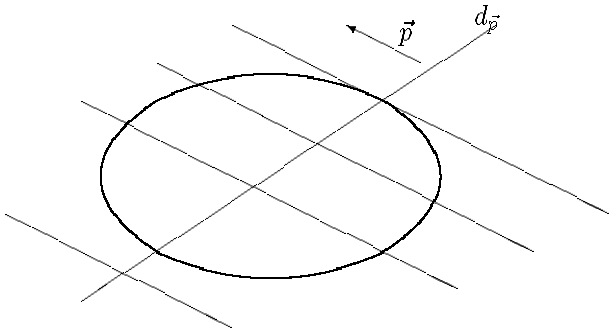
1 Линии второго порядка на плоскости

§13. Диаметры линий второго порядка.



Определение 1.22. *Диаметром* линии второго порядка, сопряженным вектору $\vec{p}$ неасимптотического направления называется множество середин всех хорд, параллельных вектору $\vec{p}$. Обозначается $d_{\vec{p}}$. Хорды, параллельные вектору $\vec{p}$, называются *сопряженными* диаметру $d_{\vec{p}}$.

Теорема 1.10. Диаметр линии второго порядка – это прямая. При этом если $\vec{p}(p_1, p_2)$, то уравнение диаметра, сопряженного вектору $\vec{p}$, имеет вид $d_{\vec{p}} : p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y) \in d_{\vec{p}}$, то есть принадлежащую диаметру, сопряженному вектору $\vec{p}$. По определению диаметра это означает, что точка M является серединой хорды, параллельной вектору $\vec{p}$. По лемме о середине хорды это равносильно тому, что координаты точки M удовлетворяют уравнению $p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y) = 0$. Докажем, что это уравнение задает прямую, то есть является линейным уравнением и коэффициенты при x и y одновременно не равны нулю. Распишем это уравнение подробнее.

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + p_2(a_{12}x + a_{22}y + a_{20}) = 0$$

$$(p_1a_{11} + p_2a_{12})x + (p_1a_{12} + p_2a_{22})y + p_1a_{10} + p_2a_{20} = 0$$

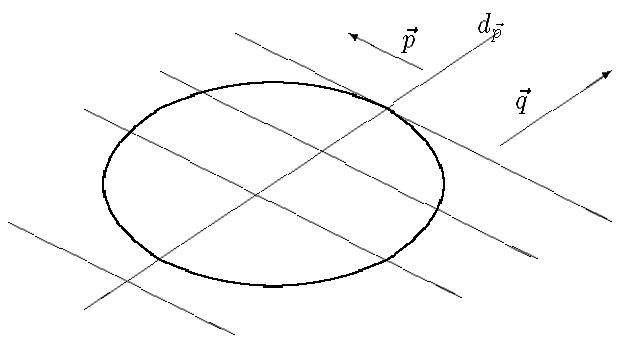
Предположим, что коэффициенты при x и y одновременно равны нулю, то есть

$$\begin{cases} p_1a_{11} + p_2a_{12} = 0 \\ p_1a_{12} + p_2a_{22} = 0 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p_1, а второе – на p_2 и сложим. Тогда получим $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$, то есть вектор $\vec{p}$ имеет асимптотическое направление, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y) = 0$ – линейное уравнение, то есть задает прямую. □

Лемма 1.1. Если точка $C(x_0, y_0)$ – центр линии второго порядка γ, то точка C принадлежит любому диаметру линии второго порядка.

Доказательство. Пусть точка $C(x_0, y_0)$ – центр линии второго порядка γ. По теореме о центре для ее координат имеем $F_1(x_0, y_0) = 0$, $F_2(x_0, y_0) = 0$.
Рассмотрим произвольный диаметр $d_{\vec{p}}$: $p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y) = 0$. Если подставим координаты точки $C(x_0, y_0)$ в это уравнение, то получим верное равенство, то есть C принадлежит диаметру $d_{\vec{p}}$. □



Определение 1.23. Направление хорд и направление, сопряженного им диаметра назовем *сопряженными относительно линии второго порядка направлениями.*
Направления, задаваемые векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряженные относительно линии второго порядка

Исследуем свойства сопряженных направлений. Пусть $\vec{p}$ – ненулевой вектор. Тогда уравнение $p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y) = 0$ задает либо асимптоту (если $\vec{p}$ – асимптотического направления), либо

диаметр (если $\vec{p}$ – неасимптотического направления). Распишем это уравнение подробнее:

$$(p_1a_{11} + p_2a_{12})x + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2)y + p_1a_{10} + p_2a_{20} = 0$$

Рассмотрим направляющий вектор этой прямой $\vec{q}(-(a_{12}p_1 + a_{22}p_2), (p_1a_{11} + p_2a_{12}))$. Обозначим $q_1 = -(a_{12}p_1 + a_{22}p_2)$, $q_2 = p_1a_{11} + p_2a_{12}$.

