1 Линии второго порядка на плоскости

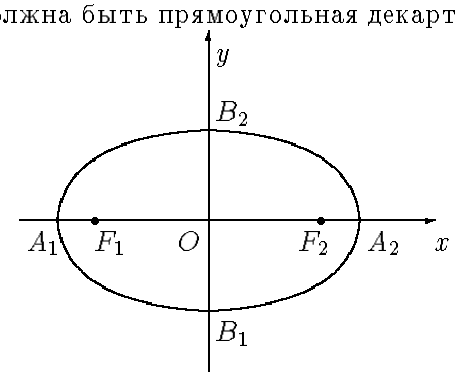
§1. Эллипс.

Мы приступаем к изучению линий второго порядка на плоскости и начнем мы это изучение с примеров. Один пример линии второго порядка мы уже знаем – это окружность. Познакомимся еще с тремя примерами линий второго порядка.

Определение 1.1. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 равна длине данного отрезка PQ, где $PQ > F_1F_2$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами эллипса*. Прямая (F_1F_2) называется *фокальной осью*.

Будем обозначать $\gamma_e = \{M | MF_1 + MF_2 = PQ,\ PQ > F_1F_2\}$ – эллипс. Также обозначим $F_1F_2 = 2c$, $PQ = 2a$. Отрезки MF_1, MF_2 называются фокальными радиусами точки M.

Для того чтобы убедиться, что эллипс действительно является линией второго порядка, нужно вывести его уравнение в какой-нибудь системе координат. Так как нам придется вычислять расстояния, это должна быть прямоугольная декартова система координат.



Пусть $(O, \vec{i}, \vec{j})$ – прямоугольная декартова система координат, где $O - \text{сер}[F_1F_2]$, $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF_2}$. Тогда $F_1(-c, o)$, $F_2(c, 0)$. Выведем уравнение эллипса.

1) Пусть $\forall M(x, y) \in \gamma_e$. По определению это означает, что
$MF_1 + MF_2 = 2a$. Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Перенесем в правую часть второе слагаемое и возведем в квадрат.

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Возведем обе части в квадрат.

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 + x^2c^2 - 2a^2xc$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

Обозначим $a^2 - c^2 = b^2$ и разделим обе части последнего уравнения на a^2b^2.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

Мы получили уравнение множества точек, в котором содержатся все точки эллипса/ Нам нужно убедиться, что в это множество не попали "лишние" точки, так как наши преобразования уравнений не были равносильными.

2) Пусть $\forall M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (1). Нам нужно доказать, что эта точка принадлежит эллипсу. Вычислим длины отрезков MF_1, MF_2 с учетом (1).

$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + a^2 - x^2 - c^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\left(a + \frac{xc}{a}\right)^2} = \left|a + \frac{xc}{a}\right|$ Нам нужно оценить знак подмодульного выражения, чтобы раскрыть этот модуль. Из (1) получаем $\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow |x| \le a, c \le a$, то есть $\left|\frac{xc}{a}\right| = \frac{|x|c}{a} \le \frac{a \cdot a}{a} = a$. Таким образом,

$$MF_1 = a + \frac{xc}{a}$$

Аналогично получаем (вычислите самостоятельно), что

$$MF_2 = \left| a - \frac{xc}{a} \right| = a - \frac{xc}{a}$$

Тогда $MF_1 + MF_2 = a + \frac{xc}{a} + a - \frac{xc}{a} = 2a$, то есть $M \in \gamma_e$.

Уравнение (1) называется *каноническим уравнением эллипса*. Построенная система координат называется *канонической системой координат*. Числа a, b называются *полуосями эллипса*, соответственно, большой и малой.

Свойства.

1^0 Точка O является центром симметрии эллипса.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $M(x_0, y_0) \in \gamma_e$. Нам нужно доказать, что точка $\tilde{M}$, симметричная точке M, также принадлежит эллипсу γ_e. Заметим, что точка $\tilde{M}$ имеет координаты $(-x_0, -y_0)$. Подставим ее координаты в каноническое уравнение эллипса
$\frac{(-x_0)^2}{a^2} + \frac{(-y_0)^2}{b^2} = \frac{(x_0)^2}{a^2} + \frac{(y_0)^2}{b^2} = 1$, так как по условию $M(x_0, y_0) \in \gamma_e$, а значит, ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса, то есть $\tilde{M} \in \gamma_e$. $\square$

2^0 Оси (Ox) и (Oy) являются осями симметрии эллипса.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $M(x_0, y_0) \in \gamma_e$. Точка $\tilde{M}$, симметричная точке M относительно оси (Ox) имеет координаты $(x_0, -y_0)$. Подставим эти числа в уравнение эллипса: $\frac{(x_0)^2}{a^2} + \frac{(-y_0)^2}{b^2} = \frac{(x_0)^2}{a^2} + \frac{(y_0)^2}{b^2} = 1$, то есть $\tilde{M} \in \gamma_e$.
Самостоятельно докажите для другой оси. $\square$

3^0 Для любой точки эллипса $M(x, y)$ имеем $|x| \leq a$, $|y| \leq b$.

