3 Элементы геометрии Лобачевского.

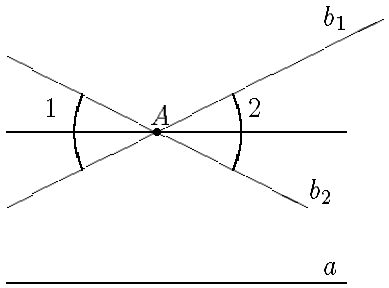
§28. Геометрия Лобачевского. Параллельные прямые по Лобачевскому. Расходящиеся прямые.

Договоримся, что все геометрические объекты находятся на одной плоскости.

V^* (аксиома Лобачевского).
Через любую точку, не лежащую на данной прямой проходит более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Геометрия, построенная на системе аксиом $I - IV$, V^* называется *геометрией Лобачевского.*

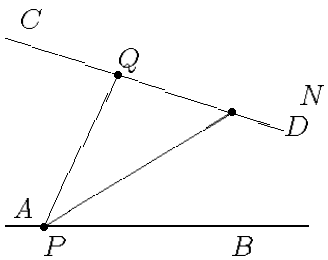
Заметим, что через точку, взятую вне прямой проходит бесконечно много прямых, не пересекающих данную прямую.



Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. По аксиоме Лобачевского существует как минимум две прямые b_1 и b_2, проходящие через точку A и не пересекающие прямую a. Тогда любая прямая, находящаяся внутри углов $\angle 1$ и $\angle 2$.

Определение 3.1. Два луча $[AB)$ и $[CD)$ одной прямой a будем называть *сонаправленными*, если луч $[AB)$ содержит луч $[CD)$, либо луч $[CD)$ содержит луч $[AB)$. В противном случае будем называть лучи *противоположно направленными.*
Отношение сонаправленности на множестве лучей прямой является отношением эквивалентности, а значит, определено фактор-множество по этому отношению эквивалентности. Оно содержит два элемента. Каждый из элементов называется *направлением* на прямой a.

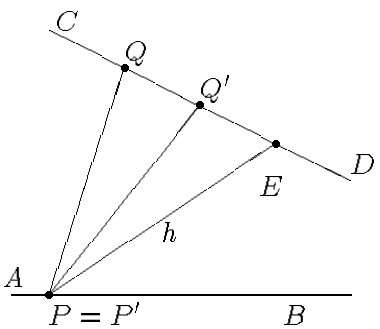
Определение 3.2. Прямая, на которой фиксировано направление, называется *направленной прямой.*



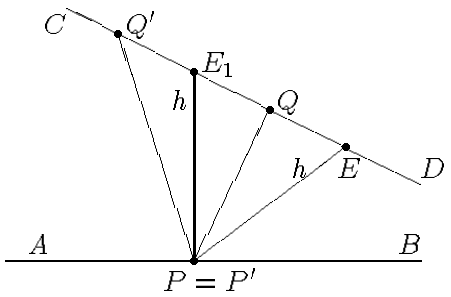
Определение 3.3. Направленная прямая (AB) называется параллельной направленной прямой (CD), если
1) $(AB) \cap (CD) = \emptyset$;
2) Для любой точки $P \in (AB)$, любой точки $P \in (CD)$ и любого внутреннего луча h угла $\angle QPB$, проходящего через точку P, луч h пересекает луч $[QD)$ в некоторой точке N.
Обозначение $(AB)||(CD)$.

Теорема 3.1. (признак параллельности)
Если направленная прямая $(AB) \cap (CD) = \emptyset$ и существует точка $P \in (AB)$ и точка $Q \in (CD)$ такие, что любой внутренний луч h угла $\angle QPB$ пересекает луч $[QD)$, то направленные прямые (AB) и (CD) параллельны.

Доказательство. Нам нужно доказать, что для любых точек $P' \in (AB)$, $Q' \in (CD)$ любой внутренний луч h угла $\angle Q'P'B$ пересечет луч $[Q'D)$. Рассмотрим случаи:
1) $P = P'$ и Q' – произвольная точка прямой (CD).



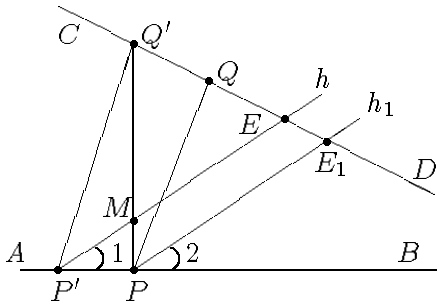
а) $Q' \in [QD)$.
Рассмотрим произвольный внутренний луч h угла $\angle Q'P'B$. Тогда он является внутренним лучом угла $\angle QPB$ и по условию $h \cap [QD) = E$. Если $E \in [QQ']$, то h является внутренним лучом угла $\angle QPQ'$, а значит, не является внутренним лучом угла $\angle Q'P'B$, что противоречит выбору h. Следовательно, $E \in [Q'D)$ и по определению $(AB)||(CD)$.



