1 Линии второго порядка на плоскости

§8. Мнимые точки плоскости.

Напомним, что *комплексным числом* называется упорядоченная пара вещественных чисел $z = (a, b)$. Если обозначить $\sqrt{-1} = i$, то комплексное число можно записать в виде $z = a+bi$. Вещественное число a называется *вещественной* частью числа z (обозначается $a = Re\, z$), вещественное число b называется *мнимой частью* числа z (обозначается $b = Im\, z$).
Для комплексных чисел вводятся операции:
1) *сложения.* Если $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ – два комплексных числа, то их *суммой* называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
2) *умножения.* Если $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ – два комплексных числа, то их *произведением* называется комплексное число $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.
Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (докажите).
3) *операция комплексного сопряжения.* Числом *комплексно сопряженным* числу $z = a + bi$ называется комплексное число $\bar{z} = a - bi$. Операция комплексного сопряжения инволютивна, то есть $\overline{\bar{z}} = z$.
Множество всех комплексных чисел будем обозначать $\mathcal{C}$.

Заметим, что вещественные числа можно считать комплексными числами вида $(a, 0)$ (или в других обозначениях $a + 0i$).

Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинная система координат на плоскости σ. Тогда каждой точке плоскости σ можно поставить в соответствие пару вещественных чисел – ее координат в данной аффинной системе координат, то есть $M \in \sigma \leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}^2$.

Определение 1.11. Будем называть *комплексной плоскостью* множество всех упорядоченных пар вида $(x, y) \in \mathcal{C}^2$, то есть пар комплексных чисел. При этом парам (x, y), где x и y – вещественные числа соответствуют "обычные" точки (будем называть их *вещественными точками*) плоскости σ с координатами в данной системе координат. Все остальные точки комплексной плоскости будем называть *мнимыми*.

Определение 1.12. Точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ называются комплексно сопряженными, если $x_1 = \bar{x}_2$ и $y_1 = \bar{y}_2$.
Например, точки $M_1(1 + i, 2 - i)$, $M_2(1 - i, 2 + i)$ являются комплексно сопряженными.

Определение 1.13. Серединой отрезка с концами в точках $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ называется точка $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Лемма 1.1. Середина отрезка с комплексно сопряженными концами является вещественной точкой (докажите самостоятельно).

§9. Общее уравнение линии второго порядка. Пересечение линии второго порядка с прямой.

Напомним, что алгебраической линией порядка n называется множество точек, задаваемых относительно некоторой аффинной системы координат уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – многочлен степени n от двух переменных. В частности, линией второго порядка называется линия, которая относительно некоторой аффинной системы координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задается уравнением вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00}$ – некоторые вещественные числа. Обозначим $a_{21} \equiv a_{12}$,

$$\begin{aligned}
&F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}\\
&F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{10}\\
&F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{20}\\
&F_0(x, y) = a_{10}x + a_{20}y + a_{00}\\
&F(x, y) = F_1(x, y)x + F_2(x, y)y + F_0(x, y)
\end{aligned}$$

Везде далее, если не оговорено противное зафиксирована аффинная система координат.

Примеры линий второго порядка
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – *мнимый эллипс*. Не имеет ни одной вещественной точки. Его не видно.

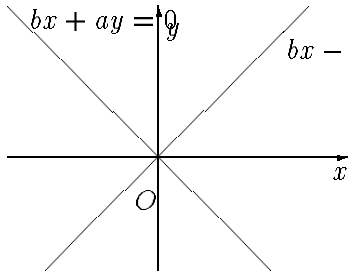
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – *пара мнимых пересекающихся прямых.* Есть только одна вещественная точка – (0,0). Почему назвали эту линию второго порядка парой мнимых пересекающихся прямых? Преобразуем левую часть уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-i^2\frac{y^2}{b^2}=(\frac{x}{a}-i\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+i\frac{y}{b})=0$. Это уравнение равносильно совокупности двух линейных уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0\\ \frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0\end{array}\right.$$

На вещественной плоскости линейное уравнение задает прямую, поэтому данную линию второго порядка логично назвать парой прямых, а так как они имеют общую точку (0,0), то – парой пересекающихся прямых.

4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гипербола

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся прямых.



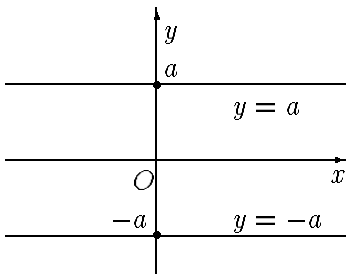
Эта линия распадается на две прямые с уравнениями

$$\begin{array}{l}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{l}bx-ay=0\\ bx+ay=0\end{array}$$

имеющими общую точку (0,0).

6. $y^2=2px$ – парабола.

7. $y^2=a^2$, где a – некоторое вещественное число. Эта линия второго порядка называется *парой параллельных прямых.*



8. $y^2=-a^2$, где a – некоторое вещественное число. Эта линия второго порядка называется *парой мнимых параллельных прямых.* У этой линии нет вещественных точек. Ее также не видно, как и мнимый эллипс.

