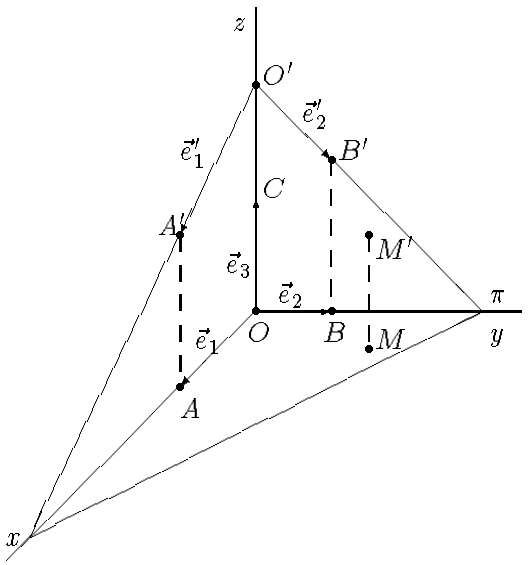
# 2 Поверхности второго порядка

§18. Сечения поверхностей.




Пусть дана аффинная система координат в пространстве $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Отложим от точки $O$ представители векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и обозначим полученные точки соответственно $A, B, C$ (см. рис.). Пусть произвольная плоскость $\pi$ пересекает прямую $OC$ в точке $O'$. Проведем через точки $A$ и $B$ прямые параллельные прямой $(OC)$. Точки пересечения этих прямых с плоскостью $\pi$ обозначим $A'$ и $B'$ соответственно. Тогда в плоскости $\pi$ появляется аффинная система координат $R' = (O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$, где $\vec{e}_1{}' = \overrightarrow{O'A'}$, $\vec{e}_2{}' = \overrightarrow{O'B'}$.

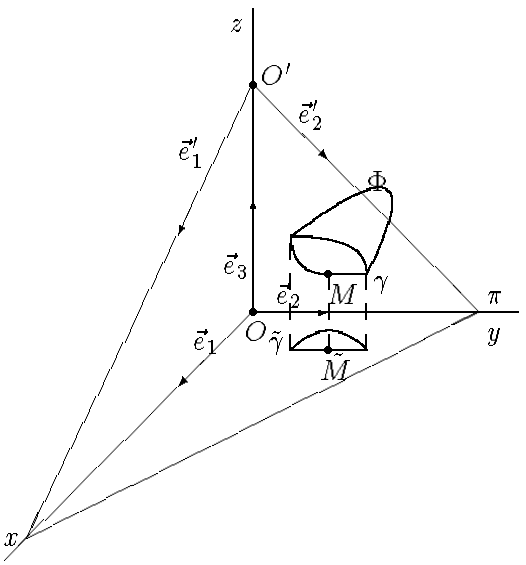
Пусть $M'$ – произвольная точка плоскости $\pi$. Спроектируем точку $M'$ на плоскость $(OAB)$ параллельно прямой $(OC)$ (то есть проведем через точку $M'$ прямую параллельную $(OC)$ и обозначим через $M$ точку пересечения этой прямой и плоскости $(OAB)$). Получим точку $M$. Тогда точка $M'$ как точка пространства $E^3$ имеет три координаты в системе координат $R$, та же точка $M'$ как точка плоскости $\pi$ имеет две координаты в системе координат $R'$ этой плоскости и, наконец, точка $M$ как точка плоскости $(OAB)$ имеет две координаты в аффинной системе координат $\tilde{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Выясним, как связаны эти координаты между собой.

