1 Некоторые вопросы геометрии приближено келеровых многообразий.

1.1 Полная группа структурных уравнений приближенно келеровых многообразий.

Пусть $(M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – приближенно келерово многообразие. Напомним, что на языке инвариантного исчисления Кошуля класс приближенно келеровых многообразий задается соотношением

$$\nabla_X(F)(X,Y) = 0 \tag{1}$$

где $F(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ – келерова форма, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ – произвольные векторные поля. В силу невырожденности метрики g соотношение (1) можно записать в виде

$$\nabla_X(J)X = 0$$

Поляризуем последнее соотношение. Для этого заменим X на $X + Y$ и раскроем по линейности. В результате получим еще одно тождество, задающее класс приближенно келеровых многообразий:

$$\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0$$

Напомним, что, изучая почти эрмитовы многообразия, мы ввели обозначения

$$\begin{array}{lll} B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},c}; & B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; & C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},\hat{c}}; \\ B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{\hat{b},\hat{c}}; & B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{[\hat{b},c]}; & C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{\hat{b},c}; \end{array}$$

На пространстве присоединенной $G-$ структуры класс приближенно келеровых многообразий выделяется соотношениями

$$B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0; \quad B^{[abc]} = B^{abc}; \quad B_{[abc]} = B_{abc};$$

то есть виртуальный тензор нулевой, а структурный тензор кососимметричен по любой паре индексов. Из последнего условия следует, что $B^{abc} = -B^{bac}$. Вспомним, что мы обозначали $B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}$. Тогда $J^a_{[\hat{b},\hat{c}]} = -J^b_{[\hat{a},\hat{c}]}$. Распишем это соотношение

$$J^a_{\hat{b},\hat{c}} - J^a_{\hat{c},\hat{b}} = J^b_{\hat{c},\hat{a}} - J^b_{\hat{a},\hat{c}} \tag{2}$$

Лемма 1.1. $J^a_{\hat{b},\hat{c}} = -J^b_{\hat{a},\hat{c}}$.

Доказательство. Мы знаем, что для любого почти эрмитова многообразия $\langle JX, Y\rangle + \langle X, JY\rangle = 0$. Применяя оператор ковариантного дифференцирования, получим $\langle \nabla_Z(J)X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z(J)Y\rangle = 0$. Распишем это равенство в компонентах:

$$g_{lj} J^l_{i,k} + g_{il} J^l_{j,k} = 0$$

(Если Вам не понятен принцип, по которому записано последнее соотношение, то подставьте вместо X, Y, Z базисные векторы e_i, e_j, e_k, воспользуйтесь свойством линейности тензоров и определением компонент тензора).

Запишем последнее соотношение на пространстве присоединенной $G-$ структуры. Положим $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$, $k = \hat{c}$. Тогда $g_{l\hat{b}} J^l_{\hat{a},\hat{c}} + g_{\hat{a}l} J^l_{\hat{b},\hat{c}} = 0$. Распишем индекс суммирования l с учетом $g_{ab} = g_{\hat{a}\hat{b}} = 0$: $g_{d\hat{b}} J^d_{\hat{a},\hat{c}} + g_{\hat{a}d} J^d_{\hat{b},\hat{c}} = 0$, то есть

$$J^b_{\hat{a},\hat{c}} + J^a_{\hat{b},\hat{c}} = 0 \ \square$$

Вернемся к соотношению (2) с учетом доказанной леммы. $-J^b_{\hat{a},\hat{c}} + J^c_{\hat{a},\hat{b}} = -J^c_{\hat{b},\hat{a}} - J^b_{\hat{a},\hat{c}}$, то есть

$$J^c_{\hat{a},\hat{b}} = -J^c_{\hat{b},\hat{a}}$$

Откуда получаем, что для приближенно келеровых многообразий

$$B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},\hat{c}} = C^{abc}$$

Применяя оператор комплексного сопряжения, мы получаем соотношение

$$B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{[\hat{b},c]} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{\hat{b},c} = C_{abc}$$

Тогда первая группа структурных уравнений приближенно келерова многообразия примет вид

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c; \quad d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c$$

