2 Основания геометрии.

§25. Система аксиом Гильберта. Обзор аксиом и следствий III группы.

В третьей группе аксиом мы вводим основное понятие "конгруэнтность". Договоримся считать слово "равенство" синонимом слова "конгруэнтность" и обозначать " $=$ ". Третья группа аксиом называется *аксиомами конгруэнтности.*

III_1. Если даны отрезок AB и луч с началом в точке A', то существует точка B', принадлежащая этому лучу, такая, что отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку AB (пишут $A'B' = AB$). Любой отрезок конгруэнтен самому себе.

III_2. Если отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку AB и отрезок $A''B''$ конгруэнтен отрезку AB, то отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку $A''B''$.

Замечание. Из аксиомы III_2 следует симметричность отношения конгруэнтности, то есть если $A'B' = A''B''$, то $A''B'' = A'B'$. Действительно, в этой аксиоме мы можем поменять местами фразы "отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку AB" и "отрезок $A''B''$ конгруэнтен отрезку AB". Тогда получим, что отрезок $A''B''$ конгруэнтен отрезку $A'B'$.

III_3. Пусть две тройки точек $A - B - C$ и $A' - B' - C'$. Тогда если отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку AB и отрезок $B'C'$ конгруэнтен отрезку BC, то отрезок $A'C'$ конгруэнтен отрезку AC.

Определение 2.14. *Флагом* называется тройка (O, h, λ), состоящая из полуплоскости λ, луча h, принадлежащего границе полуплоскости λ и точки O – вершины луча h.

III_4. Пусть даны угол $\angle hk$ и флаг (O', h', λ'). Тогда в полуплоскости λ' существует единственный луч k', выходящий из точки O' такой, что угол $\angle hk$ конгруэнтен углу $\angle h'k'$ (пишут $\angle hk = \angle h'k'$). Каждый угол конгруэнтен самому себе.

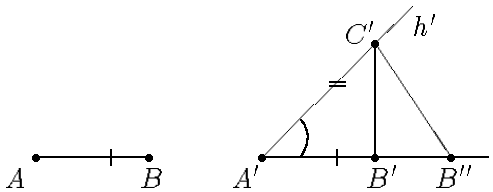
III_5. Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой и точки $A'B'C'$ также не лежат на одной прямой. Если $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Замечание. Транзитивности равенства углов у нас еще нет!

Докажем усиление аксиомы III_1.

Теорема 2.17. В аксиоме III_1 точка B' единственна.

Доказательство.



Пусть на луче с началом в точке A' существует две различные точки B' и B'' такие, что $A'B' = AB$ и $A'B'' = AB$. Тогда по аксиоме III_2 $A'B' = A'B''$.

Рассмотрим произвольный луч с началом в точке A', отличный от луча $[A'B')$ и не дополнительный к нему (существование такого луча гарантируется существованием как минимум трех точек, не лежащих на одной прямой). Возьмем на луче h' любую точку C'. Применим аксиому III_5 к точкам A', C', B' и A', C', B'' (отрезок $A'C'$ равен самому себе по аксиоме III_1). Тогда $\angle A'C'B' = \angle A'C'B''$.

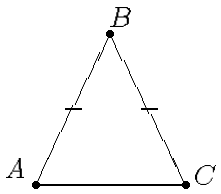
Так как точки B' и B'' различны, лучи $[C'B')$ и $[C'B'')$ также различны. Кроме того, так как точки B' и B'' лежат на одном луче с началом в точке A', то точка A' не лежит между точками B' и B''. Тогда прямые $(A'C')$ и $(A'B')$ пересекаются в точке A' внешней к отрезку $B'B''$, а значит, отрезок $B'B''$ не пересекает прямую $(A'C')$ и точки B', B'' лежат в одной полуплоскости с границей $(A'C')$. Следовательно, лучи $[C'B')$ и $[C'B'')$ лежат в одной полуплоскости с границей $(A'C')$ (докажите!). Итак, мы получаем, что в одну полуплоскость от точки C' отложено два угла равных данному (напомним, что угол равен сам себе), что противоречит аксиоме III_4. Таким образом, точка B' единственна. □

Определение 2.15. Треугольник ΔABC назовем *равным* (или *конгруэнтным*) треугольнику $\Delta A'B'C'$, если $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$. Будем писать $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Определение 2.16. Треугольник называется *равнобедренным*, если он имеет две равные стороны. Эти стороны называются *боковыми*, а третья сторона равнобедренного треугольника называется *основанием.*

Теорема 2.18. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

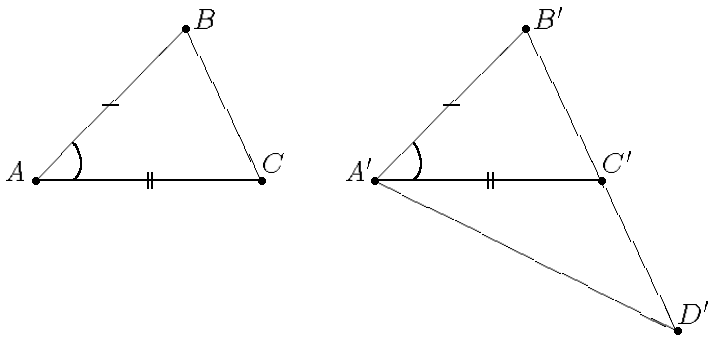
Доказательство.



Применим аксиому III_5 (с учетом аксиомы III_4) к двум тройкам точек B, A, C и B, C, A. Получим $\angle BAC = \angle BCA$. $\square$

Теорема 2.19. (первый признак равенства треугольников)
Пусть даны треугольники ABC и $A'B'C'$ такие, что $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$. Тогда $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Доказательство.



Применим аксиому III_5 сначала к тройкам точек A, B, C и A', B', C' – получим $\angle B = \angle B'$, а затем, к точкам A, C, B и A', C', B' – получим $\angle C = \angle C'$. Нам осталось доказать, что $BC = B'C'$. Допустим, что это не так. Тогда на луче $[B'C')$ построим точку D' такую, что $B'D' = BC$ (это позволяет сделать аксиома III_1). Применим аксиому III_5 к точкам B, A, C и B', A', D' – получим $\angle BAC = \angle B'A'D'$. Тогда в одной полуплоскости мы получили два угла: $\angle B'A'D'$ и $\angle B'A'C'$, равных углу $\angle BAC$, что противоречит аксиоме III_4.
Следовательно, наше предположение не верно и $BC = B'C'$, то есть треугольники ABC и $A'B'C'$ равны по определению. $\square$

Задача 2.4. Докажите, что отношение конгруэнтности углов симметрично и транзитивно.
Далее определяются понятия "больше" и "меньше" для отрезков и углов.

