементов вида $a \otimes b$), нам достаточно рассмотреть одно слагаемое вида $c \otimes d$. Для любого $c \otimes d \in A \otimes B$ имеем $c \otimes d + 0 \otimes 0 = c \circ d + 0 \circ 0 + H = c \circ d + (c + (-c)) \circ 0 + H = c \circ d + c \circ 0 + (-c) \circ 0 + H = c \circ (d + 0) + c \circ (-1 \cdot 0) + H = c \circ d + c \circ 0 + H = c \circ (d + 0) + H = c \otimes d$. В качестве симметричного для элемента $c \otimes d$ возьмем элемент $(-c) \otimes d$. Действительно, $c \otimes d + (-c) \otimes d = c \circ d + (-c) \circ d + H = 0 \circ d + H = (0 \cdot 0) \circ d + H = 0 \circ (0 \cdot d) + H = 0 \circ 0 + H = 0 \otimes 0$. Итак, мы доказали, что $A \otimes B$ – абелева группа по сложению.

Далее, докажем, что $(ra) \otimes b = a \otimes (rb)$. Действительно, $(ra) \otimes b = (ra) \circ b + H = a \circ (rb) + H = a \otimes (rb)$.

Наконец, проверим оставшиеся аксиомы модуля.

Докажем, что $(r_1 + r_2)a \otimes b = r_1(a \otimes b) + r_2(a \otimes b)$. Действительно, $(r_1 + r_2)(a \otimes b) = ((r_1 + r_2)a) \otimes b = (r_1 a + r_2 a) \otimes b = (r_1 a + r_2 a) \circ b + H = (r_1 a) \circ b + (r_2 a) \circ b + H = (r_1 a) \circ b + H + (r_2 a) \circ b + H = (r_1 a) \otimes b + (r_2 a) \otimes b = r_1(a \otimes b) + r_2(a \otimes b)$.

Докажем, что $r_1(r_2(a \otimes b)) = (r_1 r_2)a \otimes b$. Действительно, $r_1(r_2(a \otimes b)) = r_1((r_2 a) \otimes b) = ((r_1 r_2)a) \otimes b = (r_1 r_2)(a \otimes b)$. Итак, тензорное произведение K-модулей A и B является K-модулем. □

Замечание. Пусть K-модуль A обладает еще дополнительной структурой K_1-модуля. Тогда в K-модуле $A \otimes B$ можно ввести структуру K_1-модуля, положив $z(a \otimes b) = (za) \otimes b$, $z \in K_1$. Отметим, что при этом не имеет смысла равенство $(za) \otimes b = a \otimes (zb)$!

В частности, если K-модуль A является алгеброй (любая алгебра является модулем над самой собой, то есть A-модулем), то $A \otimes B$ является A-модулем.

6.2 Комплексификация модуля над вещественной алгеброй.

Пусть A – вещественная алгебра, то есть алгебра над полем вещественных чисел (например, алгебра гладких функций на многообразии M), V – A-модуль (например, модуль гладких векторных полей на многообразии M). Очевидно, что V является $\mathbf{R}$-линейным пространством, в частности, $\mathbf{R}$-модулем. С другой стороны, рассмотрим поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, которое также является $\mathbf{R}$-модулем. Следовательно, можно рассмотреть тензорное произведение этих модулей, которое будет $\mathbf{R}$-модулем и $\mathbf{C}$-модулем, так как поле комплексных чисел является модулем над собой. Это тензорное произведение $\mathbf{C} \otimes V$ обозначается $V^{\mathbf{C}}$ и называется *комплексификацией* модуля V.

Согласно определению элементами комплексификации $V^{\mathbf{C}}$ являются классы формальных записей вида $\sum_{k=1}^{N} z_k \otimes X_k$, $z_k \in \mathbf{C}$, $X_k \in V$. Договоримся опускать знак $\otimes$ и писать $Y = \sum_{k=1}^{N} z_k X_k + H \in V^{\mathbf{C}}$. Более того, будем опускать знак $+H$, помня, что в формальной сумме мы имеем отождествления $(z_1+z_2)X = z_1X + z_2X$; $z(X_1+X_2) = zX_1+zX_2$; $(rz)X = z(rX)$, $r \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{C}$. Напомним, что операция умножения на комплексное число в $V^{\mathbf{C}}$ определяется следующим образом: $z\sum_{k=1}^{N} z_k X_k = \sum_{k=1}^{N}(zz_k)X_k$.

В $\mathbf{C}$-модуле V внутренним образом определен оператор $\tau : V^{\mathbf{C}} \to V^{\mathbf{C}}$ по формуле $\tau(\sum_{k=1}^{N} z_k X_k) = \sum_{k=1}^{N} \bar{z}_k X_k$, где черта обозначает комплексное сопряжение. Этот оператор называется *оператором комплексного сопряжения.*

Предложение 6.2. Оператор комплексного сопряжения обладает следующими свойствами:
1) $\tau(U+V) = \tau(U) + \tau(V)$, $U, V \in V^{\mathbf{C}}$ (аддитивность);
2) $\tau(zU) = \bar{z}\tau(U)$, $U \in V^{\mathbf{C}}$, $z \in \mathbf{C}$ (антилинейность);
3) $\tau^2 = id$ (инволютивность).

Доказательство. 1) $\tau(U+V) = \tau(\sum_{k=1}^{N_1} z_k X_k + \sum_{l=1}^{N_2} z'_l X'_l) = \sum_{k=1}^{N_1} \bar{z}_k X_k + \sum_{l=1}^{N_2} \bar{z}'_l X'_l = \tau(U) + \tau(V)$. Остальные свойства доказываются аналогично (докажите самостоятельно). □

A-модуль V, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, естественным образом вкладывается в свою комплексификацию $V^{\mathbf{C}}$ по формуле $i(X) = 1X$, $X \in V$. Очевидно, что это отображение инъективно, а значит, элемент $i(X) \in V^{\mathbf{C}}$ можно отождествить с элементом $X \in V$ и, соответственно, рассматривать V как подмножество в $V^{\mathbf{C}}$.

Задача 6.1. Докажите, что для элементов из V имеем $\tau(X) = X$. Здесь элемент X мы отождествили с элементом $i(X)$.

Оказывается, верно и обратное

Теорема 6.1. При сделанных отождествлениях V можно рассматривать как подмножество $V = \{U \in V^{\mathbf{C}} | \tau(U) = U\}$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что если $\tau(U) = U$, то $U \in V$. Обозначим $U = \sum_{k=1}^{N} z_k X_k$, $z_k = \alpha_k + \sqrt{-1}\beta_k$. Тогда равенство $\tau(U) = U$ запишется в виде $\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k - \sqrt{-1}\beta_k)X_k = \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k + \sqrt{-1}\beta_k)X_k$, то есть $\sum_{k=1}^{N}(\sqrt{-1}\beta_k X_k = 0$, следовательно, $U = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k X_k \in V$. □

6.3 Альтернативное определение комплексификации.

Введенное выше определение комплексификации хотя и является общепринятым, носит числт алгебраический характер и с трудом поддается геометрическому осмыслению. Можно привести другое – чисто геометрическое определение комплексификации, которое оказывается эквивалентно приведенному выше.

Пусть как и выше V – A-модуль, где A – вещественная алгебра. Рассмотрим множество

$$W = V \times V = \{(X, Y) | X, Y \in V\}$$

Введем в W структуру $\mathbf{C}$-модуля, положив
1) $U + V = (X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)$, где $U = (X_1, Y_1)$, $V = (X_2, Y_2) \in W$;
2) $zU = (\alpha X - \beta Y, \beta X + \alpha Y)$, где $U = (X, Y)$, $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$.

Предложение 6.3. Введенные операции превращают множество W в $\mathbf{C}$-модуль.

Доказательство. Коммутативность и ассоциативность сложения следует из коммутативности и ассоциативности операции сложения в модуле V. Нейтральным по сложению будет элемент $(0, 0)$. Противоположным для элемента (X, Y) будет элемент $(-X, -Y)$.

Докажем, что $(z + \tilde{z})U = zU + \tilde{z}U$. Обозначим $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$, $\tilde{z} = \tilde{\alpha} + \sqrt{-1}\tilde{\beta}$, $U = (X, Y)$. Тогда $(z+\tilde{z})U = (\alpha+\tilde{\alpha}+\sqrt{-1}(\beta+\tilde{\beta})(X, Y) = ((\alpha+\tilde{\alpha})X - (\beta+\tilde{\beta})Y, (\beta+\tilde{\beta})X + (\alpha+\tilde{\alpha})Y)$. С другой стороны, $zU + \tilde{z}U = (\alpha X - \beta Y, \beta X + \alpha Y) + (\tilde{\alpha}X - \tilde{\beta}Y, \tilde{\beta}X + \tilde{\alpha}Y) = ((\alpha+\tilde{\alpha})X - (\beta+\tilde{\beta})Y, (\beta+\tilde{\beta})X + (\alpha+\tilde{\alpha})Y)$. Итак, $(z + \tilde{z})U = zU + \tilde{z}U$.

Задача 6.2. Проверьте самостоятельно остальные аксиомы.

Оказывается, что $\mathbf{C}$-модуль W канонически изоморфен модулю $V^{\mathbf{C}}$, а именно, построим отображение $f : V^{\mathbf{C}} \to W$, положив

$$f\left(\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k + \sqrt{-1}\beta_k)X_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k X_k, \sum_{k=1}^{N}\beta_k X_k\right)$$

Задача 6.3. Докажите, что отображение f является изоморфизмом $\mathbf{C}$-модулей.

Проверим, как на языке альтернативного определения комплексификации работают приведенные выше конструкции.

1) Вложение модуля V в W. Если $X \in V$, то $X = 1X = (1 + \sqrt{-1}0)X$, следовательно, $f(1X) = (X, 0)$, то есть элемент $X \in V$ отождествляется с элементом $(X, 0) \in W$.

2) Оператор комплексного сопряжения $\tilde{\tau}$.

Определим оператор $\tilde{\tau} = f \circ \tau \circ f^{-1}$. Выясним, как он действует. Пусть $U = (X, Y) \in W$. Тогда $\tilde{\tau}(U) = f \circ \tau \circ f^{-1}(U) = f \circ \tau(X + \sqrt{-1}Y) = f(X - \sqrt{-1}Y) = (X, -Y)$. Договоримся обозначать оператор комплексного сопряжения в модуле W через τ. Тогда

$$\tau\left((X, Y)\right) = (X, -Y)$$

Задача 6.4. Прямыми вычислениями докажите, что оператор комплексного сопряжения в модуле W аддитивен, антилинеен и инволютивен. (Заметим, что данные свойства переносятся автоматически с оператора комплексного сопряжения в $V^{\mathbf{C}}$, так как отображение f является изоморфизмом $\mathbf{C}$-модулей)

6.4 Комплексные структуры.

Определение 6.1. Пусть V – модуль над коммутативной ассоциативной вещественной алгеброй с единицей K. *Комплексной структурой* на V называется эндоморфизм (то есть линейный оператор) $J : V \to V$ такой, что $J^2 = -id$. Такой эндоморфизм называют *антиинволютивным*.