б) $Q' \in [QC)$.
Рассмотрим произвольный внутренний луч h угла $\angle Q'P'B$. Тогда так как $\angle Q'P'B = \angle Q'P'Q + \angle QPB$, то возможны два случая:
если h – внутренний луч угла $\angle QPB$, то $h \cap [QD) = E$ и так как $[QD) \subset [Q'D)$, то $E \in [Q'D)$;
если h – внутренний луч угла $\angle Q'PQ$, то он пересекает отрезок, концы которого лежат на сторонах этого угла, то есть $h \cap [QQ'] = E_1$ и так как $[QQ'] \subset [Q'D)$, то $E_1 \in [Q'D)$.

Итак, в обоих случаях любой внутренний луч h угла $\angle Q'P'B$ пересекает луч $[Q'D)$, а значит, по определению $(AB)||(CD)$.

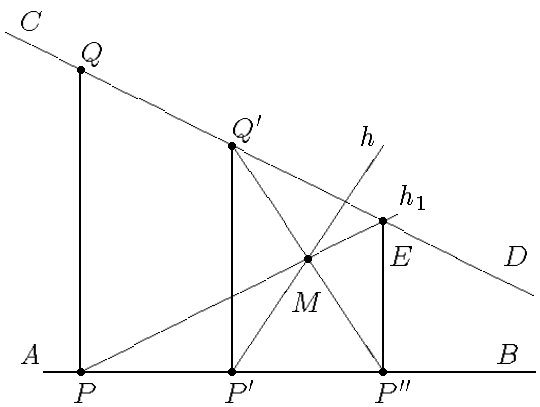
2) $\forall P' \in [PA)$, $\forall Q' \in (CD)$.



Рассмотрим произвольный внутренний луч h угла $\angle Q'P'B$. Тогда луч h пересекает отрезок $[Q'P]$ с концами на сторонах этого угла, то есть $h \cap [Q'P] = M$, причем $Q' - M - P$. Построим луч h_1 с началом в точке P такой, что $\angle 2 = \angle 1$. По лемме прямые $\bar{h}$ и $\bar{h}_1$ не пересекаются, а значит, не пересекаются и лучи h и h_1, то есть $h \cap h_1 = \emptyset$. Так как угол $\angle Q'PB$, являясь внешним углом треугольника $\Delta P'PQ'$, больше угла $\angle Q'P'B$, а значит, луч h_1 является внутренним лучом угла $\angle Q'PB$. Тогда по пункту 1) луч h_1 пересекает луч $[Q'D)$.

Рассмотрим треугольник $\Delta Q'PE_1$. Луч h пересекает отрезок $[Q'P]$ и не пересекает отрезок $[PE_1]$, а значит, по аксиоме Паша луч h пересекает отрезок $[Q'E_1]$, который содержится в луче $[Q'D)$. Таким образом, $h \cap [Q'D) = E$ и по определению $(AB)||(CD)$.

4) $\forall P' \in [PB)$, $\forall Q' \in (CD)$.



Пусть h – произвольный внутренний луч угла $\angle Q'P'B$. Возьмем точку $P'' \in [PB)$ такую, что $P - P' - P''$. Обозначим M точку пересечения отрезка $P'P''$ и луча h (такая точка существует, так как концы отрезка $Q'P''$ лежат на сторонах угла $\angle Q'P'B$). Рассмотрим луч $[PM) \equiv h_1$. По условию $h_1 \cap [QD) = E$. Докажем, что отрезок EP'' не пересекает луч h. Действительно, обозначим $\Omega_{\bar{h}}^{P}$ полуплоскость с границей $\bar{h}$, которая содержит точку P, а Σ – дополнительную ей полуплоскость. Так как по построению отрезок PE пересекает луч h в точке M, то точки P и E лежат в разных полуплоскостях, то есть $E \in \Sigma$. Так как
отрезок PP'' пересекает прямую $\bar{h}$ в точке P', то точки P и P'' лежат в разных полуплоскостях, то есть $P'' \in \Sigma$. Тогда P'' и E лежат в одной полуплоскости с границей $\bar{h}$, то есть отрезок $P''E$ не пересекает прямую $\bar{h}$, а тем более не пересекет луч h.
Применим аксиому Паша к точкам Q', P'', E и прямой $\bar{h}$. Получим, что луч $h \cap [Q'E) \neq \emptyset$. Нам осталось доказать, что $E \in [Q'D)$ и тогда мы сможем утверждать, что $h \cap [Q'D) \neq \emptyset$. В самом деле, точки P и E лежат в разных полуплоскостях с границей $(Q'P'')$; точки P и C лежат в одной полуплоскости с границей $(Q'P'')$, а значит, точки E и C лежат в различных полуплоскостях с границей $(Q'P'')$, следовательно, E и D лежат в одной полуплоскости с границей $(Q'P'')$, то есть $[Q'E) \equiv [Q'D)$. □

