2 Основания геометрии.

§22. Геометрия до Евклида. "Начала" Евклида. "Основания геометрии" Гильберта.

Дошедшие до нашего времени материалы свидетельствуют о высоком уровне геометрических представлений в Древнем Египте и Вавилоне. Однако из этих материалов можно сделать вывод, что геометрия носила эмпирический характер. Она составляла набор правил "делай так-то" и не содержала доказательств.

С 7 века до нашей эры начинается период бурного развития геометрии в Древней Греции. Благодаря оживленным торговым связям, геометрические сведения попадают с Востока в Грецию и претерпевают здесь значительные изменения. Они связаны не только с открытием большого числа новых фактов геометрии, но и с возникновением понятия о доказательстве утверждений, накапливаются различные методы доказательства. Это привело к попыткам систематизировать и изложить весь накопленный материал в строго логическом порядке. Такие попытки делались многими учеными, но до нас их сочинения не дошли, то есть по-видимому были забыты после создания Евклидом в 3 веке до нашей эры "Начал".

"Начала" Евклида представляли собой полное и систематическое изложение основ геометрии. Они состоят из 13 книг, причем не все книги посвящены геометрии: в пяти из них рассмотрены вопросы арифметики, изложенные в геометрической форме. В остальных восьми книгах излагаются вопросы геометрии.

Открываются "Начала" 23 определениями основных понятий и формулировками некоторых основных положений геометрии, которые принимаются без доказательства. В качестве примера приведем несколько определений:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
4. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.
8. Плоский угол есть взаимное наклонение двух встречающихся линий, расположенных в одной плоскости.

Утверждения, которые принимаются без доказательства, Евклид разделил на постулаты и аксиомы.

Постулаты.

I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.
II. И чтобы каждую прямую можно было неопределенно продолжить.
III. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.
IV. И чтобы все прямые углы были равны.
V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы.

I. Равные порознь третьему, равны между собой.
II. И если к равным прибавить равные, то получим равные.
III. И если от равных отнять равные, то получим равные.
IV. И если к неравным прибавить равные, то получим неравные.
V. И если удвоим равные, то получим равные.
VI. И половины равных равны между собой.
VII. И совмещающиеся равны.
VIII. И целое больше части.
IX. И две прямые не могут заключать пространства.

Заметим, что принцип отнесения основных положений к постулатам или аксиомам остается по существу невыясненным.

Затем Евклид излагает теоремы геометрии, располагая из в такой последовательности, чтобы каждую теорему можно было доказать, используя только предыдущие теоремы, постулаты и аксиомы. Такой метод построения геометрии являлся прообразом современного аксиоматического метода.

Перечисление определений и аксиом, которые достаточны для проведения логического доказательства всех следующих за ними теорем геометрии, называется *обоснованием геометрии*.

Таким образом, "Начала" Евклида – первый дошедший до нас труд по обоснованиям геометрии. На протяжении многих веков "Начала" были образцом логической строгости математических доказательств, образцом научного изложения. Еще в начале XX века учебники по школьной геометрии, по существу, представляли собой популярное изложение "Начал" Евклида.

Однако, если подходить к "Началам" с точки зрения современной математики, то обнаруживается, что проведенное Евклидом обоснование геометрии во многом неудовлетворительно. Прежде всего отметим, что данные Евклидом определения геометрических образов (в самом начале первой книги) являются скорее некоторым весьма приблизительным их описанием. Например, определение прямой не отличает ее от окружности. Определение линии строится с помощью понятий длины и ширины, которые сами должны быть определены. Более внимательный анализ показывает, что первые пять определений не используются в дальнейшем доказательстве теорем и могут быть опущены. Это, разумеется, не означает, что не нужны все определения. Напротив, большинство определений Евклида совершенно необходимы для изложения и либо содержат легко устранимые недостатки, либо являются безупречными.

Приведенные Евклидом постулаты и аксиомы также необходимы. Они используются в доказательствах и в достаточной степени правильны. Но и здесь имеется весьма существенный недостаток: список аксиом и постулатов слишком беден для обоснования геометрии. Например, с их помощью невозможно обосновать расположение точек прямой между двумя точками или расположение точек по одну или по разные стороны от прямой (это заметил Гаусс). Евклид использует эти понятия в доказательствах, но аксиом не хватает и ему приходится опираться на наглядность. А этого недостаточно для чисто логического построения геометрии. Далее, равенство фигур (аксиома VII) опирается на понятие движения, которое у Евклида не определено.

Некоторые из недостатков "Начал" Евклида были подмечены еще учеными древности. Список аксиом был расширен еще Архимедом, который в теории длин, площадей и объемов существенно завершил изложения Евклида и ввел еще пять постулатов. Заметим, что первые четыре из них были исключены из числа аксиом, зато остался пятый.

Только в конце XIX столетия была окончательно осознана идея точного логического построения геометрии и указана полная система аксиом, из которых все теоремы выводятся без всяких апелляций к наглядности наших пространственных построений. Особую роль в этом сыграла книга Давида Гильберта "Основания геометрии", вышедшая в 1899 году. В ней впервые был дан список аксиом достаточный для логического построения евклидовой геометрии. С "Оснований геометрии" Гильберта и начинается современный аксиоматический метод в математике.

§23. Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом I группы.

Пусть даны три различные непустые множества произвольной природы. Элементы первого множества будем называть *точками* и обозначать $A, B, C, \ldots$; второго – *прямыми* и обозначать $a, b, c, \ldots$; третьего – *плоскостями* и обозначать $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Элементы этих множеств находятся в определенных отношениях, которые называются "принадлежность", "лежать между" и "конгруэнтность". Эти отношения называются *основными*.

Природа основных понятий, то есть основных объектов и отношений, может быть какой угодно, но они должны удовлетворять определенным требованиям – аксиомам – которые перечислены ниже.

Группа I (аксиомы принадлежности)

Аксиомы этой группы определяют основное отношение "принадлежность".

I_1. Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая a, проходящая через эти точки.

I_2. Каковы бы ни были две точки A и B, существует не более одной прямой a, проходящей через эти точки.

I_3. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_4. Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует плоскость α, проходящая через эти точки. На каждой плоскости лежит хотя бы одна точка.

I_5. Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости α, проходящей через эти точки.

I_6. Если две точки A и B прямой a лежат в плоскости α, то и каждая точка прямой a лежит в плоскости α.

Определение 2.1. При этом говорят, что прямая a лежит в плоскости α и пишут $a \subset \alpha$.