Если K-модуль V допускает комплексную структуру J (а это, как мы увидим, бывает далеко не всегда), то в V внутренним образом возникает структура $\mathbf{C}$-модуля, определяемая операцией умножения на комплексные числа по формуле

$$(\alpha + \sqrt{-1}\beta)X = \alpha X + \beta JX;\ X \in V \tag{1}$$

Задача 6.5. Докажите, что V со введенной операцией умножения на комплексные числа является $\mathbf{C}$-модулем, то есть комплексным линейным пространством.

Обратно, если задан $\mathbf{C}-$ модуль V комплексной размерности n, то линейный эндоморфизм $J : V \to V$, определенный по формуле

$$J(X) = \sqrt{-1}X \quad X \in V$$

определяет комплексную структуру V как $2n-$ мерного $\mathbf{R}-$ модуля. При этом с помощью построенного эндоморфизма J по формуле (5) на V^{2n} определяется исходная структура $\mathbf{C}-$ модуля.

Пример. Пусть $\mathbf{C}^n$ комплексное векторное пространство $n-$ наборов комплексных чисел $Z = (z^1, \ldots, z^n)$. Положим $z^k = x^k + iy^k$, $x^k, y^k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\mathbf{C}^n$ может быть отождествлено с вещественным векторным пространством $\mathbf{R}^{2n}$ всех наборов вещественных чисел $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$. В дальнейшем, если не указано противное, отождествление $\mathbf{C}^n$ с $\mathbf{R}^{2n}$ всегда будет производиться при помощи соответствия $(z^1, \ldots, z^n) \to (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$. Комплексная структура для $\mathbf{R}^{2n}$, индуцированная из комплексной структуры для $\mathbf{C}^n$, отображает $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ в $(y^1, \ldots, y^n, -x^1, \ldots, -x^n)$ и называется *канонической комплексной структурой* для $\mathbf{R}^{2n}$. В терминах естественного базиса в $\mathbf{R}^{2n}$ она задается матрицей

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

где через I_n обозначена единичная матрица порядка n. $\square$

Лемма 6.1. Пусть J и J' – комплексные структуры на $\mathbf{R}-$ модулях V и V' соответственно. Если мы рассматриваем V и V' как $\mathbf{C}-$ модули (комплексная структура которых определена как было построено выше), то вещественное линейное отображение $f : V \to V'$ будет комплексно линейным тогда и только тогда, когда $J' \circ f = f \circ J$.

Доказательство. Аддитивность отображения f одинакова в обоих случаях.
Пусть f $\mathbf{R}-$ линейно и выполнено условие $J' \circ f = f \circ J$. Докажем, что оно $\mathbf{C}-$ однородно. Действительно, пусть $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbf{C}$, $X \in V$. Тогда $f(zX) = f(xX + yJX) = xf(X) + yf(J(X)) = xf(X) + yJ'f(X) = zf(X)$.
Обратно, пусть f $\mathbf{R}-$ линейно и $\mathbf{C}-$ линейно. Тогда для любого $X \in V$ имеем $f(J(X)) = f(\sqrt{-1}X) = \sqrt{-1}f(X) = J'(f(X))$. $\square$

Фиксация комплексной структуры в модуле V определяет дополнительную специфику структуры его комплексификации $V^{\mathbf{C}}$. Заметим, прежде всего, что всякий эндоморфизм $f : V \to V$ модуля V канонически расширяется до эндоморфизма $f^{\mathbf{C}} = id \otimes f : V^{\mathbf{C}} \to V^{\mathbf{C}}$ по формуле

$$f^{\mathbf{C}}\left(\sum_{k=1}^{N} z_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{N} z_k f(X_k)$$

Он называется *комплексным расширением* эндоморфизма f. В альтернативной записи $f^{\mathbf{C}}((X,Y)) = (f(X), f(Y))$, $(X,Y) \in W$.

Задача 6.6. Докажите, что $f^{\mathbf{C}}(zU) = zf^{\mathbf{C}}(U)$, $U \in V^{\mathbf{C}}$, $z \in \mathbf{C}$, то есть комплексное расширение эндоморфизма f $\mathbf{C}$-линейно (проверьте для прямого и альтернативного определения).

Замечание. В дальнейшем вместо $f^{\mathbf{C}}$ мы часто будем писать просто f, указывая на элементах какого пространства будет действовать рассматриваемый эндоморфизм.

Введем общее понятие комплексфикации тензорного поля. Пусть дан $K-$ модуль V над вещественной ассоциативной коммутативной алгеброй K и V^C – его комплексификация.

Определение 6.2. Пусть ω – форма дуального пространства V^*. Назовем ее *комплексификацией* (или *комплексным расширением по линейности*) отображение $\omega^C : V^C \to \mathbf{C} \otimes K$ заданное формулой $\omega^C(Y) = \sum z_k \omega(X_k)$, где $Y = \sum z_k X_k \in V^C$ – произвольный элемент.

Задача 6.7. Докажите, что отображение ω^C является $\mathbf{C}$ и K- линейным.
Обозначим множество таких отображений $(V^*)^C$.

Задача 6.8. Докажите, что это множество является как вещественным так и комплексным векторным пространством. Определите его вещественную и комплексную размерности.

Задача 6.9. Докажите, что если $u \in (V^*)^C$, то $u = \sum_{k=1}^{N} z_k \omega^k$, где $z_k \in \mathbf{C}$, $\omega^k \in V^*$.

Определение 6.3. Пусть t тензор типа (r,s) на $K-$ модуле V. Определим отображение $t^C : V^C \times \ldots \times V^C \times (V^*)^C \times \ldots \times (V^*)^C \to \mathbf{C} \otimes K$ по формуле
$t^C(Y_1, \ldots, Y_r, u^1, \ldots, u^s) = \sum \ldots \sum z^{(1)}_{k_1} \ldots z^{(r)}_{k_r} z^{l_1}_{(1)} \ldots z^{l_s}_{(s)} t(X_{k_1}, \ldots, X_{k_r}, \omega^{l_1}, \ldots, \omega^{l_s})$, где $Y_1 = \sum z^{(1)}_{k_1} X_{k_1}$, $\ldots$, $u^{l_s} = \sum z^{l_s}_{(s)} \omega^{l_s}$. Назовем отображение t^C *комплексификацией* тензора t (или *комплексным расширением тензора t по линейности*).

Задача 6.10. Выясните, будет ли комплексификация тензора полилинейным отображением ($\mathbf{C}$, K). Что можно сказать о размерностях (базисах) тензорных алгебр для комплексифицированных тензоров?

Вернемся к комплексному расширению эндоморфизма J. Рассмотрим два эндоморфизма модуля $V^{\mathbf{C}}$:

$$\sigma : V^{\mathbf{C}} \to V^{\mathbf{C}} \quad \sigma = \tfrac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)$$
$$\bar{\sigma} : V^{\mathbf{C}} \to V^{\mathbf{C}} \quad \bar{\sigma} = \tfrac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J)$$

Заметим, что $\sigma^2 = \frac{1}{4}(id - \sqrt{-1}J) \circ (id - \sqrt{-1}J) = \frac{1}{4}(id - \sqrt{-1}J - \sqrt{-1}J - J^2) = \frac{1}{4}(id - \sqrt{-1}J - \sqrt{-1}J + id) = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J) = \sigma$. Итак, $\sigma^2 = \sigma$, то есть σ – проектор. Далее, очевидно, что $\sigma + \bar{\sigma} = id$, то есть σ и $\bar{\sigma}$ – взаимно дополнительные проекторы. В частности, $\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma}$.
Итак, в модуле $V^{\mathbf{C}}$ внутренним образом возникла пара взаимно дополнительных проекторов, что равносильно распадению модуля $V^{\mathbf{C}}$ в прямую сумму двух подмодулей $V^{\mathbf{C}} = V_\sigma \oplus V_{\bar{\sigma}}$, где $V_\sigma = Im\sigma$, $V_{\bar{\sigma}} = Im\bar{\sigma} \equiv ker\sigma$.
Для любого $X \in V^{\mathbf{C}}$ имеем $J(\sigma X) = \frac{1}{2}(JX - \sqrt{-1}J^2X) = \sqrt{-1}\frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX) = \sqrt{-1}(\sigma X)$, то есть $V_\sigma \subset V_J^{\sqrt{-1}}$, где $V_J^{\sqrt{-1}}$ – собственное подпространство оператора J (точнее его комплексного расширения), отвечающее собственному значению $\sqrt{-1}$.

Обратно, если $X \in V_J^{\sqrt{-1}}$, то есть $JX = \sqrt{-1}X$, то $\bar{\sigma}X = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J)X = \frac{1}{2}(X + \sqrt{-1}^2 X) = 0$, то есть $X \in ker\bar{\sigma} = Im\sigma$, следовательно, $V_J^{\sqrt{-1}} \subset V_\sigma$. Итак, мы доказали $V_\sigma = V_J^{\sqrt{-1}}$.

Задача 6.11. Докажите, что $V_{\bar{\sigma}} = V_J^{-\sqrt{-1}}$.

Тогда так как $V^{\mathbf{C}} = V_\sigma \oplus V_{\bar{\sigma}}$, получим $V^{\mathbf{C}} = V_J^{\sqrt{-1}} \oplus V_J^{-\sqrt{-1}}$. Тем самым мы доказали

Теорема 6.2. Комплексификация модуля V распадается в прямую сумму подмодулей, являющихся собственными подмодулями эндоморфизма J, отвечающими собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$. □

Лемма 6.2. Пусть $f : V \to V$ – эндоморфизм модуля V. Тогда $f^{\mathbf{C}} \circ \tau = \tau \circ f^{\mathbf{C}}$.

Доказательство. Имеем $\tau \circ f^{\mathbf{C}}(X,Y) = \tau(fX, fY) = (fX, -fY) = f^{\mathbf{C}}(X,-Y) = f^{\mathbf{C}} \circ \tau(X,Y)$ для любого элемента $(X,Y) \in W \equiv V^{\mathbf{C}}$. □

Очевидно, верно и обратное

Предложение 6.4. Если $F : V^{\mathbf{C}} \to V^{\mathbf{C}}$ – эндоморфизм $\mathbf{C}$-модуля $V^{\mathbf{C}}$, то $F = f^{\mathbf{C}}$ для некоторого эндоморфизма $f : V \to V$ тогда и только тогда, когда $F \circ \tau = \tau \circ F$.

