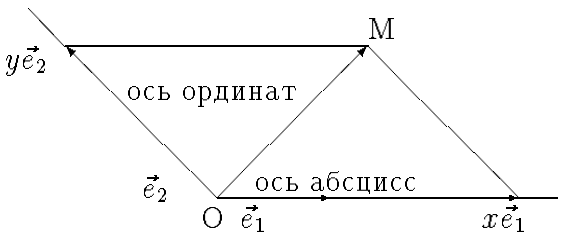
2 Метод координат на плоскости и в пространстве

§12. Аффинная система координат. Прямоугольная декартова система координат. Простое отношение трех точек.

Плоскость σ, L^2 - векторное подпространство векторов, параллельных плоскости σ

Определение 2.1. *Аффинной системой координат* на плоскости называется тройка $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, где O - произвольная точка плоскости, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ - базис L^2. Через точку O параллельно векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ проведем прямые. Эти прямые называются осями *абсцисс и ординат*, соответственно.

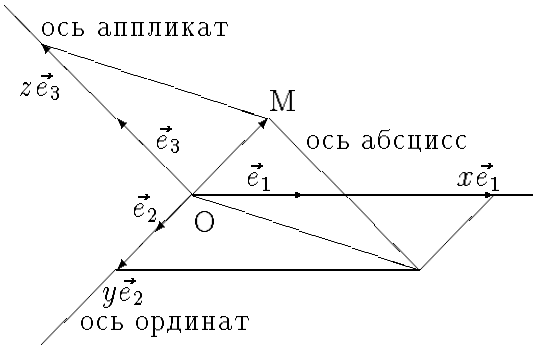


Пусть M - произвольная точка плоскости σ. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. Мы получаем тройку компланарных векторов $\overrightarrow{OM}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$, причем $\vec{e}_1 \not\parallel \vec{e}_2$. По теореме о компланарных векторах это означает, что существует единственная пара чисел (x_1, x_2) такая, что $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Упорядоченная пара чисел (x_1, x_2) называется *координатами* точки M в аффинной системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Определение 2.3. Аффинная система координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ называется *прямоугольной декартовой системой координат* (короче, ПДСК), если базис $(\vec{i}, \vec{j})$ - ортонормированный.

Точечное пространство E^3, V^3 - множество всех векторов

Определение 2.2. *Аффинной системой координат* в пространстве называется четверка $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, где O - произвольная точка E^3, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ - базис V^3. Через точку O параллельно векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ проведем прямые. Эти прямые называются осями *абсцисс, ординат и аппликат*, соответственно.

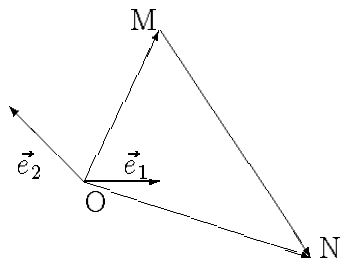


Пусть M - произвольная точка пространства E^3. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. Мы получаем четверку векторов $\overrightarrow{OM}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, причем $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - не компланарны (по определению базиса). По доказательству теоремы о линейной зависимости четырех векторов получим, что существует тройка чисел (x_1, x_2, x_3) такая, что $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$. Упорядоченная тройка чисел (x_1, x_2, x_3) называется *координатами* точки M в аффинной системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Так как координаты вектора в данном базисе определены однозначно, эта тройка чисел однозначно определена для каждой точки пространства.

Определение 2.4. Аффинная система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ называтеся *прямоугольной декартовой системой координат* (короче, ПДСК), если базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ - ортонормированный.

Теорема 2.1. (о координатах вектора, выраженных через координаты концов его представителя)
Пусть даны аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и точки $M(m_1, m_2)$, $N(n_1, n_2)$ в этой системе координат. Тогда $\overrightarrow{MN}(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$.

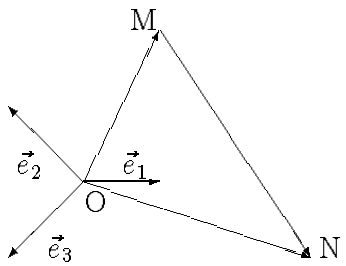
Доказательство.