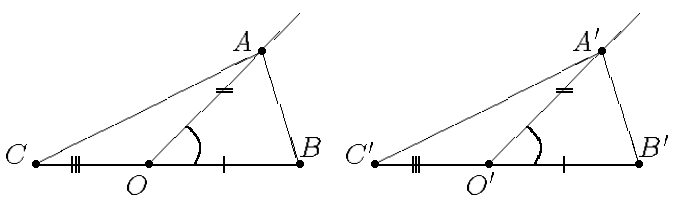
Определение 2.17. Будем говорить, что отрезок AB *больше* отрезка CD, если на отрезке AB существует точка X такая, что $AX = CD$. При этом будем говорить, что отрезок CD *меньше* отрезка AB. Будем писать $AB > CD$.

Определение 2.18. Будем говорить, что угол $\angle hk$ *больше* угла $\angle h'k'$, если существует внутренний луч ℓ угла $\angle hk$ такой, что $\angle h\ell = \angle h'k'$. При этом будем говорить, что угол $\angle h'k'$ *меньше* угла $\angle hk$. Будем писать $\angle hk > \angle h'k'$.

Определение 2.19. Два угла называются *смежными*, если у них общая вершина, одна общая сторона, а две другие стороны лежат на одной прямой.

Теорема 2.20. Если два угла равны, то равны им смежные углы.

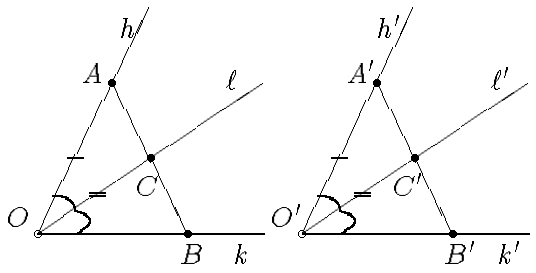
Доказательство.



Пусть даны два равных угла $\angle AOB$ и $\angle A'O'B'$. Согласно аксиоме III_1 мы можем выбрать точки A, B, A', B' так, чтобы $OA = O'A'$, $OB = O'B'$. Для дополнительных углов выберем точки C, C' так, чтобы $OC = OC'$. По первому признаку равенства треугольников $\Delta AOB = \Delta A'O'B'$, следовательно, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ и $AB = A'B'$.
По аксиоме III_3 равны отрезки $CB = C'B'$. Тогда по первому признаку равны треугольники $\Delta CAB = \Delta C'A'B'$, то есть $\angle ACB = \angle A'C'B'$ и $AC = A'C'$. Наконец, по первому признаку равны $\Delta ACO = \Delta A'C'O'$, следовательно, $\angle AOC = \angle A'O'C'$. $\square$

Лемма 2.2. Пусть даны углы $\angle Ohk$ и $\angle O'h'k'$. Если луч ℓ – внутренний луч угла $\angle Ohk$ с началом в точке O, а луч ℓ' такой, что $\angle h\ell = \angle h'\ell'$ и $\angle k\ell = \angle k'\ell'$, то луч ℓ' – внутренний луч угла $\angle O'h'k'$ и $\angle Ohk = \angle O'h'k'$.

Доказательство.



Возьмем на луче h произвольно точку A, а на луче k – точку B. Тогда отрезок AB с концами на сторонах угла пересечет внутренний луч ℓ в некоторой точке C. На луче h' построим точку A' такую, что $OA = OA'$ (по аксиоме III_1), а на луче ℓ' построим точку C' такую, что $OC = O'C'$. На луче, дополнительном к $[C'A')$ построим точку B' такую, что $CB = C'B'$. Наша ближайшая задача доказать, что точка B' лежит на луче k'.

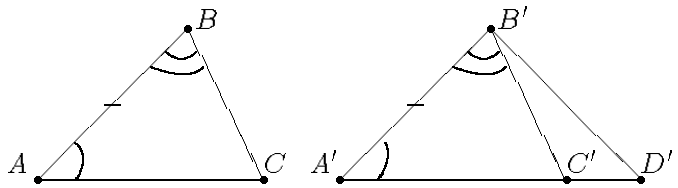
По первому признаку равенства $\Delta AOC = \Delta A'O'C'$, следовательно, $AC = A'C'$ и $\angle ACO = \angle A'C'O'$. Тогда равны и смежные им углы $\angle OCB = \angle O'C'B'$. Тогда по первому признаку равенства равны $\Delta OCB = \Delta O'C'B'$, следовательно, равны углы $\angle COB = \angle C'O'B'$. Но по условию $\angle COB = \angle \ell' k'$. Так как лучи $[O'B')$ и k' лежат в одной полуплоскости с границей $\bar{\ell}'$, то по аксиоме III_4 они совпадают, то есть $B' \in k'$.

Так как точки A' и B' лежат на сторонах угла $\angle h'k'$, то точка C', которая лежит между ними (по построению), будет внутренней точкой этого угла. Через точку C' проходит луч ℓ', а значит, он будет внутренним лучом угла $\angle h'k'$.

Нам осталось доказать, что $\angle hk = \angle h'k'$. Имеем $AC = A'C'$ и $CB = C'B'$. Тогда по аксиоме III_3 получим $AB = A'B'$. Кроме того, мы доказали, что $\angle OAB = \angle O'A'B'$. Тогда по первому признаку $\Delta OAB = \Delta O'A'B'$, следовательно, $\angle AOB = \angle A'O'B'$. □

Теорема 2.21. (второй признак равенства треугольников)
Пусть даны треугольники ABC и $A'B'C'$ такие, что $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$. Тогда $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Доказательство.

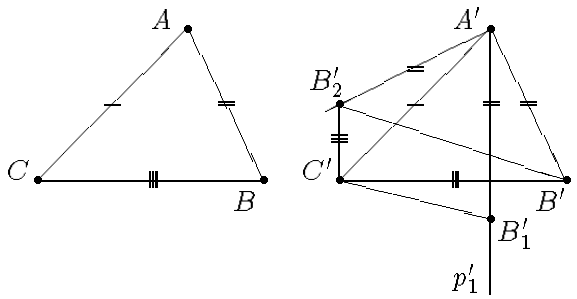


Предположим, что $AC \neq A'C'$. Тогда на луче $[A'C')$ существует точка D' такая, что $AC = A'D'$. По первому признаку $\Delta ABC = \Delta A'B'D'$, следовательно, $\angle ABC = \angle A'B'D'$. Мы получаем, что в одну полуплоскость от луча $[B'A')$ отложены два различных равных угла, что противоречит аксиоме III_4.

Итак, наше предположение не верно и $AC = A'C'$. Тогда треугольники ΔABC и $\Delta A'B'C'$ равны по первому признаку. □

Теорема 2.22. (третий признак равенства треугольников)
Пусть даны треугольники ABC и $A'B'C'$ такие, что $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Тогда $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Доказательство.



Предположим, что $\angle BAC \neq \angle B'A'C'$. Пусть $\angle BAC > \angle B'A'C'$ (иначе переобозначим треугольники). Тогда существует внутренний луч p_1' угла $\angle B'A'C'$ такой, что угол $\angle [A'C') p_1' = \angle BAC$. На луче p_1' построим точку B_1' такую, что $A'B_1' = AB$. Тогда треугольники $\Delta ABC = \Delta A'B_1'C'$ равны по первому признаку.