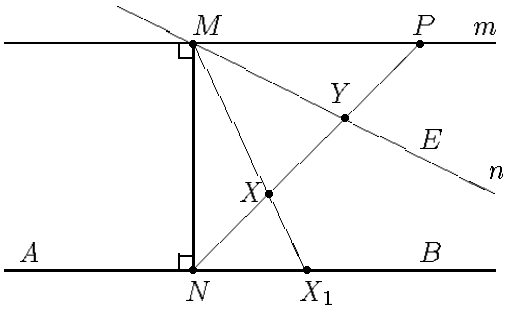
Замечание. Аксиомы IV_1 и IV_2 эквивалентны так называемой теореме Дедекинда, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 3.2. (Дедекинда). Пусть все точки отрезка AB вместе с его концами разбиты на два класса K_1 и K_2 такие, что $K_1 \cap K_2 = \emptyset$; $K_1 \cup K_2 = AB \cup \{A, B\}$ и выполнены два условия:
1) $A \in K_1$, $B \in K_2$ и классы K_1, K_2 содержат внутренние точки отрезка AB;
2) для любой точки $X \in K_1$ и любой точки $Y \in K_2$, $X \neq A$ эти точки расположены $A - X - Y$.
Тогда существует точка D отрезка AB такая, что любые точки, лежащие между точками A и D, принадлежат классу K_1, а любые точки, лежащие между точками D и B, принадлежат классу K_2. При этом говорят, что точка D производит *дедекиндово сечение.*

Теорема 3.3. (о единственности параллельной).
Пусть дана направленная прямая (AB) и точка M, не принадлежащая ей. Тогда существует един-

ственная направленная прямая (CD), проходящая через точку M и параллельная прямой (AB).

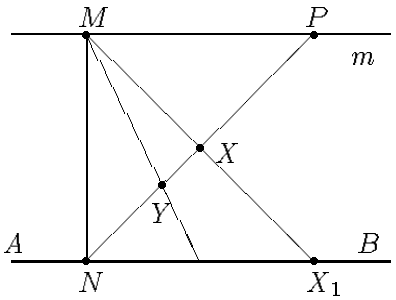
Доказательство.



$\exists$). Пусть дана направленная прямая (AB) и точка M, не принадлежащая (AB). Построим прямую m такую, что $(MN) \perp (AB)$, $m \perp (MN)$, $M \in m$. Тогда по лемме $m \cap (AB) = \emptyset$. Обозначим λ полуплоскость с границей (MN), содержащую точку B. Пусть P – произвольная точка прямой m, принадлежащая полуплоскости λ. Рассмотрим отрезок NP. Разобьем множество точек этого отрезка на два класса: K_1 и K_2 таких, что $N \in K_1$, $P \in K_2$; произвольная точка $X \in NP$ принадлежит классу K_1 тогда и только тогда, когда $MX \cap NB \neq \emptyset$. Остальные внутренние точки отрезка NP принадлежат классу K_2.

Покажем, что существуют внутренние точки отрезка NP, которые принадлежат K_2. По аксиоме V^* через точку M проходит прямая, отличная от n и не пересекающая прямую (AB). Обозначим точку пересечения луча $[ME)$ этой прямой и отрезка NP через Y. Тогда $Y \in K_2$.

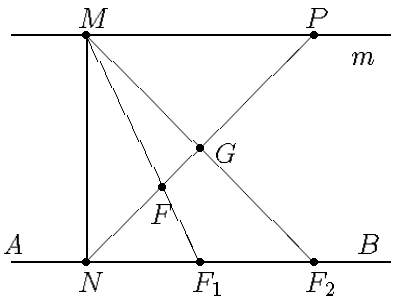
Далее, докажем, что для любой точки $X \in K_1$, $X \neq N$ и любой точки $Y \in K_2$ имеем $N - X - Y$.



Допустим, что $N - Y - X$. Тогда луч $[MY)$ – внутренний луч угла $\angle NMX$. Имеем, луч $[MX)$ пересекает луч $[NB)$ в некоторой точке X_1 (по определению класса K_1), следовательно, луч $[MY)$ пересекает отрезок NX_1, с концами на сторонах угла, в некоторой точке. Таким образом, мы получили противоречие с определением класса K_2.