9. $y^2=0$ – *пара совпавших прямых.* Нарисуйте самостоятельно картинку для этой линии второго порядка.

В конце этой темы мы докажем, что этот список исчерпывает все линии второго порядка.

Начнем мы изучение произвольной линии второго порядка с количества общих точек этой линии и прямой.

Теорема 1.4. (о пересечении с прямой)
Любая прямая плоскости либо содержится в линии второго порядка, либо имеет с ней не более двух общих точек.

Доказательство. Пусть линия второго порядка γ задана общим уравнением

$$\gamma: a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0$$

Рассмотрим произвольную прямую ℓ и зададим ее системой параметрических уравнений

$$\ell:\left\{\begin{array}{l}x=x_0+p_1t\\ y=y_0+p_2t\end{array}\right.$$

Общие точки линии второго порядка γ и прямой ℓ задаются системой уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \end{cases}$$

Количество корней этой системы уравнений равно количеству общих точек γ и ℓ. Будем решать эту систему. Подставим первые два уравнения системы в третье:
$a_{11}(x_0 + p_1 t)^2 + 2a_{12}(x_0 + p_1 t)(y_0 + p_2 t) + a_{22}(y_0 + p_2 t)^2 + 2a_{10}(x_0 + p_1 t) + 2a_{20}(y_0 + p_2 t) + a_{00} = 0.$
Это уравнение относительно t. Раскроем скобки и соберем коэффициенты при t^2, t и свободный член:
при t^2: $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = P$ (мы обозначили этот коэффициент P)
при t: $2\left((a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})p_1 + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})p_2\right) = 2Q$ (мы обозначили этот коэффициент $2Q$.)
свободный член: $a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00} = F(x_0, y_0) = R$ (мы обозначили этот коэффициент R.)
Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0$$

Оно называется *характеристическим уравнением*, так как количество его корней равно количеству корней системы, то есть равно количеству общих точек линии второго порядка и прямой. Выясним, сколько решений может иметь характеристическое уравнение.
1) $P \neq 0$. Тогда характеристическое уравнение является квадратным. Как мы знаем в поле комплексных чисел квадратное уравнение всегда имеет два корня: вещественных, совпавших или комплексно сопряженных. Это зависит от знака дискриминанта $\frac{D}{4} = Q^2 - PR$

а) $D > 0 \Leftrightarrow Q^2 - PR > 0 \Rightarrow$ два вещественных корня t и, значит, существует две общие вещественных точки;

б) $D = 0 \Leftrightarrow Q^2 - PR = 0 \Rightarrow$ два совпавших (вещественных) корня t и, значит, существует две совпавшие общие (вещественных) точки;

в) $D < 0 \Leftrightarrow Q^2 - PR < 0 \Rightarrow$ два мнимых корня t и, значит, существует две общие мнимые точки;
2) $P = 0$, то есть характеристическое уравнение является линейным: $2Qt + R = 0$.

а) $Q = 0$ и $R = 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет бесконечно много решений (подходит любое t) и, значит, вся прямая ℓ содержится в линии γ.

Вопрос 1.1. Почему вся прямая содержится в γ, а не часть прямой (например, интервал или луч? Они тоже содержат бесконечно много точек)?

б) $Q = 0$ и $R \neq 0$. Тогда характеристическое уравнение не имеет корней и, значит, прямая ℓ не имеет общих точек с линией γ.

в) $Q \neq 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет единственное решение и, значит, прямая ℓ пересекает линию γ в единственной вещественной точке (почему в вещественной?). Итак, возможное количество общих точек: 0, 1, 2, вся прямая. □

Задача 1.1. Приведите примеры линий второго порядка и прямых для каждого из случаев, указанных в теореме. Нарисуйте соответствующие картинки.

Задача 1.2. Как отличить по картинке (не проводя вычислений) случаи:
а) две мнимые точки и ни одной общей точки;
б) одна точка и две совпавшие точки?

§10. Асимптотические направления. Асимптоты.

Напомним, что в первом семестре мы вводили понятие направления. Направлением было названо множество всех лучей пространства E^3, любые два из которых сонаправлены. Будем называть определенное таким образом направление *направлением в узком смысле*. Для построения теории линий второго порядка нам понадобится другое определение направления.

Определение 1.14. *Направлением* (или *направлением в широком смысле*) назовем множество всех прямых плоскости, любые две из которых параллельны. Из определения следует, что для задания направления достаточно указать какой-нибудь направляющий вектор прямой, принадлежащий данному направлению.

Определение 1.15. Направление, определяемое вектором $\vec{p} \neq \vec{0}$, называется *асимптотическим* относительно линии второго порядка γ, если для любая прямая $l \| \vec{p}$ имеет с γ не более одной общей точки, либо содержится в γ.