Доказательство. Легко следует из канонического уравнения эллипса. $\square$

4^0 Любая прямая, проходящая через центр эллипса пересекает его в двух (вещественных) точках. В частности, ось (Ox) пересекает эллипс в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, а (Oy) – в точках $B_1(-b, 0)$, $B(b, 0)$.

Доказательство. Рассмотрим каноническое уравнение эллипса и в этой же системе координат запишем параметрические уравнения произвольной прямой ℓ, проходящей через точку O – начало системы координат

$$\ell : \begin{cases} x = p_1 t \\ y = p_2 t \end{cases}$$

Тогда координаты точек пересечения эллипса и прямой ℓ суть решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = p_1 t \\ y = p_2 t \end{cases}$$

Подставим второе и третье уравнения системы в первое уравнение.

$$\begin{cases} \frac{(p_1)^2}{a^2} t^2 + \frac{(p_2)^2}{b^2} t^2 = 1 \\ x = p_1 t \\ y = p_2 t \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения t и подставим в второе и третье уравнения.

$$\begin{cases} t_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 (p_1)^2 + a^2 (p_2)^2}} \\ x = \pm p_1 \frac{ab}{\sqrt{b^2 (p_1)^2 + a^2 (p_2)^2}} \\ y = \pm p_2 \frac{ab}{\sqrt{b^2 (p_1)^2 + a^2 (p_2)^2}} \end{cases}$$

Мы получили два решения, которые являются координатами двух точек пересечения эллипса и прямой ℓ. В частности, для оси (Ox) направляющий вектор имеет координаты $(1, 0)$, то есть $p_1 = 1$, $p_2 = 0$. Подставляя эти значения в последнюю систему уравнений, получим, что эллипс пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$. Докажите самостоятельно для оси (Oy). $\square$

Определение 1.2. *Эксцентриситетом* называется число $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

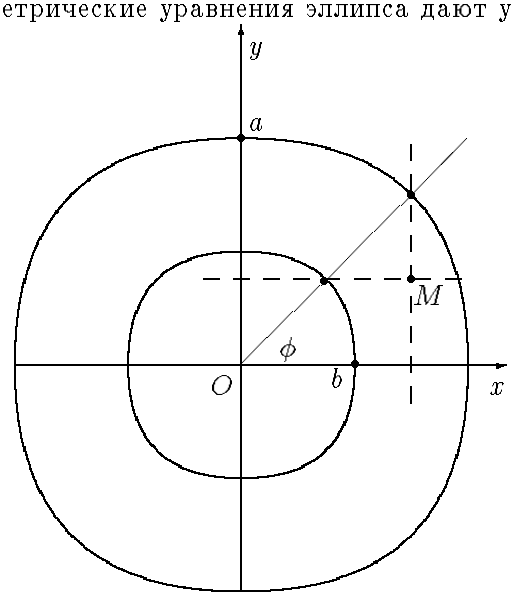
5^0 Для эллипса $0 < \varepsilon < 1$.

6^0 Эксцентриситет определяет форму эллипса.

Доказательство. 1) Пусть $\varepsilon = 0$. Тогда $c = 0$ и $a = b$, то есть эллипс является окружностью.
2) Выразим отношение $\frac{b}{a}$ через эксцентриситет. Имеем $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2}$. Тогда $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$.
Если $\varepsilon \to 0$, то эллипс стремится к окружности ($\frac{b}{a} \to 1$).
Если $\varepsilon \to 1$, то $\frac{b}{a} \to 0$. Если фиксировать a, то $b \to 0$. Мы получаем эллипс вытянутый вдоль оси (Ox). □
7^0 Параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos\phi \\ y = b\sin\phi \end{cases}, \ \phi \in [0, 2\pi) \tag{2}$$

Доказательство. 1) Возьмем произвольную точку $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (2). Убедимся, что она принадлежит эллипсу. Подставим ее координаты в каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$. Таким образом, координаты точки M удовлетворяют каноническому уравнению эллипса, значит, сама точка принадлежит эллипсу.
2) Обратно, пусть точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то есть ее координаты удовлетворяют каноническому уравнению эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как для любой точки эллипса $M(x, y)$ имеем $|x| \le a$, $|y| \le b$, то существует такое число $\phi \in [0, 2\pi)$, что $\frac{x}{a} = \cos\phi$. В силу основного тригонометрического тождества $\frac{y}{b} = \sin\phi$. Итак, мы получили, что координаты точки $M(x, y)$ эллипса удовлетворяют уравнениям (2). □
Параметрические уравнения эллипса дают удобный способ для построения точек эллипса.