Обозначим набор координат $M'(x, y, z)_R$. Тогда по определению координат точки имеем $\overrightarrow{OM'} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. По правилу треугольника получаем: $\vec{e}_1 + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'} + \vec{e}_1{}'$ или $\vec{e}_1 - \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{AA'} \| \vec{e}_3$, то есть $\vec{e}_1 - \vec{e}_1{}' \| \vec{e}_3$. По теореме о коллинеарных векторах существует вещественное число $\alpha$ такое, что $\vec{e}_1 - \vec{e}_1{}' = \alpha\vec{e}_3$ или $\vec{e}_1 = \vec{e}_1{}' + \alpha\vec{e}_3$.
Аналогично получим (докажите самостоятельно) $\exists \beta \in \mathcal{R} : \vec{e}_2 = \vec{e}_2{}' + \beta\vec{e}_3$.
Так как $\overrightarrow{OO'} \| \vec{e}_3$, то существует вещественное число $\gamma$ такое, что $\overrightarrow{OO'} = \gamma\vec{e}_3$.
Тогда $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OO'} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 - \gamma\vec{e}_3 = x(\vec{e}_1{}' + \alpha\vec{e}_3) + y(\vec{e}_2{}' + \beta\vec{e}_3) + z\vec{e}_3 - \gamma\vec{e}_3 = x\vec{e}_1{}' + y\vec{e}_2{}' + (x\alpha + y\beta + z - \gamma)\vec{e}_3$. Так как векторы $\overrightarrow{O'M'}$, $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$ компланарны, а векторы $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$ не коллинеарны, то вектор $\overrightarrow{O'M'}$ раскладывается по векторам $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$, то есть коэффициент при $\vec{e}_3$ должен быть равен нулю. Откуда получаем, что $\overrightarrow{O'M'} = x\vec{e}_1{}' + y\vec{e}_2{}'$. Это по определению координат точки означает, что $M'(x, y)_{R'}$.
Кроме того, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + \delta\vec{e}_3$. Так как векторы $\overrightarrow{OM}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ компланарны, а векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ не коллинеарны, то вектор $\overrightarrow{OM}$ раскладывается по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, следовательно, коэффициент при $\vec{e}_3$ в разложении равен 0. Откуда получаем, $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. По определению координат точки это означает, что $M(x, y)_{\tilde{R}}$.

Итак, для пространственной системы координат и двух систем координат в плоскостях мы получили, что

$$M'(x, y, z)_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad M'(x, y)_{(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')} \quad M(x, y)_{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)}$$

**Замечание.** Аналогичные результаты можно получить в случае, когда плоскость $\pi$ пересекает ось $(Ox)$ (или ось $(Oy)$). Проведите доказательство самостоятельно.




Пусть относительно аффинной системы координат $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ поверхность $\Phi$ и плоскость $\pi$ заданы уравнениями

$$\Phi \ : \ F(x,y,z) = 0 \quad \pi \ : \ z = Ax + By + D$$

то линия их пересечения $\gamma = \Phi \cap \pi$, называемая *сечением* поверхности $\Phi$ плоскостью $\pi$, задается относительно $R$ системой уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ z = Ax + By + D \end{cases}$$

Заметим, что в плоскости $\pi$ возникает аффинная система координат $R' = (O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$. Выясним, какое уравнение имеет кривая $\gamma$ в этой системе координат.
Рассмотрим произвольную точку $M$ в плоскости $\pi$. Пусть она имеет координаты $(x,y)_{R'}$. Тогда эта же точка $M$, рассматриваемая как точка пространства, будет иметь координаты $M(x, y, Ax + By + D)_R$. С учетом этого имеем $M \in \gamma \Leftrightarrow M \in \pi$ и $M \in \Phi \Leftrightarrow F(x, y, Ax + By + D) = 0$.
Итак, произвольная точка $M(x,y)_{R'}$ плоскости $\pi$ принадлежит сечению $\gamma \Leftrightarrow$ ее координаты относительно системы координат $R'$ удовлетворяют уравнению $F(x, y, Ax + By + D) = 0$.

Спроектируем линию $\gamma$ на плоскость $(Oxy)$ параллельно вектору $\vec{e}_3$. Обозначим полученную линию $\tilde{\gamma}$. Выясним, какое уравнение будет иметь линия $\tilde{\gamma}$ в аффинной системе координат $\tilde{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
По доказанному выше имеем

$$M(x,y)_{R'} \in \gamma \ \Leftrightarrow \ \tilde{M}(x,y)_{\tilde{R}} \in \tilde{\gamma}$$

Таким образом, уравнение линии $\tilde{\gamma}$ такое же как у $\gamma$, но относительно другой системы координат, а именно, $\tilde{R}$.