Рассмотрим множество точек $d_{\vec{q}}$, заданное уравнением

$$q_1F_1(x, y) + q_2F_2(x, y) = 0 \tag{1}$$

Выясним, что за множество точек задаст это уравнение.
Рассмотрим вектор $\vec{c} = -(a_{12}q_1+a_{22}q_2)\vec{e}_1+(a_{11}q_1+a_{12}q_2)\vec{e}_2 = (a_{12}(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) - a_{22}(a_{11}p_1 + a_{12}p_2))\,\vec{e}_1+(a_{11}(-a_{12}p_1 - a_{22}p_2) + a_{12}(a_{11}p_1 + a_{12}p_2))\,\vec{e}_2 = p_1(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\vec{e}_1 + p_2(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\vec{e}_2 = -\Delta\vec{p}$, где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ Рассмотрим следующие случаи:

1) γ – центральная линия второго порядка, то есть $\Delta \neq 0$. Тогда вектор $\vec{c}\|\vec{p}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$. В этом случае уравнение (1) задает прямую, параллельную вектору $\vec{p}$.

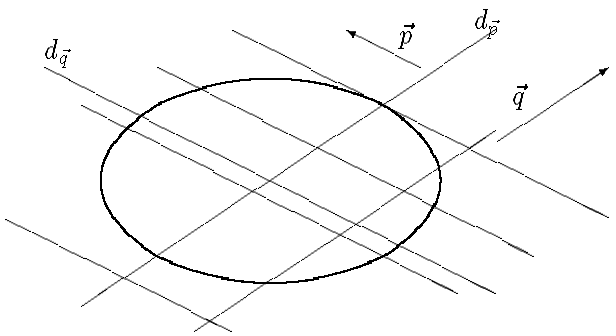
Лемма 1.2. Вектор $\vec{p}$ имеет асимптотическое направление тогда и только тогда, когда вектор $\vec{q}$ имеет асимптотическое направление.

Доказательство. Пусть $\vec{p}$ имеет асимптотическое направление. Тогда по критерию асимптотического направления имеем $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$. Выясним, удовлетворяет ли этому критерию вектор $\vec{q}$: $a_{11}q_1^2 + 2a_{12}q_1q_2 + a_{22}q_2^2 = a_{11}(a_{12}p_1 + a_{22}p_2)^2 + 2a_{12}(a_{12}p_1 + a_{22}p_2)(p_1a_{11} + p_2a_{12}) + a_{22}(p_1a_{11} + p_2a_{12})^2r = a_{11}p_1^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + 2a_{12}p_1p_2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + a_{22}p_2^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2)$. Итак,

$$a_{11}q_1^2 + 2a_{12}q_1q_2 + a_{22}q_2^2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2)$$

Мы видим, что координаты вектора $\vec{q}$ удовлетворяют критерию асимптотического направления тогда и только тогда, когда этому критерию удовлетворяют координаты вектора $\vec{p}$. □

Итак, если $\vec{p}$ асимптотического направления, то уравнение (1) задает асимптоту.



Если $\vec{p}$ неасимптотического направления, то уравнение (1) задает задает диаметр линии второго порядка. При этом диаметр $d_{\vec{q}}$ параллелен вектору $\vec{p}$, а диаметр $d_{\vec{p}}$ параллелен вектору $\vec{q}$. Другими словами, диаметр $d_{\vec{q}}$ состоит из середин всех хорд, параллельных диаметру $d_{\vec{p}}$ и наоборот. Такие диаметры называются *сопряженными диаметрами.*

Из определения сопряженных направлений получаем, что

Предложение 1.2. Сопряженные диаметры имеют сопряженные направления. Сопряженными относительно центральной линии второго порядка направлениями являются направления сопряженных диаметров. □

2) γ – нецентральная линия второго порядка, то есть $\Delta = 0$. Тогда уравнение (1) становится тождеством вида 0=0 и ничего интересного нам не дает. Рассмотрим подробнее уравнение первой прямой

$$p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y) = 0 \tag{2}$$

Мы знаем, что если $\vec{p}$ имеет асимптотическое направление, то это уравнение задает асимптоту.
Выясним, какое направление будет иметь прямая (2) в случае, когда $\vec{p}$ имеет неасимптотическое направление.

Имеем $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$. То есть столбцы определителя пропорциональны, то есть $\exists t \in \mathcal{R} : ta_{11} =$

a_{12}, $ta_{12} = a_{22}$. Тогда направляющий вектор прямой (2) имеет вид $\vec{q} = -(a_{12}p_1 + a_{22}p_2)\vec{e}_1 + (a_{11}p_1 + a_{12}p_2)\vec{e}_2 = -(ta_{11}p_1 + ta_{12}p_2)\vec{e}_1 + (a_{11}p_1 + a_{12}p_2)\vec{e}_2 = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2)(-t\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$. Итак,

$$\vec{q} = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2)(-t\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \| -t\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

Мы получили, что направление прямой (2) не зависит от выбора вектора $\vec{p}$, а зависит только от линии второго порядка (ее коэффициенты определяют коэффициент пропорциональности t). Это направление задается вектором $(-t, 1)$. Так как $t = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$, то направление (2) задается вектором $(-a_{12}, a_{11})$ (или вектором $(-a_{22}, a_{12})$). Оказывается, что этот вектор всегда имеет асимптотическое направление, а именно
$a_{11}(-a_{12})^2 + 2a_{12}(-a_{12})a_{11} + a_{22}a_{11}^2 = a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0$. Итак, получаем

Теорема 1.11. Пусть γ – нецентральная линия второго порядка. Тогда
1) Все диаметры линии второго порядка имеют асимптотическое направление.
2) Асимптотическое направление сопряжено с любым направлением. □

С помощью полученных результатов мы можем определить все множество диаметров линий второго порядка. Для того чтобы результаты сформулировать в более красивой форме, введем следующее определение

Определение 1.24. *Диаметром (в широком смысле)* линии второго порядка назовем либо диаметр, либо асимптоту.
Введение такого определения оправдано тем, что и асимптота и диаметр задаются уравнением одного и того же вида

$$p_1F_1(x, y) + p_2F_2(x, y) = 0$$

и различаются тем, что у асимптоты вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ имеет асимптотическое направление, а у диаметра – неасимптотическое.