Доказательство. Если $F \circ \tau = \tau \circ F$, то для любого $X \in V$ имеем $\tau(F(X)) = F(\tau(X))$, то есть $\tau(F(X)) = F(X)$. Следовательно, модуль V инвариантен относительно F, а значит, определяет эндоморфизм $f = F|_V$. Нам осталось доказать, что $f^{\mathbf{C}} = F$. Действительно, для любого $U = \sum_{k=1}^{N} z_k X_k \in V^{\mathbf{C}}$ имеем $f^C(U) = \sum_{k=1}^{N} z_k F|_V(X_k) = \sum_{k=1}^{N} z_k F(X_k) = F(\sum_{k=1}^{N} z_k X_k) = F(U)$. □

Из леммы следует, в частности, что $J \circ \tau = \tau \circ J$. Следовательно, если $X \in V_\sigma$, то есть $X = \frac{1}{2}(Y - \sqrt{-1}JY)$, то $\tau(X) = \tau(\sigma Y) = \frac{1}{2}(\tau Y + \sqrt{-1}\tau JY) = \frac{1}{2}(\tau Y + \sqrt{-1}J\tau Y) = \bar{\sigma}(\tau Y) \in V_{\bar{\sigma}}$. Аналогично, если $X \in V_{\bar{\sigma}}$, то $\tau X \in V_\sigma$. Другими словами, $\tau V_\sigma \subset V_{\bar{\sigma}}$ и $\tau V_{\bar{\sigma}} \subset V_\sigma$. Так как $\tau^2 = id$, получим $\tau V_\sigma = V_{\bar{\sigma}}$ и $\tau V_{\bar{\sigma}} = V_\sigma$. Итак, мы доказали

Предложение 6.5. Подмодули $V_\sigma = V_J^{\sqrt{-1}}$ и $V_{\bar{\sigma}} = V_J^{-\sqrt{-1}}$ комплексно сопряжены. □

Замечание. Более того, мы доказали, что $\tau \circ \sigma = \bar{\sigma} \circ \tau$ и $\tau \circ \bar{\sigma} = \sigma \circ \tau$.

Итак, фиксация комплексной структуры в модуле V порождает распадение его комплексификации $V^{\mathbf{C}}$ в прямую сумму двух комплексно сопряженных подмодулей.

Оказывается, что верно и обратное.

Предложение 6.6. Если комплексификация $V^{\mathbf{C}}$ модуля V распадается в прямую сумму двух комплексно сопряженных подмодулей, то на V однозначно определяется комплексная структура, для которой эти подмодули являются собственными подмодулями с собственными значениями $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ соответственно.

Доказательство. Пусть $V^{\mathbf{C}} = A \oplus B$, где $\tau(A) = B$, $\tau(B) = A$. Допустим, что такая структура J существует. Тогда $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)$; $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J)$ являются проекторами на A и B соответственно. Отсюда

$$J = \sqrt{-1}(\sigma - \bar{\sigma}) \tag{2}$$

Тем самым единственность оператора J доказана. В самом деле, если σ и $\bar{\sigma}$ – проекторы на A и B соответственно, то J однозначно по ним восстанавливается. Осталось проверить, что эндоморфизм $J : V^{\mathbf{C}} \to V^{\mathbf{C}}$, определенный формулой (5), антиинволютивен и коммутирует с τ. Действительно,
1) $J^2 = -(\sigma - \bar{\sigma})^2 = -\sigma^2 + \sigma \circ \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \circ \sigma - \bar{\sigma}^2 = -(\sigma + \bar{\sigma}) = -id$. Здесь мы воспользовались тем, что $Im\sigma = ker\bar{\sigma}$, а значит, $\bar{\sigma} \circ \sigma = 0$. Аналогично $\sigma \circ \bar{\sigma} = 0$. Кроме того, σ и $\bar{\sigma}$ – дополнительные проекторы, а значит, $\sigma + \bar{\sigma} = id$.
2) $\tau \circ J = -\sqrt{-1}(\tau \circ \sigma - \tau \circ \bar{\sigma}) = -\sqrt{-1}(\bar{\sigma} \circ \tau - \sigma \circ \tau) = J \circ \tau$. Таким образом, J коммутирует с τ, следовательно, J сохраняет модуль V, то есть $J(V) \subset V$, следовательно, определено сужение $J|_V$, то есть комплексная структура на V. Поскольку по доказанному σ и $\bar{\sigma}$ – проекторы на A и B соответственно, то $A = V_J^{\sqrt{-1}}$, $B = V_J^{-\sqrt{-1}}$. Действительно, пусть $X \in A$, то есть $X = \sigma Y$. Тогда $JX = \sqrt{-1}(\sigma \circ \sigma Y - \bar{\sigma} \circ \sigma Y) = \sqrt{-1}(\sigma Y) = \sqrt{-1}X$, то есть $X \in V_J^{\sqrt{-1}}$. Обратно, пусть $X \in V_J^{\sqrt{-1}}$. Тогда $JX = \sqrt{-1}X$, то есть $\sqrt{-1}(\sigma X - \bar{\sigma}X) = \sqrt{-1}X$, то есть $(\sigma X - (X - \sigma X)) = X$, то есть $\sigma X = X$, а значит, $X \in Im\sigma = A$. Для второго подмодуля рассуждения аналогичны (проведите их самостоятельно). □

Тем самым доказана

Теорема 6.3. Задание комплексной структуры в модуле V равносильно распадению его комплексификации в прямую сумму двух комплексных сопряженных подмодулей. □

Напомним, что в модуле V мы предполагаем существование комплексной структуры J, которая превращает этот модуль в $\mathbf{C}$-модуль (или что то же самое, в комплексное линейное пространство). Рассмотрим сужение проекторов σ и $\bar{\sigma}$ на $\mathbf{C}$-модуль $V \subset V^{\mathbf{C}}$. Очевидно, что $Im(\sigma|_V) \subset V_\sigma$. Но в действительности отображение $\sigma|_V : V \to V_\sigma$ является отображением "на".

Доказательство. Пусть $X \in V_\sigma$. Рассмотрим вектор $Y = X + \tau X$. В силу инволютивности оператора комплексного сопряжения τ получим $\tau Y = Y$, то есть $Y \in V$. Отсюда следует, что $\sigma Y =$

$\sigma X + \sigma\tau X = \sigma X + \tau\bar{\sigma}X = \sigma X = X$, так как $X \in V_\sigma$. (Напомним, что если P – проектор, то элемент $X \in ImP \Leftrightarrow X = P(X)$). Итак, отображение $\sigma|_V$ сюръективно.
Аналогично доказывается, что отображение $\bar{\sigma}|_V : V \to V_{\bar{\sigma}}$ сюръективно. (докажите самостоятельно)

Предложение 6.7. Отображение $\sigma|_V : V \to V_\sigma$ является изоморфизмом $\mathbf{C}$-модулей.

Доказательство. Нам нужно доказать, что $\forall z \in \mathbf{C}$, $\forall X \in V$ $\sigma(zX) = z\sigma(X)$.
Так как $zX = \alpha X + \beta JX$, достаточно доказать, что $\sigma \circ J = \sqrt{-1}J$. Имеем $\sigma \circ J = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J) \circ J = \frac{1}{2}(J + \sqrt{-1}id) = \sqrt{-1}\frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J) = \sqrt{-1}\sigma$. Отсюда следует $\sigma(zX) = \sigma(\alpha X + \beta JX) = \alpha(\sigma X) + \beta\sqrt{-1}(\sigma X) = z\sigma X$.
То, что $\sigma(X_1 + X_2) = \sigma(X_1) + \sigma(X_2)$ следует из того, что σ – эндоморфизм $\mathbf{R}$-модуля $V^{\mathbf{C}}$.
Покажем, наконец, что σ – мономорфизм. Пусть $X \in ker(\sigma|_V) \subset V$, то есть $\sigma(X) = 0$, $X \in V$, то есть $X = \sqrt{-1}JX$. Применим оператор комплексного сопряжения τ. Так как вектор $X \in V$, то $\tau X = X$. Получим $X = -\sqrt{-1}JX$, следовательно, $X = 0$. Таким образом, отображение $\sigma|_V$ является мономорфизмом. □

Предложение 6.8. Отображение $\bar{\sigma}|_V : V \to V_{\bar{\sigma}}$ является антиизоморфизмом.

Доказательство. Аналогично доказывается, что $\bar{\sigma} \circ J = -\sqrt{-1}\bar{\sigma}$. А значит, $\bar{\sigma}(zX) = \bar{\sigma}(\alpha X + \beta JX) = \alpha\bar{\sigma}X - \beta J(\bar{\sigma}X) = \bar{z}\bar{\sigma}(X)$, то есть $\bar{\sigma}$ – антигомоморфизм.

Задача 6.12. Докажите, что отображение $\bar{\sigma}|_V : V \to V_{\bar{\sigma}}$ сюръективно и инъективно.
Итак, отображение $\bar{\sigma}|_V : V \to V_{\bar{\sigma}}$ является антиизоморфизмом $\mathbf{C}$-модулей V и $V_{\bar{\sigma}}$. □
Итак, доказана

Теорема 6.4. Сужение проекторов σ и $\bar{\sigma}$ на V является соответственно изоморфизмом и антиизоморфизмом $\mathbf{C}$-модулей V и V_σ (соответстенно V и $V_{\bar{\sigma}}$. □

Замечание. Очевидно, что эти изоморфизмы можно связать между собой с помощью оператора комплексного сопряжения τ, а именно, $\sigma|_V = \tau \circ \bar{\sigma}|_V$.

Доказательство. Как мы знаем, $\tau \circ \bar{\sigma} = \sigma \circ \tau$. Так как для $X \in V$ имеем $\tau(X) = X$, то $\tau \circ \bar{\sigma}(X) = \sigma \circ \tau(X) = \sigma(X)$. □

6.5 Комплексная структура на конечномерном линейном пространстве.

Пусть, в частности, кольцо K является полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, V – конечномерным вещественным линейным пространством. Пусть J – комплексная структура в V. Фиксируем в V ненулевой вектор e_1. Тогда пара векторов (e_1, Je_1) будет линейно независима.
В самом деле, пусть $\lambda e_1 + \mu Je_1 = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Подействуем на это равенство оператором J: $\lambda Je_1 - \mu Je_1 = 0$. Тогда $(\lambda^2 + \mu^2)e_1 = 0$. Так как вектор e_1 ненулевой, $\lambda^2 + \mu^2 = 0$, то есть $\lambda = \mu = 0$, то есть векторы e_1 и Je_1 линейно независимы. Рассмотрим их линейную оболочку $L(e_1, Je_1)$. Это двумерное векторное подпространство пространства V. Если векторное пространство V двумерно, то $V = L(e_1, Je_1)$ и система (e_1, Je_1) является базисом векторного пространства V.
Если $dimV > 2$, то существует вектор $e_2 \notin L(e_1, Je_1)$. Докажем, что тогда вектор $Je_2 \notin L(e_1, Je_1)$ и, более того, $L(e_1, Je_1) \cap L(e_2, Je_2) = \{0\}$. Действительно, пусть $X \in L(e_1, Je_1) \cap L(e_2, Je_2)$, то есть $X = \lambda e_1 + \mu Je_1$, $X = \alpha e_2 + \beta Je_2$, $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ – некоторые вещественные числа. Тогда, приравнивая эти два выражения, получим $\lambda e_1 + \mu Je_1 = \alpha e_2 + \beta Je_2$. Подействуем оператором J: $\lambda Je_1 - \mu e_1 = \alpha Je_2 - \beta e_2$.
Рассмотрим следующие случаи:
1) $\alpha = 0$. Тогда из второго равенства имеем $\lambda Je_1 - \mu e_1 = -\beta e_2$. В силу линейной независимости векторов Je_1, e_1, e_2 получим $\lambda = \mu = \beta$, следовательно, $X = 0$.
2) Аналогичный результат получим, если предположим, что $\beta = 0$ (докажите самостоятельно).
3) Пусть $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Тогда выразим Je_2 из обоих соотношений:

$$Je_2 = \frac{\lambda}{\beta}e_1 + \frac{\mu}{\beta}Je_1 - \frac{\alpha}{\beta}e_2$$
$$Je_2 = \frac{\lambda}{\alpha}Je_1 - \frac{\mu}{\alpha}e_1 + \frac{\beta}{\alpha}e_2$$

Так как векторы e_1, Je_1, e_2 линейно независимы, соответствующие коэффициенты при них равны, то есть

$$\frac{\lambda}{\beta} = -\frac{\mu}{\alpha} \quad \frac{\mu}{\beta} = \frac{\lambda}{\alpha} \quad -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Из последнего соотношения получим $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, что противоречит предположению. (Напомним, что мы работаем с V как с веществеым линейным пространством, а значит, все коэффициенты суть вещественные числа.)