По правилу треугольника получим $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$. По теореме о координатах суммы векторов и произведения вектора на число $\overrightarrow{MN}(-m_1 + n_1, -m_2 + n_2)$. □

Теорема 2.2. (о координатах вектора, выраженных через координаты концов его представителя)
Пусть даны аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и точки $M(m_1, m_2, m_3)$, $N(n_1, n_2, n_3)$ в этой системе координат. Тогда $\overrightarrow{MN}(n_1 - m_1, n_2 - m_2, n_3 - m_3)$.

Доказательство.



По правилу треугольника получим $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$. По теореме о координатах суммы векторов и произведения вектора на число $\overrightarrow{MN}(-m_1 + n_1, -m_2 + n_2, -m_3 + n_3)$. □

Теорема 2.3. (о длине отрезка в прямоугольной декартовой системе координат) Пусть дана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ и $M(m_1, m_2)$, $N(n_1, n_2)$. Тогда

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} =$$

$$= \sqrt{(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2} \square$$

Теорема 2.4. (о длине отрезка в прямоугольной декартовой системе координат)
Пусть дана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и $M(m_1, m_2)$, $N(n_1, n_2)$. Тогда

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} =$$

$$= \sqrt{(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)} \square$$

Определение 2.5. Пусть даны точки M_1, M_2. Говорят, что точка M *делит направленный отрезок* $\overline{M_1M_2}$ в отношении λ ($\lambda \neq -1$), если $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Число λ также называют *простым отношением* трех точек (M_1, M_2, M).

Свойства.

1^0 Из определения умножения вектора на число следует, что $M \in (M_1M_2)$.

2^0 $\lambda > 0$ тогда и только тогда, когда точка M лежит между точками M_1 и M_2.

Доказательство. $\lambda > 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{MM_2}$ сонаправлены. Это равносильно тому, что точка M лежит между точками M_1 и M_2. □

$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
$M_1 \quad M \quad M_2$	$M \quad M_1 \quad M_2$ при $\lvert\overrightarrow{M_1M}\rvert < \lvert\overrightarrow{MM_2}\rvert$; $M_1 \quad M_2 \quad M$ при $\lvert\overrightarrow{M_1M}\rvert < \lvert\overrightarrow{MM_2}\rvert$

3^0 Пусть даны две точки M_1, M_2 и вещественное число λ ($\lambda \neq -1$). Тогда существует единственная точка M такая, что простое отношение трех точек (M_1, M_2, M) равно λ.

Доказательство. Предположим, что такая точка M существует. Тогда $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Прибавим к обеим частям этого равенства $\lambda\overrightarrow{M_1M}$. Тогда получим $\overrightarrow{M_1M} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{M_1M_2}$. Это соотношение показывает, что если точка M существует, то ее положение однозначно определяется полученным равенством.

Докажем, что точка M существует. Определим ее положение равенством $\overrightarrow{M_1M} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{M_1M_2}$.

Тогда вычитая из обеих частей этого равенства $\lambda\overrightarrow{M_1M}$ получим $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Это по определению означает, что точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношении λ. □

4^0 Пусть дана произвольная аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$. Если простое отношение трех точек (M_1, M_2, M) равно λ, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Доказательство. По теореме о координатах вектора, выраженных через координаты концов его представителя имеем $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$, $\overrightarrow{MM_2}(x_2 - x, y_2 - y)$. Далее применим теорему о координатах произведения вектора на число к векторному равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$, получим

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \end{cases}$$

Выражая из этих уравнений x и y, получим требуемые формулы. □

Следствие. Пусть M - середина отрезка M_1M_2. Тогда $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{MM_2}$, то есть $\lambda = 1$. Применив доказанное свойство к этому случаю, получим

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

4^0 Пусть дана произвольная аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M(x, y, z)$. Если простое отношение трех точек (M_1, M_2, M) равно λ, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Доказательство. По теореме о координатах вектора, выраженных через координаты концов его представителя имеем $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{MM_2}(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$. Далее применим теорему о координатах произведения вектора на число к векторному равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$, получим

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \end{cases}$$

Выражая из этих уравнений x, y и z, получим требуемые формулы. □

Следствие. Пусть M - середина отрезка M_1M_2. Тогда $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{MM_2}$, то есть $\lambda = 1$. Применив доказанное свойство к этому случаю, получим

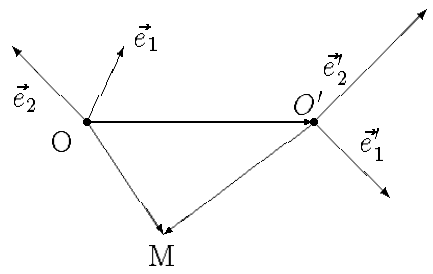
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

§13. Формулы перехода от одной аффинной системы координат к другой.

