3 Элементы геометрии Лобачевского.

§29. Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского.

В геометрии Лобачевского выполняются многие теоремы из евклидовой геометрии, а именно, теоремы, основанные на аксиомах $I - IV$ групп аксиом. Например, медианы треугольника пересекаются в одной точке, биссектрисы пересекаются в одной точке. Но есть теоремы, которые не имеют места в геометрии Лобачевского. Например, утверждение: высоты треугольника пересекаются в одной точке, не имеет места в геометрии Лобачевского.

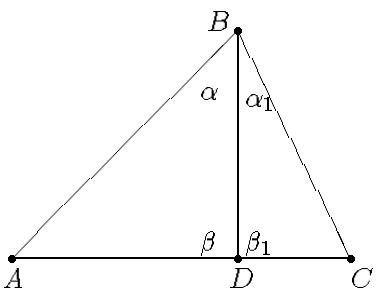
Теорема 3.5. Сумма углов любого треугольника меньше $2d$ (двух прямых).

Доказательство. Сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых по теореме Лежандра. Если предположить, что сумма углов какого-либо треугольника равна двум прямым, то будет выполняться V постулат Евклида. Мы получили противоречие с аксиомой Лобачевского. □

Замечание. В геометрии Лобачевского имеет место утверждение: если существует хотя бы один треугольник, сумма углов которого меньше двух прямых, то и сумма углов любого другого треугольника также меньше двух прямых.

Теорема 3.6. Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского не постоянна.

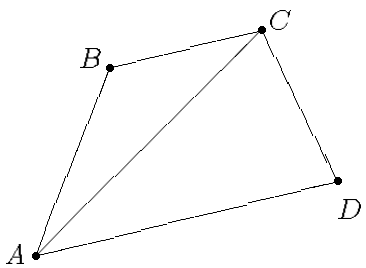
Доказательство.



Рассмотрим произвольный треугольник ΔABC. Возьмем любую точку D на отрезке AC. Тогда $\sigma(ABD) + \sigma(DBC) = (\hat{A} + \alpha + \beta) + (\hat{C} + \alpha_1 + \beta_1) = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 2d$. Следовательно, $\sigma(ABD) = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + (2d - \sigma(DBC))$, то есть $\sigma(ABD) = \sigma(ABC) + (2d - \sigma(DBC))$. Так как сумма углов треугольника меньше $2d$, то $\sigma(ABD) > \sigma(ABC)$. □

Теорема 3.7. Сумма углов любого выпуклого четырехугольника меньше 4d.

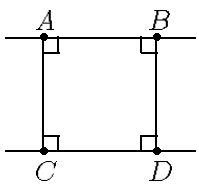
Доказательство.



Для суммы углов четырехугольника $ABCD$ получим $\sigma(ABCD) = \sigma(ABC) + \sigma(ACD) < 2d + 2d = 4d$. □

Следствие. Общий перпендикуляр двух расходящихся прямых единственен.

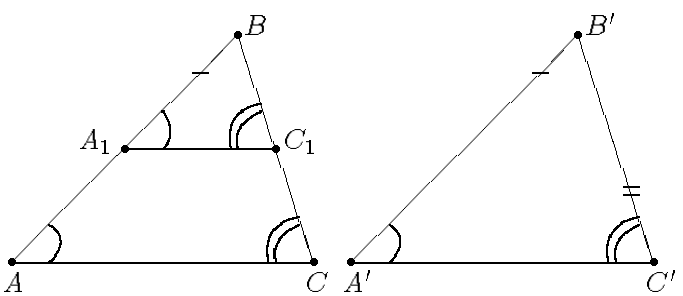
Доказательство.



Предположим, что прямые (AB) и (CD) имеют два общих перпендикуляра. Тогда четырехугольник $ABCD$ имеет сумму углов $4d$, что противоречит доказанному. □

Теорема 3.8. Если три угла одного треугольника равны соответственно трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство.



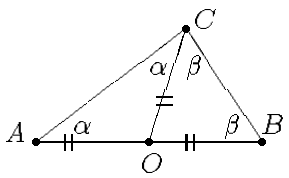
Пусть даны два треугольника ΔABC и $\Delta A'B'C'$ такие, что $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Допустим, что $AB \neq A'B'$ и $AB > A'B'$. Тогда существует точка $A_1 \in AB$ такая, что $BA_1 = A'B'$. Пусть $C_1 \in [BC)$ такая, что $BC_1 = B'C'$.