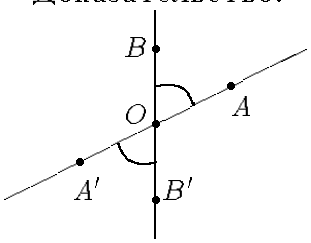
Аналогично построим треугольник $\Delta A'B_2'C' = \Delta ABC$ в другой полуплоскости с границей $(A'C')$. Тогда получим $A'B' = A'B_2'$ и $C'B_2' = C'B'$.

Мы получили два равнобедренных треугольника $\Delta B_2'A'B'$ и $\Delta B_2'C'B'$. Из этих треугольников мы получаем равенство углов $\angle A'B_2'B' = \angle A'B'B_2'$ и $\angle B'B_2'C' = \angle B_2'B'C'$. Тогда равны углы $\angle A'B_2'C' = \angle A'B'C'$, а значит, треугольники $\Delta A'B_2'C' = \Delta A'B'C'$ по первому признаку. Следовательно, равны их углы $\angle B_2'A'C' = \angle C'A'B'$. Но $\angle B_2'A'C' = \angle C'A'B_1'$ по построению, следовательно, в одну полуплоскость от луча $[A'C')$ мы отложили два равных угла $\angle C'A'B'$ и $\angle C'A'B_1'$, что противоречит аксиоме III_4. Значит наше предположение не верно и $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Тогда треугольники ABC и $A'B'C'$ равны по первому признаку. □

Определение 2.20. Углы с общей вершиной, стороны которых попарно являются взаимно дополнительными лучами, называются *вертикальными*.

Теорема 2.23. Вертикальные углы равны.

Доказательство.

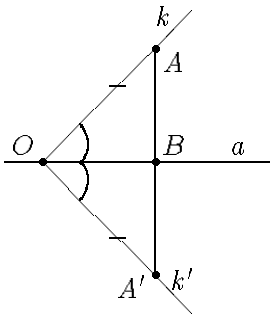


Пусть даны два вертикальных угла $\angle AOB$ и $\angle A'OB'$. Угол $\angle B'OA$ является смежным как для угла $\angle AOB$ так и для угла $\angle A'OB'$. Угол $\angle B'OA$ равен сам себе и тогда углы $\angle AOB$ и $\angle A'OB'$ равны как смежные равным. $\square$

Определение 2.21. Угол, равный смежному, называется *прямым*. Обозначение d.

Предложение 2.1. Прямые углы существуют.

Доказательство.

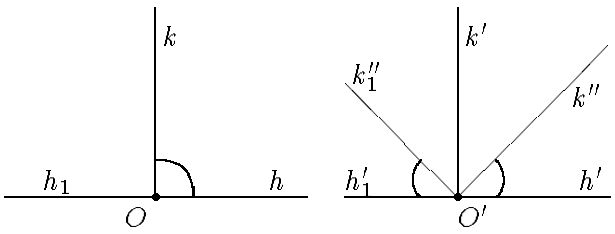


Рассмотрим плоскость α и прямую a на ней. Возьмем точку O на прямой a. От луча с началом в точке O в каждую из полуплоскостей с границей a отложим лучи k и k' так, чтобы получились равные углы. На лучах k и k' возьмем точки A и A' так, чтобы $OA = OA'$. Так как точки лежат в разных полуплоскостях с границей a, отрезок AA' пересекает прямую a. Обозначим точку пересечения B. Возможны два случая: 1) точки A, A', O лежат на одной прямой. Докажите, что в этом случае прямые (AA') и a образуют четыре равных угла.

2) точки A, A', O не лежат на одной прямой. Тогда треугольники AOB и $A'OB$ равны по первому признаку, следовательно, равны углы $\angle OBA = \angle OBA'$. Так как эти углы являются смежными, они являются прямыми по определению. $\square$

Теорема 2.24. Все прямые углы равны.

Доказательство.



Пусть даны прямые углы $\angle hk$ и $\angle h'k'$. Обозначим смежные им $\angle h_1k$ и $\angle h_1'k'$, соответственно. Предположим, что прямые углы $\angle hk$ и $\angle h'k'$ не равны. Пусть угол $\angle h'k' > \angle hk$ (если это не так, то мы переобозначим данные углы). От луча h' отложим луч k'' такой, что $\angle h'k'' = \angle hk$. Тогда по определению "больше", "меньше" для углов луч k'' является внутренним лучом угла $\angle h'k'$. От луча h_1' также отложим угол $\angle h_1'k_1'' = \angle hk$.

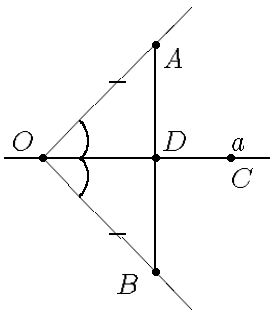
Так как углы $\angle h'k' = \angle h_1'k_1''$ по определению прямого угла, то луч k_1'' является внутренним лучом угла $\angle h_1'k'$, а значит, лучи k_1'' и k'' не могут совпадать, так как лежат в разных полуплоскостях с границей $\bar{k}'$, следовательно, $\angle h_1'k_1'' \neq \angle h_1'k''$. С другой стороны, заметим, что мы строили углы $\angle hk$ и $\angle h'k''$ равными, а значит, будут равны и смежные им углы $\angle h_1k$ и $h_1'k''$. Так как угол $\angle kh$ – прямой, то он равен смежному, то есть углу $\angle kh_1$. Таким образом, мы получаем, что $\angle h_1'k'' = \angle h_1'k_1''$, что противоречит аксиоме III_4. $\square$

Задача 2.5. Докажите, что угол, равный прямому, прямой.

Определение 2.22. Две прямые называются *перпендикулярными*, если при пересечении они образуют прямой угол.

Теорема 2.25. Через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.

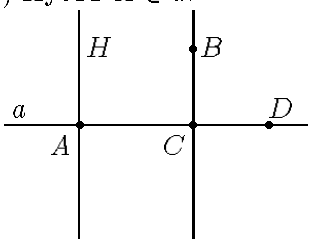
Доказательство. Пусть $A \notin a$.



На прямой a возьмем произвольную точку O и проведем отрезок OA. Также на прямой a возьмем точку C, отличную от точки O. Рассмотрим плоскость (OAC). В этой плоскости в полуплоскость, не содержащую точку A отложим угол $\angle COB$, равный углу $\angle COA$. При этом точку B возьмем так, чтобы $OB = OA$. Так как точки A и B лежат в разных полуплоскостях с границей a, то отрезок AB пересекает прямую a в некоторой точке, которую мы обозначим D. Возможны два случая: а) точки A, O, B лежат на одной прямой (и, следовательно, $O = D$).

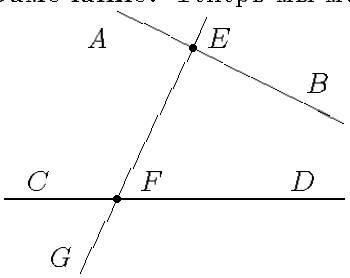
Тогда угол $\angle AOC$ – прямой (как равный смежному) и прямая AO – искомая; б) точки A, O, B не лежат на одной прямой (и, следовательно, $O \neq D$). Тогда треугольники ΔAOD и ΔBOD равны по первому признаку. Следовательно, $\angle ADO = \angle BDO$ и угол $\angle ADO$ прямой по определению. Тогда по определению прямая (AB) является искомой прямой.