Задача 1.3. Докажите, что если одна прямая данного направления имеет с γ не более одной общей точки, либо содержится в γ, то и любая другая прямая этого направления обладает этим свойством.

По теореме о пересечении с прямой вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$ задает асимптотическое направление тогда и только тогда, когда $P = 0$ (коэффициент при t^2 в характеристическом уравнении равен 0). Это равносильно равенству $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$. Тем самым доказана

Теорема 1.5. (критерий асимптотического направления)
Вектор $\vec{p}(p_1, p_2) \neq \vec{0}$ задает асимптотическое направление тогда и только тогда, когда

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0 \ \square$$

Теорема 1.6. (о количестве асимптотических направлений линии второго порядка)
Пусть дана аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Линия второго порядка γ задана общим уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$. Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Тогда

1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ не существует асимптотических направлений
2. $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ существуют два асимптотических направления
3. $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ существует единственное асимптотическое направление

Доказательство. Пусть линия второго порядка задана общим уравнением и дан ненулевой вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$. По критерию асимптотического направления вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ задает асимптотическое направление тогда и только тогда, когда

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0 \tag{1}$$

Чтобы задать направление, нам достаточно знать лишь отношение координат вектора $\vec{p}$, то есть $\frac{p_2}{p_1}$, так как коллинеарные вектора задают одно и тоже направление. Количество корней этого уравнения равно количеству асимптотических направлений относительно данной линии второго порядка. Рассмотрим все возможные случаи:

1) $a_{22} \neq 0$. Тогда $p_1 \neq 0$ (Действительно, если $p_1 = 0$ и $a_{22} \neq 0$, то $a_{22}p_2^2 = 0$, следовательно, $p_2 = 0$, что противоречит $\vec{p} \neq \vec{0}$.) Разделим (1) на p_1^2 и обозначим $\frac{p_2}{p_1} = k$. Тогда получим квадратное уравнение

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0$$

Выясним, сколько оно может иметь корней. Вычислим его дискриминант $\frac{D}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\Delta$ (в обозначениях условия теоремы).
а) $\Delta < 0 \Leftrightarrow \frac{D}{4} > 0 \Leftrightarrow$ уравнение имеет два вещественных корня $\Leftrightarrow$ существует два асимптотических направления относительно линии второго порядка.
б) $\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{D}{4} < 0 \Leftrightarrow$ уравнение не имеет вещественных корней $\Leftrightarrow$ асимптотических направлений относительно линии второго порядка нет (у нас координатами вектора могут быть только вещественные числа!)
в) $\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow$ уравнение имеет два совпавших корня $\Leftrightarrow$ относительно линии второго порядка существует единственное асимптотическое направление.

2) $a_{22} = 0$. Тогда уравниние (1) примет вид

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 = 0 \ \Leftrightarrow \ p_1(a_{11}p_1 + 2a_{12}p_2) = 0$$

Мы получаем совокупность двух уравнений:
а) $p_1 = 0 \Rightarrow p_2 \neq 0 \Rightarrow$ вектор $\vec{p}(0, 1)$ задает асимптотическое направление.

б) $a_{11}p_1 + 2a_{12}p_2 = 0$, следовательно, $\vec{p}(-2a_{12}, a_{11})$ – вектор асимптотического направления.
Выясним, когда, полученные нами в пунктах а) и б), решения совпадают. Для совпадения асимптотических направлений эти векторы должны быть коллинеарны, то есть их координаты должны быть пропорциональны, то есть $a_{12} = 0$. Итак, получаем одно асимптотическое направление тогда и только тогда, когда $a_{12} = 0$, то есть $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 - 0 = 0$.
Два различных асимптотических направления получим тогда и только тогда, когда $a_{12} \neq 0$, то есть $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 - a_{12}^2 = -a_{12}^2 < 0$. □

Эта теорема позволяет разделить все линии второго порядка на три типа.

Определение 1.16. Линия второго порядка называется линией *эллиптического типа*, если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, линией *гиперболического типа*, если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ и *линией параболического типа*, если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Следствие. Линия эллиптического типа не имеет асимптотических направлений, линия гиперболического типа имеет два асимптотических направления, линия параболического типа имеет единственное асимптотическое направление. □

Пример.
1. Линии эллиптического типа:
– эллипс
– мнимый эллипс
– пара мнимых пересекающихся прямых
2. Линии гиперболического типа:
– гипербола
– пара пересекающихся прямых
3. Линии параболического типа:
– парабола
– пара параллельных прямых
– пара мнимых параллельных прямых
– пара совпавших прямых

Задача 1.4. Докажите это.

Задача 1.5. Для каждого примера нарисуйте картинку и укажите асимптотические направления.

Определение 1.17. *Асимптотой* линии второго порядка называется прямая, которая либо содержится в этой линии второго порядка, либо не имеет с ней ни одной общей точки.