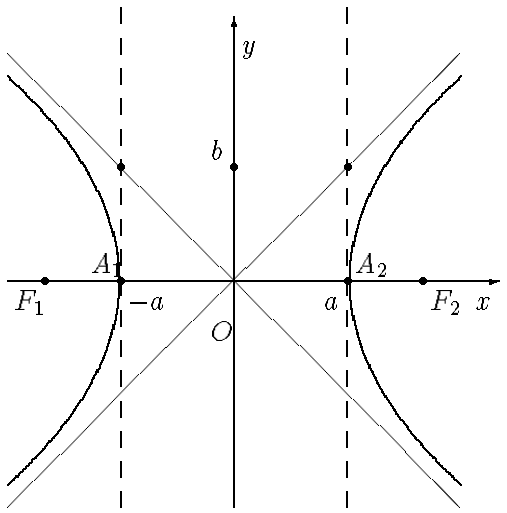


Проведем две окружности с центрами в начале координат и радиусами a и b. Рассмотрим луч с центром в начале координат, который образует с осью Ox угол ϕ. Через точки пересечения этого луча с окружностями проведем прямые, параллельные оси Ox и оси Oy (см. рисунок). Точка пересечения этих прямых имеет абсциссу $a\cos\phi$ и ординату $b\sin\phi$ (почему?), то есть принадлежит эллипсу.

§2. Гипербола.

Определение 1.3. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояния от каждой из которых до двух данных точек F_1, F_2 равен длине данного отрезка PQ $(PQ < F_1F_2)$.
Обозначим $F_1F_2 = 2c$, $PQ = 2a$, $a < c$.
Будем обозначать $\gamma_g = \{M : |MF_1 - MF_2| = 2a\}$ – гипербола.

Для того чтобы убедиться, что гипербола действительно является линией второго порядка, нужно вывести ее уравнение в какой-нибудь системе координат. Так как нам придется вычислять расстояния, это должна быть прямоугольная декартова система координат.



Пусть $(O, \vec{i}, \vec{j})$ – прямоугольная декартова система координат, где $O - \text{сер}[F_1F_2]$, $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF_2}$. Тогда $F_1(-c, o)$, $F_2(c, 0)$. Выведем уравнение гиперболы.

1) Пусть $\forall M(x, y) \in \gamma_g$. По определению это означает, что $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Возведем обе части равенства в квадрат и раскроем скобки.

$$\mp a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Опять возведем в квадрат

$$(c^2 - a^2)x^2 - y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Введем обозначение $b^2 = c^2 - a^2$ и разделим обе части последнего уравнения на a^2b^2.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

Мы получили уравнение множества точек, в котором содержатся все точки гиперболы. Нам нужно убедиться, что в это множество не попали "лишние" точки, так как наши преобразования уравнений не были равносильными.

2) Пусть $\forall M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (3). Нам нужно доказать, что эта точка принадлежит гиперболе. Вычислим длины отрезков MF_1, MF_2 с учетом (3).

$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + (c^2 - a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + a^2 - x^2 - c^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\left(a + \frac{xc}{a}\right)^2} = \left|a + \frac{xc}{a}\right|$ Нам нужно оценить знак подмодульного выражения, чтобы раскрыть этот модуль. Из (3) получаем $\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow |x| \geq a, c > a$, то есть $\left|\frac{xc}{a}\right| = \frac{|x|c}{a} \geq \frac{a \cdot a}{a} = a$. Таким образом,

а) при $x \geq 0 \Rightarrow MF_1 = a + \frac{cx}{a}$

б) при $x < 0 \Rightarrow MF_1 = -a - \frac{cx}{a}$

Аналогично получаем (вычислите самостоятельно), что

$$MF_2 = \left|a - \frac{xc}{a}\right|$$

а) при $x \geq 0 \Rightarrow MF_2 = -a + \frac{cx}{a}$

б) при $x < 0 \Rightarrow MF_2 = a - \frac{cx}{a}$

Тогда $|MF_1 - MF_2| = |\pm 2a|$, то есть $M \in \gamma_g$.

Уравнение (3) называется *каноническим уравнением гиперболы*. Построенная система координат называется *канонической системой координат*.

Свойства.

1) Гипербола симметрична относительно точки O. (докажите самостоятельно по аналогии с эллипсом)

2) Гипербола симметрична относительно осей (Ox) и (Oy). (докажите самостоятельно по аналогии с эллипсом)

3) Найдем координаты точек пересечения гиперболы с осями канонической системы координат. Эти точки называются вершинами гиперболы.

Доказательство. Координаты точек пересечения гиперболы и оси (Ox) задаются системой уравнений (напомним, что ось Ox задается уравнением $y = 0$)

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm a \end{cases}$$

Итак, ось Ox в двух точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$. Эта ось называется *вещественной осью* гиперболы.

Аналогично находим точки пересечения с осью (Oy).

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -b^2 \end{cases}$$

Эта система уравнений не имеет вещественных корней. Значит, вещественных (наших привычных точек плоскости) у гиперболы и оси (Oy) нет. Поэтому ось (Oy) называется *мнимой осью* гиперболы. □

4) Из уравнения (3) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, то есть $|x| \geq a$.