Кроме того, при расписывании основной теоремы тензорного анализа для почти комплексной структуры J мы получили соотношения $\omega^{\hat{a}}_b = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{\hat{b},k}\omega^k$ и $\omega^a_{\hat{b}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},k}\omega^k$. Для приближенно келеровых многообразий эти соотношения приобретут вид (здесь мы учитываем, что $B_{abc} = C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{\hat{b},c}$ и $B_{ab}{}^{c} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{\hat{b},\hat{c}} = 0$): $\omega^{\hat{a}}_b = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{\hat{b},c}\omega^c + \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{\hat{b},\hat{c}}\omega^{\hat{c}} = -B_{abc}\omega^c$. Аналогично, $\omega^a_{\hat{b}} = -B^{abc}\omega_c$. Итак, мы получили, что для приближенно келеровых многообразий

$$\omega^{\hat{a}}_b = -B_{abc}\omega^c; \quad \omega^a_{\hat{b}} = -B^{abc}\omega_c;$$

Чтобы получить вторую группу структурных уравнений, нужно провести процедуру дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений. Опишем ее подробно.

Возьмем первое уравнение первой группы структурных уравнений и продифференцируем его внешним образом. Здесь нам нужно помнить формулу для дифференцирования внешнего произведения форм

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta$$

где ω – $r-$ форма, а θ – произвольная форма. Рассмотрим отдельно, каким образом нам продифференцировать такое внешнее произведение: $B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c$. Функции – это нуль формы. Тогда $d(B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c) = dB^{abc} \wedge (\omega_b \wedge \omega_c) + (-1)^0 B^{abc} d(\omega_b \wedge \omega_c) = dB^{abc} \wedge (\omega_b \wedge \omega_c) + B^{abc}\omega_b \wedge d\omega_c + (-1)^1 B^{abc}\omega_b \wedge d\omega_c$. Итак, мы получили

$$d(B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c) = dB^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c + B^{abc}\omega_b \wedge d\omega_c - B^{abc}\omega_b \wedge d\omega_c$$

Вернемся к первому уравнению первой группы структурных уравнений. Получим

$$0 = d\omega^a_b \wedge \omega^b - \omega^a_b \wedge d\omega^b + dB^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c + B^{abc}\omega_b \wedge d\omega_c - B^{abc}\omega_b \wedge d\omega_c$$

Подставим первую группу структурных уравнений

$$0 = d\omega^a_b \wedge \omega^b - \omega^a_b \wedge (\omega^b_c \wedge \omega^c + B^{bcd}\omega_c \wedge \omega_d) + dB^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c + B^{abc}(-\omega^d_b \wedge \omega_d + B_{bdf}\omega^d \wedge \omega^f) \wedge \omega_c - \\ - B^{abc}\omega_b \wedge (-\omega^d_c \wedge \omega_d + B_{cdf}\omega^d \wedge \omega^f) \tag{3}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые следующим образом. Сначала заметим, что в получившейся сумме есть два подобных слагаемых: $B^{abc}B_{bdf}\omega^d \wedge \omega^f \wedge \omega_c - B^{abc}B_{cdf}\omega_b \wedge \omega^d \wedge \omega^f$. Чтобы увидеть это произведем замену индексов суммирования во втором слагаемом $b \leftrightarrow c$. Тогда мы получим $B^{abc}B_{bdf}\omega^d \wedge \omega^f \wedge \omega_c - B^{acb}B_{bdf}\omega_c \wedge \omega^d \wedge \omega^f$. Вспомним, что для приближенно келерова многообразия структурный тензор кососимметричен по любой паре индексов. Поэтому во втором слагаемом $B^{acb} = -B^{abc}$. Кроме того, для 1-форм имеем $\omega^a \wedge \omega^b = -\omega^b \wedge \omega^a$. С учетом этого получаем $B^{abc}B_{bdf}\omega^d \wedge \omega^f \wedge \omega_c - B^{acb}B_{bdf}\omega_c \wedge \omega^d \wedge \omega^f = B^{abc}B_{bdf}\omega^d \wedge \omega^f \wedge \omega_c + B^{abc}B_{bdf} \wedge \omega^d \wedge \omega^f \wedge \omega_c = 2B^{abc}B_{bdf}\omega^d \wedge \omega^f \wedge \omega_c$. Вернемся к (3). Мы хотели сгруппировать слагаемые. Сделаем это следующим образом и введем обозначения.

$$\Delta\omega^a_b = d\omega^a_b - \omega^a_c \wedge \omega^c_b - 2B^{ahc}B_{hdb}\omega^d \wedge \omega_c;$$
$$\Delta B^{abc} = dB^{abc} - B^{dbc}\omega^a_d - B^{adc}\omega^b_d - B^{abd}\omega^c_d;$$