Теорема 1.7. (уравнение асимптоты)
Прямая ℓ, параллельная вектору $\vec{p}(p_1, p_2)$ асимптотического направления, является асимптотой линии второго порядка γ тогда и только тогда, когда для любой точки $M(x, y) \in \ell$ $p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y) = 0$.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $M(x, y)$ на прямой ℓ. По теореме о пересечении прямой и линии второго порядка имеем:
$\ell \subset \gamma$ или $\ell \cap \gamma = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $Q = 0$ (характеристическое уравнение линейно и имеет либо бесконечно много решений, либо не имеет решений, $M(x, y)$ – это точка, которая задает прямую ℓ. В доказательстве теоремы о пересечении прямой такая точка обозначалась $M_0(x_0, y_0)$). Вспомним, что $Q = p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y)$. Итак,

$$\forall M(x, y) \in \ell \Leftrightarrow p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y) = 0 \,\square$$

Из этой теоремы вытекает алгоритм для нахождения асимптот линии второго порядка:
1. Найти все асимптотические направления линии второго порядка.
2. Для каждого асимптотического направления написать уравнение асимптоты (или уравнения асимптот)

Задача 1.6. Выяснить, какие из перечисленных выше линий второго порядка имеют асимптоты и изобразить их на картинке. Запишите уравнения асимптот.

Вопрос 1.2. Верно ли утверждение: для каждого асимптотического направления относительно линии второго порядка существует единственная асимптота?

Вопрос 1.3. Останется ли верной предыдущая теорема, если из ее условия убрать слова "асимптотического направления"?

Задача 1.7. Докажите, что асимптоты гиперболы, введенные в §2 совпадают с асимптотами гиперболы, введенными в данном параграфе.

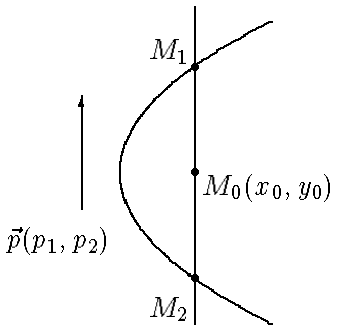
§11. Центр линии второго порядка.

Пусть прямая ℓ пересекает линию второго порядка γ в двух точках (двух вещественных, двух мнимых или двух совпавших). Будем называть эти точки *концами хорды*, определяемой прямой ℓ. *Серединой хорды* с концами в точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ называется точка $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

Лемма 1.2. (о середине хорды)
Пусть дан вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ не асимптотического направления и линия второго порядка γ задается общим уравнением $F(x, y) = 0$. Тогда точка $M(x_0, y_0)$ является серединой хорды, параллельной $\vec{p}$ тогда и только тогда, когда

$$p_1F_1(x_0, y_0) + p_2F_2(x_0, y_0) = 0 \tag{2}$$

Доказательство.



Проведем прямую ℓ через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{p}(p_1, p_2)$. Запишем ее параметрические уравнения:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + p_1t \\ y &= y_0 + p_2t \end{aligned}$$

Пусть прямая ℓ пересекает линию второго порядка γ в точках M_1 и M_2. Обозначим значения параметра t, соответствующие этим точкам через t_1 и t_2. Тогда имеем $M_1(x_0 + p_1t_1, y_0 + p_2t_1)$, $M_2(x_0 + p_1t_2, y_0 + p_2t_2)$. Из этого по определению середины хорды получим $M_0\left(x_0 + \frac{t_1+t_2}{2}p_1, y_0 + \frac{t_1+t_2}{2}p_2\right)$. Так как набор координат точки относительно данной системы координат единственен, то

$$\begin{cases} x_0 = x_0 + \frac{t_1+t_2}{2} \\ y_0 = y_0 + \frac{t_1+t_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0$$

Итак, M_0 – середина хорды $M_1M_2 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0$. Вспомним, что t_1 и t_2 – значения параметра t для точек пересечения линии γ с прямой ℓ, то есть они являются решениями характеристического уравнения $Pt^2 + 2Qt + R = 0$. По теореме Виета получим $t_1 + t_2 = \frac{-2Q}{P}$. Таким образом,
M_0 – середина хорды $M_1M_2 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \Leftrightarrow Q = 0 \Leftrightarrow$ (2). □

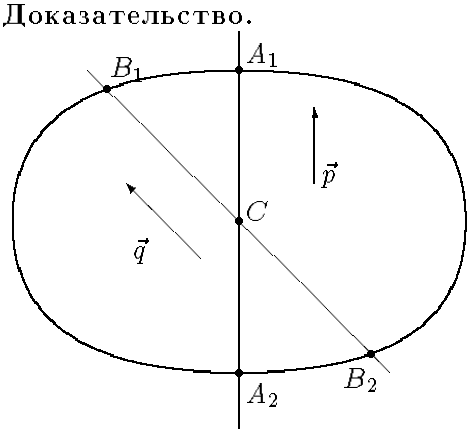
Определение 1.18. Точка C называется *центром* линии второго порядка, если она является ее центром симметрии.