**Замечание.** Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для плоскостей задаваемых уравнениями $x = By + Cz + D$ или $y = Ax + Cz + D$. Получите аналогичные результаты самостоятельно.

Для чего все это нужно? Пусть дана некоторая поверхность $\Phi$ своим уравнением относительно некоторой системы координат (удобно брать уравнение поверхности относительно прямоугольной декартовой системы координат). Чтобы представить внешний вид этой поверхности, будем "резать" ее плоскостями, параллельными координатным плоскостям. В результате в каждой плоскости получим некоторую линию, которую легко изучить по ее уравнению в системе координат этой плоскости. Выше мы указали способ получения этого уравнения: нужно из уравнения плоскости выразить одну из переменных (какую удобнее) и подставить в уравнение поверхности. В результате получим уравнение сечения в системе координат плоскости этого сечения. Такое исследование поверхности называется *методом сечений*. Брать прямоугольную систему координат и плоскости, параллельные ее координатным плоскостям удобно, но не обязательно.

**Пример.** Пусть поверхность задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ относительно прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Мы уже знаем, что это сфера. Будем проводить через прямую $a : z = 1, y = 0$ плоскости и посмотрим, какие линии получатся при пересечении этой плоскости и сферы.
Запишем сначала уравнения секущих плоскостей. Мы знаем, что прямая $a$ должна лежать в этих плоскостях, то есть точка $A(0,0,1)$, которая принадлежит прямой $a$ должна принадлежать всем секущим плоскостям и направляющий вектор $\vec{a}(1,0,0)$ прямой $a$ должен быть параллелен секущим плоскостям. Тогда запишем уравнение секущей плоскости в общем виде: $Ax + By + Cz + D = 0$. Указанные два

требования дадут систему уравнений

$$\begin{cases} A = 0 \\ C + D = 0 \end{cases}$$

Откуда секущие плоскости имееют уравнения: $By + Cz - C = 0$, где $B, C$ – произвольные вещественные числа. Когда эти числа мы будем менять, плоскость будет поворачиваться вокруг прямой $a$.
Чтобы получить уравнения сечений нам нужно из уравнения плоскости выразить одну из переменных. Например, выразим $z$. Рассмотрим два случая:
1) $C = 0$, то есть $z$ нам выразить не удастся. Получаем уравнение плоскости $\pi : y = 0$, то есть единсвенная переменная, которая может быть выражена – это $y$. Подставим в уравнение поверхности $y = 0$. Тогда в системе координат $(O', \vec{i}', \vec{k}')$ этой плоскости уравнение сечения имеет вид $\gamma : x^2 + z^2 = 1$. Так как полученная система координат является прямоугольной декартовой, сечение является окружностью.
2) $C \neq 0$. Выразим $z = ay+1$, где $a = \frac{-B}{C}$. Подставим в уравнение поверхности: $x^2+y^2+(ay+1)^2-1 = 0$ в системе координат $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ этой плоскости (Здесь система координат уже не будет прямоугольной декартовой). Выясним, что это за линия второго порядка.

$$x^2 + y^2(1 + a^2) + 2ay = 0$$

Вычислим $\Delta = 1 + a^2 > 0$, то есть линия эллиптического типа. Найдем ее центр:

$$\begin{cases} x = 0 \\ (1 + a^2)y + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{a}{1+a^2} \end{cases}$$

Выясним, принадлежит ли этот центр линии $\gamma$: $0^2 + (\frac{a}{1+a^2})^2(1 + a^2) - 2a(\frac{a}{1+a^2}) = -\frac{a^2}{1+a^2}$. Тогда центр принадлежит $\gamma \Leftrightarrow a = 0$, то есть $B = 0$ и уравнение плоскости $z - 1 = 0$. В этом случае мы получаем пару мнимых пересекающихся прямых (оказалось, что касательная плоскость к сфере пересекает ее по паре мнимых пересекающихся прямых!) В остальных случаях центр не принадлежит линии $\gamma$ и на ней всегда есть вещественная точка (0,0), то есть линия является эллипсом. Такой ответ мы и ожидали. □

**Замечание.** Как и в случае плоскости дополним пространство мнимыми точками. Фиксируем аффинную систему координат в пространстве и будем называть точками комплексного пространства все упорядоченные тройки чисел $(x, y, z)$, где числа $x, y, z$ – произвольные комплексные числа. Тогда "привычные", "видимые" точки пространства будут тройками вещественных чисел (будем называть их *вещественными точками*), остальные точки будем называть *мнимыми*. Так как в формулах перехода от одной аффинной системы координат к другой коэффициенты являются вещественными числами, то понятия вещественной и мнимой точки не зависит от выбора аффинной системы координат.