I_7. Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку B.

I_8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

С помощью аксиом I_1 – I_8 уже могут быть доказаны некоторые теоремы.

Теорема 2.1. Две прямые имеют не более одной общей точки; две плоскости либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих двух плоскостей; плоскость и не лежащая на ней прямая имеют не более одной общей точки.

Доказательство. 1) Пусть две прямые a и b пересекаются в двух точках, то есть $a \cap b = \{A, B\}$. Тогда через две точки A и B проходят две (различные!) прямые a и b. Это противоречит аксиоме I_2. Следовательно, две (различные) прямые не могут иметь более одной общей точки.

2) Пусть две плоскости α и β имеют общую точку A, то есть $A \in \alpha \cap \beta$. Тогда по аксиоме I_7 эти плоскости имеют еще одну общую точку B, то есть $B \in \alpha \cap \beta$. Тогда по аксиоме I_6 прямая (AB) принадлежит и плоскости α и плоскости β, то есть $(AB) \subset \alpha \cap \beta$. Нам осталось доказать, что других общих точек (не лежащих на прямой (AB)) у плоскостей α и β нет. Допустим противное: пусть точка $C \in \alpha \cap \beta$ и $C \notin (AB)$. Тогда через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит две различные плоскости α и β, что противоречит аксиоме I_5. Таким образом, $(AB) = \alpha \cap \beta$.

3) Пусть прямая a и плоскость α имеют две общие точки A, B. Тогда по аксиоме I_6 прямая a содержится в плоскости α, что противоречит условию. □

Теорема 2.2. Через прямую и не лежащую на ней точку, так же как через две прямые с общей точкой, проходит одна и только одна плоскость.

Доказательство. $\exists$). 1) Пусть даны прямая a и не лежащая на ней точка A. По аксиоме I_3 на прямой a существуют по крайней мере две точки B и C. Тогда по аксиоме I_2 точки A, B, C не лежат на одной прямой и по аксиоме I_4 существует плоскость α, проходящая через эти точки.

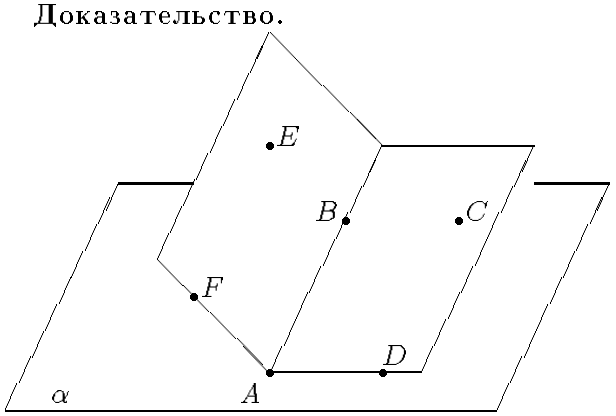
2) Пусть даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке O. По аксиоме I_3 на прямой a кроме точки O существует еще одна точка A. Аналогично, на прямой b существует точка B. Если предположить, что точки O, A, B лежат на одной прямой, то по аксиоме I_2 получим, что $a = b$. Это противоречит условию, следовательно, точки O, A, B не лежат на одной прямой и по аксиоме I_4 существует плоскость α, проходящая через них.

!). 1) Пусть существует еще одна плоскость β, проходящая через точку A и прямую a. Тогда точки $B, C \in \beta$, так как эти точки принадлежат прямой a и прямая $a \subset \beta$. Таким образом, мы получаем, что через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит две плоскости α и β, что противоречит аксиоме I_5. Следовательно, плоскость α единственна.

2) Пусть существует еще одна плоскость β, проходящая через прямые a и b. Тогда точки $O, A, B \in \beta$. Таким образом, мы получаем, что через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит две плоскости α и β, что противоречит аксиоме I_5. Следовательно, плоскость α единственна. □

Теорема 2.3. Каждая плоскость содержит по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

Доказательство.



Пусть дана плоскость α. По аксиоме I_4 на ней существует точка A. По аксиоме I_8 существует точка $B \notin \alpha$. По аксиоме I_3 существует точка C не принадлежащая прямой (AB), то есть $C \notin (AB)$. По аксиоме I_4 существует плоскость (ABC), причем точка A принадлежит как плоскости α так и плоскости (ABC). Следовательно, по аксиоме I_7 существует еще одна точка D, принадлежащая обеим плоскостям α и (ABC).

По аксиоме I_8 существует точка E, не лежащая в плоскости (ABD). Тогда по аксиоме I_4 суще-

ствует плоскость (ABE), отличная от плоскости (ABD). Плоскости (ABE) и α имеют общую точку A, а значит, имеют еще одну общую точку F. Итак, мы построили три точки A, D, F, принадлежащие плоскости α.

Нам осталось доказать, что эти точки не лежат на одной прямой. Допустим, что $F \in (AD)$. Тогда по аксиоме I_6 точки A, F принадлежат как плоскости (ABE) так и плоскости (ABD), следовательно, по теореме 2.1 $(ABE) \cap (ABD) = (AF)$. Но $(ABE) \cap (ABD) = (AB)$, следовательно, $F \in (AB)$. Так как точка $F \neq A$ и $A, F \in \alpha$, то по аксиоме I_6 прямая $(AB) \equiv (AF) \subset \alpha$, то есть $B \in \alpha$, что противоречит выбору точки B. $\square$

Из аксиом первой группы мы, по существу, не можем получить более содержательных выводов, кроме тех о которых мы говорили. В частности, из этих аксиом не следует, что множество геометрических объектов бесконечно.

В качестве примера геометрии, содержащей конечное число основных объектов, приведем следующую. Возьмем в евклидовом пространстве четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. В качестве точек нашей геометрии возьмем точки A, B, C, D. Назовем прямыми пары точек $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$, $\{A, D\}$, $\{A, C\}$, $\{B, D\}$. Назовем плоскостями тройки точек $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{B, C, D\}$, $\{A, C, D\}$. Отношение "принадлежности" точки прямой (плоскости) будем понимать в смысле наличия данной точки в паре (тройке), задающей прямую (плоскость).

Задача 2.1. Проверьте, что для таких точек, прямых и плоскостей выполняются все аксиомы первой группы.