Пусть даны две аффинные системы координат на плоскости σ $I = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ - "старая" и $II = (O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ - "новая". Пусть известны координаты точки O' относительно I и координаты векторов $\vec{e}_1', \vec{e}_2)'$ в базисе I, то есть $O'(x_0, y_0)$, $\vec{e}_1'(c_{11}, c_{21})$, $\vec{e}_2)'(c_{12}, c_{22})$. Пусть произвольная точка M плоскости σ имеет координаты $M(x, y)$ относительно "старой" системы координат I и эта же точка имеет координаты $M(x', y')$ относительно "новой" системы координат II. Найдем зависимость между "старыми" и "новыми" координатами точки M.

Пусть даны две аффинные системы координат в пространстве V^3 $I = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ - "старая" и $II = (O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ - "новая". Пусть известны координаты точки O' относительно I и координаты векторов $\vec{e}_1', \vec{e}_2)', \vec{e}_3'$ в базисе I, то есть $O'(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{e}_1'(c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\vec{e}_2)'(c_{12}, c_{22}, c_{32})$, $\vec{e}_3'(c_{13}, c_{23}, c_{33})$. Пусть произвольная точка M пространства V^3 имеет координаты $M(x, y, z)$ относительно "старой" системы координат I и эта же точка имеет координаты $M(x', y', z')$ относительно "новой" системы координат II. Найдем зависимость между "старыми" и "новыми" координатами точки M.

Доказательство.



По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{1}$$

По определению координат вектора

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \\ \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 \\ \overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' \\ \vec{e}_1' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \end{array} \tag{2}$$

Подставим (4) в (3):

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 +$$

$$+x'(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2) + y'(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2)$$

Перенесем все слагаемые в одну сторону и соберем коэффициенты перед векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

$$(x - x_0 - x'c_{11} - y'c_{12})\vec{e}_1 +$$

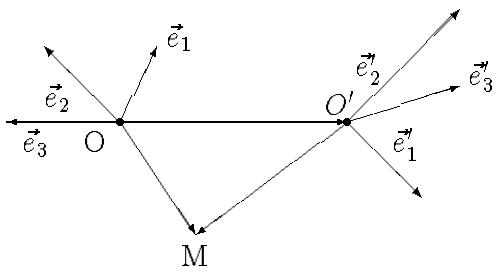
$$+(y - y_0 - x'c_{21} - y'c_{22})\vec{e}_2 = \vec{0}$$

В силу линейной независимости векторов базисов

$$\begin{cases} x = x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} \\ y = y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} \end{cases}$$

Эти выражения называются *формулами перехода* от аффинной системы координат I к аффинной системе координат II.

Доказательство.



По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{3}$$

По определению координат вектора

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \\ \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3 \\ \overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' + z'\vec{e}_3' \\ \vec{e}_1' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3 \end{array} \tag{4}$$

Подставим (4) в (3):

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + y_0\vec{e}_3 +$$

$$+x'(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3) +$$

$$+y'(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3)$$

$$+z'(c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3)$$

Перенесем все слагаемые в одну сторону и соберем коэффициенты перед векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

$$(x - x_0 - x'c_{11} - y'c_{12} - z'c_{13})\vec{e}_1 +$$

$$+(y - y_0 - x'c_{21} - y'c_{22} - z'c_{23})\vec{e}_2 +$$

$$+(z - z_0 - x'c_{31} - y'c_{32} - z'c_{33})\vec{e}_3 = \vec{0}$$

В силу линейной независимости векторов базисов

$$\begin{cases} x = x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13} \\ y = y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23} \\ z = z_0 + x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33} \end{cases}$$

Эти выражения называются *формулами перехода* от аффинной системы координат I к аффинной системе координат II.