## §19. Цилиндрические поверхности.

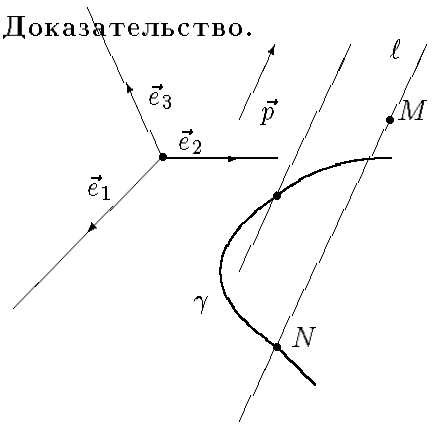
**Определение 2.1.** Поверхность $C$, обладающая тем свойством, что вместе с каждой своей точкой $M$ она содержит и всю прямую $\ell$, проходящую через эту точку параллельно некоторому фиксированному вектору $\vec{p}$, называется *цилиндрической поверхностью*. Прямые $\ell$ называются *образующими цилиндрической поверхности*.

Цилиндрическая поверхность может быть образована следующим образом. Пусть дана линия $\gamma$ и фиксированный вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$. Тогда поверхность, образованная всеми прямыми, каждая из которых проходит через некоторую точку линии $\gamma$ параллельно вектору $\vec{p}$, будет цилиндрической. При этом линия $\gamma$ называется *направляющей*.

**Теорема 2.1.** (о цилиндрической поверхности)
Пусть $I = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – аффинная система координат, алгебраическая линия $\gamma$ (произвольного порядка) в аффинной системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$, дан вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, $p_3 \neq 0$. Тогда цилиндрическая поверхность с направляющей $\gamma$ и образующими, параллельными вектору $\vec{p}$, задается относительно системы координат $I$ уравнением

$$F\left(x - \frac{p_1}{p_3}z, y - \frac{p_2}{p_3}z\right) = 0$$

**Доказательство.**




1) Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка цилиндрической поверхности. Проведем через $M$ прямую $\ell$, параллельную вектору $\vec{p}$. Тогда прямая $\ell$ пересечет линию $\gamma$ в точке $N(x', y', 0)$. Имеем $\overrightarrow{MN} \| \vec{p}$, то есть $\overrightarrow{MN} = t\vec{p}$.

Распишем это векторное равенство в координатах

$$\begin{cases} x' - x = p_1 t \\ y' - y = p_2 t \\ 0 - z = p_3 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - \frac{p_1}{p_3} z \\ y' = y - \frac{p_2}{p_3} z \\ t = -\frac{z}{p_3} \end{cases}$$

Так как точка $N \in \gamma$, то ее координаты удовлетворяют уравнению линии $\gamma$, то есть $F(x', y') = 0$ или $F\left(x - \frac{p_1}{p_3} z, y - \frac{p_2}{p_3} z\right) = 0$. Итак, мы доказали:если точка $M(x, y, z)$ принадлежит цилиндрической поверхности, то ее координаты удовлетворяют уравнению