Заметим, что эта реализация аксиом первой группы является минимальной из всех возможных, в том смысле, что на каждой прямой имеется только пара точек, всех точек только четыре и т.д. Именно столько элементов и требуют аксиомы. Правда аксиома I_4 требует, чтобы на каждой плоскости была хотя бы одна точка, а в нашей реализации в каждой плоскости три точки. Однако как показывает предыдущая теорема это число является минимальным.

§24. Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом II группы.

Точка на прямой может находиться в отношении к двум другим точкам этой прямой. Будем называть это отношение словами "лежать между" и обозначать $A - B - C$ (точка B лежит между точками A и C). При этом должны быть удовлетворены требования следующих аксиом.

II_1. Если точка B лежит между точками A и C, то A, B, C – различные точки одной прямой и точка B лежит между точками C и A.

II_2. Каковы бы ни были точки A и C, существует по крайней мере одна точка B на прямой (AC) такая, что $A - C - B$.

II_3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Аксиомы II_1 – II_3 называются *линейными аксиомами порядка.*

Определение 2.2. Пару точек A и B назовем *отрезком* и будем обозначать AB или BA. Точки, лежащие между точками A и B будем называть *внутренними точками* или просто *точками* отрезка AB, точки A и B называются *концами* отрезка AB. Все остальные точки прямой (AB) будем называть *внешними* к отрезку AB.

Замечание. Если прямая содержит какую-либо внутреннюю точку отрезка, то будем говорить, что *отрезок пересекает прямую.*

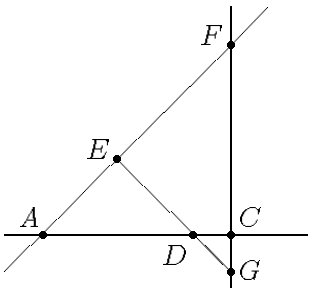
Замечание. В аксиомах II_1 – II_3 не утверждается, что между точками A и B существуют другие точки. Таким образом, из них еще не видно, что каждый отрезок имеет внутренние точки. Но из аксиомы II_2 следует, что любой отрезок имеет по крайней мере одну внешнюю точку.

II_4 (аксиома Паша). Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой и a – некоторая прямая, лежащая в плоскости (ABC) и не содержащая ни одной из точек A, B, C. Тогда если прямая a проходит через точку отрезка AB, то она проходит также через точку отрезка BC или через точку отрезка AC.

С помощью аксиом первой и второй групп могут быть доказаны многие важные факты геометрии. Докажем сначала две теоремы, которые дополняют утверждения аксиом II_1 – II_3.

Теорема 2.4. Каковы бы ни были две точки A и C, существует по крайней мере одна точка D на прямой (AC), лежащая между точками A и C.

Доказательство.

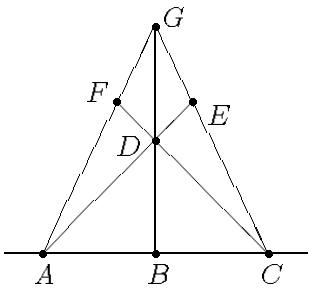


По аксиоме I_3 существует точка E, не лежащая на прямой (AC). По аксиоме II_2 на прямой (AE) существует точка F такая, что $A-E-F$. По аксиоме II_2 на прямой (FC) существует точка G такая, что $F-C-G$. Теперь у нас все готово для применения аксиомы Паша: есть три точки A, F, C, не лежащие на одной прямой и есть прямая (EG). Прямая (EG) пересекает отрезок AF, так как $A-E-F$. Если мы докажем, что прямая (EG) не пересекает отрезок FC, то по аксиоме Паша эта прямая обязана пересечь отрезок AC в некоторой точке D (это как раз нам и нужно доказать).

Докажем, что прямая (EG) не пересекает отрезок FC. Заметим, во-первых, что прямые (EG) и (FC) пересекаются в точке G. Эта точка не может быть точкой отрезка FC (то есть $F-G-C$) по аксиоме II_3, так как $F-C-G$. Во-вторых, если существует общая точка прямой (EG) и отрезка FC, то это будет вторая общая точка прямых (EG) и (FC), что невозможно, так как эти прямые различны. □

Теорема 2.5. Среди любых трех точек A, B, C одной прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Доказательство.



По аксиоме II_3 не более одной точки из трех лежит между двумя другими, то есть, априори, может быть, что ни одна из трех точек не лежит между двумя другими. Таким образом, нам нужно доказать, что если A не лежит между B и C и C не лежит между A и B, то B лежит между A и C.

По аксиоме I_3 существует точка D, не лежащая на прямой (AC). По аксиоме II_2 существует точка $G \in (BD)$ такая, что $B-D-G$.

Применим аксиому Паша к точкам B, C, G и прямой (AD): прямая (AD) пересекает отрезок BG в точке D (так как $B-D-G$) и пересекает прямую (BC) в точке A, которая является внешней для отрезка BC, следовательно, пересечь отрезок BC не может. Тогда прямая (AD) обязана пересечь отрезок GC в точке, которую мы обозначим E. Таким образом, мы получили $G-E-C$.

Аналогично применяя аксиому Паша к точкам A, B, G и прямой (CD), получим точку F такую, что $A-F-G$.

Еще раз применим аксиому Паша к точкам A, E, G и прямой (CF), получаем $A-D-E$.

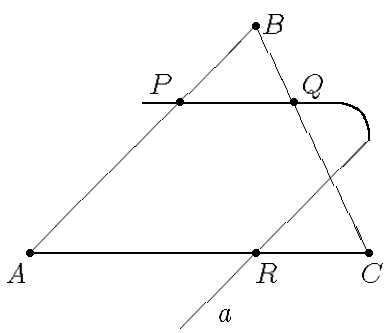
И наконец, по аксиоме Паша, примененной к точкам A, E, C и прямой (BG), получим $A-B-C$. □

Итак, мы получаем, во-первых, усиление аксиомы II_2: каковы бы ни были две точки A и C, существует хотя бы одна точка отрезка AC и существует хотя бы одна внешняя точка отрезка AC. Во-вторых, мы получили усиление аксиомы II_3: из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Теперь мы можем доказать весьма важное дополнение к аксиоме Паша.

Теорема 2.6. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой и если некоторая прямая a пересекает какие-либо два из отрезков AB, BC, AC, то она не пересекает третий из этих отрезков. (Когда мы говорим, что прямая пересекает отрезок, то подразумеваем, что она содержит некоторую его внутреннюю точку).

Доказательство.