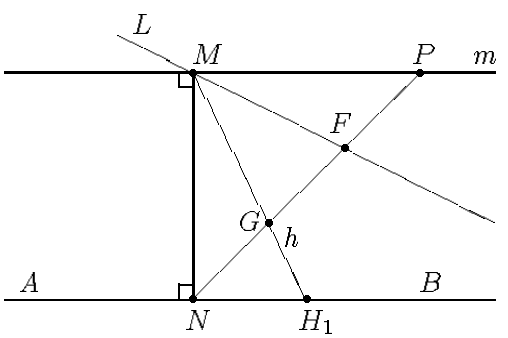
Итак, по теореме Дедекинда получим, что существует внутренняя точка F отрезка NP такая, что любая точка X, лежащая между точками N и F, принадлежит классу K_1, а любая точка Y, лежащая между точками F и P, принадлежит классу K_2.

Выясним, какому классу принадлежит точка F. Пусть F принадлежит классу K_1.



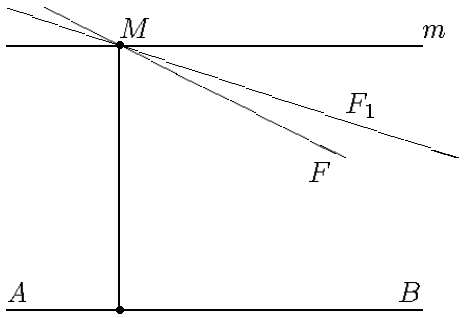
Тогда $[MF) \cap [NB) = F_1$. Прямая (MF) определяет две полуплоскости $\mu \ni N$ и $\mu' \ni P$. Возьмем точку F_2 такую, что $N - F_1 - F_2$. Тогда луч $[MF_2)$ – внутренний луч угла $\angle F_1MP$, а значит, он пересекает отрезок FP с концами на сторонах этого угла, то есть существует точка $G = FP \cap [MF_2)$, то есть $G \in K_1$. Так как $F - G - P$, то по теореме Дедекинда $G \in K_2$. Мы получили противоречие, а значит, $F \in K_2$.

Итак, мы получили прямую (MF). Так как точка F принадлежит классу K_2, прямая (MF) не пересекает прямую (AB). Докажем, что $(MF) \| (AB)$.



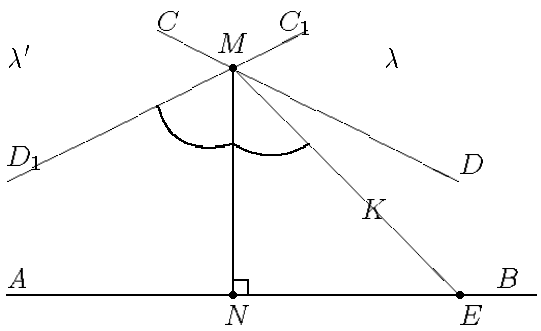
Рассмотрим произвольный внутренний луч h угла $\angle NMF$. Тогда луч h пересекает отрезок NF с концами на сторонах угла $\angle NMF$ в некоторой точке. Обозначим эту точку G. Точка G принадлежит классу K_1. Тогда луч $[MG) \equiv h$ пересекает луч $[NB)$ в точке H_1. Итак, мы доказали, что любой внутренний луч угла $\angle NMF$, выходящий из его вершины, пересекает луч $[NB)$. По признаку параллельности это означает, что направленные прямые (AB) и (MF) параллельны.

!). Докажем, что прямая (MF) единственна.



Пусть существует еще одна направленная прямая (MF_1), проходящая через точку M и параллельная направленной прямой (AB). Тогда углы $\angle NMF$ и $\angle NMF_1$ различные. Пусть $\angle NMF < \angle NMF_1$. Тогда луч $[MF)$ является внутренним лучом угла $\angle NMF_1$, а значит, по определению параллельных прямых луч $[MF)$ пересекает луч $[NB)$. Это противоречит тому, что $(MF) \cap (AB) = \emptyset$. □

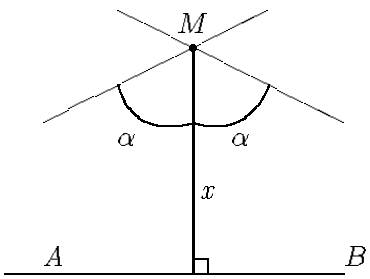
Замечание.