5) Найдем точки пересечения гиперболы с прямыми, проходящими через начало координат – точку O. Зададим прямую ℓ параметрическими уравнениями $x = p_1 t$, $y = p_2 t$. Координаты точек пересечения этой прямой с гиперболой суть решения системы уравнений

$$\begin{cases} x = p_1 t \\ y = p_2 t \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Подставим первые два уравнения в третье и выразим t.

$$(p_1^2 b^2 - p_2^2 a^2) t^2 = a^2 b^2$$

Для этого уравнения возможны три случая:

1) $p_1^2 b^2 - p_2^2 a^2 = 0$, то есть $p_1 = \pm \frac{a}{b} p_2$. В этом случае уравнение не имеет решения. Таких прямых две:

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases} \quad \begin{cases} x = at \\ y = -bt \end{cases}$$

Эти прямые называются *асимптотами* гиперболы.

2) $p_1^2 b^2 - p_2^2 a^2 < 0$. В этом случае уравнение не имеет вещественных решений, но имеет два мнимых решения.

3) $p_1^2 b^2 - p_2^2 a^2 > 0$. В этом случае уравнение имеет два вещественных корня, то есть прямая пересекает гиперболу в двух точках.

Внимательно посмотрим на первые два случая. В обоих случаях общих точек прямой и гиперболы мы не увидим, но алгебра говорит нам, что эти два случая отличаются друг от друга. В первом случае значения t вообще не существует, а во втором случае существуют два комплексно сопряженных корня. Если эти значения параметра t подставить в первые два уравнения системы, то получим две пары комплексных значений для координат x и y. Этих точек пока на нашей плоскости нет.

Теорема 1.1. Расстояние от точки гиперболы до асимптоты стремится к нулю по мере удаления точки по линии к бесконечности.

Доказательство. В силу симметрии гиперболы достаточно рассмотреть только первую четверть. В первой четверти находится асимптота $\ell_1 : \begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases}$ Перейдем к общему уравнению $\ell : bx - ay = 0$. Вспомним формулу для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости и применим ее в нашем случае. Точка, от которой мы считаем расстояние – это произвольная точка гиперболы $M(x, y)$.

$$\rho(M, \ell_1) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Так точка лежит на гиперболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как точка по условию лежит в первой четверти, то ее координаты – положительные числа и мы

можем выразить $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Подставим это в формулу для расстояния.

$\rho(M, \ell_1) = \frac{|bx - a\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \left| \frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \right| = = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \left| \frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \right| \to 0 (x \to \infty \ \square$

6) Для гиперболы эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

7) Параметрические уравнения гиперболы:

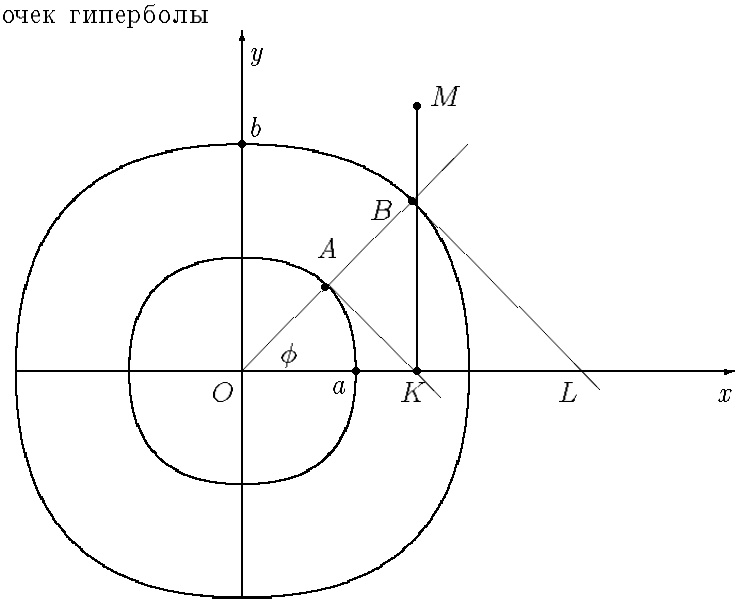
$$x = \frac{a}{cos\phi},\ y = b\,\mathrm{tg}\,\phi,\ \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$$

при $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ – правая ветвь гиперболы
при $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$ – левая ветвь гиперболы.

Доказательство. 1) Пусть дана точка $M(x, y)$ с координатами $x = \frac{a}{cos\phi}$, $y = b\,\mathrm{tg}\,\phi$. Докажем, что ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы: $\frac{1}{a^2}(\frac{a}{cos\phi})^2 - \frac{1}{b^2}(b\,\mathrm{tg}\,\phi)^2 = \frac{1}{cos^2\phi} - \mathrm{tg}^2\,\phi = 1$ (мы использовали тригонометрическое тождество $1 + tg^2\phi = \frac{1}{cos^2\phi}$).