Теорема 1.12. (о диаметрах (в широком смысле) линий второго порядка)
Множество всех диаметров (в широком смысле) центральной линии второго порядка есть множество всех прямых, проходящих через центр линии второго порядка.

Доказательство. 1) Согласно лемме 1, любой диаметр линии второго порядка проходит через ее центр.
2) Обратно, докажем, что любая прямая, проходящая через центр линии второго порядка является диаметром. Пусть ℓ – произвольная прямая, проходщая через центр, $\vec{\ell}$ – ее направляющий вектор. Если ℓ – асимптота, то принадлежит множеству диаметров (в широком смысле). Если ℓ не является асимптотой, то направлению $\vec{\ell}$ сопряжен диаметр $d_{\vec{\ell}}$. Как мы доказали выше его направление неасимптотическое и этому направлению будет сопряжет диаметр d, параллельный вектору $\vec{\ell}$. Как и все диаметры, он пройдет через центр линии второго порядка. Тогда имеем: через центр центральной линии второго порядка (он единственен) проходят две прямые (d и ℓ), параллельные вектору $\vec{\ell}$. Значит, они совпадают и прямая ℓ является диаметром. □

Теорема 1.13. (о диаметрах (в широком смысле) нецентральных линий второго порядка)
Множество всех диаметров (в широком смысле) нецентральной линии второго порядка есть множество всех прямых, имеющих асимптотическое направление относительно этой линии. При этом если линия второго порядка имеет прямую центров, то она имеет единственный диаметр (в узком смысле), он совпадает с прямой центров.

Доказательство. Мы уже доказали, что любой диаметр нецентральной линии второго порядка имеет асимптотическое направление.
Докажем обратное, то есть, через любую точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости проходит диаметр данной линии второго порядка. Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости. Подберем вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ так, чтобы сопряженный ему диаметр проходил через точку $M_0(x_0, y_0)$.
а) Точка $M_0(x_0, y_0)$ не является центром линии второго порядка. Тогда вектор $\vec{p}(-F_2(x_0, y_0), F_1(x_0, y_0))$ не нулевой и задает прямую $-F_2(x_0, y_0)F_1(x, y)+F_1(x_0, y_0)F_2(x, y) = 0$. Этой прямой, очевидно, принадлежит точка $M_0(x_0, y_0)$ и она является асимптотой, если $\vec{p}$ асимптотического направления и диаметром в противном случае, то есть диаметром в широком смысле.
б) Точка $M_0(x_0, y_0)$ является центром линии второго порядка. Тогда эта линия имеет прямую центров ℓ, задаваемую уравнением $a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0$ (или $a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0$). Это уравнение перепишем в виде $1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + 0(a_{12}x + a_{22}y + a_{20}) = 0$, то есть $1F_1(x, y) + 0F_2(x, y) = 0$. По виду этого уравнения опять заключаем, что ℓ является асимптотой или диаметром, то есть диаметром в широком смысле. □

Вопрос 1.11. Может ли асимптота быть диаметром линии второго порядка?

Задача 1.11. Для всех примеров линий второго порядка нарисуйте множество диаметров (в широком смысле). Какие из них являются диаметрами, какие – асимптотами?

Напомним, что *сопряженными* относительно линии второго порядка направлениями мы назвали направление диаметра линии и направление сопряженных с ним хорд. Кроме того, положим по определению, что *асимптотическое направление относительно линии второго порядка сопряжено самому себе*. Получим аналитический критерий сопряженности направлений.

Теорема 1.14. (критерий сопряженности направлений)
Пусть $\vec{p}(p_1, p_2)$, $\vec{q}(q_1, q_2)$. Тогда направления, задаваемые этими векторами, сопряжены относительно линии второго порядка $\gamma : F(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0$$

Доказательство. 1) Пусть $\vec{p}$ асимптотического направления. По критерию асимптотического направления с учетом того, что асимптотическое направление сопряжено самому себе, получим

$$a_{11}p_1p_1 + a_{12}p_1p_2 + a_{12}p_2p_1 + a_{22}p_2p_2 = 0$$

2) Пусть вектор $\vec{p}$ неасимптотического направления. По определению сопряженных направлений, направлению вектора $\vec{p}$ будет сопряжено направление направляющего вектора диаметра $d_{\vec{p}}$. Выше мы вычислили координаты этого вектора $\vec{d}_{\vec{p}}\,(-(a_{12}p_1 + a_{22}p_2), a_{11}p_1 + a_{12}p_2)$. Таким образом, векторы $\vec{p}(p_1, p_2)$, $\vec{q}(q_1, q_2)$ задают сопряженные направления тогда и только тогда, когда векторы $\vec{q}(q_1, q_2)$ и $\vec{d}_{\vec{p}}\,(-(a_{12}p_1 + a_{22}p_2), a_{11}p_1 + a_{12}p_2)$ коллинеарны. По критерию коллинеарности векторов получим

$$\vec{q} \| \vec{d}_{\vec{p}} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} q_1 & -(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) \\ q_2 & a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0, \ \square$$

Следствие. Отношение сопряженности на множестве направлений симметрично, то есть если направление, задаваемое вектором $\vec{p}$ сопряжено направлению, задаваемому вектором $\vec{q}$, то направление, задаваемое вектором $\vec{q}$ сопряжено направлению, задаваемому вектором $\vec{p}$. $\square$

Замечание. Допуская вольность речи, будем говорить, что относительно линии второго порядка сопряжены векторы, подразумевая под этим сопряженность направлений, задаваемых этими векторами.