§14. Метод координат на плоскости (в пространстве). Алгебраическая линия (поверхность). Окружность (сфера).

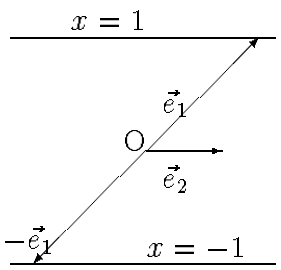
Если на плоскости (в пространстве) ввести аффинную систему координат, то появляется возможность не только ввести координаты у точек, но и записать алгебраические условия, определяющие множества точек.

Определение 2.6. *Условием*, определяющим фигуру Ф по отношению к данной аффинной системе координат, называется уравнение, неравенство, совокупность или система уравнений и неравенств, которым удовлетворяют координаты точек, принадлежащих фигуре Ф и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих Ф.

Пример Пусть дана аффинная система координат на плоскости $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Рассмотрим совокупность уравнений

$$\Phi : \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

Это две параллельные прямые.



Многочленом от двух переменных x и y называется сумма вида $\sum_{s,t=0}^{n} a_{st} x^s y^t$, где a_{st} - произвольные вещественные числа. Каждое слагаемое этой суммы называется *одночленом* данного многочлена. Если $a_{st} \neq 0$, то число $s+t$ называется *степенью одночлена. Степенью многочлена* называется наивысшая из степеней входящих в него одночленов.

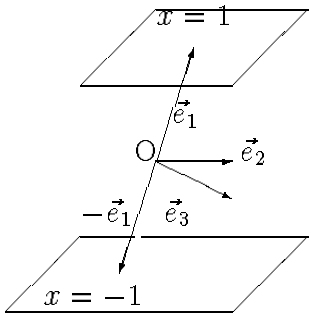
Определение 2.7. Линия на плоскости называется *алгебраической*, если по отношению к некоторой аффинной системе координат она определяется уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ - некоторый многочлен. Степень этого многочлена называется *порядком алгебраической линии.*

Теорема 2.5. (о порядке алгебраической линии)
Понятие алгебраической линии и ее порядок не зависят от выбора аффинной системы координат.

Пример Пусть дана аффинная система координат в пространстве $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Рассмотрим совокупность уравнений

$$\Phi : \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

Это две параллельные плоскости.



Многочленом от трех переменных x, y и z называется сумма вида $\sum_{s,t,u=0}^{n} a_{stu} x^s y^t z^u$, где a_{stu} - произвольные вещественные числа. Каждое слагаемое этой суммы называется *одночленом* данного многочлена. Если $a_{stu} \neq 0$, то число $s+t+u$ называется *степенью одночлена. Степенью многочлена* называется наивысшая из степеней входящих в него одночленов.

Определение 2.8. Поверхность в пространстве называется *алгебраической*, если по отношению к некоторой аффинной системе координат она определяется уравнением $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ - некоторый многочлен. Степень этого многочлена называется *порядком алгебраической поверхности.*

Теорема 2.6. (о порядке алгебраической поверхности)
Понятие алгебраической поверхности и ее порядок не зависят от выбора аффинной системы координат.

Доказательство. Пусть γ - алгебраическая линия порядка n и относительно аффинной системы координат $I = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ она задается уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ - многочлен порядка n. Рассмотрим другую аффинную систему координат $II = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ и пусть формулы перехода от I к II имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} \\ y = y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} \end{cases}$$

Запишем уравнение γ относительно системы координат II: $F(x_0 + x'c_{11} + y'c_{12}, y_0 + x'c_{21} + y'c_{22}) = 0$
$\sum_{s,t=0}^{n} a_{st}(x_0 + x'c_{11} + y'c_{12})^s(y_0 + x'c_{21} + y'c_{22})^t = 0$ Когда мы раскроем скобки, мы получим в левой части уравнения многочлен некоторой степени m, не превосходящей n, то есть $m \leq n$.
Поменяв системы координат местами (переходя от II к I) мы получим $m \geq n$, то есть $m = n$. Таким образом, порядок линии не зависит от выбора аффинной системы координат. □