Выясним, сколько центров может иметь линия второго порядка. Для этого докажем

Теорема 1.8. (о центре)
Точка $C(x_0, y_0)$ является центром линии второго порядка γ, заданной общим уравнением $F(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство.



$\Rightarrow$). Пусть точка $C(x_0, y_0)$ – центр линии второго порядка γ. Пусть $\vec{p}(p_1, p_2)$ и $\vec{q}(q_1, q_2)$ – два вектора неасимптотических направлений, причем $\vec{p} \not\parallel \vec{q}$.

Вопрос 1.4. Почему такие вектора всегда существуют?

Проведем через точку C две прямые, параллельные векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Так как вектора имеют неасимптотические направления, то каждая из прямых, параллельных этим векторам, пересекает γ в двух точках. Обозначим их A_1, A_2 и B_1, B_2.

Тогда точка C является как серединой хорды A_1A_2 так и серединой хорды B_1B_2. Тогда по лемме о середине хорды координаты точки C удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} p_1F_1(x_0,y_0)+p_2F_2(x_0,y_0)=0 \\ q_1F_1(x_0,y_0)+q_2F_2(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

Посмотрим на эту систему как на систему двух линейных уравнений с неизвестными $F_1(x_0,y_0)$ и $F_2(x_0,y_0)$. Так как $\vec{p} \not\parallel \vec{q}$, то их координаты не пропорциональны, то есть

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Из алгебры известно, что такая система имеет единственное, нулевое решение, то есть $F_1(x_0,y_0)=0$ и $F_2(x_0,y_0)=0$. Мы получили, что координаты центра удовлетворяют системе (??).
$\Leftarrow$). Пусть координаты точки $C(x_0,y_0)$ удовлетворяют системе (??). Рассмотрим перенос исходной аффинной системы координат в точку C, то есть переход от аффинной системы координат $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ к системе координат $(C,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Имеем $C(x_0,y_0)$, $\vec{e}_1(1,0)$, $\vec{e}_2(0,1)$ в старой системе координат. Откуда получаем формулы перехода к новой системе координат:

$$\begin{aligned} x &= x'+x_0 \\ y &= y'+y_0 \end{aligned}$$

Напомним, что (x,y) – это координаты "бегающей" точки в старой системе координат, а (x',y') – ее же координаты в новой системе координат. Имеем в старой системе координат уравнение линии второго порядка

$$\gamma : a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0$$

Чтобы записать уравнение этой линии в новой системе координат, нужно вместо x и y подставить их выражение через x', y' из формул перехода:

$$\gamma : a_{11}(x'+x_0)^2+2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0)+a_{22}(y'+y_0)^2+2a_{10}(x'+x_0)+2a_{20}(y'+y_0)+a_{00}=0$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые (вспомните введенные выше обозначения)

$$a_{11}(x')^2+2a_{12}x'y'+a_{22}(y')^2+2x'F_1(x_0,y_0)+2y'F_2(x_0,y_0)+F(x_0,y_0)=0$$

По условию имеем $F_1(x_0,y_0)=0$, $F_2(x_0,y_0)=0$. Обозначим $a'_{00}=F(x_0,y_0)$. Тогда в новой системе координат линия γ имеет уравнение

$$\gamma : a_{11}(x')^2+2a_{12}x'y'+a_{22}(y')^2+a'_{00}=0 \tag{4}$$

Рассмотрим произвольную точку $M(x',y') \in \gamma$, то есть ее координаты удовлетворяют уравнению (4). Тогда, симметричная ей относительно точки C, точка M' имеет координаты $(-x',-y')$. Имеем $a_{11}(-x')^2+2a_{12}(-x')(-y')+a_{22}(-y')^2+a'_{00}=a_{11}(x')^2+2a_{12}x'y'+a_{22}(y')^2+a'_{00}=0$. Таким образом, координаты точки M' удовлетворяют уравнению линии γ, то есть $M' \in \gamma$, По определению это означает, что точка C является центром линии γ. $\square$

Итак, мы получаем, что количество центров линии второго порядка γ равно количеству решений системы

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{10}=0 \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{20}=0 \end{cases}$$

Как мы знаем из алгебры эта система

1) имеет единственное решение $\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$.

Итак, линия второго порядка имеет единственный центр $\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, $\Leftrightarrow$ это линия либо эллиптического типа, либо гиперболического типа.

2) имеет бесконечно много решений $\Leftrightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{10}}{a_{20}}$. В этом случае любая точка, коодинаты которой удовлетворяют одному из уравнений системы, удовлетворяют и другому уравнению этой системы, то есть множество решений системы есть прямая с уравнением $a_{11}x+a_{12}y+a_{10}=0$ (или,

что равносильно, $a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0$). Это линейное уравнение. Оно задает прямую. Эта прямая называется *прямой центров* линии второго порядка.
Итак, линия второго порядка имеет прямую центров $\Leftrightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{10}}{a_{20}}$. В частности, из этого следует, что $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, то есть эта линия параболического типа.