Пусть прямая a пересекает все три отрезка AB, BC, AC соответственно в точках P, Q,R, то есть $A-P-B$, $B-Q-C$, $A-R-C$. Заметим, что $A, P, R \notin (BC)$ (иначе $(PQ) = (AB) = (AC)$, то есть точки A, B, C лежат на одной прямой, что противоречит условию). Так как только одна точка из трех может лежать между двумя другими, пусть $P-Q-R$.

Применим аксиому Паша к точкам A, P, R и прямой (BC). Прямая (BC) пересекает отрезок PR в точке Q. Кроме того, прямая (BC) пересекается с прямой (AP) в точке B – внешней к отрезку AP, а значит, пересечь отрезок AP не может. Но эта прямая также не может пересечь отрезок AR, так как пересекает прямую (AR) в точке C, которая является внешней точкой отрезка AR.

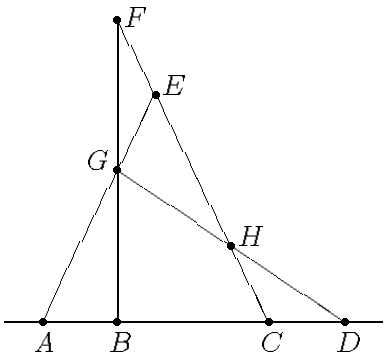
Мы получаем противоречие с аксиомой Паша, так как прямая (BC), не проходящая через точки A, P, R,

пересекает отрезок PR, но не пересекает ни отрезок AP, ни отрезок AR.

Итак, мы доказали, что прямая a не может сразу пересечь все три отрезка. □

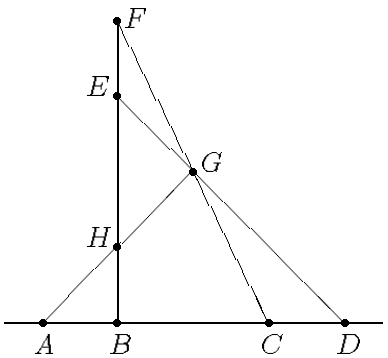
Теорема 2.7. Если $A-B-C$ и $B-C-D$, то $A-B-D$ и $A-C-D$.

Доказательство. 1) докажем, что $A-C-D$.



По аксиоме I_3 существует точка $E \notin (AB)$. По аксиоме II_2 существует точка F такая, что $C-E-F$. Дальше мы четыре раза применим аксиому Паша точно также как мы делали это выше. Поэтому применим краткую запись (в каждом случае проговорите какие отрезки и почему пересекает или не пересекает прямая):
точки A, E, C, прямая $(FB) \Rightarrow A-G-E$;
точки B, F, C, прямая $(AE) \Rightarrow F-G-B$;
точки B, G, D, прямая $(FC) \Rightarrow G-H-D$;
точки A, G, D, прямая $(FE) \Rightarrow A-C-D$.

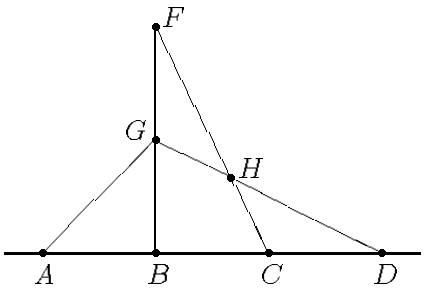
2) докажем, что $A-B-D$.



По аксиоме I_3 существует точка $E \notin (AB)$. По аксиоме II_2 существует точка F такая, что $B-E-F$. Дальше мы четыре раза применим аксиому Паша точно также как мы делали это выше. Поэтому применим краткую запись (в каждом случае проговорите какие отрезки и почему пересекает или не пересекает прямая):
точки B, E, D, прямая $(FC) \Rightarrow E-G-D$;
точки B, F, C, прямая $(DE) \Rightarrow F-G-C$;
точки A, G, C, прямая $(FB) \Rightarrow A-H-G$;
точки A, G, D, прямая $(FB) \Rightarrow A-B-D$. □

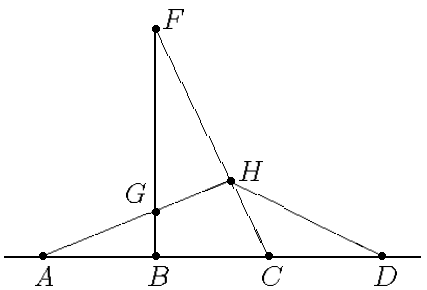
Теорема 2.8. Если $A-C-D$ и $A-B-C$, то $A-B-D$ и $B-C-D$.

Доказательство. Докажем $B-C-D$



По аксиоме I_3 существует точка $G \notin (AB)$. По аксиоме II_2 существует точка F такая, что $B-G-F$. Прямая (CF) не пересекает отрезок BG, так как $B-G-F$ и не пересекает отрезок AB, так как $A-B-C$ по условию. Тогда по аксиоме Паша (применена к точкам A, B, G и прямой (CF)) прямая (CF) не может пересекать отрезок AG. Еще раз применим аксиому Паша к точкам A, G, D и прямой (FC). Тогда получим $G-H-D$. Наконец, применим аксиому Паша к точкам B, G, D и прямой (FC). Получим $B-C-D$.

Докажем $A-B-D$

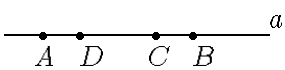


По аксиоме I_3 существует точка $H \notin (AB)$. По аксиоме II_2 существует точка F такая, что $C-H-F$. Прямая (BF) не пересекает отрезок CH, так как $C-H-F$ и не пересекает отрезок CD, так как $B-C-D$ по доказанному. Тогда по аксиоме Паша (применена к точкам C, H, D и прямой (BF)) прямая (BF) не может пересекать отрезок DH. Еще раз применим аксиому Паша к точкам A, H, C и прямой (FB). Тогда получим $A-G-H$. Наконец, применим аксиому Паша к точкам A, H, D и прямой (FB). Получим $A-B-D$.□

Теперь мы можем доказать очень важную теорему.

Теорема 2.9. Между любыми двумя точками прямой существует бесконечно много других ее точек.

Доказательство.

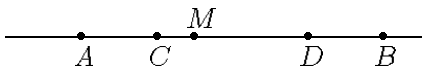


Пусть дана прямая a и две точки A и B на ней. По доказанному выше на отрезке AB существует хотя бы одна точка C.