Итак, мы получили, что если $X \in L(e_1, Je_1) \cap L(e_2, Je_2)$, то $X = 0$, следовательно, $L_2 \equiv L(e_1, Je_1, e_2, Je_2) = L(e_1, Je_1) \oplus L(e_2, Je_2)$ и $dim L(e_1, Je_1, e_2, Je_2) = 4$.

Если $dim V = 4$, то $V = L_2$. Если $dim V > 4$, то существует вектор $e_3 \notin L_2$. Как и выше доказывается, что $L(e_3, Je_3) \cap L_2 = \{0\}$. Следовательно, можно рассмотреть подпространство $L_3 = L(e_1, Je_1) \oplus L(e_2, Je_2) \oplus L(e_3, Je_3)$ и так далее.

Этот процесс конечен в силу конечномерности пространства V, то есть существует такое n, что подпространство $L_n = \bigoplus_{k=1}^{n} L(e_k, Je_k)$ совпадет с векторным пространством V. В частности, из этого следует, что в V существует базис вида $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$. Такой базис называется *вещественно адаптированным* комплексной структуре J, короче, *RA-базисом*.

Следствие. Линейное пространство V, допускающее комплексную структуру, с необходимостью четномерно.

Определение 6.4. Число n, введенное выше, называется *комплексной размерностью* линейного пространства V.

Это название объясняется тем, что если $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$ – RA-базис, то его векторы $(e_1, \ldots, e_n)$ образуют базис V, рассматриваемого как $\mathbf{C}$-модуль.

Доказательство. 1) Докажем, что векторы $(e_1, \ldots, e_n)$ линейно независимы над $\mathbf{C}$. Пусть $z_1 e_1 + \ldots + z_n e_n = 0$, то есть если $z_k = \alpha_k + \sqrt{-1}\beta_k$, то $(\alpha_1 e_1 + \beta_1 Je_1) + \ldots + (\alpha_n e_n + \beta_n Je_n) = 0$. Так как векторы RA-базиса линейно независимы, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$, то есть $z_1 = \ldots = z_n = 0$.
2) Пусть $X \in V$ – произвольный вектор. Разложим его по RA-базису.

$$X = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \beta_1 Je_1 + \ldots + \beta_n Je_n = 0$$

Тогда $X = (\alpha_1 e_1 + \beta_1 Je_1) + \ldots + (\alpha_n e_n + \beta_n Je_n) = z_1 e_1 + \ldots + z_n e_n$. $\square$

Предложение 6.9. Эндоморфизм J в RA-базисе задается матрицей

$$(J_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица порядка n, $i, j = 1, \ldots, 2n$.

Доказательство. Имеем

$$Je_1 = 0 \cdot e_1 + \ldots + 0 \cdot e_n + 1 \cdot Je_1 + 0 \cdot Je_2 + \ldots + 0 \cdot Je_n$$
$$\ldots$$
$$J(Je_1) = -e_1 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n + 0 \cdot Je_1 + \ldots + 0 \cdot Je_n$$
$$\ldots \square$$

Существует более удобный базис в комплексификации $V^{\mathbf{C}}$ векторного пространства V (удобный с точки зрения эндоморфизма J). Напомним, что $V^{\mathbf{C}} = V_J^{\sqrt{-1}} \oplus V_J^{-\sqrt{-1}}$. Фиксируем базис $(e_1, \ldots, e_n) \subset V$, где V мы рассматриваем как $\mathbf{C}$-модуль. (Или что тоже самое RA-базис $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$ в V, рассматриваемом как $\mathbf{R}$-модуль.)

Рассмотрим векторы $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_{2n}) \subset V^{\mathbf{C}}$, определяемые следующим образом

$$\varepsilon_k = \sigma(e_k) \quad \varepsilon_{k+n} = \bar{\sigma}(e_k);\ k = 1, \ldots, n$$

Так как $\sigma : V \to V_J^{\sqrt{-1}}$ – изоморфизм $\mathbf{C}$-линейных пространств, векторы $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ образуют базис $V_J^{\sqrt{-1}}$. Аналогично, так как $\bar{\sigma} : V \to V_J^{-\sqrt{-1}}$ – антиизоморфизм $\mathbf{C}$-линейных пространств, векторы $(\varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_{2n})$ образуют базис $V_J^{-\sqrt{-1}}$. Так как $V^{\mathbf{C}} = V_J^{\sqrt{-1}} \oplus V_J^{-\sqrt{-1}}$, объединение этих базисов, то есть система векторов $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_{2n})$ образует базис пространства $V^{\mathbf{C}}$. Так как $J\varepsilon_k = \sqrt{-1}\varepsilon_k$, $k = 1, \ldots, n$ и $J\varepsilon_{n+k} = -\sqrt{-1}\varepsilon_{n+k}$, то этот базис будет собственным базисом эндоморфизма J, то есть J имеет в нем матрицу

$$(J_j^i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} I_n \end{pmatrix}$$

то есть эндоморфизм J диагонализируется в этом базисе. Для удобства обозначений полагают $\varepsilon_{n+k} = \varepsilon_{\hat{k}}$, $k = 1, \ldots, n$ и, соответственно, будем обозначать базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$. Заметим, что так

как для любого $k = 1, \ldots, n$ векторы $e_k \in V$, то получаем $\varepsilon_{\hat{k}} = \bar{\sigma}(e_k) = \tau \circ \sigma(e_k) = \tau(\varepsilon_k)$, то есть соответствующие векторы этого базиса попарно сопряжены.

Определение 6.5. Базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$, построенный выше, называется базисом, *адаптированным комплексной структуре*, короче, *A-базисом*.

Пусть V – вещественное линейное пространство, J – комплексная структура в V. Тогда существует естественное биективное соответствие между следующими множествами

1) $\mathcal{B}(V) = \{(e_1, \ldots, e_n)\}$ – множество базисов V как $\mathbf{C}$-модуля;

2) $\mathcal{B}^{RA}(V) = \{(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)\}$ – множество RA- базисов V как $\mathbf{R}$-модуля;

3) $\mathcal{B}^{A}(V^C) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})\}$ – множество A-базисов $\mathbf{C}$-модуля V^C.

С другой стороны, на $\mathcal{B}(V)$ как на множестве всех базисов (комплексного) линейного пространства справа свободно и транзитивно действует полная комплексная линейная группа $GL(n, \mathbf{C})$, состоящая из матриц

$$GL(n, \mathbf{C}) = \{z = (z^i_j) | detz \neq 0\}$$

по полной аналогии с вещественным случаем. Именно, если $b = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathcal{B}(V)$, $Z = (z^i_j) \in GL(n; \mathbf{C})$, то $\tilde{b} = bZ \equiv R_Z b = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$, где $\tilde{e}_k = z^j_k e_j$. Другими словами, Z есть матрица перехода от базиса b к базису $\tilde{b}$. Как и в вещественном случае, доказывается, что это правое, транзитивное, свободное действие. В силу указанного выше биективного соответствия между множествами $\mathcal{B}(V)$, $\mathcal{B}^{RA}(V)$ и $\mathcal{B}^{A}(V)$ это действие индуцирует правое свободное транзитивное действие группы $GL(n, \mathbf{C})$ на этих множествах.

Дадим явное описание этих действий.

1) случай $\mathcal{B}^{RA}(V)$.

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис V как $\mathbf{C}$-модуля, $b = (e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$ – соответствующий $RA-$ базис. Обозначим $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ – образ базиса b под действием элемента $Z = (z^i_j) \in GL(n, \mathbf{C})$. Тогда обозначим $\tilde{b} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n, J\tilde{e}_1, \ldots, J\tilde{e}_n)$ – соответствующий ему $RA-$ базис. Выясним, какой вид имеет матрица перехода от базиса b к базису $\tilde{b}$.

Пусть $z^i_j = \alpha^i_j + \sqrt{-1}\beta^i_j$. Тогда для матрицы Z получим соответственно $Z = A + \sqrt{-1}B$, где $A = (\alpha^i_j)$, $B = (\beta^i_j)$ – вещественные матрицы. Имеем $\tilde{e}_k = z^j_k e_j = \alpha^j_k e_j + \beta^j_k Je_j$ и $J\tilde{e}_k = J(\alpha^j_k e_j + \beta^j_k Je_j) = -\beta^j_k e_j + \alpha^j_k Je_j$. Откуда следует, что матрица преобразования $RA-$ базисов, порожденная элементом $Z \in GL(n, \mathbf{C})$, имеет вид

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \ldots & \alpha^1_n & -\beta^1_1 & \ldots & -\beta^1_n \\ & \ldots & & & \ldots & \\ \alpha^n_1 & \ldots & \alpha^n_n & -\beta^n_1 & \ldots & -\beta^n_n \\ \beta^1_1 & \ldots & \beta^1_n & \alpha^1_1 & \ldots & \alpha^1_n \\ & \ldots & & & \ldots & \\ \beta^n_1 & \ldots & \beta^n_n & \alpha^n_1 & \ldots & \alpha^n_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \tag{3}$$

Таким образом, на множестве $RA-$ базисов вещественного линейного пространства V группа $GL(n, \mathbf{C})$ порождает свободное правое транзитивное действие посредством матриц (3). В силу упомянутой выше биекции эти матрицы отождествляются с соответствующими матрицами $Z \in GL(n, \mathbf{C})$, что дает возможность говорить о действии на множестве $RA-$ базисов группы $GL(n, \mathbf{C})$.

2) случай $A-$ базисов. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис V как $\mathbf{C}$-модуля и $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ – его образ под действием элемента $Z = (z^i_j) \in GL(n, \mathbf{C})$. Рассмотрим соответствующие им $A-$ базисы $\beta = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$ и $\tilde{\beta} = (\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\varepsilon}_{\hat{1}}, \ldots, \tilde{\varepsilon}_{\hat{n}})$, соответственно. Напомним, что $\varepsilon_i = \sigma(e_i)$, $\varepsilon_{\hat{i}} = \bar{\sigma}(e_i)$, где $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J)$. Выясним, какой вид имеет матрица перехода от базиса β к базису $\tilde{\beta}$.