Тогда треугольники $\Delta A_1BC_1 = \Delta A'B'C'$ по первому признаку, следовательно, $\angle A_1 = \angle A' = \angle A$. Тогда по лемме прямые (AC) и (A_1C_1) не пересекаются.

Рассмотрим точки A, B, C и прямую (A_1C_1). Тогда по аксиоме Паша $B - C_1 - C$. Мы получили выпуклый четырехугольник AA_1C_1C с суммой углов $\hat{A} + 2d - \hat{A} + \hat{C} + 2d - \hat{C} = 4d$, что противоречит доказанному выше. □

Предложение 3.7. Угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, – острый.

Доказательство.



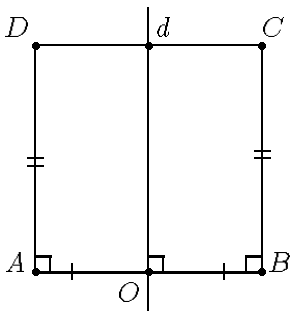
Пусть угол $\angle ACB$ вписан в окружность с центром O и диаметром AB. Тогда треугольники ΔAOC и ΔCOB равнобедренные, а значит, $\angle CAO = \angle ACO$, $\angle OCB = \angle OBC$. Тогда сумма углов треугольника ΔABC равна $2\alpha + 2\beta$. Как мы знаем, на плоскости Лобачевского сумма углов любого треугольника меньше двух прямых, а значит, $2\alpha + 2\beta < 2d$, то есть $\alpha + \beta < d$. □

Определение 3.7. *Двупрямоугольником* на плоскости Лобачевского называется выпуклый четырехугольник, у которого при одной стороне два угла прямые. Эта сторона называется *основанием*. Стороны, прилегающие к основанию, называются *боковыми*.

Определение 3.8. *Четырехугольником Саккери* называется двупрямоугольник с равными боковыми сторонами.

Теорема 3.9. Если $ABCD$ – четырехугольник Саккери, то углы при вершинах D и C острые и равны между собой.

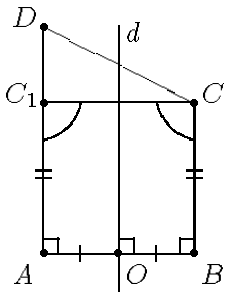
Доказательство.



Пусть O – середина отрезка AB и прямая d – серединный перпендикуляр к отрезку AB. Тогда осевая симметрия S_d переводит точку A в точку B; прямую (AD) в прямую (BC), (так как сохраняет углы) и точку D – в точку C (так как сохраняет длины отрезков). Тогда осевая симметрия S_d переведет угол $\angle ADC$ в угол $\angle BCD$, а следовательно, $\angle ADC = \angle BCD$. Кроме того, сумма углов четырехугольника $\sigma(ABCD)$ меньше $4d$, а, с другой стороны, $\sigma(ABCD) = d + d + \angle D + \angle C = 2d + 2\angle D$. Тогда $\angle D = \angle C < \frac{d}{2}$. □

Теорема 3.10. Пусть дан двупрямоугольник $ABCD$ такой, что $AD > BC$. Тогда $\angle D < \angle C$.

Доказательство.



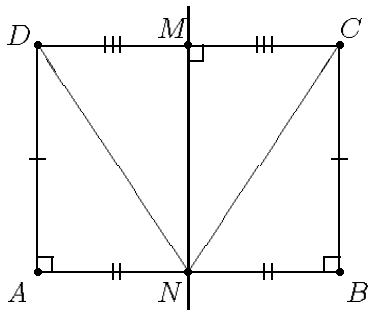
Пусть O – середина отрезка AB. Проведем через точку O прямую d, перпендикулярную прямой (AB). Рассмотрим осевую симметрию S_d. Обозначим $S_d(C) = C_1$. Тогда $AC_1 = BC$ и так как по условию $DA > CB$, то $A - C_1 - D$. Рассмотрим треугольник ΔDCC_1. Угол $\angle AC_1C$ – внешний угол этого треугольника, а значит, $\angle BCC_1 = \angle AC_1C > \angle ADC$. □

Теорема 3.11. Если в двупрямоугольнике $ABCD$ с основанием AB $\angle C < \angle D$, то $AD < BC$.