$$F\left(x - \frac{p_1}{p_3} z, y - \frac{p_2}{p_3} z\right) = 0 \tag{1}$$

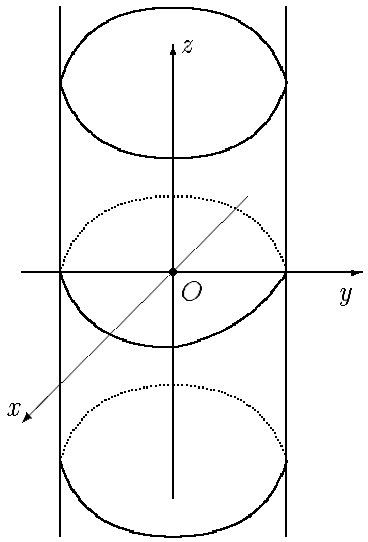
2) Докажем обратное в виде: если точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ не принадлежит цилиндрической поверхности, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (1).
Проведем через точку $M_1$ прямую $\ell_1$ параллельно вектору $\vec{p}$. Так как точка $M_1$ не принадлежит цилиндрической поверхности, то прямая $\ell_1$ пересекает плоскости $(Oxy)$ в точке $N_1(x_1', y_1', 0)$, не принадлежащей линии $\gamma$, то есть $F(x_1', y_1') \neq 0$. Как и в пункте 1) из того, что $\overrightarrow{M_1N_1} \| \vec{p}$, получим

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - \frac{p_1}{p_3} z_1 \\ y_1' = y_1 - \frac{p_2}{p_3} z_1 \\ t = -\frac{z_1}{p_3} \end{cases}$$

Откуда имеем $F\left(x_1 - \frac{p_1}{p_3} z_1, y_1 - \frac{p_2}{p_3} z_1\right) \neq 0$. □

**Следствие.** Если в условиях теоремы $\vec{p} \| \vec{e}_3$, то относительно системы координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ цилиндрическая поверхность задается уравнением $F(x, y) = 0$.

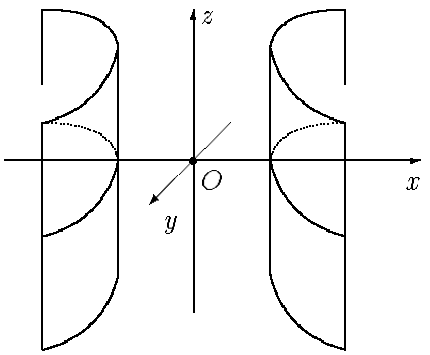
Применим полученное следствие для линий второго порядка.
Пусть дана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и линия второго порядка $\gamma$ задана уравнением $F(x, y) = 0$ относительно системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ плоскости $(Oxy)$. Тогда согласно следствию уравнение $F(x, y) = 0$ относительно системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задаст цилиндрическую поверхность второго порядка. Мы знаем, что линий второго порядка существует 9 видов, значит, полученных поверхностей второго порядка также получим 9 видов.

1. 

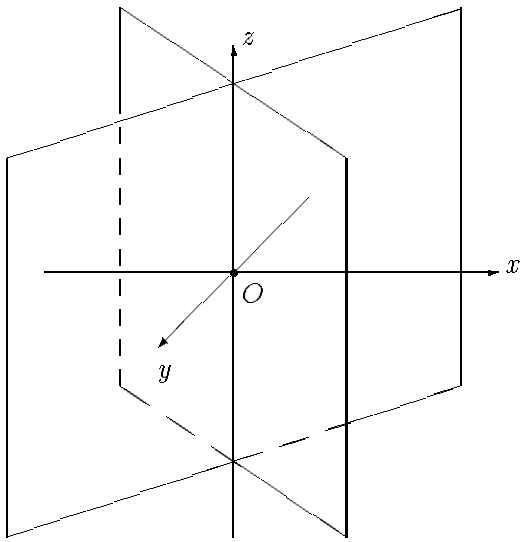
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллиптический цилиндр. Его не видно.

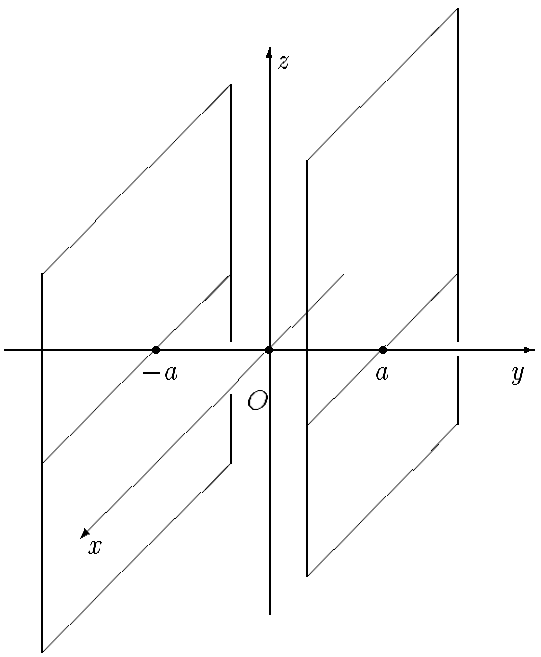
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара мнимых пересекающихся плоскостей. Вещественные точки этой поверхности – это точки вида $(0, 0, z)$, где $z$ – любое вещественное число, то есть от этой поверхности нам видна только ось $(Oz)$.