В этих обозначениях (3) примет вид

$$\Delta\omega^a_b \wedge \omega^b + \Delta B^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c = 0 \tag{4}$$

Заметим, что базис 1-форм на пространстве присоединенной $G-$ структуры составляют формы $\{\omega^a_b, \omega^c, \omega_c\}$. Тогда 1-форма ΔB^{abc} разложится по этому базису с некоторыми коэффициентами (функциями на пространстве присоединенной $G-$ структуры)

$$\Delta B^{abc} = B^{abcd}{}_f\omega^f_d + B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d$$

Замечание. Мы помним, что каноническим базисом $r-$ форм $\Lambda_r(V)$ является совокупность $r-$ форм $\{e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_r}\};(i_1<\ldots<i_r)$, где $(e^1,\ldots,e^n)$ – кобазис модуля V. Применим это в случае 2-форм на пространстве присоединенной $G-$ структуры.

Базис 2-форм составляют формы $\{\omega^a_b\wedge\omega^c_d((a,b)<(c,d));\omega^a_b\wedge\omega^c;\omega^a_b\wedge\omega_c;\omega^c\wedge\omega_d;\omega^c\wedge\omega^d(c<d);\omega_c\wedge\omega_d(c<d)\}$. Разложим по этому базису 2-форму $\Delta\omega^a_b$.

$$\Delta\omega^a_b=A^{acd}_{bfh}\omega^f_c\wedge\omega^h_d+A^{acd}_{bf}\omega^f_c\wedge\omega_d+A^{ac}_{bdf}\omega^d_c\wedge\omega^f+A^{ac}_{bd}\omega^d\wedge\omega_c+A^a_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d+A^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d$$

где коэффициентами разложения являются некоторые подходящие функции на пространстве присоединенной $G-$ структуры. Так как $\Delta\omega^a_b$ – 2-форма, то есть кососимметрична по своим аргументам, получим, что

$$A^{acd}_{bfh}=-A^{adc}_{bhf};\quad A^{acd}_b=-A^{adc}_b;\quad A^a_{bcd}=-A^a_{bdc};$$

Подставим введенные разложения форм в (4).

$$(A^{acd}_{bfh}\omega^f_c\wedge\omega^h_d+A^{acd}_{bf}\omega^f_c\wedge\omega_d+A^{ac}_{bdf}\omega^d_c\wedge\omega^f+A^{ac}_{bd}\omega^d\wedge\omega_c+A^a_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d+A^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d)\wedge\omega^b+$$
$$+(B^{abcd}{}_f\omega^f_d+B^{abcd}\omega_d+B^{abc}{}_d\omega^d)\wedge\omega_b\wedge\omega_c=0$$

Раскроем скобки.

$$A^{acd}_{bfh}\omega^f_c\wedge\omega^h_d\wedge\omega^b+A^{acd}_{bf}\omega^f_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b+A^{ac}_{bdf}\omega^d_c\wedge\omega^f\wedge\omega^b+A^{ac}_{bd}\omega^d\wedge\omega_c\wedge\omega^b+A^a_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^b+$$
$$+A^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b+B^{abcd}{}_f\omega^f_d\wedge\omega_b\wedge\omega_c+B^{abcd}\omega_d\wedge\omega_b\wedge\omega_c+B^{abc}{}_d\omega^d\wedge\omega_b\wedge\omega_c=0$$

Мы получили линейную комбинацию базисных 3-форм. Чтобы воспользоваться их линейной независимостью, нам нужно привести подобные слагаемые и упорядочить базисные 1-формы по возрастанию номеров. Для этого нам потребуется

Лемма 1.2.

$$t_{ij}\omega^i\wedge\omega^j=2t_{[ij]}\omega^i\wedge\omega^j(i<j);\quad t_{ijk}\omega^i\wedge\omega^j\wedge\omega^k=3!t_{[ijk]}\omega^i\wedge\omega^j\wedge\omega^k(i<j<k);$$

Доказательство. Имеем $t_{ij}\omega^i\wedge\omega^j=t_{ij}\omega^i\wedge\omega^j(i<j)+t_{ij}\omega^i\wedge\omega^j(i>j)=t_{ij}\omega^i\wedge\omega^j(i<j)+t_{ji}\omega^j\wedge\omega^i(j>i)=(t_{ij}-t_{ji})\omega^i\wedge\omega^j(i<j)=2t_{[ij]}\omega^i\wedge\omega^j(i<j)$. Второе соотношение доказывается аналогично, но уже с 6 слагаемыми. □