Доказательство. Предположим противное, то есть либо $AD = BC$, либо $AD > BC$. В первом случае мы получаем четырехугольник Саккери и $\angle C = \angle D$, а во втором случае по предыдущей теореме $\angle C > \angle D$, что противоречит условию. □

Теорема 3.12. Если $ABCD$ – четырехугольник Саккери с основанием AB и a – серединный перпендикуляр к прямой (CD), то a – серединный перпендикуляр к прямой (AB). (Следовательно, прямые (AB) и (CD) – расходящиеся.)

Доказательство.



Пусть точка M – середина отрезка CD, точка N – середина отрезка AB. Нам нужно доказать, что прямая (MN) перпендикулярна прямым (DC) и (AB). Рассмотрим треугольники ΔADN и ΔBCN. Они равны по первому признаку. Тогда $DN = NC$ и $\angle AND = \angle CNB$. Следовательно, треугольники ΔDMN и ΔCNM равны по третьему признаку. Откуда получаем $\angle DNM = \angle CNM$, $\angle DMN = \angle CMN$, а значит, углы $\angle DMN$ и $\angle ANM$ – прямые. $\square$

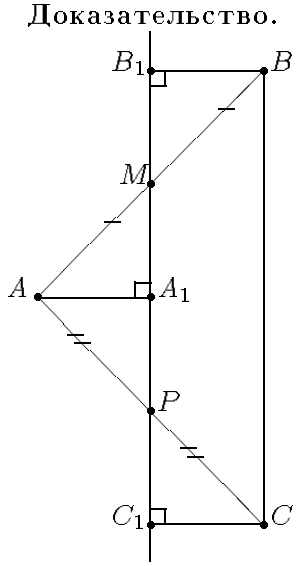
Замечание. В следующем параграфе мы докажем, что среди всех перпендикуляров, опущенных из точек одной из расходящихся прямых на другую, наименьшим является общий перпендикуляр данных расходящихся прямых.

Следствие. Для четырехугольника Саккери $ABCD$ с основанием AB имеет место соотношение $DC > AB$.

Доказательство. Непосредственно следует из того, что прямая (AB) является общим перпендикуляром прямых (BC) и (AD). $\square$

Теорема 3.13. Если точки M и P – середины сторон AB и AC треугольника ΔABC, соответственно. Тогда прямые MP и BC расходятся и $MP < \frac{1}{2}BC$.

Доказательство.

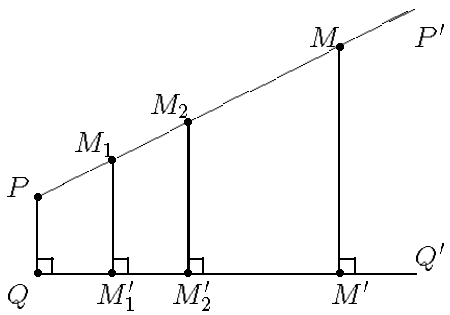


Опустим перпендикуляры из точек A, B, C на прямую (MP) и обозначим основания перпендикуляров A_1, B_1, C_1, соответственно. Рассмотрим случай, когда точки A_1, B_1, C_1, M, P располагаются так, как показано на рисунке (остальные возможные случаи расположения точек рассмотрите самостоятельно). Имеем треугольники ΔB_1BM и ΔA_1AM равны по четвертому признаку, следовательно, $B_1M = MA_1$, $BB_1 = AA_1$. Аналогично получаем $A_1P = PC_1$, следовательно, $B_1C_1 = 2MP$. Так как BB_1C_1C – четырехугольник Саккери, прямые (BC) и (B_1C_1) являются расходящимися и $BC > B_1C_1$, следовательно, $MP = \frac{1}{2}B_1C_1 < \frac{1}{2}BC$. $\square$

§30. Взаимное расположение параллельных и расходящихся прямых на плоскости Лобачевского.

Лемма 3.1. Пусть лучи $[PP')$ и $[QQ')$ расположены в одной полуплоскости с границей (PQ); угол $\angle Q'QP = d$; угол $\angle QPP'$ либо прямой, либо тупой. Тогда если M – произвольная точка луча $[PP')$, M' – ее проекция на прямую (QQ'), то расстояние $\rho(M, (QQ')) = MM'$ является монотонной, неограниченно возрастающей функцией расстояния MP.