2) Обратно, из уравнения гиперболы в силу названного тригонометрического тождества получим, что существует такой угол ϕ, что для точки гиперболы $x = \frac{a}{cos\phi}$, $y = b\,\mathrm{tg}\,\phi$. $\square$

Так же как для эллипса параметрические уравнения гиперболы позволяют указать способ построения точек гиперболы



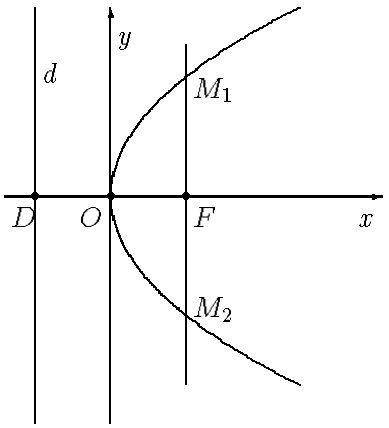
Проведем две окружности с центром в начале координат и радиусов a и b. Возьмем произвольный луч с началом в начале координат. Он пересекает окружности в точках A и B соответственно. Через эти точки проведем касательные к этим окружностям. Они пересекут ось (Ox) в точках K и L. Отложим от точки K отрезок длины LB. Полученная точка M будет принадлежать гиперболе (докажите).

Еще один способ построения точек гиперболы.
Фиксируем две точки F_1 и F_2. Построим две окружности с центрами F_1 и F_2 радиусов r и $r + 2a$. Точки пересечения этих окружностей будут принадлежать гиперболе, для которой F_1, F_2 – фокусы и $PQ = 2a$ (докажите).

§3. Парабола.

Определение 1.4. *Параболой* называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки F равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой d. Точка F называется *фокусом* параболы, прямая d называется *директрисой* параболы.

Обозначение $\gamma_p = \{M : \rho(M, d) = MF\}$. Пусть D – основание перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую d. Тогда число $FD = \rho(F, d) = p$ называется *фокальным параметром* параболы.



Пусть O – середина отрезка $[DF]$ и $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DF}$, $\vec{j} \perp \vec{i}$. Эту прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ назовем канонической системой координат. Тогда $F(\frac{p}{2}, 0)$, $d : x = -\frac{p}{2}$.

Выведем уравнение параболы.

1) Пусть $M(x, y) \in \gamma_p$. По определению имеем $\rho(M, d) = MF$, то есть $|x + \frac{p}{2}| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$. Возведем обе части уравнения в квадрат и приведем подобные.

$$y^2 = 2px$$

2) Обратно, пусть координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению $y^2 = 2px$. Докажем, что эта точка принадлежит параболе. По формуле для вычисления расстояния от точки до прямой имеем $\rho(M, d) = |x + \frac{p}{2}|$. Вычислим $MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + 2px} = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2} = |x + \frac{p}{2}|$. Итак, $\rho(M, d) = MF$, то есть точка M принадлежит параболе.

Уравнение

$$y^2 = 2px$$

называется *каноническим уравнением* параболы.

Свойства.

1^0 $\forall M(x, y) \in \gamma_p \Rightarrow x \geq 0$

2^0 (Ox) – ось симметрии параболы. Точка $O = \gamma_p \cap (Ox)$ называется *вершиной* параболы.

3^0 $|y| \to \infty$ при $x \to +\infty$

4^0 Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через фокус F параболы параллельно директрисе d. Ее уравнение в канонической системе координат $\ell : x = \frac{p}{2}$. Найдем точки пересечения этой прямой с параболой.

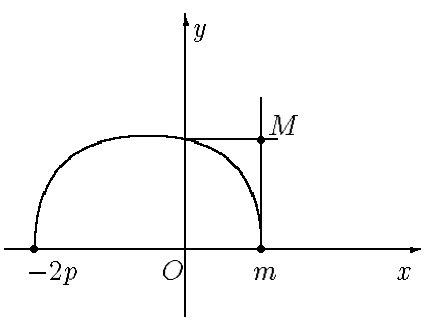
$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{2} \\ y = \pm p \end{cases}$$

Итак, прямая ℓ пересекает параболу в двух точках M_1, M_2. Отрезок M_1M_2 называется фокальной хордой параболы и ее длина равна $2p$.

5^0 Параметрические уравнения параболы.

Рассмотрим каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$. Обозначим $y = t$. Тогда $x = \frac{t^2}{2p}$. Это параметрические уравнения параболы. Здесь параметр обозначен t. Он меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

6^0. Построение точек параболы.