4. 

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – Гиперболический цилиндр.

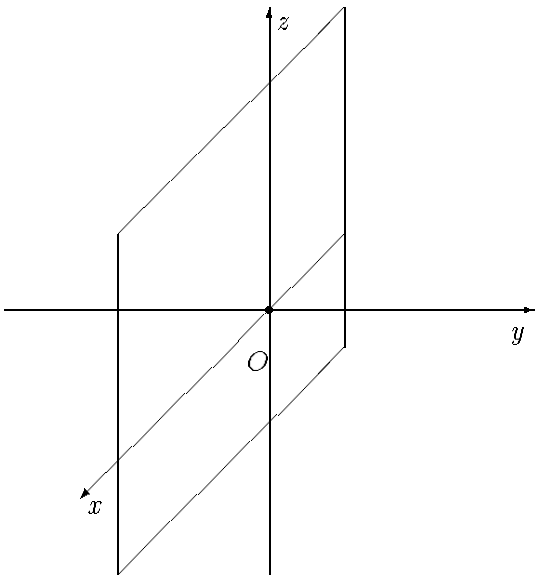
5. 

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся (вещественных) плоскостей.

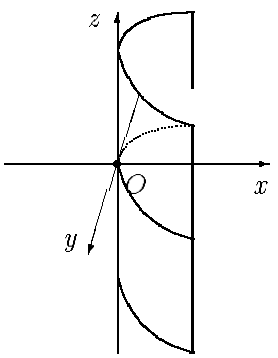
6. 


$y^2 - a^2 = 0$ – пара параллельных (вещественных) плоскостей.

7. $y^2 + a^2 = 0$ – пара мнимых параллельных плоскостей. Эту цилиндрическую поверхность второго порядка не видно (вещественных точек нет).

8. 


$y^2 = 0$ – пара совпавших плоскостей.

9. 


$y^2 = 2px$ – параболический цилиндр.

**Замечание.** Чтобы изобразить цилиндрические поверхности, мы воспользовались методом сечений: провели несколько плоскостей, параллельный плоскости $(Oxy)$. В построенных плоскостях получают-

ся прямоугольные системы координат $(H, \vec{i}, \vec{j})$. В этих системах координат уравнение сечения такое же, как у линии $\gamma$.

## §20. Конические поверхности.

**Определение 2.2.** *Конической поверхностью (или конусом)* с вершиной в точке $M_0$ называется поверхность, которая с каждой своей точкой $M \neq M_0$ содержит и всю прямую $MM_0$. Точка $M_0$ называется *вершиной* конической поверхности. Прямые, лежащие на конической поверхности, называются *образующими.*

**Замечание.** Из определения конической поверхности не следует, что она должна иметь единственную вершину.

**Вопрос 2.1.** Приведите пример.

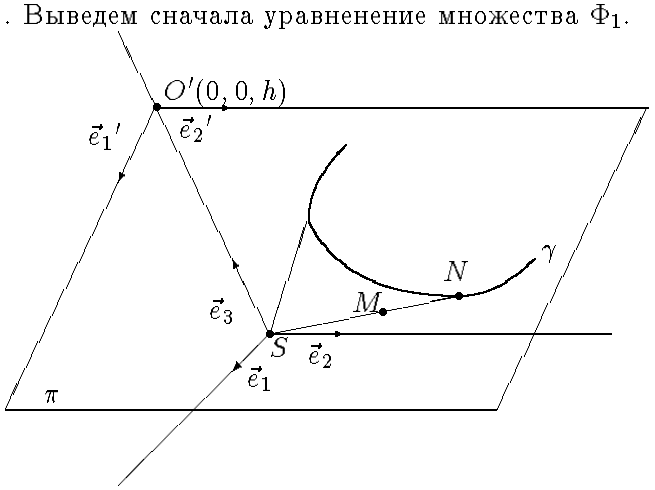
Перейдем к изучению конических поверхностей второго порядка.