Так как проекторы σ и $\bar{\sigma}$ являются гомоморфизмом и антигомоморфизмом, соответственно, получим

$\tilde{\varepsilon}_k = \sigma(\tilde{e}_k) = \sigma(z^j_k e_j) = z^j_k \sigma(e_j) = z^j_k \varepsilon_j$ и $\tilde{\varepsilon}_{\hat{k}} = \bar{\sigma}(\tilde{e}_k) = \bar{\sigma}(z^j_k e_k) = \bar{z}^j_k \bar{\sigma}(e_k) = \bar{z}^j_k \varepsilon_{\hat{k}}$. Итак, соответствующие матрицы перехода от β к $\tilde{\beta}$ имеют вид

$$\breve{Z} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \overline{Z} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Таким образом, на множестве $A-$ базисов комплексного линейного пространства V^C группа $GL(n, \mathbf{C})$ порождает свободное правое транзитивное действие посредством матриц (4). В силу упомянутой

выше биекции эти матрицы отождествляются с соответствующими матрицами $Z \in GL(n, \mathbf{C})$, что дает возможность говорить о действии на множестве $A-$ базисов группы $GL(n, \mathbf{C})$.

Замечание. Так как $det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = (detA)^2 + (detB)^2 > 0$, то все $RA-$ базисы имеют одинаковую ориентацию. Итак, на вещественном линейном пространстве, допускающем комплексную структуру, внутреннем образом определена ориентация – ориентация $RA-$ базисов, которую мы будем считать положительной.

Объединяя полученные результаты, имеем

Теорема 6.5. Пусть V – конечномерное векторное пространство, на котором фиксирована комплексная структура. Тогда V – четномерно и на нем определена естественная ориентация – ориентация $RA-$ базисов. □

6.6 Почти комплексные многообразия

Пусть M^{2n} – гладкое многообразие, на котором фиксировано поле тензора J типа (1,1) такого, что $J^2 = -id$. Тензорное поле J называется *почти комплексной структурой* на многообразии M, а пара (M, J) – *почти комплексным многообразием.*

Предложение 6.10. Каждое почти комплексное многообразие (M, J) имеет четную размерность и ориентируемо.

Доказательство. В каждом касательном пространстве $T_m(M)$, $m \in M$ почти комплексная структура J определяет комплексную структуру J_m. Как мы видели выше в этом случае векторное пространство $T_m(M)$ имеет четную размерность $2n$, а значит, четную размерность имеет и многообразие M. В каждом касательном пространстве $T_m(M)$ фиксируем $RA-$ базис $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$. Как мы помним, матрица перехода от $RA-$ базиса к $RA-$ базису имеет положительный определитель. Чтобы наделить многообразие M ориентацией, рассмотрим семейство всех локальных карт (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^{2n})$ на M таких, что в каждой точке $m \in U$, натуральный базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_m, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{2n}}\Big|_m \right)$ касательного пространства $T_m(M)$ получается из $RA-$ базиса $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$ линейным преобразованием с положительным определителем. Семейство локальных карт, полученных таким образом, дает полный атлас, согласованный с псевдогруппой сохраняющих ориентацию преобразований в $\mathbf{R}^{2n}$. □

Для каждого почти комплексного многообразия M размерности $2n$ построим главное расслоение $\mathcal{B}(M)^C$ комплексных реперов. Пусть (M, J) – почти комплексное многообразие с почти комплексной структурой J, и пусть J_0 – каноническая комплексная структура на векторном пространстве $\mathbf{R}^{2n}$.

Определение 6.6. *Комплексным репером* в точке $m \in M$ назовем изоморфизм линейных пространств $p : \mathbf{R}^{2n} \to T_m(M)$ такой, что $p \circ J_0 = J \circ p$.

Согласно лемме 6.1 это отображение будет и комплексно линейным отображением $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$ на $T_m(M)$, которые рассматриваются как комплексные линейные пространства. Множество комплексных линейных реперов образует главное расслоение над M с группой $GL(n, \mathbf{C})$; оно называется *главным расслоением комплексных линейных реперов* и обозначается $\mathcal{B}(M)^C = (BM^C, M, GL(n, \mathbf{C}), \pi)$. Мы здесь отождествляем комплексную линейную группу $GL(n, \mathbf{C})$ с ее вещественной реализацией $GL(n, \mathbf{C})^R \subset GL(2n, \mathbf{R})$, состоящей из матриц

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

и поэтому можем рассматривать главное расслоение комплексных линейных реперов как подрасслоение главного расслоения (вещественных) линейных реперов $\mathcal{B}(M) = (BM, M, GL(2n, \mathbf{R}), \pi)$ и, следовательно, применять структурные уравнения главного расслоения реперов и основную теорему тензорного анализа для комплексных линейных реперов.

Если мы рассмотрим комплексификации $T_m^C(M) = T_m(M) \otimes \mathbf{C}$ касательных пространств, то у нас возникает расслоение $A-$ реперов, на котором действует таже группа $GL(n, \mathbf{C})$, представленная матрицами

$$\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \bar{Z} \end{pmatrix}$$

В силу построенной биекции между множеством комплексных реперов многообразия M и множеством $A-$ реперов, мы можем главное расслоение $A-$ реперов рассматривать как подрасслоение со структурной группой $GL(n,\mathbf{C})$ главного расслоения (вещественных) реперов $\mathcal{B}(M)=(BM,M,GL(2n,\mathbf{R}),\pi)$. В этом случае мы можем пользоваться структурными уравнениями и основной теоремой тензорного анализа, но заменять все тензорные поля их комплексификациями, то есть комплексным расширением по линейности.

Условимся в дальнейшем, что индексы $i,j,k,l,\ldots$ пробегают значения от 1 до $2n$, а индексы a,b,c,d,f,g,h – значения от 1 до n. Кроме того, введем обозначение $\hat{a}=a+n$.

Задание почти комплексной структуры на многообразии M равносильно заданию $G-$ структуры со структурной группой $GL(n,\mathbf{C})$, тотальное пространство которой состоит из $A-$ реперов, то есть реперов вида $p=(m,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat{1}},\ldots,\varepsilon_{\hat{n}})$, где $\varepsilon_{\hat{a}}=\tau(\varepsilon_a)$, $\varepsilon_a=\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}}=\bar{\sigma}(e_a)$ и обладающих свойствами: $J\varepsilon_a=\sqrt{-1}\varepsilon_a$, $J\varepsilon_{\hat{a}}=-\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{a}}$, $a=1,\ldots,n$.

В частности, $A-$ репер можно определить как такой комплексный репер (то есть репер комплексификации), в котором матрица оператора J (точнее его комплексификации $J^C=id\otimes J$. В дальнейшем, если речь идет об реперах комплексификации, для всех тензорных полей рассматривается их комплексификация, хотя обозначать их мы будем теми же буквами) имеет вид

$$(J^i_j)=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}I_n & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}I_n\end{pmatrix}$$

Замечание. Напомним, что структурные уравнения главного расслоения реперов имеют вид

$$d\omega^i=-\omega^i_j\wedge\omega^j;\quad d\omega^i_j=-\omega^i_k\wedge\omega^k_j+\omega^i_{jk}\wedge\omega^k$$

Введем с этого момента переобозначения $\omega^i_j\to-\omega^i_j$, что соответствует переходу в алгебре Ли структурной группы $GL(2n,\mathbf{R})$ от стандартного базиса (E^i_j), $(E^i_j)^l_k=\delta^i_k\delta^l_j$ к базису $(-E^i_j)$. Относительно этого базиса упомянутые структурные уравнения примут вид

$$d\omega^i=\omega^i_j\wedge\omega^j;\quad d\omega^i_j=\omega^i_k\wedge\omega^k_j+\omega^i_{jk}\wedge\omega^k$$

Мы заменили здесь ω^i_{jk} на $-\omega^i_{jk}$.
Соответственно основная теорема тензорного анализа переформулируется так: задание на многообразии M тензорного поля T типа (r,s) равносильно заданию на многообразии BM системы функций $\{T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\}$ удовлетворяющих дифференциальным уравнениям вида

$$dT^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}+T^{j_1\ldots j_s}_{ki_2\ldots i_r}\omega^k_{i_1}+\ldots+T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\omega^k_{i_r}-T^{kj_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\omega^{j_1}_k-\ldots-T^{j_1\ldots j_{s-1}k}_{i_1\ldots i_r}\omega^{j_s}_k=T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_rk}\omega^k$$

Так как J – тензор типа (1,1), его задание на многообразии M равносильно заданию семейства функций $\{J^i_j\}$ на пространстве расслоения всех вещественных реперов, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$dJ^i_j+J^i_k\omega^k_j-J^k_j\omega^i_k=J^i_{jk}\omega^k\ \Leftrightarrow\quad \Delta J^i_j=J^i_{jk}\omega^k \tag{5}$$

Найдем дифференциальное продолжение (5) с учетом структурных уравнений. Продифференцируем внешним образом уравнения (5):

$$dJ^i_k\wedge\omega^k_j+J^i_kd\omega^k_j-dJ^k_j\wedge\omega^i_k-J^k_jd\omega^i_k=dJ^i_{jk}\wedge\omega^k+J^i_{jk}d\omega^k$$

Подставим (5) и структурные уравнения.
$(J^i_{kl}\omega^l-J^i_l\omega^l_k+J^l_k\omega^k_l)\wedge\omega^k_j+J^i_k(\omega^k_l\wedge\omega^l_j+\omega^k_{jl}\wedge\omega^l)-(J^k_{jl}\omega^l-J^k_l\omega^l_j+J^l_j\omega^k_l)\omega^i_k-J^k_j(\omega^i_l\wedge\omega^l_k+\omega^i_{kl}\wedge\omega^l)=dJ^i_{jk}\wedge\omega^k+J^i_{jk}\omega^k_l\wedge\omega^l$ После приведения подобных и группировки членов получим
$(dJ^i_{jk}+J^i_{jl}\omega^l_k-J^l_{jk}\omega^i_l+J^i_{lk}\omega^l_j)\wedge\omega^k+(J^l_j\omega^i_{lk}-J^i_l\omega^i_{jk})\wedge\omega^k=0$
Обозначим $\Delta J^i_{jk}=dJ^i_{jk}+J^i_{jl}\omega^l_k-J^l_{jk}\omega^i_l+J^i_{lk}\omega^l_j$. Тогда последнее соотношение примет вид

$$(\Delta J^i_{jk}+J^r_j\omega^i_{rk}-J^i_r\omega^r_{jk})\wedge\omega^k=0$$

Согласно лемме Картана существует набор функций $\{J^i_{jkr}\}$ на пространстве расслоения вещественных реперов такой, что

$$\Delta J^i_{jk}+J^r_j\omega^i_{rk}-J^i_r\omega^r_{jk}=J^i_{jkr}\omega^r;\quad J^i_{j[kr]}=0 \tag{6}$$