2) Пусть $A \in a$.



Возьмем произвольную точку B, не принадлежащую прямой a и построим перпендикулярную прямую (BC) как в пункте 1). Затем от луча $[AD)$ в одну из полуплоскостей плоскости (BCD) отложим угол $\angle HAD$, равный углу $\angle BCD$. По задаче угол $\angle HAD$ является прямым, а значит, прямая (HA) – искомая перпендикулярная прямая. □

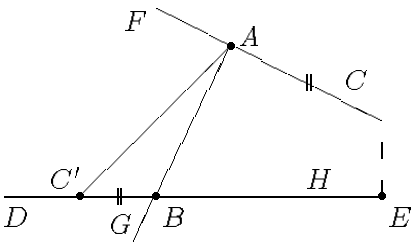
Замечание. Теперь мы можем ввести понятие осевой симметрии.



Определение 2.23. Пусть даны прямые (AB), (CD) и (EF). Углы $\angle AEF$ и $\angle DFE$ (также как и углы $\angle BEF$ и $\angle CFE$) называются *внутренними накрест лежащими углами*. Углы $\angle GFD$ и $\angle FEB$ (также как и углы $\angle GFC$ и $\angle FEA$ и т.д.) называются *соответственными* (или *соответствующими*) углами.

Лемма 2.3. Если при пересечении двух прямых третьей прямой накрест лежащие углы равны или соответственные углы равны, то данные прямые не пересекаются.

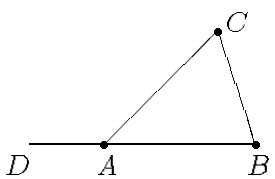
Доказательство.



Пусть прямые (FC) и (DB) пересечены прямой (AB). Обозначим эти прямые так, чтобы точки C и D лежали по разные стороны от прямой (AB).

1) Пусть накрест лежащие углы $\angle DBA = \angle CAB$. Нам нужно доказать, что прямые (FC) и (DB) не пересекаются. Предположим противное, то есть $(FC) \cap (DB) = E$. На луче $[BD)$ отложим отрезок BC', равный отрезку AE, то есть $BC' = AE$. Тогда треугольники $\Delta C'BA$ и ΔEAB равны по первому признаку, следовательно, $\angle ABE = \angle BAC'$. С другой стороны, $\angle ABE = \angle FAB$ как смежные равным, то есть $\angle FAB = \angle BAC'$, что противоречит аксиоме III_4.

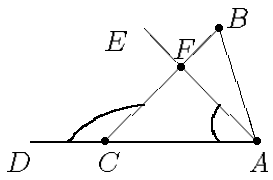
2) Пусть равны соответствующие углы $\angle GBH = \angle BAC$. Тогда углы $\angle GBH = \angle DBA$ равны как вертикальные и по доказанному в пункте 1) прямые (FC) и (DB) не пересекаются. □



Определение 2.24. Пусть дан треугольник ABC. Рассмотрим луч $[AD)$, дополнительный лучу $[AB)$. Тогда угол $\angle DAC$ называется *внешним углом* треугольника ABC.

Теорема 2.26. (о внешнем угле треугольника)
Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла треугольника, не смежного с ним.

Доказательство.



Докажем, что $\angle DCB > \angle CAB$. Предположим, что это не так, то есть либо 1) $\angle DCB = \angle CAB$, либо 2) $\angle DCB < \angle CAB$.

1) $\angle DCB = \angle CAB$. Тогда по лемме прямые (CB) и (AB) не пересекаются, что противоречит условию.

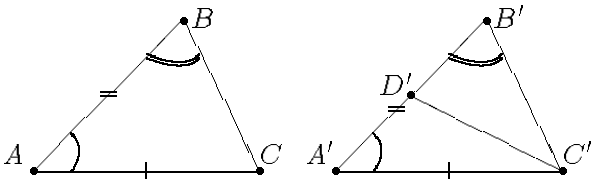
2) $\angle DCB < \angle CAB$. Тогда от луча $[AC)$ в полуплоскость, содержащую точку B отложим угол $\angle CAE = \angle DCB$.

Тогда луч $[AE)$ является внутренним лучом угла $\angle CAB$ и пересекает отрезок CB с концами на сторонах этого угла. Обозначим точку пересечения F. С другой стороны, углы $\angle DCB$ и $\angle CAE$ – равные соответственные углы, а значит, по лемме прямые (CB) и (AE) не пересекаются. Мы получили противоречие, следовательно, предположение не верно и $\angle DCB > \angle CAB$.

Задача 2.6. Докажите утверждение теоремы для другого внутреннего угла треугольника ABC. □

Теорема 2.27. (четвертый признак равенства треугольников)
Если в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $AC = A'C'$, то $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Доказательство.



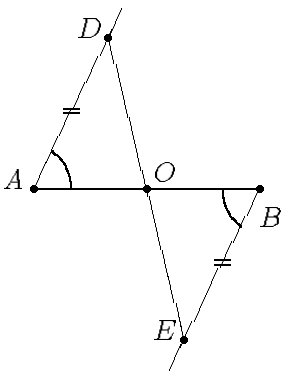
Предположим, что $AB \neq A'B'$. Допустим, что $AB < A'B'$ (если это не так, то переобозначим треугольники). Тогда на отрезке $A'B'$ существует точка D' такая, что $AB = A'D'$. По первому признаку треугольники ABC и $A'D'C'$ равны, а значит, $\angle ABC = \angle A'D'C'$. Тогда в треугольнике $\Delta D'B'C'$ получаем, что внешний угол $\angle A'D'C'$ равен внутреннему углу $\angle D'B'C'$, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника.

Таким образом, наше предположение не верно и $AB = A'B'$, а значит, треугольники ΔABC и $\Delta A'B'C'$ равны по второму признаку. □

Определение 2.25. *Серединой* отрезка AB называется точка O, принадлежащая прямой (AB) такая, что $AO = OB$.

Теорема 2.28. У любого отрезка существует середина. Середина отрезка является его внутренней точкой.

Доказательство.



Докажем сначала, что середина отрезка является внутренней точкой отрезка. Предположим, что это не так, то есть точка O не лежит между точками A и B. Пусть $A-B-O$. Тогда отрезок $AO > OB$. Но по определению середины отрезка $AO = OB$. Мы получили противоречие, а значит, середина отрезка (если она существует) является внутренней точкой отрезка.

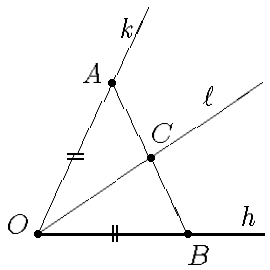
Докажем, что каждый отрезок имеет середину. Возьмем произвольную плоскость, содержащую прямую (AB) и построим в разных полуплоскостях с границей (AB) два равных угла $\angle DAB$ и $\angle ABE$.