3) не имеет решений $\Leftrightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{10}}{a_{20}}$. Итак, линия второго порядка не имеет центров $\Leftrightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{10}}{a_{20}}$. В частности, из этого следует, что $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, то есть эта линия параболического типа.

Итак, мы получили, что линия второго порядка либо имеет единственный центр, либо имеет прямую центров, либо не имеет центров.

Определение 1.19. Линия второго порядка имеющая единственный центр, называется *центральной линией второго порядка*, линия второго порядка, не имеющая центров, либо имеющая прямую центров, называется *нецентральной линией второго порядка.*

Линии второго порядка эллиптического и гиперболического типов – это центральные линии, линии второго порядка параболического типа – это нецентральные линии.

Задача 1.8. Определите количество центров для каждой линии второго порядка из приведенных примеров. Изобразите их на картинке.

Вопрос 1.5. Может ли прямая центров быть асимптотой?

Вопрос 1.6. Существуют ли линии второго порядка, имеющие мнимые центры?

§12. Касательная к линии второго порядка.

Определение 1.20. Если точка M_0, принадлежащая линии второго порядка γ, является ее центром, то такая точка называется *особой точкой* линии второго порядка. Точка линии второго порядка, не являющаяся особой, называется *обыкновенной.*

Задача 1.9. Укажите все особые точки линий второго порядка из примеров.

Определение 1.21. Прямая, проходящая через обыкновенную точку линии второго порядка γ, называется касательной в этой точке, если она целиком содержится в γ, либо пересекает ее в двух совпавших точках.

Вопрос 1.7. Существуют ли касательные в мнимых точках линии второго порядка?

Теорема 1.9. (о касательной)
В каждой обыкновенной точке $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$ существует единственная касательная ℓ к этой линии в этой точке. При этом касательная задается уравнением

$$\ell : F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0$$

Доказательство. Проведем через точку $M_0(x_0, y_0)$ прямую параллельно некоторому вектору $\vec{p}(p_1, p_2)$. Вспомним характеристическое уравнение $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ из теоремы о пересечении линии второго порядка с прямой. Так как по условию $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$, то $R = F(x_0, y_0) = 0$. Разберемся, что будет с остальными коэффициентами в характеристическом уравнении, когда ℓ – касательная. Имеем, ℓ – касательная по определению тогда и только тогда, когда
1) ℓ содержится в γ. В этом случае по теореме о пересечении линии γ с прямой имеем $Q = 0$, $P = 0$.
2) ℓ пересекает γ в двух совпавших точках, то есть $P \neq 0, Q^2 - PR = 0$. Так как $R = 0$, то в этом случае получим $P \neq 0, Q = 0$.
Объединяя оба случая, получим, что
ℓ – касательная $\Leftrightarrow Q = p_1F_1(x_0, y_0) + p_2F_2(x_0, y_0) = 0$.
Откуда мы видим, что вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\vec{p}(-F_2(x_0, y_0), F_1(x_0, y_0))$. Так как по условию $M_0(x_0, y_0)$ обыкновенная точка, то есть не является центром линии второго порядка, то $F_1(x_0, y_0) \neq 0$ или $F_2(x_0, y_0) \neq 0$. Таким образом, $\vec{p} \neq \vec{0}$. Координаты любого другого вектора $\vec{q}$, удовлетворяющие этому уравнению будут пропорциональны координатам $\vec{p}$, то есть $\vec{q}$ задает ту же касательную, что и вектор $\vec{p}$. Итак, мы доказали, что касательная в каждой обыкновенной точке существует и единственна.

Получим уравнение этой касательной. У нас есть точка $M_0(x_0, y_0)$ этой прямой и направляющий вектор $\vec{p}(-F_2(x_0, y_0), F_1(x_0, y_0))$. Тогда уравнение касательной ℓ имеет вид $\frac{x - x_0}{-F_2(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_1(x_0, y_0)}$. Раскрывая пропорцию, получим $xF_1(x_0, y_0) + yF_2(x_0, y_0) - (x_0F_1(x_0, y_0) + y_0F_2(x_0, y_0)) = 0$.

Выразим $x_0F_1(x_0,y_0)+y_0F_2(x_0,y_0)$. Из обозначений, введенных для линии второго порядка (§9) мы знаем, что
$F(x,y)=xF_1(x,y)+yF_2(x,y)+F_0(x,y)$. Подставим $x=x_0$, $y=y_0$ и учтем,что $F(x_0,y_0)=0$. Тогда $x_0F_1(x_0,y_0)+y_0F_2(x_0,y_0)+F_0(x_0,y_0)=0$. Откуда $x_0F_1(x_0,y_0)+y_0F_2(x_0,y_0)=-F_0(x_0,y_0)$. Окончательно, получаем уравнение касательной к линии второго порядка

$$xF_1(x_0,y_0)+yF_2(x_0,y_0)+F_0(x_0,y_0)=0\ \square$$

Задача 1.10. Написать уравнения касательных для всех линий второго порядка из примеров.