Напомним, что $\omega^i_{[jk]} \equiv 0 (mod\, \omega^r)$, то есть $\omega^i_{[jk]} = A^i_{jkr}\omega^r$.
Проальтернируем (6) по индексам j,k: $\Delta J^i_{[jk]} + J^r_{[j}\omega^i_{|r|k]} - J^i_r\omega^r_{[jk]} = J^i_{[jk]r}\omega^r$
$\Delta J^i_{jk} - \Delta J^i_{kj} \equiv (-J^r_j\omega^i_{rk} + J^r_k\omega^i_{rj})(mod\, \omega^l)$
Свернем с J^j_t: $\Delta J^i_{jk}J^j_t - \Delta J^i_{kj}J^j_t \equiv (-J^r_j J^j_t\omega^i_{rk} + J^r_k J^j_t\omega^i_{rj})(mod\, \omega^l)$
Так как $J^2 = -id$, получим $J^r_j J^j_t = -\delta^r_t$ и тогда

$$J^j_t\Delta J^i_{jk} - J^j_t\Delta J^i_{kj} \equiv \omega^i_{tk} + J^j_t J^r_k\omega^i_{rj}(mod\, \omega^l) \tag{7}$$

Проальтернируем (7) по t,k и докажем, что правая часть полученного равенства будет сравнима с нулем. Действительно, $\omega^i_{[tk]} + J^j_{[t}J^r_{k]}\omega^i_{rj}(mod\, \omega^l) = 0 + \frac{1}{2}(J^j_t J^r_k\omega^i_{rj} - J^j_k J^r_t\omega^i_{rj}) \equiv 0 (mod\, \omega^l)$, так как индексы суммирования j и r мы можем переобозначить и тогда получим два слагаемых с противоположным знаком. Итак,

$$J^j_t\Delta J^i_{jk} - J^j_k\Delta J^i_{jt} - J^j_t\Delta J^i_{kj} + J^j_k\Delta J^i_{tj} \equiv 0 (mod\, \omega^l) \tag{8}$$

Лемма 6.3. $\Delta(J^j_t J^i_{sk}) = (\Delta J^j_t)J^i_{sk} + J^j_t\Delta J^i_{sk}$, где $\Delta(J^j_t J^i_{sk}) = d(J^j_t J^i_{sk}) + J^j_l J^i_{sk}\omega^l_t + J^j_t J^i_{lk}\omega^l_s + J^j_t J^i_{sl}\omega^l_k - J^l_t J^i_{sk}\omega^j_l - J^j_t J^l_{sk}\omega^i_l$.

Доказательство. Дифференцируя слагаемое $d(J^j_t J^i_{sk})$ и группируя слагаемые нужным образом, получим требуемое соотношение. □
Заметим, что $(\Delta J^j_t)J^i_{sk} \equiv 0 (mod\, \omega^l)$ в силу определения (ΔJ^j_t) (см. обозначение в (5)). Тогда получаем

$$\Delta(J^j_t J^i_{sk}) \equiv (J^j_t\Delta J^i_{sk})(mod\, \omega^l)$$

С учетом этого (8) примет вид

$$\Delta\left(J^j_t(J^i_{jk} - J^i_{kj}) - J^j_k(J^i_{jt} - J^i_{tj})\right) \equiv 0 (mod\, \omega^l)$$

Обозначим $N^i_{tk} = J^j_t(J^i_{jk} - J^i_{kj}) - J^j_k(J^i_{jt} - J^i_{tj}$. Поскольку по доказанному $\Delta N^i_{tk} \equiv 0 (mod\, \omega^l)$, то есть $\Delta N^i_{tk} = N^i_{tkr}\omega^r$ для подходящих функций $\{N^i_{tkr}\}$ на пространстве расслоения всех вещественных реперов, система функций N^i_{tk} определяет тензорное поле типа (2,1) на многообразии M. Это тензорное поле называется *тензором Нейенхейса почти комплексной структуры*.

Заметим, что в силу построения тензор Нейенхейса является вещественным тензором, то есть в каждой точек многообразия M он является полилинейным отображением касательного и кокасательных пространств в этой точке. Как мы увидим ниже этот тензор определяет важнейшие геометрические свойства почти комплексной структуры.

Рассмотрим комплексификацию тензора Нейенхейса на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры почти комплексного многообразия. Мы переходим к комплексификации всех объектов, то есть их комплексному расширению по линейности (обозначать комплексификации тензоров будем теми же буквами). Распишем уравнение (5) на пространстве присоединенной $G-$ структуры. Напомним, что комплексификация структурного эндоморфизма J в $A-$ реперах присоединенной $G-$ структуры задается матрицей с компонентами $J^a_b = \sqrt{-1}\delta^a_b$, $J^a_{\hat{b}} = J^{\hat{a}}_b = 0$, $J^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^b_a$.
1) пусть $i = a$, $j = b$. Тогда $dJ^a_b + J^a_c\omega^c_b + J^a_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b - J^c_b\omega^a_c - J^{\hat{c}}_b\omega^a_{\hat{c}} = J^a_{bk}\omega^k$ или $\sqrt{-1}(\omega^a_b - \omega^a_b) = J^a_{bk}\omega^k$ и в силу линейной независимости базисных форм (ω^k)

$$J^a_{bk} = 0$$

2) пусть $i = a$, $j = \hat{b}$. Аналогично распишем (5): $dJ^a_{\hat{b}} + J^a_c\omega^c_{\hat{b}} + J^a_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_{\hat{b}} - J^c_{\hat{b}}\omega^a_c - J^{\hat{c}}_{\hat{b}}\omega^a_{\hat{c}} = J^a_{\hat{b}k}\omega^k$ или $\sqrt{-1}(\omega^a_{\hat{b}} + \omega^a_{\hat{b}}) = J^a_{\hat{b}k}\omega^k$

$$\omega^a_{\hat{b}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}k}\omega^k$$

3) пусть $i = \hat{a}$, $j = b$. Проведите подробные вычисления самостоятельно, а мы напишем результат

$$\omega^{\hat{a}}_b = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k$$

4) пусть $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$. Тогда

$$J^{\hat{a}}_{\hat{b}k} = 0$$

Итак, на пространстве расслоения $A-$ реперов уравнения (5) приняли вид

$$J^a_{bk}=0;\quad \omega^a_{\hat b}=-\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat bk}\omega^k;\quad \omega^{\hat a}_b=\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{bk}\omega^k;\quad J^{\hat a}_{\hat bk}=0; \tag{9}$$

С учетом полученных соотношений первую группу структурных уравнений $d\omega^i=\omega^i_j\wedge\omega^j$ на пространстве присоединенной $G-$ структуры почти комплексного многообразия примут вид

1) пусть $i=a$. Тогда $d\omega^a=\omega^a_b\wedge\omega^b+\omega^a_{\hat b}\wedge\omega^{\hat b}=\omega^a_b\wedge\omega^b-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat bk}\omega^k\wedge\omega^{\hat b}=\omega^a_b\wedge\omega^b-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat bc}\omega^c\wedge\omega^{\hat b}+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat b\hat c}\omega^{\hat b}\wedge\omega^{\hat c}$;

2) пусть $i=\hat a$. Тогда $d\omega^{\hat a}=\omega^{\hat a}_b\wedge\omega^b+\omega^{\hat a}_{\hat b}\wedge\omega^{\hat b}=\omega^{\hat a}_{\hat b}\wedge\omega^{\hat b}+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{bc}\omega^c\wedge\omega^b+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{b\hat c}\omega^{\hat c}\wedge\omega^b$.

Итак, мы получаем

$$d\omega^a=\omega^a_b\wedge\omega^b-\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat bc}\omega^c\wedge\omega^{\hat b}+\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat b\hat c]}\omega^{\hat b}\wedge\omega^{\hat c};$$
$$d\omega^{\hat a}=\omega^{\hat a}_{\hat b}\wedge\omega^{\hat b}-\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{[bc]}\omega^b\wedge\omega^c+\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{b\hat c}\omega^{\hat c}\wedge\omega^b$$

Эти уравнения называются *первой группой структурных уравнений почти комплексной структуры.*

Рассмотрим тензор Нейенхейса $N^i_{tk}=J^j_t(J^i_{jk}-J^i_{kj})-J^j_k(J^i_{jt}-J^i_{tj}$ на пространстве присоединенной $G-$ структуры и вычислим его компоненты в $A-$ репере.

1) $i=a$, $t=b$, $k=c$. Тогда с учетом (9) получим $N^a_{bc}=J^d_b(J^a_{dc}-J^a_{cd})+J^{\hat d}_b(J^a_{\hat dc}-J^a_{c\hat d})-J^d_c(J^a_{db}-J^a_{bd})-J^{\hat d}_c(J^a_{\hat db}-J^a_{b\hat d})=0$, то есть $N^a_{bc}=0$.

2) $i=\hat a$, $t=b$, $k=c$. Тогда $N^{\hat a}_{bc}=J^d_b(J^{\hat a}_{dc}-J^{\hat a}_{cd})+J^{\hat d}_b(J^{\hat a}_{\hat dc}-J^{\hat a}_{c\hat d})-J^d_c(J^{\hat a}_{db}-J^{\hat a}_{bd})-J^{\hat d}_c(J^{\hat a}_{\hat db}-J^{\hat a}_{b\hat d})=\sqrt{-1}(J^{\hat a}_{bc}-J^{\hat a}_{cb})-\sqrt{-1}(J^{\hat a}_{cb}-J^{\hat a}_{bc})=2\sqrt{-1}J^{\hat a}_{bc}-2\sqrt{-1}J^{\hat a}_{cb}=4\sqrt{-1}J^{\hat a}_{[bc]}$, то есть $N^{\hat a}_{bc}=4\sqrt{-1}J^{\hat a}_{bc}$.

3) $i=a$, $t=\hat b$, $k=\hat c$. Тогда $N^a_{\hat b\hat c}=J^d_{\hat b}(J^a_{d\hat c}-J^a_{\hat cd})+J^{\hat d}_{\hat b}(J^a_{\hat d\hat c}-J^a_{\hat c\hat d})-J^d_{\hat c}(J^a_{d\hat b}-J^a_{\hat bd})-J^{\hat d}_{\hat c}(J^a_{\hat d\hat b}-J^a_{\hat b\hat d})=-\sqrt{-1}(J^a_{\hat b\hat c}-J^a_{\hat c\hat b})+\sqrt{-1}(J^a_{\hat cb}-J^a_{\hat bc})=-4\sqrt{-1}J^a_{[\hat b\hat c]}$, то есть $N^a_{\hat b\hat c}=-4\sqrt{-1}J^a_{[\hat b\hat c]}$.