Точки D и E возьмем так, чтобы $AD = BE$. Точки D и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AB), а значит, отрезок DE пересекает прямую (AB) в некоторой точке, которую мы обозначим O. Углы $\angle AOD$ и $\angle BOE$ равны как вертикальные, а значит, треугольники AOD и BOE равны по четвертому признаку. Тогда $AO = OB$ и точка O является серединой отрезка AB по определению. □

Определение 2.26. *Биссектрисой* угла $\angle hk$ называется внутренний луч ℓ этого угла, выходящий из вершины этого угла и такой, что $\angle h\ell = \angle \ell k$.

Теорема 2.29. Каждый угол имеет биссектрису. Биссектриса угла является внутренним лучом угла.

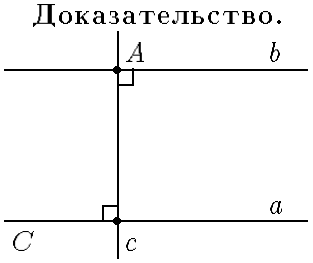
Доказательство.



На сторонах данного угла возьмем точки A и B так, чтобы $OA = OB$. Пусть C – середина отрезка AB (как мы только что доказали, середина существует и является внутренней точкой отрезка). Тогда луч $[OC) \equiv \ell$ будет внутренним лучом угла $\angle hk$. Кроме того, треугольники ΔACO и ΔBCO равны по третьему признаку. Откуда получаем, что углы $\angle k\ell$ и $\angle h\ell$ равны, то есть луч ℓ является биссектрисой угла $\angle hk$. $\square$

Теорема 2.30. Для любой прямой a и точки $A \notin a$ в плоскости определяемой данными прямой и точкой, существует прямая b, проходящая через точку A и не пересекающая прямую a.

Доказательство.



Проведем через точку A прямую c, перпендикулярную прямой a. Проведем через точку A прямую b, перпендикулярную прямой c. Для прямых a, b и прямой c мы получаем равные (прямые) накрест лежащие углы, а значит, прямые a и b не пересекаются по доказанной выше лемме. $\square$

§26. Система аксиом Гильберта. Обзор аксиом и следствий IV группы.

Аксиомы непрерывности.

IV_1. (аксиома Архимеда).

Пусть даны отрезки AB и CD. Тогда на прямой (AB) существует конечное множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такие, что $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3$, …, $A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$, $A - B - A_n$ и $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$.

IV_2. (аксиома Кантора).

Пусть на произвольной прямой a дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, …, из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего и, кроме того, для любого отрезка CD существует натуральное число n такое, что $A_nB_n < CD$. Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков данной последовательности.

Замечание. На основе аксиом I – IV групп можно построить теорию измерения отрезков и углов; доказать теоремы о пересечении прямой и окружности; теорему о пересечении двух окружностей. Также можно доказать, что равные отрезки имеют равные длины и равные углы имеют равные величины.

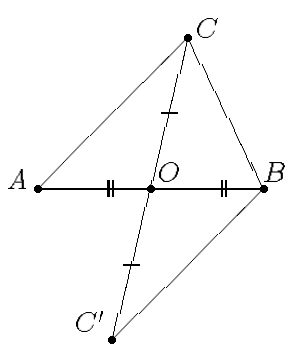
Для того, чтобы построить теорию измерения площадей и объемов необходим пятый постулат Евклида.

Определение 2.27. Геометрия, построенная на системе аксиом I – IV групп, называется *абсолютной геометрией.*

Договоримся обозначать величину угла $\angle A$ через $\hat{A}$. Обозначим $\sigma(ABC) = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ сумму углов треугольника ΔABC.

Теорема 2.31. Каков бы ни был треугольник ΔABC существует треугольник $\Delta A_1B_1C_1$ с суммой углов $\sigma(A_1B_1C_1) = \sigma(ABC)$ и $\hat{C}_1 \leq \frac{1}{2}\hat{C}$.

Доказательство.

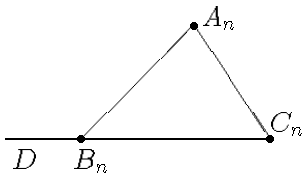


Пусть дан треугольник ABC. Обозначим O – середину отрезка AB. На луче $[CO)$ построим точку C' такую, что $CO = OC'$. Предположим, что $\angle OCB \leq \angle OCA$ (если это не так, то переобозначим точки A и B.) Рассмотрим треугольник $\Delta CBC'$. Для него $\sigma(CBC') = \sigma(COB) + \sigma(BOC') - 2d$ (Напомним, что d обозначает прямой угол). Заметим, что треугольники $\Delta OBC' = \Delta OAC$, следовательно, $\sigma(OBC') = \sigma(OAC)$. Тогда $\sigma(CBC') = \sigma(COB) + \sigma(BOC') - 2d = \sigma(COB) + \sigma(AOC) - 2d = \sigma(ABC)$.

Итак, переобозначая точки в треугольнике $\Delta CBC'$: $C \to C_1$, $B \to A_1$, $C' \to B_1$, получим искомый треугольник $\Delta A_1B_1C_1$. Так как угол $\angle C'CB \leq \angle ACC'$, то в построенном треугольнике $\hat{C}_1 \leq \frac{1}{2}\hat{C}$. $\square$

Теорема 2.32. (Лежандра о сумме углов треугольника)
Сумма углов любого треугольника не превосходит $2d$ (то есть двух прямых).

Доказательство. Пусть существует треугольник ΔABC такой, что сумма его углов $\sigma(ABC) = 2d + \varepsilon$, где ε – некоторое положительное вещественное число. Построим семейство треугольников $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$, ..., $\Delta A_nB_nC_n$ таких, что $\sigma(ABC) = \ldots = \sigma(A_nB_nC_n)$ и $\hat{C}_1 \leq \frac{1}{2}\angle C$, $\hat{C}_2 \leq \frac{1}{2}\hat{C}_1 \leq \frac{1}{4}\hat{C}$, ..., $\hat{C}_n \leq \frac{1}{2^n}\hat{C}$. Выберем натуральное число n так, чтобы $\hat{C}_n \leq \frac{1}{2^n}\hat{C} < \varepsilon$. Тогда получим $2d + \varepsilon = \sigma(ABC) = \sigma(A_nB_nC_n) = \hat{A}_n + \hat{B}_n + \hat{C}_n < \hat{A}_n + \hat{B}_n + \varepsilon$, следовательно, $\hat{A}_n + \hat{B}_n > 2d$.