Пример алгебраической линии второго порядка

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ и запишем в ней уравнение окружности $\omega(Q(a, b), r)$, где $Q(a, b)$ - центр окружности, r - радиус окружности. Пусть произвольная точка $M(x, y) \in \omega \Leftrightarrow QM = r$. По теореме о длине отрезка в прямоугольной декартовой системе координат получим $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Это уравнение окружности в ПДСК

Доказательство. Пусть γ - алгебраическая поверхность порядка n и относительно аффинной системы координат $I = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ она задается уравнением $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ - многочлен порядка n. Рассмотрим другую аффинную систему координат $II = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ и пусть формулы перехода от I к II имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13} \\ y = y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23} \\ z = z_0 + x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33} \end{cases}$$

Запишем уравнение γ относительно системы координат II: $F(x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13}, y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23}, z_0 + x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33}) = 0$
$\sum_{s,t,u=0}^{n} a_{stu}(x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13})^s(y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23})^t(z_0 + x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33})^u = 0$ Когда мы раскроем скобки, мы получим в левой части уравнения многочлен некоторой степени m, не превосходящей n, то есть $m \leq n$.
Поменяв системы координат местами (переходя от II к I) мы получим $m \geq n$, то есть $m = n$. Таким образом, порядок линии не зависит от выбора аффинной системы координат. □

Пример алгебраической поверхности второго порядка

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и запишем в ней уравнение сферы $\Omega(Q(a, b, c), r)$, где $Q(a, b, c)$ - центр сферы, r - радиус сферы. Пусть произвольная точка $M(x, y, z) \in \Omega \Leftrightarrow QM = r$. По теореме о длине отрезка в прямоугольной декартовой системе координат получим $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r \Leftrightarrow$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Это уравнение сферы в ПДСК

Пусть относительно прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ задано уравнение вида $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, где A, B, C - некоторые константы. Мы видим, что это уравнение задает некоторую линию второго порядка. Выясним, что это за линия. Преобразуем данное уравнение, используя метод выделения полных квадратов. Запишем данное уравнение в виде $x^2 + 2Ax \pm A^2 + y^2 + 2By \pm B^2 + C = 0$. Используем формулы сокращенного умножения

$$(x + A)^2 + (y + B)^2 = A^2 + B^2 - C \quad (5)$$

Возможны три случая:

1. $A^2 + B^2 - C > 0$. Тогда это уравнение задает окружность с центром в точке $Q(-A, -B)$ и радиусом $\sqrt{A^2 + B^2 - C}$;

2. $A^2 + B^2 - C = 0$. Тогда этому уравнению удовлетворяет единственная точка с вещественными координатами. Это точка $Q(-A, -B)$; Будем называть это множество точек *окружностью нулевого радиуса.*

3. $A^2 + B^2 - C < 0$. Тогда уравнению не удовлетворяет ни одна точка с вещественными координатами; Будем называть это множество точек *окружностью мнимого радиуса.*

Будем называть множество точек, задаваемых уравнением (5) *обобщенной окружностью.*

Пусть относительно прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задано уравнение вида $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$, где A, B, C, D - некоторые константы. Мы видим, что это уравнение задает некоторую поверхность второго порядка. Выясним, что это за поверхность. Преобразуем данное уравнение, используя метод выделения полных квадратов. Запишем данное уравнение в виде $x^2 + 2Ax \pm A^2 + y^2 + 2By \pm B^2 + z^2 + 2Cz \pm C^2 + D = 0$. Используем формулы сокращенного умножения

$$(x+A)^2+(y+B)^2+(z+C)^2 = A^2+B^2+C^2+D \quad (6)$$

Возможны три случая:

1. $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$. Тогда это уравнение задает сферу с центром в точке $Q(-A, -B, -C)$ и радиусом $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$;

2. $A^2+B^2+C^2-D = 0$. Тогда этому уравнению удовлетворяет единственная точка с вещественными координатами. Это точка $Q(-A, -B, -C)$; Будем называть это множество точек *сферой нулевого радиуса.*

3. $A^2+B^2+C^2-D < 0$. Тогда уравнению не удовлетворяет ни одна точка с вещественными координатами; Будем называть это множество точек *сферой мнимого радиуса.*

Будем называть множество точек, задаваемых уравнением (6) *обобщенной сферой.*