По той же теореме на отрезке AC существует точка D. Тогда получаем $A-C-B$ и $A-D-C$, следовательно, по предыдущей теореме $A-D-B$. Продолжая этот процесс далее, получаем бесконечно много точек прямой a. □

Теорема 2.10. Пусть каждая из точек C и D лежит между точками A и B. Тогда если точка M лежит между точками C и D, то она лежит между точками A и B.

Доказательство.



Согласно усилению аксиомы II_3 из трех точек A, C, D одна и только одна лежит между двумя другими. Но точка A не может лежать между C и D (так как если предположить, что $C-A-D$, то получим $C-A-D$ и $A-D-B$, то есть $C-A-B$, что противоречит условию). Таким образом, у нас есть две возможности: $A-C-D$ или $A-D-C$. Рассмотрим первую из них, а вторая рассматривается аналогично. Имеем $A-C-D$ и $C-M-D$. Тогда по доказанному $A-M-D$. Аналогично из того, что $A-M-D$ и $A-D-B$ получим $A-M-B$. □

Следствие 1. Если точки C и D лежат между точками A и B, то все точки отрезка CD принадлежат отрезку AB. □

Определение 2.3. В этом случае говорят, что отрезок CD *лежит внутри отрезка* AB.

Следствие 2. Если $A-C-B$, то все точки отрезка AC принадлежат отрезку AB.

Следствие 3. Если $A-C-B$, то никакая точка отрезка AC не может быть точкой отрезка BC.

Теорема 2.11. Если $A-C-B$, то любая точка отрезка AB, отличная от точки C, принадлежит либо отрезку AC, либо отрезку BC.

Доказательство. Предположим, что существует точка $M \in AB$, $M \neq C$ такая, что она не принадлежит ни отрезку AC, ни отрезку CB, то есть $M \notin AC$ и $M \notin CB$. Тогда либо $M-A-C$, либо $A-C-M$.

1) Пусть $M-A-C$. Тогда так как $A-C-B$, то $M-A-B$, то есть точка M не принадлежит отрезку AB, что противоречит условию теоремы.

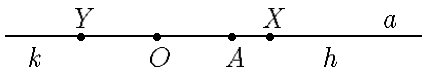
2) Пусть $A-C-M$. Тогда так как $A-M-B$, то $C-M-B$, то есть точка M принадлежит отрезку CB. □

На основании доказанных теорем мы заключаем, что множество внутренних точек отрезка AB, не считая точки C, представляет собой объединение множества внутренних точек отрезка AC и множества внутренних точек отрезка CB, причем эти последние множества общих внутренних точек не имеют.

Определение 2.4. Пусть O – некоторая точка прямой a; A, B – две другие различные точки этой прямой. Если точка O не лежит между точками A и B, то будем говорить, что точки A и B *расположены на прямой* a *с одной стороны от точки* O. Если $A-O-B$, то будем говорить, что точки A и B *расположены на прямой* a *по разные стороны от точки* O.

Теорема 2.12. (о луче). Точка O прямой a разделяет все остальные точки этой прямой на два непустых множества так, что любые две точки прямой a, принадлежащие одному множеству, лежат с одной стороны от точки O, а две точки принадлежащие разным множествам, лежат по разные стороны от точки O.

Доказательство.



Пусть дана прямая a и точка O на ней. Возьмем произвольную точку A на прямой a, отличную от точки O.

Рассмотрим множество точек $h = \{X \in a | A, X$ лежат по одну сторону от точки$O\} \cup \{A\}$ и множество точек $k = \{Y \in A | Y, A$ лежат по разные стороны от точки $O\}$.

Нам нужно доказать:

1) Каждое множество h и k не пусто.

2) Каждая точка прямой a кроме точки O попадает в одно и только одно из множеств h и k.

3) Если точки M и N одного множества, то точка O не лежит между точками M и N.

4) Если точки M и N разных множеств, то точка O лежит между точками M и N.

1) Каждое множество h и k не пусто.

По построению точка $A \in h$, то есть $h \neq \emptyset$. По аксиоме II_2 существует точка Y такая, что $A-O-Y$, то есть точки A и Y лежат по разные стороны от точки O, то есть $Y \in k$, следовательно, $k \neq \emptyset$. 2) Каждая точка прямой a кроме точки O попадает в одно и только одно из множеств h и k.

Рассмотрим произвольную точку $B \in a$, отличную от точек O и A, то есть $B \neq O, A$. Так как из трех

точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими, то возможны три взаимоисключающих случая:

а) $O-A-B$. Тогда точки A и B лежат по одну сторону от точки O, следовательно, $B \in h$ и $B \notin k$.
б) $O-B-A$. Тогда точки A и B лежат по одну сторону от точки O, следовательно, $B \in h$ и $B \notin k$.
в) $A-O-B$. Тогда точки A и B лежат по разные стороны от точки O и, следовательно, $B \in k$ и $B \notin h$.

3) а) Пусть $M,\ N \in h$. Тогда $O-M-A$, либо $O-A-M$ (и аналогично для точки N: $O-N-A$, либо $O-A-N$). Итого, мы получаем четыре случая возможного взаимного расположения точек O, A, M, N. Мы рассмотрим один из них, остальные рассматриваются аналогично (проведите рассуждения самостоятельно).
Пусть $O-M-A$ и $O-N-A$. Предположим, что $M-O-N$. Тогда из $M-O-N$ и $O-N-A$ следует $M-O-A$, что противоречит условию.
б) Пусть $M, N \in k$. Тогда $M-O-A$ и $N-O-A$. Рассмотрим $M-O-A$. Где может располагаться точка N? Сразу отпадают возможности $O-A-N$ и $O-N-A$ из-за условия $N-O-A$ и аксиомы II_3. Остаются случаи $N-M-O$ и $M-N-O$, то есть точки M и N лежат по одну сторону от точки O.
4) Пусть $M \in h$, $N \in k$. Тогда $N-O-A$, а для точки M имеются две возможности: $O-A-M$, либо $O-M-A$. Рассмотрим случай $O-A-M$ и $N-O-A$ (второй случай рассматривается аналогично). Тогда из $N-O-A$ и $O-A-M$ следует, что $N-O-M$, то есть точки M и N лежат по разные стороны от точки O. □

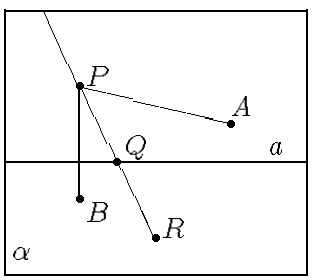
Определение 2.5. Каждое из полученных множеств будем называть *лучом*. Точку O назовем началом луча. Договоримся обозначать луч $[OA)$, где O – начало луча, A – некоторая точка луча.
Замечание. Согласно данному определению начало луча лучу не принадлежит.