С другой стороны, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle DB_nA_n > \angle A_n$. Так как углы $\angle DB_nA_n$ и $\angle B_n$ смежные углы, то $\hat{B}_n + \hat{D}B_nA_n = 2d$, следовательно, $\hat{B}_n + \hat{A}_n < 2d$. Итак, мы получили противоречие, а значит, наше предположение не верно и сумма углов любого треугольника не превосходит двух прямых. □

Замечание. Теперь мы можем ввести понятие осевой симметрии на плоскости. Мы уже умеем проводить через точку прямую, перпендикулярную данной (на плоскости такая прямая единственна иначе придем к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника) и умеем откладывать отрезок, равный данному. Можно доказать, что осевая симметрия является движением, то есть сохраняет расстояния между любой парой точек. Также можно доказать, что осевая симметрия переводит прямую в прямую, отрезок в отрезок, луч в луч (доказательство опирается на координатный метод, использующий прямоугольные декартовы системы координат, который уже может быть введен); сохраняет величину угла, в частности, переводит перпендикулярные прямые в перпендикулярные.

Аналогично можно ввести понятие центральной симметрии.

§27. Пятый постулат Евклида и предложения ему эквивалентные.

Далее, если не оговорено противное, мы предполагаем, что все рассматриваемые объекты находятся в одной плоскости.

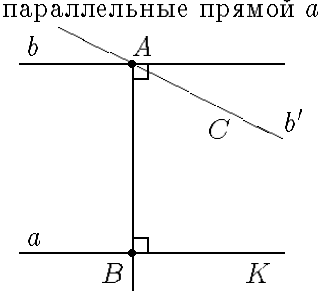
V. (аксиома параллельности)
Всякий раз когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми обрзует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекаются, причем с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Определение 2.28. Две прямые, лежащие в одной плоскости, назовем *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Возникает вопрос: почему пятый постулат Евклида называется аксиомой параллельности? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

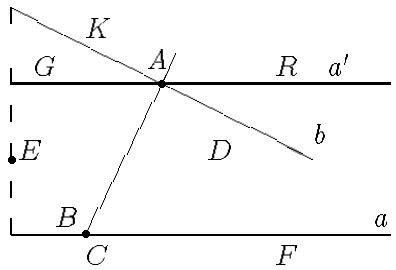
Теорема 2.33. (первый эквивалент)
$V \Leftrightarrow$ Э: Пусть дана прямая a и точка A, не лежащая на этой прямой. Через точку A проходит не более одной прямой, параллельной прямой a.

Доказательство. $V \Rightarrow$ Э. Мы сейчас можем пользоваться пятым постулатом Евклида. Нам даны прямая a и точка $A \notin a$. Нужно доказать, что через точку A не могут проходить две прямые, параллельные прямой a.



Мы знаем, что одна прямая, параллельная a и проходящая через точку A существует (прямая b на картинке. Вспомните, как она строится). Предположим, что существует еще одна прямая b', проходящая через точку A и параллельная прямой a. Так как прямые b и b' различны, один из углов, образованных прямой b' и прямой (AB) будет меньше прямого. Обозначим его $\angle BAC$. Тогда $\angle BAC + \angle ABK < d + d = 2d$, а значит, по пятому постулату прямые b' и a пересекаются.

Э $\Rightarrow V$. Мы можем использовать как теорему утверждение Э. Нам даны две прямые a и b, которые пересечены прямой c так, что сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых. Нужно доказать, что 1) прямые a и b пересекаются; 2) они пересекаются с той стороны, с которой сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых.



Пусть даны три прямые a, b, c такие, что $\angle BAD + \angle ABF < 2d$. Нам нужно доказать, во-первых, что прямые a и b пересекаются и, во-вторых, доказать, что они пересекаются с в той полуплоскости, в которой лежат точки D и F.

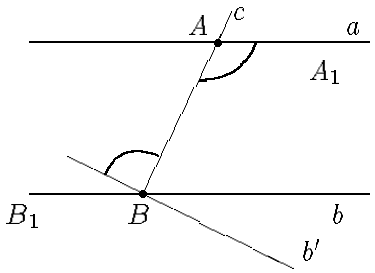
1) Отложим от луча $[AB)$ угол $\angle GAB = \angle ABF$. Тогда по лемме прямые a и $a' \equiv (GA)$ не пересекаются, то есть параллельны. Так как углы $\angle BAR$ и $\angle BAD$ не равны, то прямые a' и b различны. В силу утверждения Э не может быть двух прямых, проходящих через одну точку и не пересекающих прямую a. Таким образом, прямая b пересекает прямую a.

2) Предположим, что прямые a и b пересекаются в точке E, которая лежит в полуплоскости, не содержащей точку D. Тогда рассмотрим треугольник ΔABE. Внешний угол $\angle ABF$ этого треугольника меньше его внутреннего угла $\angle BAK$, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Мы пришли к противоречию, а значит, прямые a и b пересекаются с той стороны, с которой сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$. □

Следствие. Пятый постулат Евклида равносилен утверждению: Через любую точку A, не лежащую на прямой a, проходит единственная прямая, параллельная прямой a. □

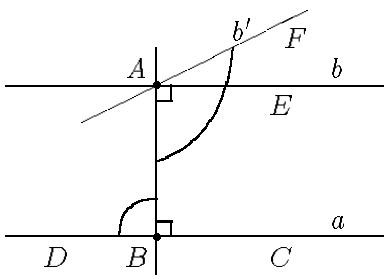
Теорема 2.34. (второй эквивалент)
$V \Leftrightarrow$ Э: Внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых равны.

Доказательство. $V \Rightarrow$ Э.



Пусть даны две параллельные прямые a и b. Нам нужно доказать, что $\angle A_1AB = \angle B_1BA$. Предположим, что это не так. Построим прямую b' такую, что внутренние накрест лежащие углы равны. Тогда по лемме прямые a и b' параллельны, а по предыдущей теореме пятый постулат эквивалентен тому, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. Тогда прямые b и b' должны совпасть и $\angle A_1AB = \angle B_1BA$. □

Э $\Rightarrow V$.

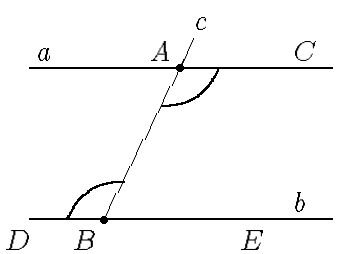


Докажем, что верен первый эквивалент пятого постулата, тогда будет верен и пятый постулат. Нам дано: прямая a и не лежащая на ней точка A. Нужно доказать, что через точку A проходит не более одной прямой, паралелльной a. Одну прямую, параллельную a мы строить умеем: через точку a проводим перпендикуляр к прямой a и через точку A еще один перпендикуляр к прямой (AB). Мы получаем прямую b, параллельную прямой a (по лемме). Предположим, что существует еще одна прямая b', проходящая через точку A параллельно прямой a.

Тогда по утверждению Э прямые $a, b', (AB)$ образуют равные накрестлежащие углы $\angle DBA$ и $\angle BAF$. С другой стороны, угол $\angle ABC$ – прямой и смежный с углом $\angle DBA$, следовательно, угол $\angle DBA$ прямой, а значит, и равный ему угол $\angle BAF$ также прямой. Мы получаем, что в одну полуплоскость от луча $[AB)$ отложены два различных равных угла, что противоречит аксиоме III_4. Итак, наше предположение не верно, а значит, через точку A проходит не более одной прямой, параллельной данной, следовательно, верен пятый постулат. □

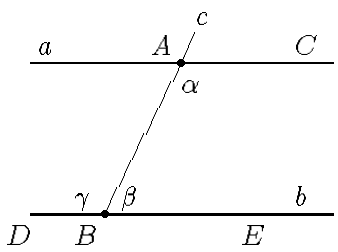
Теорема 2.35. (третий эквивалент)
$V \Leftrightarrow$ Э: Сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых равна $2d$.