Мы построили направленную прямую (CD), параллельную данной направленной прямой (AB) в полуплоскости λ (с границей (MN)). Если рассмотреть дополнительную полуплоскость λ', то аналогично рассуждая, можно построить направленную прямую (C_1D_1), параллельную направленной прямой (BA). Докажем, что прямые (CD) и (C_1D_1) симметричны относительно прямой (MN).

Допустим, что они не симметричны. Тогда $\angle NMD \neq \angle NMD_1$. Пусть $\angle NMD_1 < \angle NMD$. Отложим от луча $[MN)$ в полуплоскость λ угол $\angle NMK$, равный углу $\angle NMD_1$. Тогда луч $[MK)$ является внутренним лучом угла $\angle NMD$, а значит, по определению параллельных прямых $[MK) \cap [NB) = E$. Прямые (MD_1) и (ME) симметричны относительно прямой (MN), а значит, при осевой симметрии $S_{(MN)}$ точка $E = (AB) \cap (ME)$ должна перейти в точку пересечения прямых $(AB) \cap (C_1D_1) = E_1$, но прямые (C_1D_1) и (AB) параллельны, в частности, не пересекаются, а значит, мы пришли к противоречию. Итак, прямые (CD) и (C_1D_1) симметричны относительно прямой (MN). □

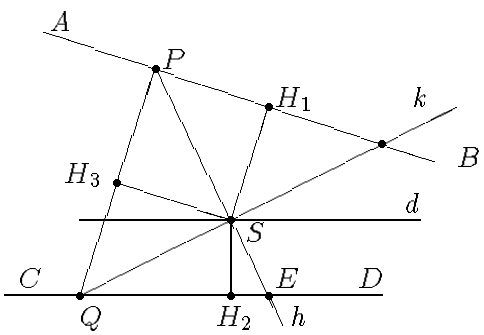
Определение 3.4. Углом параллельности в точке M относительно прямой (AB) называется острый угол между двумя прямыми, одна из которых проходит через точку M и перпендикулярна прямой (AB), другая проходит через точку M и параллельна прямой (AB).



Обозначим расстояние $\rho(M, (AB)) = MN = x$. Тогда угол параллельности α является функцией расстояния x. Эта функция $\alpha = \pi(x)$ называется функцией Лобачевского. Можно доказать, что угол параллельности есть монотонно убывающая функция расстояния от точки M до прямой (AB), причем $0 < \pi(x) < \frac{\pi}{2}$. Для любого острого угла существует точка M такая, что по отношению к данной прямой данный угол будет углом параллельности.

Предложение 3.1. Если направленные прямые (AB) и (CD) параллельны, то существует ось симметрии этих прямых.

Доказательство.

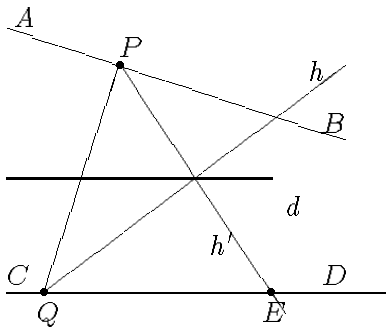


Пусть даны две параллельные направленные прямые (AB) и (CD). Возьмем произвольную точку $P \in (AB)$ и произвольную точку $Q \in (CD)$. Пусть луч h – биссектриса угла $\angle QPB$, а луч k – биссектриса угла $\angle PQD$. Согласно определению параллельных прямых луч h пересекает луч $[QD)$ в некоторой точке E. Луч k пересекает отрезок PE в точке S. Опустим перпендикуляры SH_1, SH_2, SH_3 из точки S на прямые (AB), (CD), (PQ) соответственно. Так как точка S принадлежит биссектрисе угла $\angle PQD$, то точка S равноудалена от прямых (PQ) и (CD), а значит, $SH_2 = SH_3$. Аналогично получаем, что $SH_3 = SH_1$. Тогда $SH_1 = SH_2$.

Рассмотрим биссектрису d угла $\angle H_1SH_2$. Тогда осевая симметрия S_d переводит точку H_1 в точку H_2. Так как осевая симметрия сохраняет величину угла, то прямая (AB), перпендикулярная прямой (SH_1) и проходящая через точку H_1, перейдет в прямую, проходящую через точку $H_2 = S_d(H_1)$ и перпендикулярную прямой $(SH_2) = S_d((SH_1))$, то есть в прямую (CD). Итак, прямая d является осью симметрии параллельных прямых (AB) и (CD). □

Предложение 3.2. Если $(AB)||(CD)$, то $(CD)||(AB)$.

Доказательство.