Пусть в плоскости $\pi$ дана линия второго порядка $\gamma$ и дана точка $S \notin \pi$. Множество точек $\Phi$ пространства, которые принадлежат тем прямым, которые проходят через точку $S$ и либо пересекают $\gamma$, либо имеют относительно $\gamma$ асимптотическое направление, называется *конической поверхностью второго порядка.* Линия $\gamma$ называется *направляющей* конической поверхности.

Выведем уравнение конической поверхности второго порядка с вершиной в точке $S$.

Рассмотрим коническую поверхность $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi'$, где $\Phi_1$ – множество точек тех прямых, которые пересекают $\gamma$, а $\Phi'$ – множество точек тех прямых, которые имеют асимптотическое направление относительно $\gamma$. Введем аффинную систему координат $I = (S, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ с началом в вершине конической поверхности и такими базисными векторами, чтобы линия $\gamma$ лежала в плоскости $\pi \| (O\vec{e}_1\vec{e}_2)$.

1. Выведем сначала уравненение множества $\Phi_1$.




Относительно введенной системы координат $S(0,0,0)$, точка $O' = \pi \cap (Oz)$ имеет координаты $O'(0,0,h)$. В плоскости $\pi$ система координат $I$ индуцирует "плоскую" систему координат $II = (O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$. В этой системе координат линия $\gamma$ задается уравнением $F(x,y) = 0$, где $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}$.

1) Пусть произвольная точка $M(x,y,z) \in \Phi_1$, то есть $(SM) \cap \gamma = N \in \gamma$. Запишем это условие в координатах. Для этого заметим, что если $N(x',y')_{II}$, то $N(x',y',h)_I$. Так как точки $S, M, N$ лежат на одной прямой, то $\overrightarrow{SN} = t\overrightarrow{SM}$. Распишем это векторное равенство в координатах: $\begin{matrix} x' = tx \\ y' = ty \\ h = tz \end{matrix}$. Так как точка $M \notin (O\vec{e}_1\vec{e}_2)$, то $z \neq 0$. Тогда из последнего уравнения можно выразить $t = \frac{h}{z}$ и подставить в первые два уравнения, то есть $x' = x\frac{h}{z}$, $y' = y\frac{h}{z}$. Так как точка $N(x',y')_{II} \in \gamma$, то ее координаты удовлетворяют уравнению линии $\gamma$, то есть

$$F(x\frac{h}{z}, y\frac{h}{z}) = 0 \tag{2}$$

2) Обратно, пусть $M_1(x_1,y_1,z_1) \notin \Phi_1$, то есть $(SM_1) \cap \pi = N_1 \notin \gamma$. Рассуждая аналогично предыдущему пункту (проведите рассуждения самостоятельно), получим $N_1\left(x_1\frac{h}{z_1}, y_1\frac{h}{z_1}\right)_{II}$. Тогда $F\left(x_1\frac{h}{z_1}, y_1\frac{h}{z_1}\right) \neq 0$.

2. Изменим уравнение (2) так, чтобы оно описывало еще и множество $\Phi'$.

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{z}{h}\right)^2 F(x\frac{h}{z}, y\frac{h}{z}) = 0 \tag{3}$$

Распишем левую часть этого равенства подробнее
$\left(\frac{z}{h}\right)^2\left(a_{11}\left(\frac{h}{z}x\right)^2+2a_{12}\left(\frac{h}{z}x\right)\left(\frac{h}{z}y\right)+a_{22}\left(\frac{h}{z}y\right)^2+2a_{10}\frac{h}{z}x+2a_{20}\frac{h}{z}y+a_{00}\right)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+z\cdot p(x,y,z)$, где $p(x,y,z)$ – многочлен первой степени от $x,y,z$, то есть уравнение (3) имеет вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+z\cdot p(x,y,z)=0 \tag{4}$$