Применим лемму в нашем случае. Учтем, что при разложении формы $\Delta\omega^a_b$ формы $\omega^f_c\wedge\omega^h_d$ уже брались упорядоченными, а значит, дополнительного упорядочевания нам не потребуется.

$$A^{acd}_{bfh}\omega^f_c\wedge\omega^h_d\wedge\omega^b-A^{acd}_{bf}\omega^f_c\wedge\omega^b\wedge\omega_d+2A^{ac}_{[b|d|f]}\omega^d_c\wedge\omega^f\wedge\omega^b(f<b)+2A^{ac}_{[bd]}\omega^b\wedge\omega^d\wedge\omega_c(b<d)+$$
$$+3!A^a_{[bcd]}\omega^b\wedge\omega^c\wedge\omega^d+2(A^{a[cd]}_b+B^{a[cd]}{}_b)\omega^b\wedge\omega_c\wedge\omega_d(c<d)+B^{a[bc]}{}_f\omega^f_d\wedge\omega_b\wedge\omega_c(b<c)+$$
$$+3!B^{a[bcd]}\omega_b\wedge\omega_c\wedge\omega_d(b<c<d)=0$$

Теперь мы можем применить линейную независимость базисных 3-форм.

$$A^{acd}_{bfh}=0;\quad A^{acd}_{bf}=0;\quad A^{ac}_{[b|d|f]}=0;\quad A^{ac}_{[bd]}=0;$$
$$A^a_{[bcd]}=0;\quad A^{a[cd]}_b+B^{a[cd]}{}_b=0;\quad B^{a[bcd]}=0;\quad B^{a[bc]}{}_f{}^d=0$$

Заметим, что функции A^{acd}_b мы брали кососимметричными по последним верхним аргументам, а значит, $A^{a[cd]}_b=A^{acd}_b$. Кроме того, так как структурный тензор кососимметричен по любой паре своих аргументов из соотношения

$$dB^{abc}-B^{dbc}\omega^a_d-B^{adc}\omega^b_d-B^{abd}\omega^c_d=B^{abc}{}_f{}^d\omega^f_d+B^{abcd}\omega_d+B^{abc}{}_d\omega^d$$

мы получаем, что все функции, стоящие справа, кососимметричны по любой паре верхних трех первых индексов. Тогда $B^{a[bc]}{}_f{}^d=B^{abc}{}_f$, $B^{a[cd]}{}_b=B^{acd}{}_b$. С учетом этих замечаний получаем

$$A^{acd}_{bfh}=0;\quad A^{acd}_{bf}=0;\quad A^{ac}_{[b|d|f]}=0;\quad A^{ac}_{[bd]}=0;$$
$$A^a_{[bcd]}=0;\quad A^{acd}_b+B^{acd}{}_b=0;\quad B^{a[bcd]}=0;\quad B^{abc}{}_f{}^d=0$$

Аналогичным образом мы можем продифференцировать второе уравнение первой группы структурных уравнений и сгруппировать слагаемые следующим образом (подробные вычисления проведите самостоятельно).

$$-\Delta\omega_b^a \wedge \omega_b + \Delta B_{abc} \wedge \omega^b \wedge \omega^c = 0$$

где

$$\begin{array}{l} \Delta B_{abc} = dB_{abc} + B_{dbc}\omega_a^d + B_{adc}\omega_b^d + B_{abd}\omega_c^d; \\ \Delta\omega_b^a = d\omega_b^a - \omega_c^a \wedge \omega_b^c - 2B^{ahc}B_{hdb}\omega^d \wedge \omega_c; \end{array} \tag{5}$$

Разложим 1-форму ΔB_{abc} по базису 1-форм

$$\Delta B_{abc} = B_{abc}{}_d^f\omega_f^d + B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d$$

2-форма $\Delta\omega_a^b$ у нас уже разложена. При этом часть коэффициентов разложения мы уже уточнили, а именно, $A_{afh}^{bcd} = 0$, $A_{af}^{bcd} = 0$. Подставим разложения форм $\Delta\omega_a^b$ и ΔB_{abc} в (5).