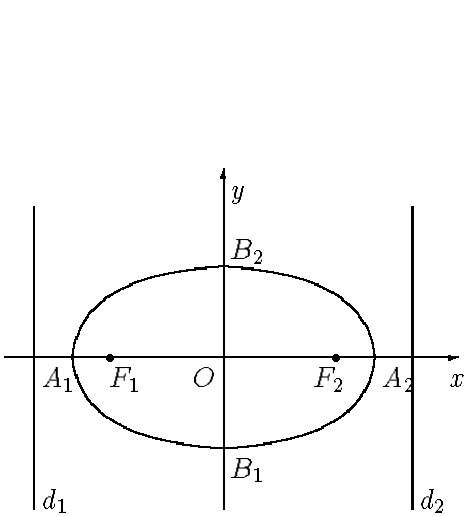


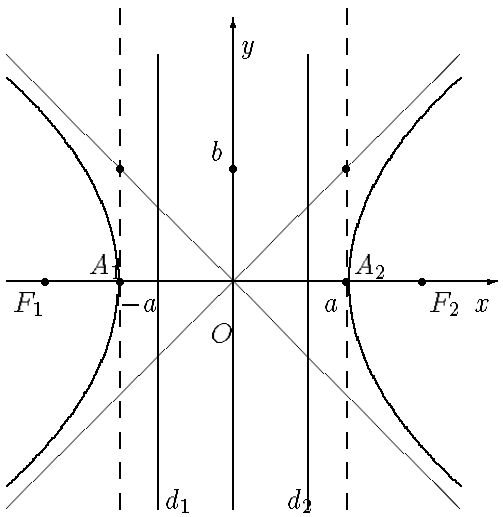
Очевидно, точка $M(m, \sqrt{2pm})$ принадлежит параболе. Возьмем на оси (Ox) точки m и $-2p$. Построим на получившемся отрезке окружность как на диаметре. Через точку пересечения этой окружности с осью ординат проведем прямую, параллельную оси абсцисс, а через точку m – прямую, параллельную оси ординат. Пересечении этих прямых дает искомую точку M (докажите).

Замечание. Существует бесконечно много способов представления параболы в параметрическом виде.

§4. Директориальное свойство эллипса и гиперболы.

Пусть $(O, \vec{i}, \vec{j})$ – каноническая система координат для эллипса и гиперболы.





$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Определение 1.5. *Директрисами* эллипса (гиперболы) называются прямые, перпендикулярные фокальной оси эллипса (гиперболы) и находящиеся от их центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$. Напомним, что ε – это эксцентриситет эллипса (гиперболы).

В канонической системе координат директрисы имеют уравнения $d_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}$. Будем называть фокус F_1 и директрису d_1 (фокус F_2 и директрису d_2) *соответствующими*.

Теорема 1.2. (директориальное свойство)

$$M \in \gamma_e(\gamma_g) \Leftrightarrow \frac{MF_1}{\rho(M, d_1)} = \varepsilon \neq 1 \left(\frac{MF_2}{\rho(M, d_2)} = \varepsilon \neq 1 \right)$$

Доказательство. Докажем для фокуса F_1 и директрисы d_1.

$\Rightarrow$) 1) Рассмотрим эллипс (гиперболу). Как мы доказали в §1(2) фокальный радиус точки M равен $MF_1 = \left|\frac{xc}{a} + a\right| = |x\varepsilon + a|$. По формуле для вычисления расстояния от точки до прямой получим $\rho(M, d_1) = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right|$. Вычислим отношение $\frac{MF_1}{\rho(M,d_1)} = \frac{|x\varepsilon+a|}{\left|x+\frac{a}{\varepsilon}\right|} = \varepsilon\frac{|x\varepsilon+a|}{|x\varepsilon+a|} = \varepsilon$.

$\Leftarrow$) Пусть точка $M(x, y)$, такая что $\frac{MF_1}{\rho(M,d_1)} = \varepsilon$. Докажем, что она принадлежит либо эллипсу, либо гиперболе. Распишем данное уравнение в координатах.

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \varepsilon \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right|$ Возведем обе части уравнения в квадрат и подставим $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$

1) $a > c$, то обозначая $b^2 = a^2 - c^2$, получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то есть $M \in \gamma_e$.

2) $a < c$, то обозначая $b^2 = c^2 - a^2$, получим $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то есть $M \in \gamma_g$. $\square$

Положим по определению эксцентриситет параболы равным 1. Тогда эллипс, гиперболу и параболу можно определить одним условием

$$\gamma = \{M : MF = \varepsilon\rho(M, d)\}$$

где F и d соответствующие фокус и директриса. При этом если $\varepsilon > 1$, то получим гиперболу, если $\varepsilon < 1$, то – эллипс, если $\varepsilon = 1$, то – параболу.

Оказывается, что эллипс, гиперболу и параболу можно также задать одним уравнением и различать их по значению эксцентриситета. Для этого нам понадобятся дополнительные понятия векторной алгебры.

§5. Ориентированный угол на плоскости. Полярная система координат.

Пусть мы работаем на плоскости σ, ее направляющее подпространство L^2. Мы можем ввести в L^2 ориентацию также как мы делали это в V^3. А именно, пусть $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ – два произвольных базиса в L^2. Разложим векторы базис B по векторам базиса A.

$$\vec{b}_1 = c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2$$
$$\vec{b}_2 = c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2$$

Из коэффициентов разложения составим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Эта матрица называется *матрицей перехода* от базиса A к базису B. Обозначим $A|B = detC = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$ определитель матрицы перехода от базиса A к базису B. Он обладает следующими свойствами:

1^0 $A|A = 1$ для любого базиса $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$

Докажите самостоятельно по аналогии с V^3.