Доказательство. $V \Rightarrow$ Э.



Пусть даны две параллельные прямые a и b, пересеченные прямой c. Так как имеет место пятый постулат Евклида, то имеет место второй эквивалент, а значит, внутренние накрест лежащие углы равны, то есть $\angle CAB = \angle DBA$. Тогда $\angle CAB + \angle EBA = \angle DBA + \angle BEA = 2d$.

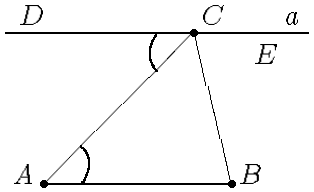
Э $\Rightarrow V$.



Докажем, что в данном случае имеет место второй эквивалент. Нам даны две параллельные прямые a и b, пересеченные третьей прямой c. Нужно доказать, что внутренние накрест лежащие углы α и γ равны. Так как верно утверждение Э, $\alpha + \beta = 2d$. Так как γ и β – смежные углы, $\gamma + \beta = 2d$. Вычитая из первого равенства второе, получим $\alpha = \gamma$, то есть имеет место второй эквивалент, а значит, имеет место пятый постулат Евклида.□

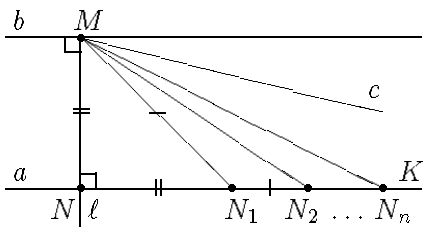
Теорема 2.36. (четвертый эквивалент)
$V \Leftrightarrow$ Э: Сумма углов любого треугольника равна двум прямым.

Доказательство. $V \Rightarrow$ Э.



Рассмотрим произвольный треугольник ΔABC. Проведем через точку C прямую, параллельную прямой (AB). Тогда углы $\angle BAC = \angle DCA$ равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых. Аналогично, равны углы $\angle BCE = \angle CBA$. Следовательно, сумма углов треугольника ΔABC равна $\sigma(ABC) = \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle BCE + \angle ACD + \angle ACB = 2d$.

Э $\Rightarrow V$.



Докажем, что через точку, не лежащую на данной прямой проходит не более одной прямой, параллельной данной. Пусть даны прямая a и точка M, не лежащая на прямой a. Как обычно строим прямую b, проходящую через точку M параллельно a (перпендикуляр к a и перпендикуляр к MN). Допустим, что существует еще одна прямая c (отличная от b), проходящая через точку M и не пересекающая прямую a. Обозначим через α тот из углов, образованных прямой c и прямой MN, который меньше прямого (Напомним, что прямой угол мы обозначаем буквой d). Обозначим $\varepsilon = d - \alpha$.

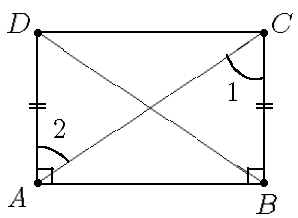
От луча $[MN)$ в полуплоскость угла α отложим угол $\angle NMN_1 = \frac{d}{2}$. Так как сумма углов любого треугольника равна $2d$ (Э), то угол $\angle NN_M = \frac{d}{2}$ и $NM = NN_1$.

На луче $[N_1K)$ отложим отрезок $N_1N_2 = MN_1$. Тогда треугольник ΔMN_1N_2 равнобедренный и $\angle N_1MN_2 = \angle MN_2N_1$. Вычислим $\angle MN_2N = \frac{1}{2}(2d - \angle MN_1N_2) = \frac{1}{2}(2d - (2d - \frac{d}{2})) = \frac{d}{2^2}$. Продолжая аналогичные построения, получим точку N_n такую, что $\angle NN_nM = \frac{d}{2^n}$. Возьмем натуральное число n таким, что $\frac{d}{2^n} < \varepsilon = d - \alpha$. Тогда $\alpha < d - \frac{d}{2^n} = d - \angle NN_nM = d - (2d - d - \angle NMN_n) = \angle NMN_n$, а значит, луч прямой c является внутренним лучом угла $\angle NMN_n$, а значит, пересекает отрезок NN_n с концами на сторонах угла $\angle NMN_n$, следовательно, прямая c пересекает прямую a. Итак, мы доказали, что через точку M, не лежащую на прямой a, проходит не более одной прямой, параллельной a, то есть имеет место первый эквивалент, а значит, выполняется пятый постулат Евклида. □

Замечание. Пятый постулат Евклида равносилен утверждению: существует хотя бы один треугольник, сумма углов которого равны $2d$.

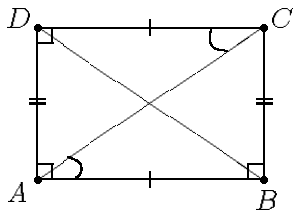
Теорема 2.37. (пятый эквивалент)
$V \Leftrightarrow$ Э: Если в четырехугольнике $ABCD$ углы $\angle A = \angle B = d$ и $AD = BC$, то $AB = CD$.

Доказательство. $V \Rightarrow$ Э.



Так как верен пятый постулат Евклида, то из равенства $2d$ суммы внутренних односторонних углов $\angle DAB$ и $\angle CBA$ следует параллельность прямых $(AD)||(BC)$. Тогда равны внутренние накрест лежащие углы $\angle 1 = \angle 2$. Рассмотрим треугольники ΔADC и ΔCBA. Они равны по первому признаку, а значит, $AB = CD$.

Э $\Rightarrow V$.

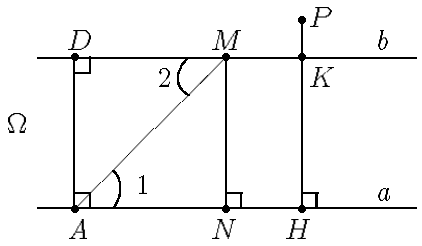


Докажем, что существует хотя бы один треугольник, сумма углов которого равна $2d$. Тогда по замечанию из этого следут пятый постулат Евклида. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ такой, что $\angle A = \angle B = d$ и $AD = BC$. Тогда по утверждению Э имеем $AB = CD$. Из этого следует, что треугольники ΔADC и ΔCAB равны по третьему признаку, следовательно, $\angle ADC = \angle ABC = d$, $\angle DCA = \angle CAB$. Тогда сумма углов треугольника $\sigma(ACD) = \angle ADC + \angle DCA + \angle CAD = d + \angle CAB + \angle CAD = d + d = 2d$. □

Теорема 2.38. (шестой эквивалент)

$V \Leftrightarrow$ Э: Множество всех точек полуплоскости с границей a и равноудаленных от a есть прямая.