Задача 1.12. Дана линия второго порядка, какой-нибудь ее диаметр и точка M, лежащая на диаметре. Постройте прямую, содержащую хорду, для которой M является серединой.

Задача 1.13. Дана центральная линия второго порядка и произвольная точка на ней. С помощью циркуля и линейки постройте касательную к линии второго порядка в этой точке.

Задача 1.14. Дана парабола своим очертанием. С помощью циркуля и линейки построить:
1) какую-нибудь прямую асимптотического направления;
2) ось симметрии параболы и вершину параболы;
3) фокус параболы;
4) касательную в произвольной точке параболы;
5) дан произвольный диаметр параболы и точка на нем. С помощью циркуля и линейки построить хорду, для которой эта точка будет серединой.

§14. Главные направления и главные диаметры линий второго порядка.

Везде в этом параграфе система координат прямоугольная декартова.

Определение 1.25. Направление называется *главным* относительно линии второго порядка, если оно сопряжено перпендикулярному направлению.

Получим уравнение для нахождения главных направлений.
Пусть вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ задает главное направление. Тогда вектор $\vec{q}(-p_2, p_1)$, перпендикулярный вектору $\vec{p}(p_1, p_2)$, должен быть ему сопряжен, то есть $a_{11}p_1(-p_2) + a_{12}p_1p_1 + a_{12}p_2(-p_2) + a_{22}p_2p_1 = 0$.

Итак, вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ задает главное направление тогда и только тогда, когда

$$a_{12}\left(p_1^2 - p_2^2\right) + (a_{22} - a_{11})p_1p_2 = 0 \qquad (3)$$

Выясним, сколько главных направлений может иметь линия второго порядка. Количество решений этого уравнения равно количеству главных направлений относительно линии второго порядка.
1) Пусть $a_{12} \neq 0$. Тогда $p_1 \neq 0$ (если $p_1 = 0$, то из уравнения (3) получим, что $p_2 = 0$). Разделим уравнение (3) на p_1^2 и обозначим $\frac{p_2}{p_1} = k$. Имеем квадратное уравнение

$$a_{12}k^2 - (a_{22} - a_{11})k - a_{12} = 0$$

Вычислим дискриминант этого уравнения $D = (a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2 > 0$, то есть это квадратное уравнение всегда имеет два вещественных корня. Каждый из этих корней определяет главное напраление, то есть в этом случае существует два главных направления относительно линии второго порядка.

2) Пусть $a_{12} = 0$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 = 0$$

а) если $a_{22} = a_{11}$, то это уравнение имеет бесконечно много решений (любая пара чисел (p_1, p_2) является решением этого уравнения), следовательно, любое направление будет главным относительно такой линии второго порядка. Выясним, что это за линия второго порядка. Ее уравнение в ПДСК имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

Разделим на a_{11}

$$x^2 + y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

В первом семестре мы видели, что это уравнение задает обобщенную окружность.
б)если $a_{22} \neq a_{11}$, то это уравнение имеет два решения: $\vec{p}(1, 0)$ и $\vec{q}(0, 1)$, то есть линия второго порядка имеет два главных направления, задаваемых этими векторами.

Собирая все эти случаи вместе, получим

Теорема 1.15. (о главных направлениях)
Относительно линии второго порядка, не являющейся обобщенной окружностью, существует два и только два главных направления. Относительно обобщенной окружности любое направление является главным. □

Определение 1.26. Диаметр, перпендикулярный сопряженным хордам, называется *главным диаметром.*

Выясним, существуют ли главные диаметры у линий второго порядка?
Заметим, что направление главного диаметра и направление, сопряженных ему хорд, являются главными направлениями по определению главного диаметра и определению сопряженных направлений. Следовательно, чтобы найти главные диаметры, нам необходимо найти главные направления. Тогда каждому неасимптотическом главному направлению будет сопряжен главный диаметр. Рассмотрим возможные случаи:
1) γ – обобщенная окружность. Как мы видели выше, любое направление относительно обобщенной окружности является главным. Кроме того, обобщенная окружность – линия эллиптического типа (докажите!) и, следовательно, асимптотических направлений не имеет. Значит, каждому главному направлению сопряжен главный диаметр. Итак, обобщенная окружность имеет бесконечно много диаметров. Кроме того, любая прямая, проходящая через центр обобщенной окружности является главным диаметром (вспомните теорему о диаметрах для центральной линии второго порядка).
2) γ – центральная линия, отличная от обобщенной окружности. Такая линия имеет два главных направления (теорема о главных направлениях). Так как у центральной линии асимптотическое направление сопряжено только себе (и никак не может быть сопряжено перпендикулярному направлению), то среди найденных главных направлений не будет асимптотических. Тогда каждому из двух главных направлений будет сопряжен главный диаметр. Итак, центральная линия второго порядка, отличная от обобщенной окружности имеет два и только два главных диаметра.
3) γ – нецентральная линия. По теореме о главных направлениях она имеет два главных направления. Одно из них асимптотическое. Действительно, как мы доказали у нецентральных линий асимптотическое направление сопряжено с любым направлением, в частности, оно сопряжено с перпендикулярным направлением, следовательно, по определению является главным. Таким образом, из двух главных направлений только одно неасимптотическое и ему сопряжен главный диаметр. Итак, нецентральная линия второго порядка имеет единственный главный диаметр.
Собираем результаты.