Вопрос 1.8. Почему понятие касательной не определяется в особой точке?

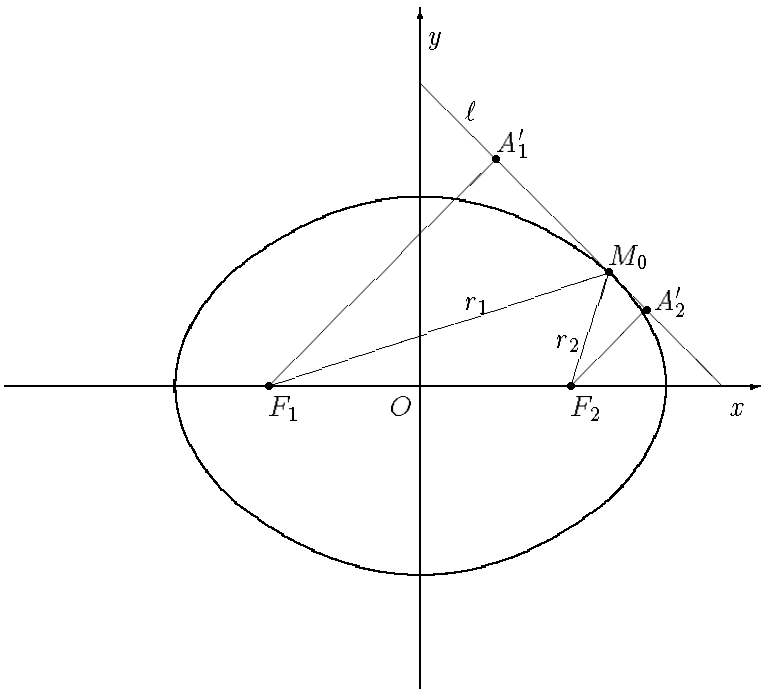
Вопрос 1.9. Может ли касательная иметь асимптотическое направление? Может ли касательная совпадать с линией центров?

Вопрос 1.10. Существует ли прямая, касающаяся обеих ветвей гиперболы?

Свойства касательных эллипса, гиперболы, параболы

1^0. Касательная к эллипсу образует равные углы с прямыми, проходящими через точку касания и фокусы эллипса (то есть с фокальными радиусами).

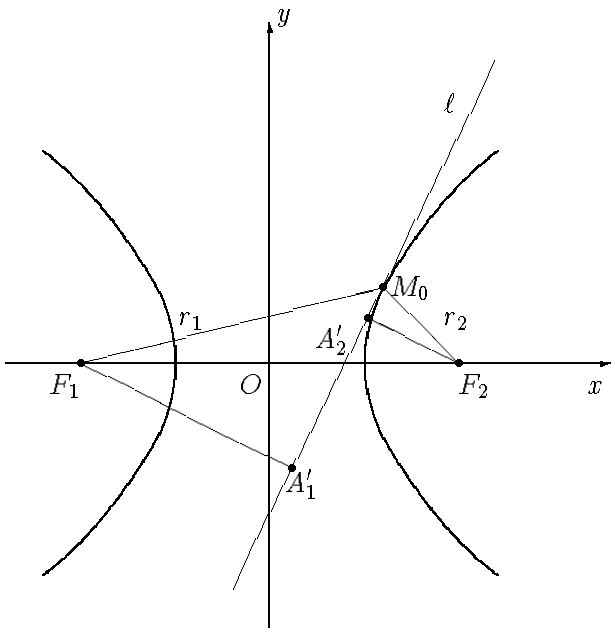
Доказательство. Пусть эллипс задан в канонической системе координат каноническим уравнением $\gamma_e:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0,y_0)$, принадлежащую эллипсу. Так как эллипс особых точек не имеет, то в любой его точке существует касательная. Напишем уравнение касательной в точке $M_0(x_0,y_0)$ эллипса, используя теорему о касательной: $\ell:\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$. Обозначим
$P(M)=\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-1$, где $M(x,y)$ – произвольная точка плоскости.
1) Докажем, что фокусы лежат по одну сторону от касательной ℓ.
Используем теорему о геометрическом смысле трехчлена $Ax+By+C$. Подставим координаты точек $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ в $P(M)$ и вычислим $P(F_1)=-\frac{cx_0}{a^2}-1=-\frac{1}{a}r_1<0$ (вспомним §1 $r_1=F_1M_0=\frac{x_0c}{a}+a$)
$P(F_2)=\frac{cx_0}{a^2}-1=-\frac{1}{a}r_2<0$ (вспомним §1 $r_2=F_2M_0=-\frac{x_0c}{a}+a$)
2) Применим формулу для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости для точки $F_1(-c,0)$ и прямой $\ell:\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-1=0$. Тогда $F_1A_1'=\rho(F_1,\ell)=\frac{\left|\frac{-x_0c}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{r_1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$.
Аналогично получаем $F_2A_2'=\rho(F_2,\ell)=\frac{r_2}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$.
3) Треугольники $\Delta F_1A_1'M_0$ и $\Delta F_2A_2'M_0$ – прямоугольные и так как точки F_1 и F_2 лежат по одну сторону от прямой ℓ, то искомые углы – это острые углы этих треугольников. Имеем $\sin\angle A_1'M_0F_1=\frac{r_1}{r_1a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{r_2}{r_2a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}=\sin\angle A_2'M_0F_2$. Следовательно, $\angle A_1'M_0F_1=\angle A_2'M_0F_2$. $\square$

2^0. Касательная к гиперболе образует равные углы с прямыми, проходящими через точку касания и фокусы гиперболы.