$$-A_{adf}^{bc}\omega_c^d \wedge \omega^f \wedge \omega_b - A_{ad}^{bc}\omega^d \wedge \omega_c \wedge \omega_b - A_{acd}^b\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega_b - A_a^{bcd}\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b + B_{abc}{}_d^f\omega_f^d \wedge \omega^b \wedge \omega^c + \\ + B_{abcd}\omega^d \wedge \omega^b \wedge \omega^c + B_{abc}{}^d\omega_d \wedge \omega^b \wedge \omega^c = 0$$

Подготовим это соотношение для применения линейной независимости базисных форм.

$$-A_{adf}^{bc}\omega_c^d \wedge \omega^f \wedge \omega_b - 2A_{ad}^{[bc]}\omega^d \wedge \omega_c \wedge \omega_b - 2(A_{a[cd]}^b - B_{a[cd]}{}^b)\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega_b - 3!A_a^{[bcd]}\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b + \\ + 2B_{a[bc]}{}_d^f\omega_f^d \wedge \omega^b \wedge \omega^c + 3!B_{a[bcd]}\omega^b \wedge \omega^c \wedge \omega^d = 0$$

В силу линейной независимости базисных форм с учетом косисимметричности A_{acd}^b по c, d и кососимметричности $B_{acd}{}^b$ по индексам c, d получим

$$\begin{array}{lll} A_{adf}^{bc} = 0; & A_{ad}^{[bc]} = 0; & A_{acd}^b - B_{acd}{}^b = 0; \\ A_a^{[bcd]} = 0; & B_{abc}{}_d^f = 0; & B_{a[bcd]} = 0; \end{array}$$

Рассмотрим подробнее соотношения $A_a^{[bcd]} = 0$ и $A_b^{acd} + B^{acd}{}_b = 0$. Проальтернируем последнее соотношение по индексам a, c, d. Так как структурные тензоры приближенно келерова многообразия кососимметричны по любой паре индексов, $B^{[acd]}{}_b = B^{acd}{}_b$. Тогда получим $A_b^{[acd]} + B^{acd}{}_b = 0$, следовательно, $B^{acd}{}_b = 0$, а значит, $A_b^{acd} = 0$. Аналогично можно получить, что $A_{bcd}^a = B_{bcd}{}^a = 0$.

С учетом всех полученных нулей имеем

$$\Delta\omega_b^a = A_{bd}^{ac}\omega^d \wedge \omega_c; \quad \Delta B^{abc} = B^{abcd}\omega_d; \quad \Delta B_{abc} = B_{abcd}\omega^d$$

Подставим в эти соотношения выражения для $\Delta\omega_b^a$, ΔB_{abc}, ΔB^{abc}.

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \left(2B^{ach}B_{hbd} + A_{bd}^{ac}\right)\omega^d \wedge \omega_c;$$
$$dB^{abc} - B^{dbc}\omega_d^a - B^{adc}\omega_d^b - B^{abd}\omega_d^c = B^{abcd}\omega_d; \quad dB_{abc} + B_{dbc}\omega_a^d + B_{adc}\omega_b^d + B_{abd}\omega_c^d = B_{abcd}\omega^d;$$

Эти уравнения называются *второй группой структурных уравнений* приближенно келерова многообразия. Кроме этих уравнений мы получили соотношения

$$A_{[bd]}^{ac} = 0; \quad A_{bd}^{[ac]} = 0; \quad B^{a[bcd]} = 0; \quad B_{a[bcd]} = 0;$$

Проведя процедуру дифференциального продолжения для первого соотношения второй группы структурных уравнений приближенно келерова многообразия, можно доказать, что система функций $\{A_{bd}^{ac}\}$, заданная на пространстве присоединенной $G-$ структуры задает тензорное поле валентности 4, а именно, эта система функций удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$dA_{bd}^{ac} - A_{bd}^{hc}\omega_h^a - A_{bd}^{ah}\omega_d^c + A_{hd}^{ac}\omega_b^h + A_{bh}^{ac}\omega_d^h = A_{bdh}^{ac}\omega^h + A_{bd}^{ach}\omega_h$$

Тензорное поле, задаваемое системой функций $\{A_{bd}^{ac}\}$, называется *структурным тензором третьего рода* или *тензором голоморфной секционной кривизны*. Кроме того, при этом получаются два тождества

$$A_{b[d}^{ac}B_{gf]c} + 2B^{ach}B_{hb[d}B_{gf]c} = 0; \quad B^{ach}B_{hb[df]} = 0 \tag{6}$$

Второе из этих тождеств равносильно тождеству $B^{ach}B_{hbdf} = 0$, так как $B^{ach}B_{hbdf} = -B^{ach}B_{hdbf} = -B^{ach}B_{hdfb} = B^{ach}B_{hdfb} = B^{ach}B_{hdbf} = -B^{ach}B_{hbdf}$, следовательно, $B^{ach}B_{hbdf} = 0$. Будем называть тождества (6) *первым и вторым фундаментальным тождеством*.