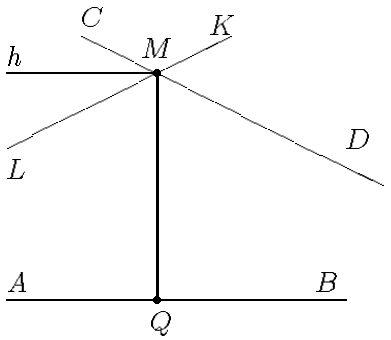
Пусть d – ось симметририи прямых (AB) и (CD). Возьмем точки $P \in (AB)$, $Q \in (CD)$ такие, что $Q = S_d(P)$. Надо доказать, что любой внутренний луч h угла $\angle PQD$ пересечет луч $[AB)$. Тогда по признаку параллельности $(CD)||(AB)$.
Обозначим $h' = S_d(h)$. Тогда h' является внутренним лучом угла $\angle QPB$. Так как $(AB)||(CD)$, то по определению параллельности луч h' пересекает луч $[QD)$ в некоторой точке, которую мы обозначим E.

Рассмотрим прообраз точки E при осевой симметрии S_d. Обозначим эту точку буквой F. Так как $E = h' \cap [QD)$, то F будет пересечением $h = S_d^{-1}(h')$ и $[PB) = S_d^{-1}[QD)$, то есть $h \cap [PB) = F$, следовательно, $(CD)||(AB)$. □

Замечание. Можно доказать, что отношение параллельности на множестве направленных прямых обладает свойством транзитивности, то есть если $(AB)||(CD)$ и $(CD)||(EF)$, то $(AB)||(EF)$.

Предложение 3.3. Если $(AB)||(CD)$, то $(BA) \not||(DC)$.

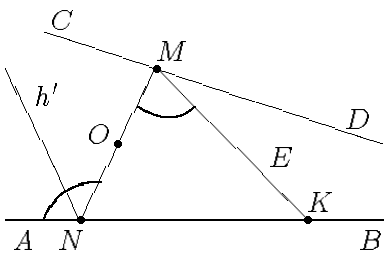
Доказательство.



Возьмем на прямой (CD) какую-нибудь точку M. По теореме о существовании и единственности параллельной через точку M проходит направленная прямая (KL), параллельная прямой (BA). Пусть h – внутренний луч угла $\angle CML$. Тогда лучи h и $[QA)$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (KL), а значит, не пересекаются. По определению параллельных прямых это означает, что $(DC) \not||(BA)$. □

Предложение 3.4. При пересечении двух параллельных прямых третьей внутренние накрест лежащие углы не равны. При этом меньшим является тот из углов, сторона которого не принадлежая секущей, имеет направление, в котором прямые параллельны.

Доказательство.

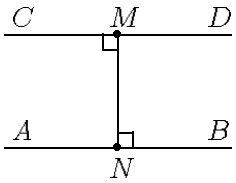


Пусть даны параллельные прямые $(AB)||(CD)$ и секущая (MN). Докажем, что угол $\angle DMN < \angle ANM$. Предположим противное. Возможны два случая:
1) $\angle DMN > \angle ANM$. От луча $[MN)$ в другую полуплоскость отложим угол $\angle NME = \angle ANM$. Тогда луч $[ME)$ будет внутренним лучом угла $\angle NMD$, а значит, пересечет луч $[NB)$ в некоторой точке, которую мы обозначим K. Мы получаем треугольник ΔNMK, в котором внутренний угол $\angle NMK$ равен внешнему углу $\angle ANM$, что противоречит теореме о внутреннем угле треугольника.

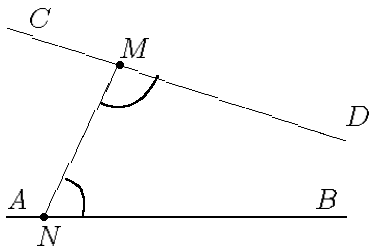
2) $\angle ANM = \angle NMD$. Рассмотрим произвольный внутренний луч h' угла $\angle ANM$ и центральную симметрию S_O, где O – середина отрезка MN. Пусть $h = S_O(h')$. Тогда h – внутренний луч угла $\angle NMD$, а значит, пересекает луч $[NB)$ в некоторой точке T. Прообраз точки T должен принадлежать лучу $h' = S_O^{-1}(h)$ и лучу $[MC) = S_O^{-1}([NB))$, то есть $h' \cap [MC) \neq \emptyset$. По признаку параллельности это означает, что $(BA)||(DC)$, что противоречит предыдущему предложению. □

Следствие. Параллельные прямые не имеют ни одного общего перпендикуляра.

Доказательство.