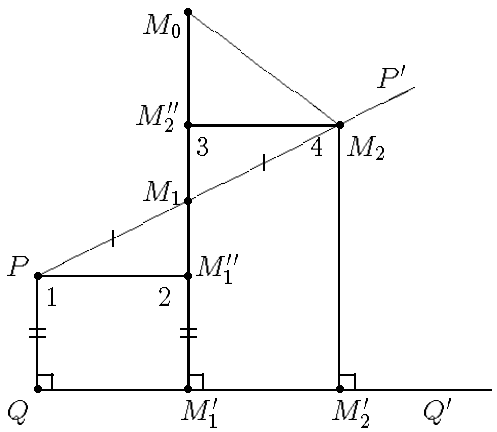
Доказательство.



Возьмем произвольные точки $M_1, M_2 \in [PP')$, такие что $P - M_1 - M_2$, то есть $PM_1 < PM_2$. Мы получаем двупрямоугольники $QM_1'M_1P$, $M_1'M_2'M_2M$, $QM_2'M_2P$. Так как угол $\angle P \geq d$ двупрямоугольника $PM_1'M_1P$, то $\angle M_1 < d$ (иначе сумма углов друпрямоугольника $PM_1'M_1P$ была бы больше $4d$). Тогда $\angle M_1'M_1M_2 > d$ (как угол смежный острому углу) и, следовательно, $\angle M_1M_2M_2' < d$.

Применим свойство двупрямоугольников к двум парам углов: $\angle QPM_1 > \angle PM_1M_1'$ и $\angle M_1'M_1M_2 > \angle M_1M_2M_2'$. В результате получим $PQ < M_1M_1'$ и $M_1M_1' < M_2M_2'$. По определению монотонно возрастающей функции получаем, что функция $\rho(M, (QQ'))$ является монотонно возрастающей.

Докажем, что эта функция возрастает неограничено.



Пусть точки $M_1, M_2, \dots M_n \in [PP')$, такие что $PM_1 = M_1M_2 = \dots = M_{n-1}M_n$. Тогда по доказанному $PQ < M_1M_1' < M_2M_2' < \dots < M_nM_n'$. Следовательно, на луче $[M_1'M_1)$ существуют точки M_1'', M_2'', такие что $PQ = M_1'M_1''$, $M_2M_2' = M_1'M_2''$. Докажем, что $M_1''M_1 < M_1M_2''$ от противного. Пусть $M_1''M_1 = M_1M_2''$. Тогда треугольники $\Delta PM_1''M_1$ и $\Delta M_2M_2''M_1$ равны по первому признаку, следовательно, $\angle PM_1''M_1 = \angle M_2M_2''M_1$. Но угол $\angle PM_1''M_1$ – тупой, как смежный острому углу $\angle 2$ четырехугольника Саккери $QM_1'M_1''P$, а угол $\angle M_2M_2''M_1$ – острый угол четырехугольника Саккери $M_1'M_2'M_2M_2''$. Противоречие.

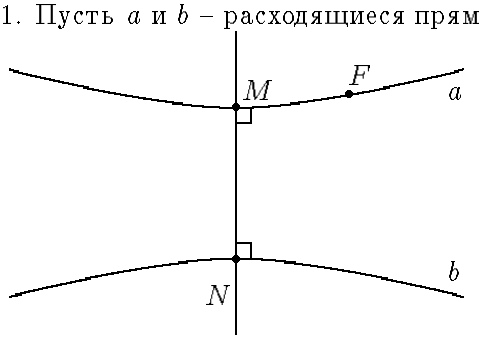
Пусть $M_1''M_1 > M_1M_2''$. Тогда существует точка M_0, такая что $M_1 - M_2'' - M_0$ и $M_1M_0 = M_1''M_1$.

Следовательно, треугольники $\Delta PM_1''M_1$ и $\Delta M_2M_0M_1$ равны по первому признаку, следовательно, $\angle PM_1''M_1 = \angle M_2M_0M_1$. Тогда $\angle M_2M_0M_1$ – тупой и угол $\angle M_0M_2''M_2$ – тупой как смежный острому углу $\angle 3$, а значит, в треугольнике $\Delta M_0M_2''M_2$ два тупых угла, что противоречит теореме Лежандра.

Итак, мы доказали, что $M_1''M_1 < M_1M_2''$. Обозначим $M_1''M_1 = \delta$. Тогда $M_1M_1' = PQ + \delta$, $M_2M_2' > M_1M_1' + \delta = PQ + 2\delta$, $M_nM_n' > PQ + n\delta$, то есть функция f неограниченно возрастает. □

Применим результаты леммы к расходящимся и параллельным прямым.