1.2 Компоненты классических тензоров на пространстве присоединенной $G-$ структуры.

Напомним, что для приближенно келерова многообразия

$$\omega_{\hat{b}}^{a} = -B^{abc}\omega_c; \quad \omega_b^{\hat{a}} = -B_{abc}\omega^c; \quad \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\omega_a^b;$$

и полная группа структурных уравнений имеет вид

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c; \qquad d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c;$$
$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \left(2B^{adh}B_{hbc} + A_{bc}^{ad}\right)\omega^c \wedge \omega_d$$

1.2.1 Тензор Римана-Кристоффеля (тензор римановой кривизны)

Мы знаем, что на пространстве расслоения всех реперов вторая группа структурных уравнений римановой связности имеет вид

$$d\omega_j^i = \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2}R_{jkl}^i\omega^k \wedge \omega^l \tag{7}$$

где R_{jkl}^i – система функций, задающая тензор Римана-Кристоффеля. В $A-$ реперах эти соотношения примут следующий вид:
1) $i = a$, $j = b$. Тогда (7) примет вид $d\omega_b^a = \omega_k^a \wedge \omega_b^k + \frac{1}{2}R_{bkl}^a\omega^k \wedge \omega^l = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \omega_{\hat{c}}^a \wedge \omega_b^{\hat{c}} + \frac{1}{2}R_{bcd}^a\omega^c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}R_{b\hat{c}d}^a\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^d + \frac{1}{2}R_{bc\hat{d}}^a\omega^c \wedge \omega^{\hat{d}} + \frac{1}{2}R_{b\hat{c}\hat{d}}^a\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{d}} = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + B^{acd}B_{cbh}\omega_d \wedge \omega^h + \frac{1}{2}R_{bcd}^a\omega^c \wedge \omega^d + R_{bc\hat{d}}^a\omega^c \wedge \omega^{\hat{d}} + \frac{1}{2}R_{b\hat{c}\hat{d}}^a\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{d}}$. Мы здесь привели подобные слагаемые $\frac{1}{2}R_{b\hat{c}d}^a\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^d + \frac{1}{2}R_{bc\hat{d}}^a\omega^c \wedge \omega^{\hat{d}}$, переобозначив в первом слагаемом $c \leftrightarrow d$ и воспользовавшись кососимметричностью тензора Римана-Кристоффеля.

Сравним полученное выражение со второй группой структурных уравнений

$$B^{acd}B_{cbh}\omega_d \wedge \omega^h + \frac{1}{2}R_{bcd}^a\omega^c \wedge \omega^d + R_{bc\hat{d}}^a\omega^c \wedge \omega^{\hat{d}} + \frac{1}{2}R_{b\hat{c}\hat{d}}^a = \left(2B^{ach}B_{hbd} + A_{bd}^{ac}\right)\omega^d \wedge \omega_c$$

Применяем линейную независимость базисных 2-форм (где нужно переобозначаем индексы суммирования). Получим

$$\begin{aligned}
&\omega^d \wedge \omega_c: \quad B^{ach}B_{hbd} + R_{bc\hat{d}}^a = 2B^{ach}B_{hbd} + A_{bd}^{ac}\\
&\omega^c \wedge \omega^d: \quad R_{bcd}^a = 0\\
&\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{d}}: \quad R_{b\hat{c}\hat{d}}^a = 0
\end{aligned}$$

2) $i = a$, $j = \hat{b}$. Тогда (7) примет вид

$$d\omega_{\hat{b}}^a = \omega_c^a \wedge \omega_{\hat{b}}^c + \omega_{\hat{c}}^a \wedge \omega_{\hat{b}}^{\hat{c}} + \frac{1}{2}R_{\hat{b}kl}^a\omega^k \wedge \omega^l = -B^{cbd}\omega_c^a \wedge \omega_d + B^{acd}\omega_d \wedge \omega_c^b + \frac{1}{2}R_{\hat{b}kl}^a\omega^k \wedge \omega^l$$