Определение 2.6. Если два различных луча имеют общее начало и лежат на одной прямой, то они называются *взаимно дополнительными лучами*.

Докажем ряд утверждений, характеризующих расположение точек на плоскости.

Теорема 2.13. (о полуплоскости) Каждая прямая a, расположенная в плоскости α, разделяет не лежащие на ней точки плоскости α на два непустых множества так, что любые две точки A и B из разных множеств определяют отрезок AB, содержащий точку прямой a, а любые две точки A и A' из одного множества определяют отрезок AA', внутри которого не лежит ни одна точка прямой a.

Доказательство.

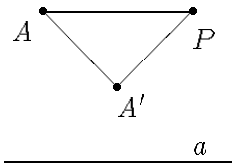


Пусть даны плоскость α и прямая a на ней. Возьмем произвольную точку $P \notin a$ (почему мы можем это сделать?) и рассмотрим два множества точек

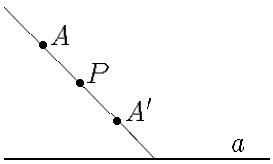
$$\Omega = \{A \in \alpha, A \notin a, [PA] \cap a = \emptyset\} \cup \{P\}; \quad \Sigma = \{B \in \alpha, B \notin a, [PB] \cap a \neq \emptyset\}$$

1) Докажем, что каждое из множеств не пусто.
Точка $P \in \Omega$, следовательно, $\Omega \neq \emptyset$. Возьмем на прямой a точку Q. Тогда по аксиоме II_2 существует точка R такая, что $P-Q-R$, то есть $PR \cap a = Q$, следовательно, $R \in \Sigma$.
2) Докажем, что каждая точка плоскости α, не лежащая на прямой a, попадает в одно и только одно из построенных множеств.
Рассмотрим произвольную точку $X \in \alpha, X \notin a$. Тогда на отрезке PX либо содержится точка прямой a (то есть $X \in \Sigma$, $X \notin \Omega$), либо не содержится (то есть $X \in \Omega$, $X \notin \Sigma$).
3) Докажем, что если точки принадлежат одному множеству, то отрезок, который они определяют, не содержит точек прямой a.

а) Пусть $A, A' \in \Omega$ – две произвольные точки. Тогда возможны три случая взаимного расположения точек P, A, A'.

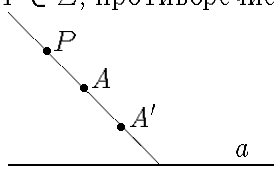


Точки A, A', P не лежат на одной прямой.
Так как $A \in \Omega$, отрезок AP не пересекает прямую a, аналогично отрезок $A'P$ не пересекает прямую a. Применим аксиому Паша к точкам A, A', P и прямой a. Тогда получим, что прямая a не пересекает отрезок AA'.



Точки A, A', P лежат на одной прямой и точка P лежит между точками A и A'.
Предположим, что отрезок AA' пересекает прямую a в некоторой точке K. Тогда точка K принадлежит либо отрезку AP, либо отрезку $A'P$ (она не может совпадать с точкой P, так как $P \notin a$).

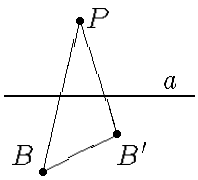
Если $K \in AP$, то точка $A \in \Sigma$, что противоречит выбору точки A. Аналогично, если $K \in A'P$, то $A' \in \Sigma$, противоречие. Следовательно, AA' не пересекает прямую a.



Точки A, A', P лежат на одной прямой и точка P не лежит между точками A и A'.
Предположим, что отрезок AA' пересекает прямую a в некоторой точке K. Тогда точка K принадлежит отрезку AP или отрезку $A'P$ (она не может совпадать с точками A, A', так как $A, A' \notin a$).

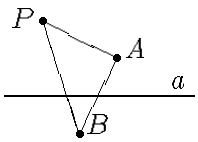
Если $K \in AP$, то точка $A \in \Sigma$, что противоречит выбору точки A. Аналогично, если $K \in A'P$, то $A' \in \Sigma$, противоречие. Следовательно, AA' не пересекает прямую a

б) Пусть $B, B' \in \Sigma$ – две произвольные точки. Тогда возможны четыре случая взаимного расположения точек P, B, B'.



Точки P, B, B' не лежат на одной прямой.
Так как $B \in \Sigma$, отрезок PB пересекает прямую a. Аналогично отрезок PB' пересекает прямую a. Тогда по усилению аксиомы Паша, прямая a не может пересекать отрезок BB'.

Пусть точки B, B', P лежат на одной прямой. Предположим, что отрезок BB' пересекает прямую a в некоторой точке K, то есть $B - K - B'$. Для точек B, B', P возможны три случая взаимного расположения.
Если $P - B - B'$, то $P - B - K$, то есть прямая (PB) пересекает прямую a в точке K внешней отрезку PB, а значит, отрезок PB не может пересечь прямую a, что противоречит выбору точки B.
Если $B - P - B'$, то точка K принадлежит либо отрезку BP (и не принадлежит отрезку PB'), либо принадлежит отрезку PB' (и не принадлежит отрезку BP). В первом случае получаем противоречие с выбором точки B', так как кроме точки K другой точки пересечения отрезка $B'P$ с прямой a быть не может (почему?), а точка $K \notin B'P$. Аналогично во втором случае получим противоречие с выбором точки B.
Если $B - B' - P$, то $K - B' - P$ и отрезок $B'P$ не пересекает прямую a, что противоречит выбору точки B'.
4) Докажем, что если точка $A \in \Omega$, точка $B \in \Sigma$ – произвольные точки, то отрезок AB пересекает прямую a.



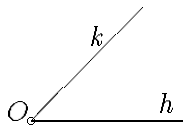
Точки P, A, B не лежат на одной прямой. Требуемое утверждение как и выше следует из аксиомы Паша.