Теорема 1.16. (о главных диаметрах)
1) Для обобщенной окружности множество всех главных диаметрах есть множество всех прямых, проходящих через центр обобщенной окружности;
2) Для центральных линий второго порядка, отличных от обобщенной окружности существует два и только два главных диаметра;
3) Для нецентральной линии второго порядка существует единственный главный диаметр. □

Задача 1.15. Найдите и изобразите для всех примеров линий второго порядка главные диаметры.

Задача 1.16. Дан эллипс (гипербола) своим очертанием. С помощью циркуля и линейки постройте его вершины и главные диаметры.

Задача 1.17. Мнимый эллипс задан своим каноническим уравнением относительно канонической системы координат (нарисована прямоугольная декартова система координат). С помощью циркуля и линейки постройте:
1) укажите центр мнимого эллипса;
2) дан какой-либо диаметр мнимого эллипса (изобразите его) и постройте сопряженный диаметр;
3) дан диаметр мнимого эллипса (нарисуйте его) и возьмите какую-нибудь точку на этом диаметре. Постройте хорду, серединой которой является эта точка.
Ответьте на те же вопросы для пары мнимых пересекающихся прямых.

§15. Формулы перехода от прямоугольной декартовой системы координат к прямоугольной декартовой.

Наша последняя задача в теме "Линии второго порядка" – доказать, что линий второго порядка существует всего лишь 9 типов (это линии, перечисленные в примерах линий второго порядка). К решению этой задачи мы подойдем следующим образом: возьмем произвольное общее уравнение линии второго порядка относительно прямоугольной декартовой системы координат и будем "перемещать" эту систему координат так, чтобы вид уравнении линии второго порядка был как можно проще. Таким образом, нам необходимы формулы перехода от одной ПДСК к другой.

Прямоугольная декартова система координат является частным случаем аффинной системы координат, следовательно, формулы перехода для нее будут иметь тот же вид, но с рядом дополнительных условий.

Пусть $I = (O, \vec{i}, \vec{j})$ – "старая" прямоугольная декартова система координат, $II = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ – "новая" прямоугольная декартова система координат. Пусть $O'(x_0, y_0)$, $\vec{i}'(c_{11}, c_{21})$, $\vec{j}'(c_{12}, c_{22})$ в "старой" системе координат. Тогда формулы перехода имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0 \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{aligned}$$

где (x, y) – координаты произвольной точки M в старой системе координат, (x', y') – координаты той же точки M в новой системе координат. Так как числа (c_{11}, c_{21}), (c_{12}, c_{22}) являются координатами единичных взаимно перпендикулярных векторов относительно ортонормированного базиса старой прямоугольной декартовой системы координат, то, используя формулы для вычисления длины вектора и скалярного произведения, получим соотношения

$$\begin{array}{ll} 1)\ c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 & 3)\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0 \\ 2)\ c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1 & \end{array}$$

Более того, если ввести ориентацию плоскости, коэффициенты c_{ij}, $i, j = 1, 2$ можно выразить через ориентированный угол $\alpha = \widehat{(\vec{i}, \vec{i}')}$.

Лемма 1.3. Пусть $(O, \vec{i}, \vec{j})$ – правый ортонормированный базис, $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$. Тогда
1) $a_1 = |\vec{a}| \cos \widehat{(\vec{i}, \vec{a})}$, $a_2 = |\vec{a}| \sin \widehat{(\vec{i}, \vec{a})}$.

$$2) \quad \cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \sin\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Доказательство. 1) Напомним, что ориентированным (направленным углом) между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = \begin{cases} \angle(\vec{a},\vec{b}),\ (\vec{a},\vec{b})\text{– правый} \\ -\angle(\vec{a},\vec{b}),\ (\vec{a},\vec{b})\text{– левый} \\ 0,\ \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b} \\ \pi,\ \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b} \end{cases}$$

Очевидно, формулы верны, когда $\vec{a}\|\vec{i}$. Пусть $\vec{a}\not\|\vec{i}$. Как мы знаем по теореме о геометрическом смысле координат вектора (первый семестр) $a_1 = |\vec{a}|\cos\angle(\vec{i},\vec{a})$, $a_2 = |\vec{a}|\cos\angle(\vec{j},\vec{a})$. С учетом этого вычислим

$$|\vec{a}|\cos\widehat{(\vec{i},\vec{a})} = \begin{cases} |\vec{a}|\cos\angle(\vec{i},\vec{a}),\ (\vec{i},\vec{a})\text{– правый} \\ |\vec{a}|\cos(-\angle(\vec{i},\vec{a})) = |\vec{a}|\cos\angle(\vec{i},\vec{a}),\ (\vec{i},\vec{a})\text{– левый} \end{cases} = |\vec{a}|\cos\angle(\vec{i},\vec{a}) = a_1$$

Аналогично получаем $a_2 = |\vec{a}|\cos\angle(\vec{j},\vec{a}) = |\vec{a}|\cos\widehat{(\vec{j},\vec{a})}$.
Применим свойства ориентированного угла и учтем, что базис $(\vec{i},\vec{j})$ – правый, следовательно, базис $(\vec{j},\vec{i})$ – левый
$|\vec{a}|\cos\widehat{(\vec{j},\vec{a})} = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{(\vec{j},\vec{i})} + \widehat{(\vec{i},\vec{a})}\right) = |\vec{a}|\cos(-\frac{\pi}{2} + \widehat{(\vec{i},\vec{a})}) = |\vec{a}|\sin\widehat{(\vec{i},\vec{a})})$.