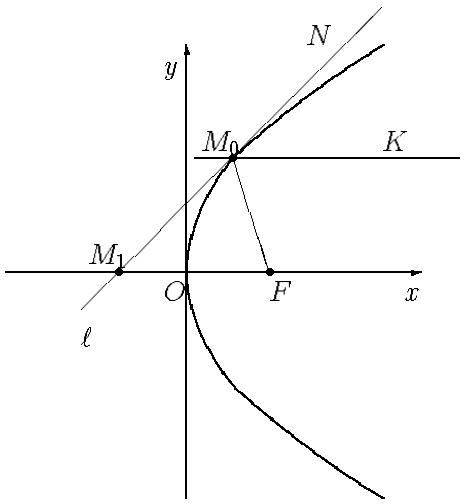
Доказательство. Пусть гипербола задана каноническим уравнением: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Рассмотрим правую ветвь гиперболы ($x > 0$). Для левой ветви доказательство аналогично (проведите самостоятельно).



Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка гиперболы. Так как у гиперболы нет особых точек, то в каждой точке гиперболы существует (притом, единственная) касательная. По теореме о касательной ее уравнение имеет вид $\ell : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$. Обозначим
$P(M) = \frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y - 1$, где $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости.
1) Докажем, что фокусы лежат по разные стороны от касательной ℓ.
Используем теорему о геометрическом смысле трехчлена $Ax + By + C$. Подставим координаты точек $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ в $P(M)$ и вычислим $P(F_1) = -\frac{cx_0}{a^2} - 1 = -\frac{1}{a}r_1 < 0$ (вспомним §2 $r_1 = F_1M_0 = \frac{x_0c}{a} + a$)
$P(F_2) = \frac{cx_0}{a^2} - 1 = \frac{1}{a}r_2 > 0$ (вспомним §1 $r_2 = F_2M_0 = \frac{x_0c}{a} - a$)
2) Применим формулу для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости для точки $F_1(-c, 0)$ и прямой $\ell : \frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0$. Тогда $F_1A_1' = \rho(F_1, \ell) = \frac{\left|\frac{-x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{r_1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$.
Аналогично получаем $F_2A_2' = \rho(F_2, \ell) = \frac{r_2}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$.
3) Треугольники $\Delta F_1A_1'M_0$ и $\Delta F_2A_2'M_0$ – прямоугольные и так как точки F_1 и F_2 лежат по разные стороны от прямой ℓ, то искомые углы – это острые углы этих треугольников. Имеем $\sin \angle A_1'M_0F_1 = \frac{r_1}{r_1a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{r_2}{r_2a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \sin \angle A_2'M_0F_2$. Следовательно, $\angle A_1'M_0F_1 = \angle A_2'M_0F_2$. □

3^0. Касательная к параболе образует равные углы с прямыми, проходящими через точку касания, одна из которых параллельна оси параболы, а другая – проходит через фокус параболы.

Доказательство. Пусть парабола задана каноническим уравнением $y^2 = 2px$.



Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка параболы. Так как у параболы нет особых точек, то в каждой точке параболы существует (притом, единственная) касательная. По теореме о касательной ее уравнение имеет вид $\ell : yy_0 - p(x + x_0) = 0$.
Обозначим точку пересечения касательной ℓ и оси (Ox) через M_1. Найдем координаты этой точки. Пусть $M_1(x, y)$. Тогда ее координаты удовлетворяют как уравнению касательной ℓ так и уравнению оси (Ox), то есть являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} yy_0 - p(x + x_0) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x_0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Итак, $M_1(-x_0, 0)$.
По формуле для вычисления расстояния между точками с учетом того, что $F(\frac{p}{2}, 0)$, вычислим $M_0F = \sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 + \frac{p}{2})^2} = |x_0 + \frac{p}{2}|$. Аналогично получаем $M_1F = |x_0 + \frac{p}{2}|$. Откуда следует, что $M_0F = M_1F$, то есть треугольник ΔM_1FM_0 – равнобедренный. Следовательно, $\angle M_0M_1F = \angle M_1M_0F$. Кроме того, $\angle M_1M_0F = \angle NM_0K$ как соответственные углы при параллельных прямых. Тогда $\angle M_0M_1F = \angle NM_0K$. $\square$