Пусть точки P, A, B лежат на одной прямой и $A - P - B$. Так как точка $B \in \Sigma$, то существует точка $K \in PB$ (то есть $P - K - B$), принадлежащая прямой a. Тогда $A - K - B$ и $K \in a$, то есть отрезок AB пересекает прямую a.
Пусть точки P, A, B лежат на одной прямой и точка P не лежит между точками A и B. Тогда возможны два случая: $P - A - B$ и $A - B - P$. В первом случае существует точка $K \in PB$ (так как $B \in \Sigma$), принадлежащая прямой a. Тогда точка K должна лежать либо на отрезке PA, либо на отрезке PB. Но на отрезке PA точка K лежать не может (так как тогда $PA \cap a = K$, что противоречит выбору

точки $A \in \Omega$), следовательно, точка $K \in AB$, то есть отрезок AB пересекает прямую a. Во втором случае получаем из $A - B - P$ и $B - K - P$, что $A - K - P$, что противоречит выбору точки $A \in \Omega$, то есть так располагаться точки не могут. □

Определение 2.7. Построенные множества Ω и Σ называются *полуплоскостями* с границей a.
Заметим, что граница a не принадлежит полуплоскостям.
Будем говорить, что точки A и A' плоскости α *лежат по одну сторону от прямой* $a \subset \alpha$, если отрезок AA' не пересекает прямую a и будем писать $A, A' \ddot{-} a$. Будем говорить, что точки A и B плоскости α *лежат по разные стороны от прямой* $a \subset \alpha$, если отрезок AB пересекает прямую a и будем писать $A, B \div a$.

Задача 2.2. Докажите, что 1) если $A, A' \ddot{-} a$ и $A', A'' \ddot{-} a$, то $A, A'' \ddot{-} a$; 2) если $A, B \div a$ и $B, A' \div a$, то $A, A' \ddot{-} a$.



Определение 2.8. *Углом* называется пара лучей h и k, исходящих из одной точки O и не лежащих на одной прямой. Точка O называется *вершиной угла*. Лучи h и k называются *сторонами угла* $\angle hk$. Будем обозначать угол $\angle hk$ или $\angle Ohk$ или $\angle AOB$, где $A \in h$, $B \in k$.

Заметим, что так как вершина луча лучу не принадлежит, то и вершина угла не принадлежит углу.

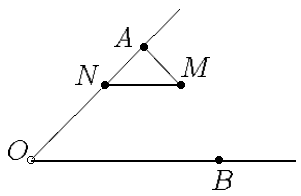
Определение 2.9. *Развернутым углом* будем называть пару взаимно дополнительных лучей.

Определение 2.10. Точка M называется *внутренней точкой угла* $\angle hk$, если точка M и луч h лежат в одной полуплоскости с границей, содержащей луч k и точка M и луч k лежат в одной полуплоскости с границей, содержащей луч h.
Договоримся обозначать прямую, содержащую луч h, через $\bar{h}$. Тогда определение внутренней точки угла в сокращенной записи примет вид:
Точка M называется внутренней точкой угла $\angle hk$, если 1) $M, h \ddot{-} \bar{k}$ и 2) $M, k \ddot{-} \bar{h}$.

Замечание. Говоря, что точка M и луч k лежат по одну сторону от прямой a, мы подразумеваем, что точка M лежит по одну сторону от прямой a с каждой точкой луча k. Суть следующей леммы состоит в следующем: чтобы доказать, что точка M – внутренняя точка угла $\angle hk$ нам достаточно взять с каждого луча по одной точке (можем выбрать любую точку по своему вкусу) и проверить, что эта точка и точка M лежат по одну сторону от прямой, содержащей другую сторону угла.

Лемма 2.1. Пусть дан угол $\angle AOB$. Если $M, A \ddot{-} (OB)$ (точки M и A лежат по одну сторону от прямой (OB)) и $M, B \ddot{-} (OA)$ (точки M и B лежат по одну сторону от прямой (OA)), то M – внутренняя точка угла $\angle AOB$.

Доказательство.



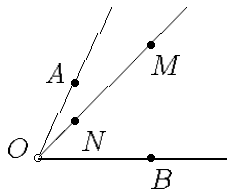
Рассмотрим произвольную точку $N \in [OA)$ луча $[OA)$. Применим аксиому Паша к точкам N, M, A и прямой (OB). По условию $AM \cap (OB) = \emptyset$. Прямая (AN) пересекает прямую (OB) в точке O, являющейся внешней точкой отрезка AN, следовательно, $AN \cap (OB) = \emptyset$, а значит, по аксиоме Паша, $MN \cap (OB) = \emptyset$. Итак, мы доказали, что любая точка N луча $[OA)$ и точка M лежат по одну сторону от прямой (OB), то есть луч $[OA)$ и точка M лежат по одну сторону от прямой (OB). Аналогично доказывается, что точка M и каждая точка луча $[OB)$ лежат по одну сторону от прямой (OA).
Тогда по определению внутренней точки угла получаем, что точка M – внутренняя точка угла $\angle AOB$.
□

Определение 2.11. Множество всех внутренних точек угла называется *внутренней областью угла*.

Определение 2.12. Луч называется *внутренним лучом угла*, если все его точки являются внутренними точками угла.

Теорема 2.14. Если M – внутренняя точка угла $\angle AOB$, то луч $[OM)$ – внутренний луч угла $\angle AOB$.

Доказательство.

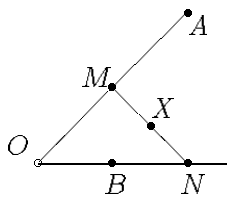


Рассмотрим произвольную точку N луча $[OM)$, отличную от точки M. Так как точка N принадлежит лучу $[OM)$, она лежит с точкой M по одну сторону от точки O, то есть точка O не лежит между точками M и N. Тогда отрезок MN не пересекает прямую (OB), а значит, точки M, N лежат по одну сторону от прямой (OB).

По условию точки A и M лежат по одну сторону от прямой (OB), а значит, (см. задачу) точки A и N лежат по одну сторону от прямой (OB). Аналогично доказывается, что точки B и N лежат по одну сторону от прямой (OA). Таким образом, по доказанной выше лемме точка N является внутренней точкой угла $\angle AOB$. Тогда луч $[OM)$ – внутренний луч угла $\angle AOB$ по определению. □

Теорема 2.15. Пусть дан угол $\angle AOB$ и две произвольные точки на его сторонах: $M \in [OA)$ и $N \in [OB)$. Тогда любая точка X, лежащая между точками M и N, является внутренней точкой угла $\angle AOB$.

Доказательство.