2^0 Для любых базисов $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ $(A|B)(B|C) = A|C$.

Доказательство. Имеем

$$\vec{b}_1 = c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2 \quad \vec{c}_1 = d_{11}\vec{b}_1 + d_{21}\vec{b}_2$$
$$\vec{b}_2 = c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2 \quad \vec{c}_2 = d_{12}\vec{b}_1 + d_{22}\vec{b}_2$$

Тогда по определению определителя матрицы перехода получим

$$(A|B)(B|C) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}d_{11} + c_{12}d_{21} & c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22} \\ c_{21}d_{11} + c_{22}d_{21} & c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, для получения матрицы перехода от базиса A к базису C, нам нужно получить разложение векторов базиса C по векторам базиса A. Для этого подставим разложение векторов базиса B по векторам базиса A в разложение векторов базиса C по векторам базиса B:

$$\vec{c}_1 = d_{11}(c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2) + d_{21}(c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2)$$
$$\vec{c}_2 = d_{12}(c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2) + d_{22}(c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2)$$

Раскрывая скобки и собирая коэффициенты при векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, получим определитель матрицы перехода от базиса A к базису C

$$A|C = \begin{vmatrix} c_{11}d_{11} + c_{12}d_{21} & c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22} \\ c_{21}d_{11} + c_{22}d_{21} & c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22} \end{vmatrix}$$

Сравнивая результаты, получим $(A|B)(B|C) = A|C$. □

3^0 Для любых базисов A и B имеем $A|B = \frac{1}{B|A}$.

Доказательство. Легко следует из 2^0. □

Определение 1.6. Будем называть базисы A и B *одинаково ориентированными*, если определитель матрицы перехода от A к B больше нуля, то есть $A|B > 0$. Будем называть базисы A и B *противоположно ориентированными*, если определитель матрицы перехода от A к B меньше нуля, то есть $A|B < 0$.

Введем на множестве базисов векторного пространства L^2 отношение Δ: $A\Delta B \Leftrightarrow A|B > 0$. Это бинарное отношение является отношением эквивалентности, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно (докажите самостоятельно по аналогии с V^3).

Предложение 1.1. Фактормножество по этому отношению эквивалентности состоит из двух классов.

Доказательство. Рассмотрим два базиса $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $B = (\vec{a}_2, \vec{a}_1)$. Докажем, что они противоположно ориентированы, то есть принадлежат разным классам. Имеем

$$\vec{a}_2 = 0 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2$$
$$\vec{a}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2$$

Тогда определитель матрицы перехода от A к B равен $A|B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$.

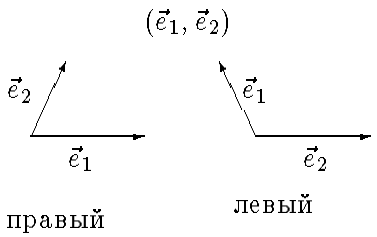
Обозначим класс, которому принадлежит базис A через K_A, а класс, которому принадлежит базис B через K_B. Докажем, что любой базис пространства L^2 принадлежит либо классу K_A, либо классу K_B.

Рассмотрим произвольный базис C. Тогда по свойству 2^0 имеем $A|C = (A|B)(B|C)$, $A|B = -1 < 0$. Если $B|C > 0$, то $C \in K_B$, если $B|C < 0$, то $A|C > 0$ и $C \in K_A$. □

Определение 1.7. Классы K_A K_B называются *ориентациями* в векторном пространстве L^2. Базисы одного из классов называются *правыми или положительно ориентированными*, а базисы другого класса – *левыми или отрицательно ориентированными.*

Определение 1.8. Плоскость, в направлеющем пространстве которой фиксирована одна из ориентаций, называется *ориентированной*. Аффинная система координат называется *правой*, если ее базис правый и *левой*, если ее базис левый.

Замечание. Для удобства договоримся называть правыми базисы, у которых переход от первого вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки, а левыми, у которых переход от первого вектора ко второму осуществляется по часовой стрелке.



Пусть плоскость ориентирована. Тогда мы можем ввести понятие ориентированного угла между векторами на ориентированной плоскости.

Определение 1.9. *Ориентированном (или направленным) углом* между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \begin{cases} \angle(\vec{a}, \vec{b}), \text{если } (\vec{a}, \vec{b}) - \text{правый базис} \\ -\angle(\vec{a}, \vec{b}), \text{если } (\vec{a}, \vec{b}) - \text{левый базис} \\ 0, \text{если } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ \pi, \text{если } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \end{cases}$$

Понятие ориентированного угла между векторами в некотором смысле аналогично понятию вектора, а именно он обладает свойствами:

Теорема 1.3. (свойства ориентированного угла между векторами)

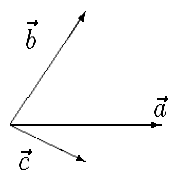
1^0 $-\pi \leq (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \leq \pi$

2^0 $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$

3^0 $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = (\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) (mod\, 2\pi)$

Доказательство. Первые два свойства непосредственно следуют из определения ориентированного угла между векторами. Третье свойство доказывается перебором всевозможных случаев взаимного расположения данных векторов. Рассмотрим один из случаев, остальные доказываются анологично (докажите самостоятельно).