С другой стороны, продифференцируем внешним образом соотношение $\omega_{\hat{b}}^a = -B^{abc}\omega_c$. Получим $d\omega_{\hat{b}}^a = -dB^{abc} \wedge \omega_c - B^{abc}d\omega_c = -(B^{abcd}\omega_d + B^{dbc}\omega_d^a + B^{adc}\omega_d^b + B^{abd}\omega_d^c) \wedge \omega_c - B^{abc}(-\omega_c^d \wedge \omega_d + B_{cdh}\omega^d \wedge \omega^h)$. Приравняем полученные равенства.

$$-B^{cbd}\omega_c^a \wedge \omega_d + B^{acd}\omega_d \wedge \omega_c^b + \frac{1}{2}R_{\hat{b}kl}^a\omega^k \wedge \omega^l = -(B^{abcd}\omega_d + B^{dbc}\omega_d^a + B^{adc}\omega_d^b + B^{abd}\omega_d^c) \wedge \omega_c - B^{abc}(-\omega_c^d \wedge \omega_d + B_{cdh}\omega^d \wedge \omega^h)$$

После приведения подобных слагаемых (проведите подробные вычисления самостоятельно) мы получим

$$\frac{1}{2}R_{\hat{b}cd}^a\omega^c \wedge \omega^d + R_{\hat{b}\hat{c}d}^a\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^d + \frac{1}{2}R_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}^a\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{d}} = B^{abcd}\omega_c \wedge \omega_d - B^{abh}B_{hcd}\omega^c \wedge \omega^d$$

В силу линейной независимости базисных форм получаем

$$R_{\hat{a}\hat{b}cd} = -2B^{abh}B_{hcd}; \quad R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}d} = 0; \quad R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 2B^{ab[cd]};$$

Замечание.
1. Напомним, что операция поднятия и опускания индексов на пространстве присоединенной $G-$ структуры имеет вид $t_a = g_{a\hat{j}}t^{\hat{j}} = g_{a\hat{b}}t^{\hat{b}} = \sum_{b=1}^{n}\delta_a^b t^{\hat{b}} = t^{\hat{a}}$. Следовательно, $R_{bcd}^a = R_{\hat{a}bcd}$. Образно говоря, перемещаясь, индекс приобретает (теряет) крышку, если ее не было (она была).

2. Индексы компонент вещественных тензоров при комплексном сопряжении меняют состояние "без крышки" на состояние "с крышкой" и наоборот, то есть $\bar{t}_{\hat{a}b}{}^{c} = t_{a\hat{b}}{}^{\hat{c}}$. Почему так происходит? Рассмотрим этот процесс на примере вещественного тензора t типа (1,0). В общем случае все аналогично. Напомним, что при записи $t(\varepsilon_{\hat{a}})$ под t мы понимаем комплексное расширение t^C этого тензора по линейности, то есть $t^C(Y) \equiv t^C(\sum z_k X_k) = \sum z_k t(X_k)$.
$\bar{t}_{\hat{a}} = \overline{t(\varepsilon_{\hat{a}})} = \frac{1}{2}\overline{t(e_a) + \sqrt{-1}t(Je_a)} = t(e_a) - \sqrt{-1}t(Je_a) = t(\varepsilon_a) = t_a$.

Лемма 1.3. $B_{abcd} = \bar{B}^{abcd}$.

Доказательство. Рассмотрим $dB^{abc} - B^{dbc}\omega_d^a - B^{adc}\omega_d^b - B^{abd}\omega_d^c = B^{abcd}\omega_d$. Применим оператор комплексного сопряжения. Так как $\bar{B}^{abc} = B_{abc}$ и в силу вещественности формы связности $\bar{\omega}_b^a = \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\omega_a^b$, получим $dB_{abc} + B_{dbc}\omega_a^d + B_{adc}\omega_b^d + B_{abd}\omega_c^d = \bar{B}^{abcd}\omega^d$ или $B_{abcd}\omega^d = \bar{B}^{abcd}\omega^d$. В силу линейной независимости базисных форм получим $B_{abcd} = \bar{B}^{abcd}$. □

3. Напомним, что тензор Римана-Кристоффеля обладает следующими симметриями:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}; \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk}; \quad R_{ijkl} = R_{klij}$$

В связи с выше сказанным среди 16 различных наборов индексов i, j, k, l на пространстве присоединенной $G-$ структуры 4 набора будут определять все остальные.