2) По определению скалярного произведения имеем
$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$. Так как в ортонормированном базисе $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$, получим требуемую формулу.
Далее, $\sin\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = \sin(\widehat{(\vec{a},\vec{i})} + \widehat{(\vec{i},\vec{b})} = \sin(-\widehat{(\vec{i},\vec{a})} + \widehat{(\vec{i},\vec{b})} =$

$$= -\sin\widehat{(\vec{i},\vec{a})}\cos\widehat{(\vec{i},\vec{b})} + \sin\widehat{(\vec{i},\vec{b})}\cos\widehat{(\vec{i},\vec{a})} = -\frac{a_2}{|\vec{a}|}\frac{b_1}{|\vec{b}|} + \frac{a_1}{|\vec{a}|}\frac{b_2}{|\vec{b}|} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \square$$

Выразим коэффициенты c_{ij}, $i,j = 1,2$ через ориентированный угол $\alpha = \widehat{(\vec{i},\vec{i}')}$.
1) Пусть I – правая и II – правая.
$c_{11} = |\vec{i}'|\cos\widehat{(\vec{i},\vec{i}')} = \cos\alpha$
$c_{21} = |\vec{i}'|\sin\widehat{(\vec{i},\vec{i}')} = \sin\alpha$
$c_{12} = |\vec{j}'|\cos\widehat{(\vec{i},\vec{j}')} = \cos(\widehat{(\vec{i},\vec{i}')} + \widehat{(\vec{i}',\vec{j}')}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$
$c_{22} = |\vec{j}'|\sin\widehat{(\vec{i},\vec{j}')} = \sin(\widehat{(\vec{i},\vec{i}')} + \widehat{(\vec{i}',\vec{j}')}) = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$
Итак, формулы перехода от правой ПДСК к правой имеют вид

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

2) Пусть I – правая и II – левая.
Доказательство аналогично п.1). Проведите самостоятельно. Получим

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

3), 4) Пусть I – левая и II – правая (левая).
Для доказательства этих пунктов нужно доказать аналог леммы 1 и далее провести вычисления аналогичные п.1),2). (Докажите самостоятельно).

Полученные результаты можно объединить следующим образом (I – правая):

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

I и II одинаково ориентированы I и II противоположно ориентированы

§16. Понятие о приведении уравнения линии второго порядка к каноническому виду и классификация линий второго порядка.

Пусть плоскость ориентирована. Пусть относительно ПДСК $I = (O, \vec{i}, \vec{j})$ линия второго порядка γ задана общим уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$.

Выясним, как изменится уравнение линии второго порядка γ, если мы повернем систему координат I вокруг точки O на угол α, то есть перейдем к системе координат $II = (O, \vec{i'}, \vec{j'})$ той же ориентации, у которой $(\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = \alpha$. Так как $O(0,0)_I$, получим формулы перехода

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

Подставим эти формулы в уравнение линии γ, получим, что относительно второй системы координат II она задастся уравнением

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}(x')(y') + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{10}(x') + 2a'_{20}(y') + a'_{00} = 0,$$

где (x', y') – координаты точек в системе координат II,
$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha$
$a'_{12} = (a_{22} - a_{11})\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$
$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\cos^2\alpha$
$a'_{10} = a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha$
$a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha$
$a'_{00} = a_{00}$. (Проведите подробные вычисления самостоятельно).
Будем выбирать систему координат II (то есть искать угол α) так, чтобы в новом уравнении линии второго порядка коэффициент $a'_{12} = 0$, то есть

$$-(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\sin\alpha + (a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha & \cos\alpha \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Как мы знаем, определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы пропорциональны, то есть

$$\exists\lambda \in \mathcal{R} \setminus \{0\} : \begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda\cos\alpha \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0 \\ a_{12}\cos\alpha + (a_{22} - \lambda)\sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Нам нужно, чтобы эта система имела ненулевое решение $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ (это тот самый угол α, на который нам нужно повернуть первую систему координат, чтобы убрать из уравнения линии второго порядка коэффициент перед xy). Как мы знаем из алгебры система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

Это уравнение назовем *характеристическим уравнением.*

Задача 1.18. Докажите, что коэффициенты характеристического уравнения не зависят от выбора системы координат, то есть $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$, $a'_{11}a'_{22} - (a'_{12})^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Вопрос 1.12. Зачем нам это нужно?

Найдем дискриминант этого уравнения: $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$ (так как $a_{12} \neq 0$), следовательно, всегда существуют два корня λ_1 и λ_2. Если подставить эти значения в уравнения (4), то получим два значения для искомого угла α. Обозначим их α_1 и α_2. Рассмотрим первый из этих углов – α_1. Из формул перехода от I к II получаем, что $\vec{i'}(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1)$, $\vec{j'}(-\sin\alpha_1, \cos\alpha_1)$.