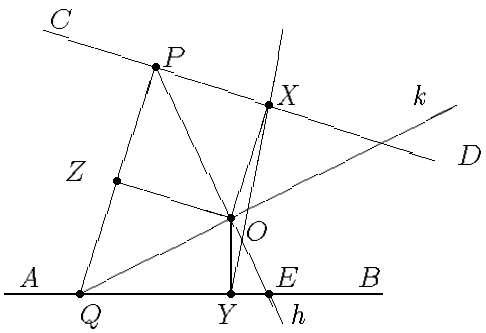
Если предположить, что параллельные прямые имеют общий перпендикуляр, то внутренние накрест лежащие углы $\angle CMN$ и $\angle MNB$ будут равны, что противоречит предыдущему предложению. $\square$



Определение 3.5. Пусть направленные (AB) и (CD) параллельны и прямая (MN) пересекает их. Если $\angle DMN = \angle BNM$, то прямая (MN) называется *равнонаклонной* или *секущей равного наклона.*

Предложение 3.5. *У любой пары параллельных прямых существует хотя бы одна равнонаклонная.*

Доказательство.



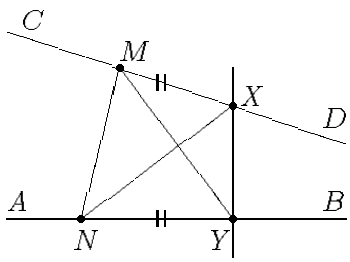
Пусть даны параллельные направленные прямые (AB) и (CD). Возьмем произвольную точку P на прямой (CD) и произвольную точку Q на прямой (AB). Пусть луч k – биссектриса угла $\angle QPD$; луч h – биссектриса угла $\angle PQB$. Так как прямые (AB) и (CD) параллельны, луч h пересечет луч $[QB)$ в некоторой точке, которую мы обозначим E. Тогда луч k пересечет отрезок PE в некоторой точке O. Опустим из точки O перпендикуляры OX, OY и OZ на прямые (CD), (AB) и (QP), соответственно.

Так как точка O лежит на биссектрисе h, то $OX = OZ$; так как точка O лежит на биссектрисе k, то $OY = OZ$. Тогда $OX = OY$.

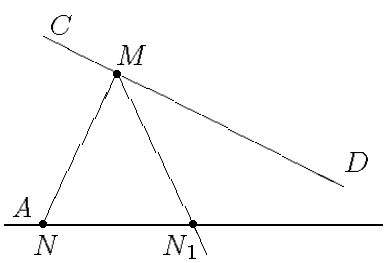
Точки O, X, Y не лежат на одной прямой. Так как в противном случае прямая (XY) является общим перпендикуляром двух параллельных прямых, что противоречит доказанному ранее. Таким образом, мы получаем равнобедренный треугольник ΔXOY. Прямая (XY) будет искомой равнонаклонной, так как $\angle YXD = \angle OXD \pm \angle OXY = \angle OYB \pm \angle OYX = \angle XYB$. $\square$

Предложение 3.6. *В любой точке каждой из двух параллельных прямых существует единственная равнонаклонная.*

Доказательство.



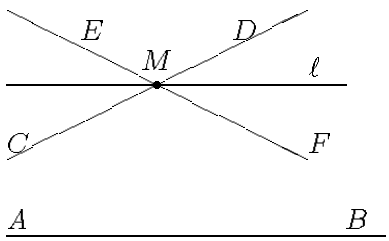
$\exists$). Пусть даны параллельные направленные прямые (AB), (CD) и произвольная точка M на прямой (CD). По доказанному эти прямые имеют хотя бы одну равнонаклонную (XY). Построим точку $N \in (AB)$ такую, что $YN = XM$ и точки N и M лежат в одной полуплоскости с границей (XY). Тогда треугольники $\Delta MXY = \Delta NYX$ по первому признаку, следовательно, $MY = NX$. Тогда $\Delta XNM = \Delta YMN$ по третьему признаку, следовательно, $\angle XMN = \angle YNM$, то есть прямая (NM) – искомая равнонаклонная.



Предположим, что в точке M у параллельных прямых (AB) и (CD) существует две равнонаклонные (MN) и (MN_1). Обозначим точки N и N_1 таким, образом, чтобы луч $[MN_1)$ был внутренним лучом угла $\angle NMD$. Тогда имеем $\angle NMD = \angle MNB$ и $\angle N_1MD = \angle MN_1B$. Так как $[MN_1)$ – внутренний луч угла $\angle NMD$, угол $\angle NMD > \angle N_1MD$, следовательно, тем же неравенством связнаны и равные им углы $\angle MNB > \angle MN_1B$. Но угол $\angle MN_1B$ является внешним углом треугольника ΔNN_1M, а значит, $\angle MN_1B > \angle MNB$. Мы пришли к противоречию, следовательно, в каждой точке прямой равнонаклонная единственна. $\square$

Определение 3.6. *Расходящимися* называются прямые, которые не пересекаются и не параллель-

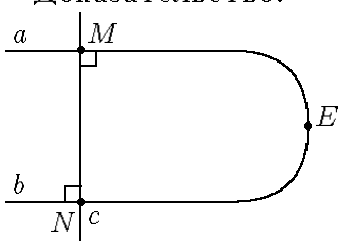
ны.