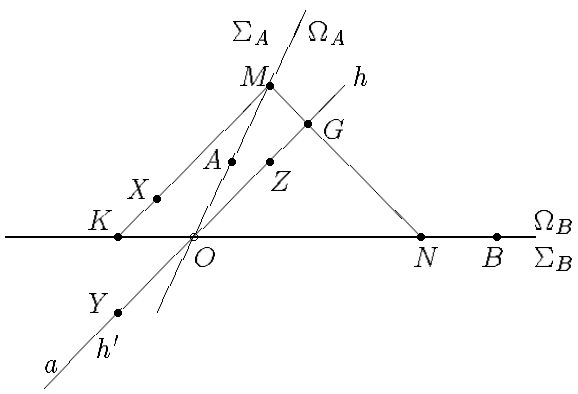
По определению луча имеем точка O не лежит между точками M и A, следовательно, отрезок MA не пересекает прямую (OB), то есть точки M и A лежат по одну сторону от прямой (OB).

Так как точка X лежит между точками M и N и прямая (MX) пересекает прямую (OB) в точке N, которая является внешней к отрезку MX, а значит, отрезок MX не пересекает прямую (OB), то есть точки M и X лежат по одну сторону от прямой (OB).

Итак, $M, A \ddot{-} (OB)$ и $M, X \ddot{-} (OB)$, следовательно, $A, X \ddot{-} (OB)$, то есть точки A и X лежат по одну сторону от прямой (OB). Аналогично доказывается, что точки B и X лежат по одну сторону от прямой (OA). Таким образом, по лемме получаем, что точка X является внутренней точкой угла $\angle AOB$. □

Теорема 2.16. Любой внутренний луч угла, выходящий из его вершины, пересекает любой отрезок с концами на разных сторонах угла.

Доказательство.



Пусть дан угол $\angle AOB$, отрезок MN с концами $M \in [OA)$, $N \in [OB)$ и луч h – внутренний луч угла $\angle AOB$, выходящий из вершины угла $\angle AOB$.

По аксиоме II_2 существует точка K на прямой (OB) такая, что $N - O - K$. Обозначим a прямую, которая является объединением луча h, точки O и луча h', дополнительного лучу h. Прямая a не может проходить через точки K, M, N, так как если $K \in a$, то прямая a совпадет с прямой (OB); если $M \in a$, то $a = (OA)$; если $N \in a$, то $a = (OB)$, что противоречит определению внутреннего луча. Доказательство мы разобьем на два этапа:

1) Применим аксиому Паша к точкам K, M, N и прямой a, чтобы убедиться, что прямая a пересекает отрезок MN;

2) Докажем, что луч $h' \subset a$ не может пересекать отрезок MN и точка O не может лежать на отрезке MN, а значит, отрезок MN пересекает луч h.

1) Заметим, что в силу выбора точки K имеем $K - O - N$, то есть прямая a пересекает отрезок KN (в точке O). Теперь нам нужно доказать, что прямая a не может пересечь отрезок KM. Обозначим Σ_A ту полуплоскость с границей (OA), которая содержит точку K, а через Ω_A – полуплоскость с границей (OA), дополнительную к Σ_A. Так как отрезок KN пересекает прямую (OA), то точка N принадлежит полуплоскости Ω_A. Аналогично, обозначим Ω_B полуплоскость с границей (OB), которая содержит точку M, а через Σ_B – дополнительную ей полуплоскость.

Рассмотрим произвольную точку X отрезка MK, отличную от точек M и K. Докажем, что точка X находится в пересечении полуплоскостей Σ_A и Ω_B. Действительно, прямая (MX) пересекает прямую (OB) в точке K, внешней к отрезку XM, то есть точки X, M лежат по одну сторону от прямой (OB), следовательно, точка X лежит в полуплоскости Ω_B. Аналогично, прямая (KX) пересекает прямую (OA) в точке M, внешней к отрезку KX, а значит, точки K, X лежат в одной полуплоскости с грани-

цей (OA), то есть точка X принадлежит полуплоскости Σ_A.
Посмотрим, в каких полуплоскостях могут лежать точки прямой a. Напомним, что прямая a состоит из трех частей: луча h, точки O и дополнительного луча h'. Пусть точка Z – произвольная точка луча h. Так как h – внутренний луч, то точка Z лежит в одной полуплоскости с точкой N относительно прямой (OA), то есть Z лежит в полуплоскости Ω_A, а значит, не может лежать в дополнительной ей полуплоскости Σ_A (этой полуплоскости по доказанному принадлежат все точки отрезка KM). Таким образом, луч h не может пересекать отрезок KM.
Точка O не может принадлежать отрезку KM, так как в противном случае $(KO) = (KM) = (OB)$ и точка $M \in (OB)$, что противоречит условию.
Рассмотрим произвольную точку $Y \in h'$. По теореме о луче получим $Y - O - Z$. Заметим, что точка $Z \in h$ лежит в одной полуплоскости с точкой M (по определению внутреннего луча), а значит, находится в полуплоскости Ω_B. Так как отрезок YZ пересекает прямую (OB) (в точке O), то точка Y лежит в дополнительной полуплоскости Σ_B. Так как любая точка X отрезка KM принадлежит Ω_B, то луч h' не пересекает отрезок KM.
Итак, прямая a не пересекает отрезок KM и пересекает отрезок KN, следовательно, по аксиоме Паша прямая a пересекает отрезок MN.
2) Так как концы отрезка MN лежат на сторонах угла $\angle AOB$, то по доказанному любая его точка является внутренней точкой угла $\angle AOB$, а значит, лежит в одной полуплоскости с точкой M (полуплоскость Ω_B) и в одной полуплоскости с точкой N (полуплоскость Ω_A). Как мы доказали выше, любая точка $Y \in h'$ лежит в полуплоскости Σ_B, а значит, не может лежать в дополнительной полуплоскости Ω_B, где лежат все точки отрезка MN. Таким образом, луч h' не может пересекать отрезок MN.
Точка O не может лежать на отрезке MN, так как в противном случае, мы получаем, что $(MO) = (ON) = (OB) = (OA)$, что противоречит определению угла.
Итак, от прямой a остался один луч h, который и пересечет отрезок MN. □

Задача 2.3. Докажите, что прямая, содержащая любой внутренний луч угла, выходящий из его вершины, разбивает плоскость угла на две полуплоскости, одной из которых принадлежит одна сторона угла, а другой – другая.

Определение 2.13. *Треугольником* называется фигура, состоящая из точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Данные точки называются *вершинами* треугольника, а данные отрезки называются *сторонами* треугольника.