Задача 1.19. Докажите, что найденные векторы $\vec{i'}$ и $\vec{j'}$ задают главные направления относительно линии второго порядка γ.

Вопрос 1.13. А что будет, если взять второй из полученных углов α_2. Как полученная с углом α_2 будет располагаться относительно системы координат II, построенной с помощью угла α_1?

Итак, чтобы обнулить коэффициент при xy в уравнении линии второго порядка, нужно повернуть систему координат так, чтобы оси были направлены по главным направлениям.

Так как коэффициенты характенистического уравнения не зависят от выбора системы координат, то в системе координат II оно будет иметь те же корни λ_1 и λ_2, которые мы нашли выше, а вид этого уравнения будет следующий

$$\lambda^2 - (a'_{11} + a'_{22})\lambda + a'_{11}a'_{22} = 0$$

По теореме Виета получим, что $\lambda_1 = a'_{11}$, $\lambda_2 = a'_{22}$.

Итак, в системе координат $II = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ линия второго порядка γ имеет уравнение

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0 \tag{5}$$

Будем упрощать это уравнение дальше, а именно, будем переносить начало системы координат (не поворачивая векторы) так, чтобы избавиться от коэффициентов при x' и y'. Рассмотрим следующие случаи:

1) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то есть $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то есть γ – центральная.

Выделим в уравнении (5) полные квадраты.

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + a_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = 0$$

Введем обозначения

$$x'' = x' + \tfrac{a'_{10}}{\lambda_1} \quad y'' = y' + \tfrac{a'_{20}}{\lambda_2} \quad a''_{00} = a_{00} - \tfrac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \tfrac{(a'_{20})^2}{\lambda_2}$$

Тогда формулы

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a'_{10}}{\lambda_1} \\ y' = y'' - \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$$

являются формулами перехода к системе координат $III = (O', \vec{i}', \vec{j}')$, где $O'\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}, -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)_{II}$, (x'', y'') – координаты точек в III системе координат. В этой системе координат уравнение γ приобретает наиболее простой вид:

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + a''_{00} = 0 \tag{6}$$

Задача 1.20. Докажите, что точка O' является центром линии второго порядка γ, то есть мы перенесли начало координат в центр линии (вспомните, какая система уравнений задает центр и сообразите, из какого уравнения брать коэффициенты).

2) $\lambda_1 = 0$ ($\lambda_2 \neq 0$) и $a'_{10} \neq 0$. Тогда $\Delta = 0$, то есть γ – нецентральная.

Выделим полный квадрат у переменной y'.

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_{10}\left(x' - \frac{(a'_{20})^2}{2\lambda_2 a'_{10}} + \frac{a'_{00}}{2a'_{10}}\right) = 0$$

Введем обозначения

$$y'' = y' + \tfrac{a'_{20}}{\lambda_2} \quad x'' = x' - \tfrac{(a'_{20})^2}{2\lambda_2 a'_{10}} + \tfrac{a_{00}}{2a'_{10}}$$

Тогда формулы

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{(a'_{20})^2}{2\lambda_2 a'_{10}} - \frac{a'_{00}}{2a'_{10}} \\ y' = y'' - \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$$

являются формулами перехода к системе координат $III = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ с координатами (x'', y''), в которой линия второго порядка имеет уравнение

$$\lambda_2(y'')^2 + 2a'_{10}x'' = 0 \tag{7}$$

Вопрос 1.14. Чем является точка O' для линии второго порядка γ?

3) $\lambda_1 = 0$ ($\lambda_2 \neq 0$) и $a'_{10} = 0$. Тогда $\Delta = 0$, то есть γ – нецентральная.
Опять выделим полный квадрат для y':

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + a_{00} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = 0$$

Введем обозначения $\begin{array}{l} x'' = x' \\ y'' = y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \\ a''_{00} = a_{00} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} \end{array}$. Тогда формулы

$$\begin{array}{l} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{array}$$

являются формулами перехода к системе координат $III = (O', \vec{i}', \vec{j}')$, в которой γ имеет уравнение

$$\lambda_2 (y'')^2 + a''_{00} = 0 \tag{8}$$

Итак, для любой линии второго порядка можно выбрать систему координат так, чтобы уравнение этой линии принимало один из видов (6) – (8). Используя эти уравнения можно провести классификацию линий второго порядка.

1. Выясним, какие линии может задавать уравнение (6).
1) $a''_{00} \neq 0$. Тогда разделим обе части этого уравнения на a''_{00}.

$$\frac{(x'')^2}{\frac{-a''_{00}}{\lambda_1}} + \frac{(y'')^2}{\frac{-a''_{00}}{\lambda_2}} = 1$$

2) $a''_{00} = 0$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$\frac{(x'')^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{(y'')^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0$$

В зависимости от знаков λ_1, λ_2 и a''_{00} возможны следующие случаи

	λ_1	λ_2	a''_{00}	Канонич. уравнение	Название
1.	$+$ $-$	$+$ $-$	$-$ $+$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Эллипс
2.	$+$ $-$	$+$ $-$	$+$ $-$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Мнимый эллипс
3.	$+$ $-$	$-$ $+$	$\neq 0$ $\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	Гипербола
4.	$+$ $-$	$+$ $-$	0 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара мнимых пересекающихся прямых
5.	$+$ $-$	$-$ $+$	0 0	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара пересекающихся прямых

