Локальное строение многообразий Вайсмана-Грея.

M – гладкое многообразие размерности $2n > 2$
(J, g) – *почти эрмитова структура* на M, где
J – тензорное поле типа (1,1), $J^2 = -id$,
g – риманова метрика, $g(JX, JY) = g(X, Y)$,
X, Y – векторные поля на M,
(M, J, g) – *почти эрмитово многообразие.*

Метод присоединенной G-структуры.

$p=(m,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat{1}},\ldots,\varepsilon_{\hat{n}})$ – A-репер

$J\leftrightarrow\{J^i_j(p)\}$, $g\leftrightarrow\{g_{ij}(p)\}$

$$(g_{ij}(p))=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix};\ (J^i_j(p))=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}I_n & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}I_n\end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n.

Индексы $i,j,k,l=1,\ldots,2n$, $a,b,c,d,f=1,\ldots,n$, $\hat{a}=a+n$.

∇ – риманова связность; $\{\theta^i_j\}$ – ее компоненты,

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j,$$

$\{\omega^i\} \equiv \{\omega^a, \omega_b\}$ – тензорные компоненты формы смещения.

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b \\ d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]}; \\ B^{ab}{}_c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}; \ B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}. \end{aligned}$$

$\nabla J \leftrightarrow \{J^i_{j,k}\}$.

$\{B^{abc}, B_{abc}\} \leftrightarrow C$ – структурный тензор;
$\{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\} \leftrightarrow B$ – виртуальный тензор;
Многообразия Вайсмана-Грея или **класс** $W_1 \oplus W_4$.

$$B^{[abc]} = B^{abc};\ \ B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta_c^{b]},$$

Приближенно келеровы многообразия или **класс** W_1

$$B^{[abc]} = B^{abc};\ \ B^{ab}{}_c = 0$$

где $\{\xi^a, \xi_b\}$ – система функций, определяющая вектор Ли ξ.
$\omega(X) = g(X, \xi)$, $\omega = -\frac{1}{n-1}\delta F \circ J$,
$F(X, Y) = g(JX, Y)$ – келерова форма, δ – оператор кодифференцирования.

Конформное преобразование: $(J,g) \to (J, \tilde{g} = e^{2f} g)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} = (M, J, g) & \to & \tilde{\mathbb{M}} = (M, J, \tilde{g}) \\ (P, M, \pi, U(n)) & & (\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, U(n)) \end{array}$$

$\psi : P \to \tilde{P}$

$$\psi : p = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}) \to \tilde{p} = (m, \tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}(m)\varepsilon_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{a}})$$

$$(\psi^* \tilde{\omega}^i)(p) = e^f(m)\omega^i(p);$$
$$\psi^* \tilde{\theta}^a_b = \theta^a_b + \beta^a \omega_b - \beta_b \omega^a,$$

где $\{\beta_a, \beta^b\}$ – система функций на пространстве расслоения A-реперов P, задающая 1-форму $\beta = df$.

Теорема. Пусть T – тензорное поле типа (r, s), определяемое почти эрмитовой структурой многообразия $\mathbb{M}$, а $\tilde{T}$ – тензорное поле на многообразии $\tilde{\mathbb{M}}$, аналогичным образом определяемое почти эрмитовой структурой многообразия $\tilde{\mathbb{M}}$. Тогда $T = \tilde{T}$ в том и только в том случае, когда

$$\tilde{T}^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \circ \psi = (e^{(-r+s)f} \circ \pi) T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r},$$

где $\{T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}\}$ – система функций, определяющая T
$\{\tilde{T}^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}\}$ – система функций, определяющая $\tilde{T}$.

Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие Вайсмана-Грея $(dim M > 4)$ $f = \ln\sqrt{B}$, где $B = B^{abc}B_{abc}$ – каноническое

$$\tilde{\xi}^d = (\tilde{\xi}_{[ab]} - \tilde{\xi}^c \tilde{B}_{cab})\tilde{B}^{abd}$$
$$\tilde{\xi}_d = (\tilde{\xi}^{[ab]} - \tilde{\xi}_c \tilde{B}^{cab})\tilde{B}_{abd},$$

где системы функций $\{\xi_{ab}, \xi^{ab}\}$ определяются дифференциальными уравнениями

$$d\tilde{\xi}_a - \tilde{\xi}_b \tilde{\theta}^b_a = \tilde{\xi}_{ab}\tilde{\omega}^b + \tilde{\xi}_a{}^b \tilde{\omega}_b;$$
$$d\tilde{\xi}^a + \tilde{\xi}^b \tilde{\theta}_b = \tilde{\xi}^{ab}\tilde{\omega}_b + \tilde{\xi}^a{}_b \tilde{\omega}^b.$$

Рассмотрим векторное поле γ на $\mathbb{M}$

$$\gamma^d = (\xi_{[ab]} - \xi^c B_{cab})B^{abd}; \;\; \gamma_d = (\xi^{[ab]} - \xi_c B^{cab})B_{abd},$$

где системы функций $\{\xi_{ab}, \xi^{ab}\}$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{array}{c} d\xi_a - \xi_b \theta_a^b = \xi_{ab}\omega^b + \xi_a{}^b \omega_b; \\ d\xi^a + \xi^b \theta_b = \xi^{ab}\omega_b + \xi^a{}_b \omega^b. \end{array}$$

Аналогичными формулами определяется соответствующее векторное поле $\tilde{\gamma}$ на многообразии $\tilde{M}$.

Тогда для любого конформного преобразования мы получим

$$e^{3f}((\tilde{\xi}_{[ab]} - \tilde{\xi}^c \tilde{B}_{cab})\tilde{B}^{abd} \circ \psi) = (\xi_{[ab]} - \xi^c B_{cab})B^{abd},$$

то есть $e^{3f}(\gamma^d \circ \psi) = \gamma^d$. Из критерия конформной инвариантности получаем, что $\tilde{\gamma} = e^{4f}\gamma$.

Пусть $\tilde{\xi}^d \neq 0$. Так как

$$\tilde{\xi}^d = (\tilde{\xi}_{[ab]} - \tilde{\xi}^c \tilde{B}_{cab}) \tilde{B}^{abd},$$

получаем, что вектор Ли $\tilde{\xi}$ совпадает с векторным полем $\tilde{\gamma}$. ТАк как векторное поле $\tilde{\gamma}$ преобразуется по формуле $\tilde{\gamma} = e^{4f}\gamma$, по такому же закону должно преобразовываться и вектор Ли. Это противоречит

$$e^{2f}\tilde{\xi} = \xi + 2df^{\sharp}.$$

Откуда получаем, что $\tilde{\xi} = 0$ и многообразие $\tilde{\mathbb{M}}$ является приближенно келеровым.

Теорема. В размерности выше 4 любое многообразие Вайсмана-Грея является локально конформно приближенно келеровым.