Возьмем произвольную прямую (AB) и точку M, не лежащую на ней. Через точку M проходит единственная направленная прямая (EF), параллельная направленной прямой (AB) и единственная направленная прямая (DC), параллельная прямой (BA). Тогда все прямые, лежащие внутри вертикальных углов $\angle EMC$ и $\angle DMF$ не будут пересекать прямой (AB) и будут ей паралллельны (в силу теоремы о единственности паралллеьной). Значит, эти прямые будут с прямой (AB) расходящимися.

Теорема 3.4. Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, являются расходящимися.

Доказательство.



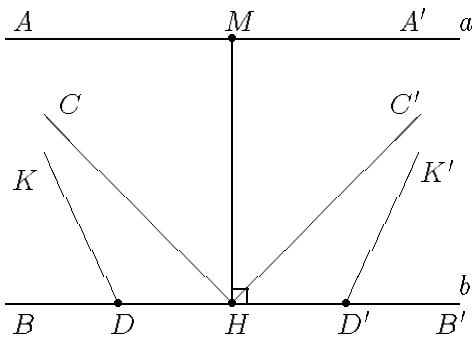
Пусть даны прямые a и b, перпендикулярные прямой c. Тогда прямые a и b не могут быть перпендикулярными из-за наличия общего перпендикуляра.

Допустим, что прямые a и b пересекаются в точке E. Тогда у треугольника ΔMNE внешний угол равен внутреннему, не смежному с ним, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Таким образом, прямые a и b могут быть только расходящимися. □

Следствие. Две прямые расходятся тогда и только тогда, когда они имеют общий перпендикуляр.

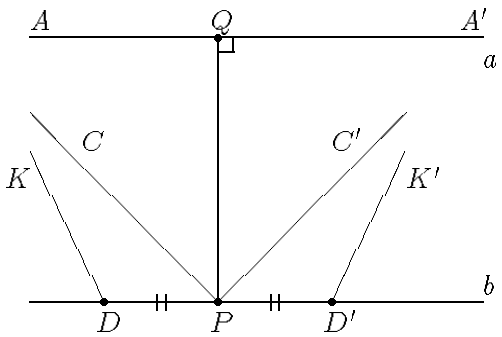
Доказательство. $\Leftarrow$). Если прямые имеют общий перпендикуляр, то по доказанному они расходятся.

$\Rightarrow$). Пусть даны две расходящиеся прямые a и b. Построим их общий перпендикуляр.



Докажем, что существуют две прямые (DK) и $(D'K')$ такие, что $(DK) \perp b$, $(D'K') \perp b$, $(DK)||(A'A)$, $(D'K')||(AA')$.

Возьмем произвольную точку M на прямой a и опустим перпендикуляр MH на прямую b. Через точку H проведем прямые $(HC')||(AA')$ и $(HC)||(A'A)$. Построим точку D так, чтобы угол $\angle BHC$ был углом параллельности отрезка DH и построим точку D' так, чтобы угол $\angle C'HB'$ был углом параллельности отрезка HD'. Тогда прямые (DK) и $(D'K')$, перпендикулярные прямой b, будут искомыми. Действительно, $(DK)||(HC)$ (по определению угла параллельности) и $(HC)||(MA)$, следовательно, $(DK)||(MA)$.



Приступим непосредственно к построению общего перпендикуляра. Пусть даны две расходящиеся прямые a и b. Построим точки D и D' так, чтобы прямые (DK) и $(D'K')$ были перпендикулярны прямой b и $(DK)||(A'A)$, $(D'K')||(AA')$. Построим точку P – середину отрезка DD' и из точки P опустим перпендикуляр PQ на прямую a. Докажем, что прямая (PQ) является искомым общим перпендикуляром. Пусть прямые $(PC)||(QA)$, $(PC')||(QA')$. Тогда угол $\angle CPD$ является углом параллельности, соответствующим отрезку PD, а угол $\angle C'PD'$ – углом параллельности, соответствующим отрезку PD'.

Так как $DP = D'P$, то соответствующие им углы параллельности также равны, то есть $\angle CPD = \angle C'PD'$, а значит, $\angle QPD = \angle QPD'$. Так как эти углы еще и смежные, то они прямые. □