2. Выясним, какую линию задает уравнение (7).
Так как $\lambda_2 \neq 0$, то на него можно разделить.

$$(y'')^2 = 2 \left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_2} \right) x''$$

1) a'_{10} и λ_2 имеют разные знаки. Тогда обозначим положительное число $-\frac{a'_{10}}{\lambda_2} = p$ и получим уравнение вида $y^2 = 2px$. Это парабола.
2) a'_{10} и λ_2 имеют одинаковые знаки. Тогда обозначим положительное число $\frac{a'_{10}}{\lambda_2} = p$ и получим уравнение вида $y^2 = -2px$. Это тоже парабола, но ее ветви расположены вдоль отрицательного луча оси (Ox).

3.Выясним, какую линию задает уравнение (8).

Разделим обе части уравнения на λ_2: $(y'')^2 + \frac{a''_{00}}{\lambda_2} = 0$.

1) $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$, то обозначим это число a^2 и получим уравнение вида $y^2 + a^2 = 0$. Это пара мнимых параллельных прямых.

2) $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} < 0$, то обозначим число $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = a^2$ и получим уравнение вида $y^2 - a^2 = 0$. Это пара параллельных прямых.

3) $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = 0$, то уравнение примет вид $y^2 = 0$. Это пара совпавших прямых.

Итак, мы получили полную классификацию линий второго порядка: 5 центральных линий и 4 нецентральные.

§17. Определение вида линии второго порядка без приведения ее уравнения к каноническому виду.

Можно по общему уравнению линии второго порядка определить ее вид, не приводя ее уравнения к каноническому виду.

Пусть линия второго порядка γ задана общим уравнением $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00} = 0$. Найдем $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ и найдем координаты центра $C(x_0, y_0)$ из системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases}$$

1. $\Delta > 0$ и цетр C принадлежит линии γ. Тогда γ – **пара мнимых пересекающихся прямых**.

2.$\Delta > 0$ и цетр C не принадлежит линии γ. Тогда γ – эллипс или мнимый эллипс. Чтобы отличить эллипс от мнимого эллипса, нужно через точку C – его центр провести любую прямую (удобно брать прямую параллельную одной из осей) и найти общие точки этой прямой и линии γ. Если точки мнимые, то γ – **мнимый эллипс**. Если вещественные, то γ – **эллипс**.

3. $\Delta < 0$ и цетр C принадлежит линии γ. Тогда γ – **пара пересекающихся прямых**.

4. $\Delta < 0$ и цетр C не принадлежит линии γ. Тогда γ – **гипербола.**

5. Центров нет. Тогда γ – **парабола**.

6. $\Delta = 0$ и центры принадлежат γ (достаточно проверить для одного центра). Тогда γ – **пара совпавших прямых**.

7. $\Delta = 0$ и центры не принадлежат γ (достаточно проверить для одного центра). Это либо пара параллельных прямых, либо пара мнимых параллельных прямых. Чтобы отличить пару параллельных прямых от пары мнимых параллельных прямых, нужно провести через произвольную точку плоскости (удобно взять точку (0,0)) прямую любого неасимптотического направления. Если эта прямая пересечет линию второго порядка в двух мнимых точках, то γ – **пара мнимых пересекающихся прямых**. Если эта прямая пересечет γ в двух вещественных точках, то это γ – **пара параллельных прямых**.

Пример.

Рассмотрим линию второго порядка $\gamma : 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 16x + 16y + 8 = 0$. Определим вид линии, не приводя ее уравнение к каноническому виду.

1. Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 9 > 0$, то есть это линия эллиптического типа.

2. Найдем ее центр.

$$\begin{cases} 5x + 3y + 8 = 0 \\ 3x + 5y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x + 5y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Итак, центр $C(-1,-1)$. Проверим, принадлежит ли он линии γ: $5 + 6 + 5 - 16 - 16 + 8 \neq 0$, то есть центр не принадлежит линии γ, следовательно, γ либо эллипс, либо мнимый эллипс.

3. Чтобы выяснить, эллипсом или мнимым эллипсом является γ, проведем через точку $C(-1,-1)$ прямую, параллельную оси (Ox): $y = -1$ и найдем общие точки этой прямой и линии γ.

$$\begin{cases} y = -1 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 16x + 16y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 5x^2 + 10x - 3 = 0 \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения положителен, то есть система имеет два вещественных корня, то есть прямая пересекает γ в двух вещественных точках, то есть γ – эллипс.

Задача 1.21. Измените уравнение этой линии так, чтобы она превратилась в мнимый эллипс.

Вопрос 1.15. Изменится ли тип линии второго порядка, если изменить свободный член в ее уравнении? Можно ли параболу превратить в пару мнимых параллельных прямых, меняя свободный член?

Вопрос 1.16. Может ли линия второго порядка быть центральной, если одночлены второй степени в ее уравнении образуют полный квадрат?

Вопрос 1.17. Можно ли превратить гиперболу в эллипс, изменяя коэффициенты a_{10} и a_{20}?

Вопрос 1.18. Существует ли система координат, в которой эллипс задается уравнением с $a_{11} = a_{22} = 0$?

Задача 1.22. Получите условия на коэффициенты общего уравнения линии второго порядка, при которых это уравнение задает параболу.