1. Пусть a и b – расходящиеся прямые.

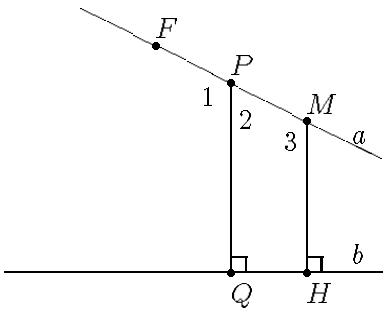


Рассмотрим произвольную точку F на прямой a. Будем перемещать ее по прямой a. Тогда расстояние $\rho(F, b)$ будет неограниченно возрастать по мере удаления точки F от точки M.

Вывод: а) расстояние от точек одной из расходящихся прямых до другой неограничено увеличивается по мере удаления точки от основания общего перпендикуляра этих прямых;

б) расстояние MN (длина общего перпендикуляра) является наименьшим расстоянием от любой точки прямой a до прямой b (и наоборот). Оно называется *расстоянием между расходящимися прямыми.*

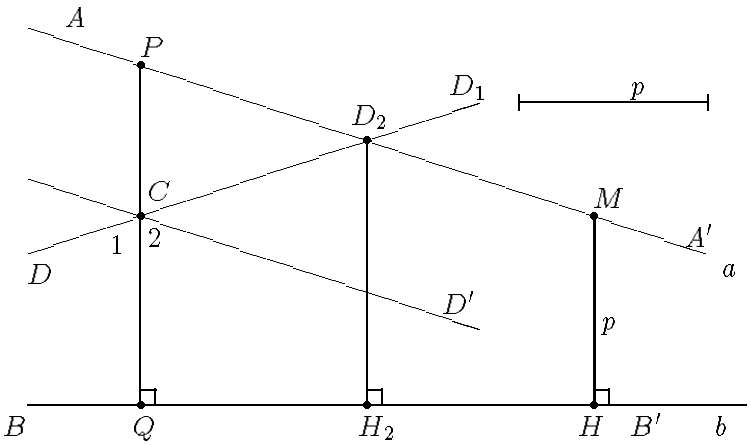
2. Пусть a и b – параллельные прямые.



Фиксируем произвольную точку $P \in a$. Так как угол $\angle 1 > d$ (так как по доказанному выше внутренние накрестлежащие углы, при пересечении параллельных прямых секущей не равны, причем меньше тот из углов, сторона которого имеет направление параллельности), по лемме при перемещении точки F в направлении, противоположном направлению параллельности расстояние ρ от точки F до прямой b возрастает.

Докажем, что $\rho \to 0$ при движении точки в напралении параллельности. Пусть $M \in a$ – произвольная точка и MH – перпендикуляр, опущенный на прямую b.

Так как $\angle 3$ – тупой, то по лемме $MH < PQ$, следовательно, MH монотонно убывает. Докажем, что MH стремится к нулю при перемещении точки M по прямой a в направлении параллельности. Для этого нужно доказать, что для любого отрезка p существует точка $M_0 \in a$, такая что $M_0H_0 = p$, где H_0 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую b.



Рассмотрим точку произвольную точку $P \in a$ и опустим из этой точки перпендикуляр PQ на прямую b. Если $PQ = p$, то это нужный нам отрезок. Пусть $PQ > p$. Отложим на луче $[QP)$ отрезок $QC = p$ и проведем направленные прямые (CD), (CD') параллельные направленным прямым $(B'B)$, (BB'), соответственно.

Тогда углы $\angle 1$ и $\angle 2$ – равные острые углы (как углы параллельности), следовательно, угол $\angle PCD$, а значит, и $\angle PCD'$ – тупые, следовательно, луч $[CD_1)$ является внутренним лучом угла $\angle PCD'$. Так как прямая a параллельна прямой (CD') (по транзитивности), то $[CD_1) \cap [PA') = D_2$ (определение параллельных прямых). Тогда так как $(AA') \| (BB')$ и $(D_1D) \| (B'B)$, то прямые (AA') и (D_1D) симметричны относительно прямой (D_2H_2), где H_2 – основание перпендикуляра, опущенного из точки D_2 на прямую b. Тогда точки M и H, симметричные точкам C и Q относительно прямой (D_2H_2) будут искомыми. $\square$