Доказательство. $V \Rightarrow$ Э.

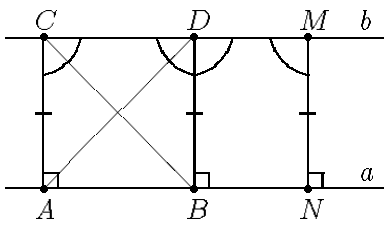


Возьмем произвольную прямую a, точку $A \in a$ и полуплоскость Ω. Проведем прямую (AD), перпендикулярную прямой a и прямую b, проходящую через точку D перпендикулярно прямой (AD). Нам нужно доказать: 1) Любая точка $M \in b$ удалена на такое же расстояние от прямой a, что и точка D, то есть $MN = AD$, где N – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a; 2) для любой точки $P \in \Omega$, не лежащей на прямой b расстояние до прямой a не равно расстоянию AD.

1) Пусть M – произвольная точка прямой b, отличная от точки D. Так как прямые a и b параллельны, внутренние накрест лежащие углы $\angle 1$ и $\angle 2$ равны. Тогда треугольники ΔMAD и ΔAMN равны по четвертому признаку, следовательно, $AD = MN$.

2) Пусть точка P не лежит на прямой b. Проведем через точку P прямую, перпендикулярную a и обозначим точки пересечения этой прямой с прямыми b и a через K и H, соответственно. Возможны два случая: а) $P - K - H$. Тогда $KH = AD$ (по пункту 1)) и $PH > AD$; б) $K - P - H$. Тогда $PH < AD$.

Э $\Rightarrow V$



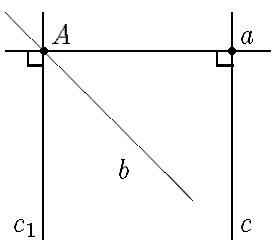
Докажем, что имеет место пятый эквивалент. Рассмотрим прямую a и множество точек b, равноудаленных от прямой a. По утверждению Э b является прямой. Возьмем на прямой b три произвольные точки C, D, M. Опустим из этих точек перпендикуляры на прямую a. Тогда $CA = DB = MN$. По первому признаку равны треугольники ΔCBA и ΔDAB, следовательно, $AD = CB$. Тогда по третьему признаку равны треугольники ΔCBD и ΔDAC, следовательно, равны $\angle 1 = \angle 2$.

Аналогичные рассуждения, примененные к четырехугольнику $BNMD$, позволяют доказать, что $\angle 3 = \angle 4$ (проведите доказательство самостоятельно). Таким образом, получаем $\angle 2 = \angle 3$, а так как они смежные, то эти углы являются прямыми. Тогда равны треугольники ΔACD и ΔDBA, следовательно, $AB = CD$. Итак, мы доказали: если в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B = d$ и $AC = BD$, то $AB = CD$. Это пятый эквивалент, а значит, верен и пятый постулат Евклида. □

Теорема 2.39. (седьмой эквивалент)

$V \Leftrightarrow$ Э: Если две прямые не перпендикулярны, то любая прямая, перпендикулярная одной из них, пересекает и вторую прямую.

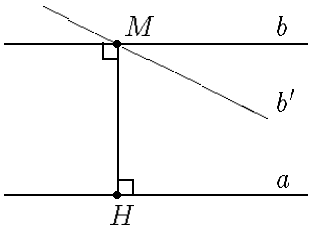
Доказательство. $V \Rightarrow$ Э.



Пусть даны две перпендикулярные прямые a и c и прямая b, пересекающая прямую a. Надо доказать, что прямая b пересекает прямую c.

Проведем прямую c_1, проходящую через точку A перпендикулярно прямой a. Тогда (по лемме) прямые c и c_1 параллельны. Так как имеет место пятый постулат Евклида, то имеет место первый эквивалент, а значит, через точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, парал\лельной данной. Через точку A проходит прямая c_1, параллельная c; прямая b не перпендикулярна a, значит, не может совпадать с c_1, следовательно, прямая b пересекает прямую c.

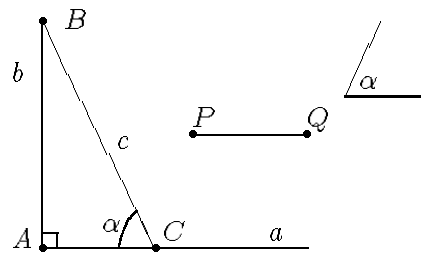
Э $\Rightarrow V$.



Докажем первый эквивалент. Пусть дана прямая a и точка M, не лежащая на ней. Строим прямую b, параллельную a (как обычно). Предположим, что через точку M проходит еще одна прямая b', параллельная прямой a и отличная от прямой b. Тогда прямая b' не перпендикулярна прямой (MH) и пересекает ее, а прямая (MH) перпендикулярна прямой a. Мы находимся в условиях утверждения Э, а значит, прямая b' пересекает прямую a. Таким образом, через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой параллельной данной. Значит, верен пятый постулат Евклида. □

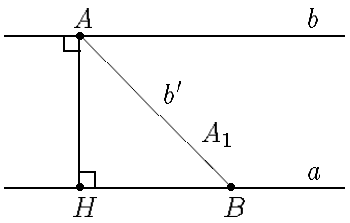
Теорема 2.40. (восьмой эквивалент)
$V \Leftrightarrow$ Э: Если дан произвольный отрезок и произвольный острый угол, то существует прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен данному отрезку, а прилежащий угол равен данному углу.

Доказательство. $V \Rightarrow$ Э.



Пусть даны отрезок PQ и острый угол α. Нам нужно построить прямоугольный треугольник с катетом, равным PQ и острым углом, равным углу α. Рассмотрим произвольную прямую a и точку A на ней. Через точку A проведем прямую b, перпендикулярную прямой a. Отложим отрезок $AC = PQ$. От луча $[CA)$ отложим угол α. Мы имеем две перпендикулярные прямые a и b и прямую c, пересекающую и не перпендикулярную a. Тогда по седьмому эквиваленту прямая c пересекает прямую b, а значит, существует точка B. Итак, требуемый треугольник ΔABC построен

Э $\Rightarrow V$.



Докажем, что имеет место первый эквивалент. Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. Строим прямую b, параллельную a и проходящую через точку A. Допустим, что существует еще одна прямая b', проходящая через точку A и не пересекающая a. Рассмотрим тот ее луч $[AA_1)$, который образует острый угол с лучом $[AH)$. По утверждению Э существует прямоугольный треугольник ΔHAB с катетом AH и углом, равным углу $\angle HAA_1$.

По аксиоме III_4 лучи $[AA_1)$ и $[AB)$ совпадают, а значит, прямая b' пересекает прямую a. Итак, имеет место первый эквивалент, а значит, и пятый постулат Евклида. □

Замечание. Приведем без доказательства еще два эквивалента пятого постулата Евклида.
1) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.
2) Если прямая проходит через внутреннюю точку угла и не содержит его вершину, то она пересекает хотя бы одну сторону угла.