Пусть вектора расположены так как показано на рисунке

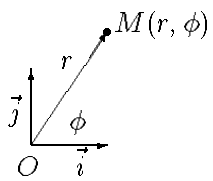


Имеем $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = -\angle(\vec{b}, \vec{c})$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = -\angle(\vec{a}, \vec{c})$. Проверяем $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = \angle(\vec{a}, \vec{b}) - \angle(\vec{b}, \vec{c}) = -\angle(\vec{a}, \vec{c}) = (\widehat{\vec{a}, \vec{c}})$.

Остальные случаи проверяются аналогично. □

С помощью ориентированного угла можно ввести еще одну систему координат на плоскости.

Определение 1.10. *Полярной системой координат* на ориентированной плоскости называется пара $(O, \vec{i})$, где O – произвольная точка плоскости, $\vec{i}$ – единичный вектор из L^2.



Пусть M – произвольная точка плоскости, на которой фиксирована полярная система координат. Обозначим $r = OM$ – расстояние от точки O до точки M, $\phi = (\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$ – ориентированный угол между векторами $\vec{i}$ и $\overrightarrow{OM}$. Пара чисел (r, ϕ) называется *полярными координатами* точки M.

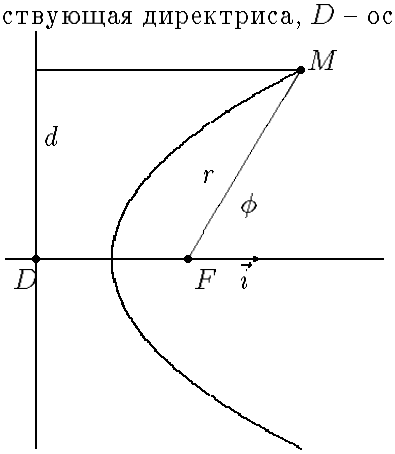
С каждой полярной системой координат можно связать правую прямоугольную декартову систему

координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (см. рисунок). Если обозначить (x, y) координаты точки M во введенной правой прямоугольной декартовой системе координат, то, очевидно, они будут связаны с полярными координатами этой точки формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

§6. Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы.

Пусть γ – эллипс, правая ветвь гиперболы или парабола на ориентированной плоскости, F – фокус, d – соответствующая директриса, D – основание перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису.



Рассмотрим полярную систему координат $(F, \vec{i})$, $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DF}$. Пусть M – произвольная точка линии γ. Имеем, $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM}$. Рассмотрим ортогональную проекцию этих векторов на ось $((DF), \vec{i})$: $pr_{\vec{i}}\overrightarrow{DM} = pr_{\vec{i}}\overrightarrow{DF} + pr_{\vec{i}}\overrightarrow{FM}$. Получим $\rho(M, d) = DF + r\cos\phi$. Согласно директориальному свойству имеем $\rho(M, d) = \frac{MF}{\varepsilon} = \frac{r}{\varepsilon}$. Подставим это соотношение в последнее равенство: $\frac{r}{\varepsilon} = DF + r\cos\phi$. Обозначим $\varepsilon DF = p$ и назовем это число *фокальным параметром* линии γ. Это обозначение согласовано с ранее введенным понятием фокального параметра параболы (напомним, что для параболы мы по определению положили $\varepsilon = 1$). Итак, линия γ во введенной полярной системе координат задается уравнением

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi} \tag{4}$$

Выясним, какие точки линии γ определяет уравнение (4).

1) Эллипс. Как мы знаем, для эллипса $\varepsilon < 1$. Тогда $1 - \varepsilon\cos\phi > 0$ при любом значении угла ϕ. Если $0 \le \phi < 2\pi$, то уравнение (4) определяет все точки эллипса.

2) Гипербола. Как мы знаем, для гиперболы $\varepsilon > 1$. Формула (4) имеет смысл только, когда $1 - \varepsilon\cos\phi > 0$, то есть $\cos\phi < \frac{1}{\varepsilon}$. Обозначим $\frac{1}{\varepsilon} = \cos\phi_0$. Тогда $\cos\phi < \cos\phi_0$, то есть $\phi_0 < \phi < 2\pi - \phi_0$. При этих условиях уравнение (4) задает правую ветвь гиперболы.

Выясним геометрический смысл угла ϕ_0. Так как $\frac{1}{\varepsilon} = \cos\phi_0$, то $\operatorname{tg}\phi_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \frac{b}{a}$. Мы видим, что тангенс угла ϕ_0 есть угловой коэффициент асимптоты гиперболы.

3) Парабола. На параболе нет точки $(r, 0)$, следовательно, при $0 < \phi < 2\pi$, то уравнение $r = \frac{p}{1 - \cos\phi}$ задает все точки параболы.