Аналогично можно доказать, что остальные компоненты тензора Нейенхейса нулевые. Таким образом, ненулевыми компонентами тензора Нейенхейса являются

$$\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat b\hat c}=-\tfrac18N^a_{\hat b\hat c};\quad -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{bc}=-\tfrac18N^{\hat a}_{bc};$$

Тензор Нейенхейса в силу своего определения кососимметричен по ковариантным аргументам и первая группа структурных уравнений почти комплексной структуры имеет вид

$$d\omega^a=\omega^a_b\wedge\omega^b-\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat bc}\omega^c\wedge\omega^{\hat b}-\tfrac18N^a_{\hat b\hat c}\omega^{\hat b}\wedge\omega^{\hat c};$$
$$d\omega^{\hat a}=\omega^{\hat a}_{\hat b}\wedge\omega^{\hat b}-\tfrac18N^{\hat a}_{bc}\omega^b\wedge\omega^c+\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{b\hat c}\omega^{\hat c}\wedge\omega^b$$

Переобозначая индексы $b\leftrightarrow c$, мы сможем записать эти уравнения в виде

$$d\omega^a=(\omega^a_b+\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat cb}\omega^{\hat c})\wedge\omega^b-\tfrac18N^a_{\hat b\hat c}\omega^{\hat b}\wedge\omega^{\hat c};$$
$$d\omega^{\hat a}=(\omega^{\hat a}_{\hat b}-\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{c\hat b}\omega^c)\wedge\omega^{\hat b}-\tfrac18N^{\hat a}_{bc}\omega^b\wedge\omega^c$$

Введем обозначения $\theta^a_b=\omega^a_b+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat cb}\omega^{\hat c}$ и $\theta^{\hat a}_{\hat b}=\omega^{\hat a}_{\hat b}-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{c\hat b}\omega^c$. Тогда эти уравнения запишутся в виде

$$d\omega^a=\theta^a_b\wedge\omega^b-\tfrac18N^a_{\hat b\hat c}\omega^{\hat b}\wedge\omega^{\hat c};$$
$$d\omega^{\hat a}=\theta^{\hat a}_{\hat b}\wedge\omega^{\hat b}-\tfrac18N^{\hat a}_{bc}\omega^b\wedge\omega^c$$

Напомним, что для $A-$ репера $p=(m,\varepsilon_a,\varepsilon_{\hat b})$ векторы $\varepsilon_a\in D^{\sqrt{-1}}_J$, а $\varepsilon_{\hat b}\in D^{-\sqrt{-1}}_J$. Дуальный ему корепер имеет вид $(m,\omega^a,\omega^{\hat b})$ (это как раз те же омеги, что и в структурных уравнениях, но взятые в точке m).

Лемма 6.4. Вектор $X\in D\sqrt{-1}_J\Leftrightarrow\omega^{\hat a}(X)=0$. Заметим, что все рассматривается в фиксированной точке m.

Доказательство. Имеем $X=X^a\varepsilon_a+X^{\hat a}\varepsilon_{\hat a}=\omega^a(X)\varepsilon_a+\omega^{\hat a}(X)\varepsilon_{\hat a}$. Тогда $X\in D\sqrt{-1}_J\Leftrightarrow X=X^a\varepsilon_a$, то есть $X^{\hat a}\varepsilon_{\hat a}=0$, то есть $\omega^{\hat a}(X)\varepsilon_{\hat a}=0$. В силу линейной независимости векторов $\varepsilon_{\hat a}$ получим $\omega^{\hat a}(X)=0$. $\square$ Аналогично получаем, что $X\in D{-}\sqrt{-1}_J\Leftrightarrow\omega^a(X)=0$. Итак, мы получили, что система $\{\omega^a=0\}$ является системой Пфаффа распределения $D{-}\sqrt{-1}_J$ и, соответственно, система $\{\omega^{\hat a}\}$ является системой Пфаффа распределения $D\sqrt{-1}_J$.

Выясним, когда эти распределения будут вполне интегрируемы. По теореме Фробениуса система форм $\{\omega^a = 0\}$ вполне интегрируема тогда и только тогда, когда существуют формы $\{\theta^a_b\}$ такие, что $d\omega^a = \theta^a_b \wedge \omega^b$. Это имеет место тогда и только тогда, когда $N^a_{\hat{b}\hat{c}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}} = 0$. В силу линейной независимости базисных форм $\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}}$, $\hat{b} < \hat{c}$ получим $N^a_{\hat{b}\hat{c}} = 0$.

Вывод: собственное распределение $D_J^{-\sqrt{-1}}$ структурного эндоморфизма J инволютивно тогда и только тогда, когда $N^a_{\hat{b}\hat{c}} = 0$.

Аналогично получаем, что собственное распределение $D_J^{\sqrt{-1}}$ структурного эндоморфизма J инволютивно тогда и только тогда, когда $N^{\hat{a}}_{bc} = 0$.

Лемма 6.5. Для тензора Нейенхейса имеем $\bar{N}^a_{\hat{b}\hat{c}} = N^{\hat{a}}_{bc}$. Черта обозначает комплексное сопряжение.

Доказательство. Фиксируем точку $m \in M$. Докажем сначала, что для любого вектора $X \in T_m(M)$ $\bar{X}^a = X^{\hat{a}}$ и $\bar{X}^{\hat{a}} = X^a$. Действительно, применим оператор τ к вектору X. Так как X вещественный вектор, то $\tau X = X$. Тогда $\tau(X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}) = X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}$, то есть $\bar{X}^a\varepsilon_{\hat{a}} + \bar{X}^{\hat{a}}\varepsilon_a = X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}$. В силу линейной независимости векторов $A-$ базиса получим $\bar{X}^a = X^{\hat{a}}$ и $\bar{X}^{\hat{a}} = X^a$.

В силу вещественности тензора Нейенхейса имеем $\tau(N(X,Y)) = N(X,Y)$ для любых $X, Y \in T_m(M)$. С учетом того, что все компоненты тензора Нейенхейса, кроме двух, нулевые, получим $\tau(N^a_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}\varepsilon_a + N^{\hat{a}}_{bc}X^bY^c\varepsilon_{\hat{a}}) = N^a_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}\varepsilon_a + N^{\hat{a}}_{bc}X^bY^c\varepsilon_{\hat{a}}$, то есть $\bar{N}^a_{\hat{b}\hat{c}}X^bY^c\varepsilon_{\hat{a}} + \bar{N}^{\hat{a}}_{bc}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}\varepsilon_a = N^a_{\hat{b}\hat{c}}X^{\hat{b}}Y^{\hat{c}}\varepsilon_a + N^{\hat{a}}_{bc}X^bY^c\varepsilon_{\hat{a}}$. В силу линейной независимости векторов $A-$ базиса и произвола в выборе векторов X, Y мы получим требуемые соотношения. □

Итак, мы доказали

Теорема 6.6. Инволютивность одного из собственных распределений структурного эндоморфизма эквивалентно инволютивности другого распределения и эквивалентно обращению в нуль тензора Нейенхейса структурного эндоморфизма.

Определение 6.7. Связность на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры почти комплексного многообразия называется почти комплексной связностью.

Если ∇ – почти комплексная связность, $\theta = \{\theta^i_j\}$ – форма этой связности, то связность ∇ отождествляется со связностью на пространстве расслоения комплексных реперов (то есть вещественных реперов p таких, что $J \circ p = p \circ J_0$) в силу биекции между множеством $A-$ реперов и $RA-$ реперов, а последняя однозначно достраивается до связности на пространстве расслоения всех вещественных реперов. Все три связности будем отождествлять и обозначать одной буквой.

Теорема 6.7. Связность ∇ на почти комплексном многообразии (M, J) является почти комплексной связностью тогда и только тогда, когда $\nabla J = 0$.

Доказательство. Пусть $\theta = \{\theta^i_j\}$ – форма связности ∇. Эта связность будет почти комплексной связностью тогда и только тогда, когда ее форма связности θ принимает значения в алгебре Ли структурной группы, то есть в алгебре Ли $\mathbf{gl}(n, \mathbf{C})$.

Напомним, что группа $GL(n, \mathbf{C}) \subset GL(2n, \mathbf{C})$ с помощью отображения

$$Z \to \breve{Z} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \bar{Z} \end{pmatrix}$$

При этом реперу $p = (m, e_1, \ldots, e_n)$ $\mathbf{C}$-линейного пространства $T_m(M)$ ставится в соответствие $A-$ репер $(m, \sigma(e_1), \ldots, \sigma(e_n), \bar{\sigma}(e_1), \ldots, \bar{\sigma}(e_n))$.

Следовательно, связность ∇ будет почти комплексной связностью тогда и только тогда, когда $\bar{\theta}^a_b = \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$ и $\theta^a_{\hat{b}} = \theta^{\hat{a}}_b = 0$.

С другой стороны, в связности ∇ имеем $\nabla J^i_j \equiv dJ^i_j + J^i_k\theta^k_j - J^k_j\theta^i_k = J^i_{j,k}\omega^k$. Следовательно, $\nabla J = 0$ тогда и только тогда, когда $J^i_{j,k} = 0$ тогда и только тогда, когда $dJ^i_j + J^i_k\theta^k_j - J^k_j\theta^i_k = 0$.

Распишем это соотношение на пространстве присоединенной $G-$ структуры. В силу того, что $J^a_b = \sqrt{-1}\delta^a_b$, $J^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^b_a$, $J^{\hat{a}}_b = J^a_{\hat{b}} = 0$, получим

1) $J^a_c\theta^c_b - J^c_b\theta^a_c = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

2) $J^{\hat{a}}_{\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_b - J^c_b\theta^{\hat{a}}_{\hat{c}} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}_b - \sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}_b = 0$ или $\theta^{\hat{a}}_b = 0$.

3) $J^{\hat{a}}_{\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_{\hat{b}} - J^{\hat{c}}_{\hat{b}}\theta^{\hat{a}}_{\hat{c}} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

4) $J^a_c\theta^c_{\hat{b}} - J^{\hat{c}}_{\hat{b}}\theta^a_{\hat{c}} = 0 \Leftrightarrow \theta^a_{\hat{b}} = 0$.

Соотношение $\bar{\theta}^a_b = \theta^{\hat{a}}_b$ есть ни что иное, как выражение вещественности связности.

Итак, форма связности θ принимает значения в алгебре $\mathbf{gl}(n, \mathbf{C})$ тогда и только тогда, когда $\bar{\theta}^a_b = \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$, $\theta^{\hat{a}}_b = \theta^a_{\hat{b}} = 0 \Leftrightarrow \nabla J = 0$. □

Пример. Пусть ∇ – произвольная связность без кручения на почти комплексном многообразии $(M,\,J)$, $\theta=\{\theta^i_j\}$ – ее форма связности. Рассуждая в точности как и выше, получим, что первая группа структурных уравнений этой связности $d\omega^i=\theta^i_j\wedge\omega^j$ примет вид

$$d\omega^a=\theta^a_b\wedge\omega^b-\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat b,c}\,\omega^c\wedge\omega^{\hat b}-\tfrac{1}{8}N^a_{\hat b\hat c}\omega^{\hat b}\wedge\omega^{\hat c};$$
$$d\omega^{\hat a}=\theta^{\hat a}_{\hat b}\wedge\omega^{\hat b}+\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{b,\hat c}\omega^{\hat c}\wedge\omega^b-\tfrac{1}{8}N^{\hat a}_{bc}\omega^b\wedge\omega^c$$

$$\theta^a_{\hat b}=-\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat b,k}\omega^k;\quad \theta^{\hat a}_b=\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{b,k}\omega^k;\quad J^a_{b,k}=0;\quad J^{\hat a}_{\hat b,k}=0;$$

Их можно переписать в виде

$$\begin{cases} d\omega^a=\tilde\theta^a_b\wedge\omega^b-\frac{1}{8}N^a_{\hat b\hat c}\omega^{\hat b}\wedge\omega^{\hat c};\\ d\omega^{\hat a}=\tilde\theta^{\hat a}_{\hat b}\wedge\omega^{\hat b}-\frac{1}{8}N^{\hat a}_{bc}\omega^b\wedge\omega^c \end{cases}\tag{10}$$

где $\tilde\theta^a_b=\theta^a_b+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat c,b}\omega^{\hat c}$, $\tilde\theta^{\hat a}_{\hat b}=\theta^{\hat a}_{\hat b}-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat a}_{c,\hat b}\omega^c$.