Итак, компоненты тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной $G-$ структуры имеют вид

$$R_{abcd} = 2B_{ab[cd]}; \qquad R_{\hat{a}bcd} = 0;$$
$$R_{\hat{a}\hat{b}cd} = -2B^{abh}B_{hcd}; \quad R_{\hat{a}bc\hat{d}} = B^{adh}B_{hbc} + A_{bc}^{ad};$$

1.2.2 Тензор Риччи

Пусть (M, g) – риманово многообразие, R – тензор Римана-Кристоффеля типа (3,1).

Определение 1.1. *Тензором Риччи* риманова многообразия M называется тензорное поле r типа (2,0), определяемое по формуле $r = C_{(3)}^{(1)}R$, где $C_{(3)}^{(1)}$ – оператор свертки по первому контравариантному индексу и третьему ковариантному индексу.

Иначе говоря, в терминах компонент получим

$$r_{ij} = R_{ijk}^k \equiv g^{kl}R_{kijl}$$

Также это тензорное поле называют ковариантным тензором Риччи. Так как вводят в рассмотрение *эндоморфизм Риччи*, а именно, тензорное поле ric типа (1,1) с компонентами $r_j^i = g^{ik}r_{kj}$. В инвариантной записи ковариантный тензор Риччи и эндоморфизм Риччи связаны следующим образом.

$$g(ricX, Y) = r(X, Y)$$

Предложение 1.1. Ковариантный тензор Риччи симметричен.

Доказательство. $r_{ij} = g^{kl}R_{kijl} = g^{kl}R_{jlki} = g^{kl}R_{ljik} = r_{ji}$. □

Вычислим компоненты ковариантного тензора Риччи приближенно келерова многообразия на пространстве присоединенной $G-$ структуры.

1. $i = a$, $j = b$. Тогда $r_{ab} = R_{abk}^k = R_{abc}^c + R_{ab\hat{c}}^{\hat{c}} = \sum_c(R_{\hat{c}abc} + R_{cab\hat{c}}) = \sum_c(R_{\hat{c}abc} + R_{\hat{c}bac}) = 0$. Итак, $r_{ab} = 0$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда $r_{\hat{a}b} = R_{\hat{c}\hat{a}bc} + R_{c\hat{a}b\hat{c}} = R_{\hat{c}\hat{a}bc} - R_{\hat{a}cb\hat{c}} = -2B^{cah}B_{hbc} - B^{ach}B_{hcb} - A_{cb}^{ac} = 3B^{ach}B_{hbc} - A_{bc}^{ac}$. Здесь мы воспользовались кососимметричностью структурного тензора и симметричностью тензора голоморфной секционной кривизны.

Итак, с учетом свойств симметрии и вещественности тензора Риччи мы получаем две существенные компоненты (остальные две могут быть получены из них)

$$r_{ab} = 0; \quad r_{\hat{a}b} = 3B^{ach}B_{hbc} - A_{bc}^{ac}$$

1.2.3 Скалярная кривизна.

Скалярной кривизной риманова многообразия называется функция $\kappa = g^{ij}r_{ij}$.

На пространстве присоединенной $G-$ структуры получим $\kappa = g^{a\hat{b}}r_{a\hat{b}} + g_{\hat{a}b}r_{\hat{a}b} = 2\delta_b^a(3B^{bch}B_{hac} - A_{ac}^{bc}) = 6B^{ach}B_{ach} - 2A_{ac}^{ac}$. Итак, скалярная кривизна имеет вид

$$\kappa = 6B^{ach}B_{ach} - 2A_{ac}^{ac}$$

Предложение 1.2. Скалярная кривизна приближенно келерова многообразия с нулевым тензором голоморфной секционной кривизны неотрицательна. При этом она равна нулю тогда и только тогда, когда многообразие келерово.

Доказательство. Если $A^{ab}_{cd} = 0$, то $\kappa = 6B^{ach}B_{ach} = \sum_{a,c,h=1}^{n} B^{ach}\bar{B}^{ach} = \sum_{a,c,h=1}^{n} |B^{ach}|^2 \geq 0$. При этом $\sum_{a,c,h=1}^{n} |B^{ach}|^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $B^{ach} = 0$ для любых индексов a, c, h в любой точке пространства расслоения присоединенной $G-$ структуры, то есть структурный тензор тождественно равен нулю. Так как для приближенно келерова многообразия виртуальный тензор всегда тождественно равен нулю, такое многообразие будет келеровым (см. классификацию почти эрмитовых многообразий в терминах присоединенной $G-$ структуры).