Заметим, что в силу вещественности связности ∇ имеем $\bar\theta^a_b=\theta^{\hat a}_{\hat b}$, а значит, $\overline{\tilde\theta^a_b}=\tilde\theta^{\hat a}_{\hat b}$.

Рассмотрим форму $\eta=\{\eta^i_j\}$ такую, что $\eta^a_b=\tilde\theta^a_b$, $\eta^{\hat a}_{\hat b}=\tilde\theta^{\hat a}_{\hat b}$, $\eta^{\hat a}_b=\eta^a_{\hat b}=0$. Тогда $\bar\eta^a_b=\eta^{\hat a}_{\hat b}$, $\eta^{\hat a}_b=\eta^a_{\hat b}=0$. Значит, форма η может являться формой некоторой почти комплексной связности. Чтобы проверить так ли это, воспользуемся теоремой Картана-Лаптева (мы можем применить эту теорему, так так группа $GL(n,\mathbf{C})$ связна). Нам нужно проверить, что

$$d\eta^i_j-\eta^i_k\wedge\eta^k_j\equiv 0(mod\,\omega^i\wedge\omega^j)$$

1) $d\eta^a_b-\eta^a_c\wedge\eta^c_b-\eta^a_{\hat c}\wedge\eta^{\hat c}_b=d\tilde\theta^a_b-\tilde\theta^a_c\wedge\tilde\theta^c_b-0=d(\theta^a_b+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat c,b}\omega^{\hat c})-(\theta^a_c+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat d,c}\omega^{\hat d})\wedge(\theta^c_b+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^c_{\hat g,b}\omega^{\hat g})=d\theta^a_b+\frac{\sqrt{-1}}{2}dJ^a_{\hat c,b}\wedge\omega^{\hat c}+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat c,b}\wedge d\omega^{\hat c}-\theta^a_c\wedge\theta^c_b-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^c_{\hat g,b}\theta^a_c\wedge\omega^{\hat g}+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat d,c}\theta^c_b\wedge\omega^{\hat d}+\frac{1}{4}J^a_{\hat d,c}\,J^c_{\hat g,b}\omega^{\hat d}\wedge\omega^{\hat g}$ Используя вторую группу структурных уравнений связности θ, то есть $d\theta^a_b=\theta^a_c\wedge\theta^c_b+\theta^a_{\hat c}\wedge\theta^{\hat c}_b+\frac{1}{2}R^a_{bij}\omega^i\wedge\omega^j$, первую группу структурных уравнений связности θ и (5) получим, что $d\eta^a_b-\eta^a_c\wedge\eta^c_b-\eta^a_{\hat c}\wedge\eta^{\hat c}_b\equiv 0(mod\,\omega^i\wedge\omega^j)$ (подробные вычисления проведите самостоятельно).

2) $d\eta^{\hat a}_{\hat b}=\overline{d\eta^a_b}\equiv 0(mod\,\omega^i\wedge\omega^j)$

3) $d\eta^{\hat a}_b=d\eta^a_{\hat b}\equiv 0$.

Теорема 6.8. Любая связность без кручения на почти комплексном многообразии внутренним образом порождает почти комплексную связность, тензор кручения которой с точностью до постоянного множителя $\frac{1}{4}$ совпадает с тензором Нейенхейса.

Доказательство. Осталось лишь доказать утверждение относительно кручения связности. Для этого запишем (10) в виде (мы можем это сделать из-за того, что соответствующие компоненты тензора Нейенхейса равны нулю)

$$d\omega^a=\eta^a_b\wedge\omega^b-\tfrac{1}{8}N^a_{ij}\omega^i\wedge\omega^j;$$
$$d\omega^{\hat a}=\eta^{\hat a}_{\hat b}\wedge\omega^{\hat b}-\tfrac{1}{8}N^{\hat a}_{ij}\omega^i\wedge\omega^j$$

или в виде $d\omega^i=\eta^i_j\wedge\omega^j-\frac{1}{8}N^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k$. С другой стороны, из общей теории связностей имеем $d\omega^i=\eta^i_j\wedge\omega^j+\frac{1}{2}S^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k$, где $\{S^i_{jk}\}$ – система функций, задающих тензор кручения связности η. Сравнивая два последних выражения, приходим к выводу, что $S^i_{jk}=-\frac{1}{4}N^i_{jk}$.

Замечание. Используя аналогичное рассуждение, нетрудно убедиться, что вообще любая связность на почти комплексном многообразии порождает почти комплексную связность, тензор кручения которой уже не будет иметь такого прозрачного геометрического смысла.

Задача 6.13. Рассмотрите произвольную связность на почти комплексном многообразии $(M,\,J)$ и постойте почти комплексную связность на этом многообразии. Получите выражение тензора кручения полученной связности через тензор кручения исходной связности.

Задача 6.14. Рассмотрите почти комплексную связность для связности без кручения (произвольной связности) и найдите ее тензор кривизны.

Следствие. На почти комплексном многообразии всегда существует почти комплексная связность, тензор кручения которой $S=-\frac{1}{4}N$.

Доказательство. Это вытекает из того, что на любом многообразии сущесвует риманова метрика, а значит, риманова связность, которая является связностью без кручения. Риманова связность порождает искомую почти комплексную связность. □

6.7 Вычисление тензора Нейенхейса в явном виде.

Для тензора Нейенхейса на пространстве присоединенной $G-$ структуры (то есть в $A-$ реперах) имеем

$$N^{\hat{a}}_{bc} = 4\sqrt{-1}J^{\hat{a}}_{[bc]}; \quad N^{a}_{\hat{b}\hat{c}} = -4\sqrt{-1}J^{a}_{[\hat{b}\hat{c}]} \tag{11}$$

Остальные компоненты тензора Нейенхейса равны нулю. Например,

$$1)\, N^{a}_{\hat{b}c} = 0;\ 2)\, N^{\hat{a}}_{b\hat{c}} = 0; \quad 3)\, N^{\hat{a}}_{bc} = 0;\ 4)\, N^{a}_{b\hat{c}} = 0; \quad 5) N^{a}_{bc} = 0;\ 6)\, N^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} = 0 \tag{12}$$

Соотношения 12_1 можно записать в виде $(N(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c))^a\varepsilon_a = 0$. Напомним, что $X = X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} = \sigma(X) + \bar{\sigma}(X)$, где $X^a\varepsilon_a \in D_J^{\sqrt{-1}}$, $X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}} \in D_J^{-\sqrt{-1}}$. Так как (ε_c) – базис $D_J^{\sqrt{-1}}$, а $(\varepsilon_{\hat{c}})$ – базис $D_J^{-\sqrt{-1}}$, то последнее соотношение перепишется в виде $N(\bar{\sigma}X, \sigma Y)^a\varepsilon_a = 0$ или $\sigma(N(\bar{\sigma}X, \sigma Y)) = 0$. Это верно для любой точки $m \in M$, а значит, это равенство справедливо для любых векторный полей $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Применяя оператор комплексного сопряжения, получим $\bar{\sigma}(N(\sigma X, \bar{\sigma}Y)) = 0$ (Также это равенство можно получить непосредственно из соотношений (12_2)).
Аналогично, из остальных соотношений (12) получим $\bar{\sigma}N(\sigma X, \sigma Y) = 0, \sigma N(\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y) = 0, \sigma N(\sigma X, \sigma Y) = 0, \bar{\sigma}N(\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y) = 0$.

Пусть теперь $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ – произвольные векторные поля. Тогда, так как $\sigma + \bar{\sigma} = id$, получим $N(X,Y) = (\sigma+\bar{\sigma})\,(N(\sigma+\bar{\sigma})X, (\sigma+\bar{\sigma})Y) = \sigma(N(\sigma X, \sigma Y)) + \sigma N(\sigma X, \bar{\sigma}Y) + \sigma N(\bar{\sigma}X, \sigma Y) + \sigma N(\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y) + \bar{\sigma}(N(\sigma X, \sigma Y)) + \bar{\sigma}N(\sigma X, \bar{\sigma}Y) + \bar{\sigma}N(\bar{\sigma}X, \sigma Y) + \bar{\sigma}N(\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y)$. В этой сумме все нули, кроме двух слагаемых.

$$N(X,Y) = \sigma(N(\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y)) + \bar{\sigma}(N(\sigma X, \sigma Y))$$

Воспользуемся тем, что тензор Нейенхейса $N(X,Y) = -4S(X,Y)$, где S – тензор кручения почти комплексной связности ∇ и $S(X,Y) = -\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X,Y]$ (мы поменяли здесь знаки, так как в структурных уравнениях мы перешли к базису с противоположным знаком, а значит, у нас поменялся знак на противоположный и у функций S^i_{jk}. Таким образом, знак нашего тензора кручения противоположен знаку тензора кручения, построенного в общей теории связностей на главном расслоении реперов.) Как мы доказали, для почти комплексной связности имеем $\nabla_X(J)Y = 0$, следовательно, $\nabla_X(JY) = \nabla_X(J)Y + J\nabla_X Y = J\nabla_X Y$.

$$\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y$$

Кроме того, $\nabla_X(\sigma Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \sqrt{-1}\nabla_X(JY)) = \frac{1}{2}((\nabla_X Y - \sqrt{-1}J\nabla_X Y) = \sigma(\nabla_X Y)$. Аналогично доказывается, что $\nabla_X(\bar{\sigma}Y) = \bar{\sigma}(\nabla_X Y)$.

$$\nabla_X(\sigma Y) = \sigma(\nabla_X Y); \quad \nabla_X(\bar{\sigma}Y) = \bar{\sigma}(\nabla_X Y);$$

Напомним, что σ и $\bar{\sigma}$ являются взаимно дополнительными проекторами, а значит, $\sigma \circ \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \circ \sigma = 0$. Тогда $N(X,Y) = -4\,(\sigma(S(\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y)) + \bar{\sigma}(S(\sigma X, \sigma Y))) = -4(-\sigma(\nabla_{\bar{\sigma}X}(\bar{\sigma}Y) + \sigma(\nabla_{\bar{\sigma}Y}\bar{\sigma}X + \sigma[\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y] - \bar{\sigma}(\nabla_{\sigma X}(\sigma Y) + \bar{\sigma}(\nabla_{\sigma Y}(\sigma X) + \bar{\sigma}[\sigma X, \sigma Y]) = -4(\sigma[\bar{\sigma}X, \bar{\sigma}Y] + \bar{\sigma}[\sigma X, \sigma Y])$. Подставим в это выражение $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J)$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J)$. Получим $N(X,Y) = -\frac{1}{2}((id - \sqrt{-1}J)[(id + \sqrt{-1}J)X, (id + \sqrt{-1}J)Y] + (id + \sqrt{-1}J)[(id - \sqrt{-1}J)X, (id - \sqrt{-1}J)Y])$. Раскрывая это равенство по линейности и приводя подобные, мы получим

$$N(X,Y) = -[X,Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

Заметим, что традиционно по определению за тензор Нейенхейса принимают выражение, отличающееся от написанного на множитель $\frac{1}{4}$.