Убедимся, что уравнение (3) задает все множество Ф.
1) а) Пусть $M\in\Phi_1$. Тогда ее координаты удовлетворяют уравнению (2), а следовательно, и (3).
б) Пусть $M=S(0,0,0)$. Ее координаты удовлетворяют последнему уравнению, а значит, удовлетворяют уравнению (3).
в) Пусть $M(x,y,z)\in\Phi'$. Тогда прямая $(SM)$ имеет асимптотическое направление относительно линии $\gamma$, то есть $(SM)\|\pi$, то есть $\overrightarrow{SM}(x,y,0)$, то есть $M(x,y,0)$. Кроме того, $\overrightarrow{SM}(x,y)_{II}$ и по критерию асимптотического направления имеем $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$. Опять получаем, что координаты точки $M$ удовлетворяют уравнению (4).
2) Обратно, пусть $M_1(x_1,y_1,z_1)\notin\Phi$. Тогда $M\neq S$.
а) Если $(SM_1)\cap\pi=N_1(\frac{h}{z_1}x_1,\frac{h}{z_1}y_1)\notin\gamma$. Тогда $z_1\neq 0$ и $F(\frac{h}{z_1}x_1,\frac{h}{z_1}y_1)\neq 0$, то есть координаты точки $M$ не удовлетворяют уравнению $\left(\frac{z}{h}\right)^2F(x\frac{h}{z},y\frac{h}{z})=0$.
б) Если $(SM_1)\|\pi$, то $z=0$, но тогда $(SM_1)$ не имеет асимптотического направления, то есть $a_{11}(x_1)^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}(y_1)^2\neq 0$. Тогда $a_{11}(x_1)^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}(y_1)^2+0\cdot p(x,y,z)\neq 0$, то есть координаты точки $M_1$ не удовлетворяют уравнению (4).

Итак, мы получили уравнение конической поверхности в аффинной системе координат, $(S,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ начало которой совпадает с вершиной конической поверхности, а направляющая лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости $(S\vec{e}_1\vec{e}_2)$, имеет вид

$$\left(\frac{z}{h}\right)^2F(x\frac{h}{z},y\frac{h}{z})=0$$

Используя это уравнение получим примеры конических поверхностей.
Пусть система координат будем прямоугольной декартовой $(S,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, чтобы мы могли использовать канонические уравнения линий второго порядка.

1. Пусть линия $\gamma$ является эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащим в плоскости $\pi: z=c$. В обозначениях формулы конической поверхности получим $h=c$, $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$. Тогда формула конической поверхности принимает вид: $\left(\frac{z}{c}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{c}{z}x\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{c}{z}y\right)^2-1\right)=0$ или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Такая коническая поверхность называется *невырожденным конусом второго порядка.*

2. Пусть линия $\gamma$ является мнимым эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, лежащим в плоскости $\pi: z=c$. В обозначениях формулы конической поверхности получим $h=c$, $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1$. Тогда формула конической поверхности принимает вид: $\left(\frac{z}{c}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{c}{z}x\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{c}{z}y\right)^2+1\right)=0$ или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

Такая коническая поверхность называется *мнимым конусом второго порядка.* Эта поверхность имеет единственную вещественную точку (0,0,0), все остальные точки – мнимые.

3. Пусть линия $\gamma$ является парой мнимых пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, лежащей в плоскости $\pi: z=c$. В обозначениях формулы конической поверхности получим $h=c$, $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Тогда формула конической поверхности принимает вид: $\left(\frac{z}{c}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{c}{z}x\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{c}{z}y\right)^2\right)=0$ или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

С этой поверхностью мы уже встречались в примерах цилиндрических поверхностей. Это пара мнимых пересекающихся плоскостей. Мы встретили первый пример поверхности, которая является одновременно и цилиндрической и конической.

**Вопрос 2.2.** Сколько у этой поверхности вершин?

4. Пусть линия $\gamma$ является гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в плоскости $\pi : z = c$. В обозначениях формулы конической поверхности получим $h = c$, $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$. Тогда формула конической поверхности принимает вид: $\left(\frac{z}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{c}{z}x\right)^2 - \frac{1}{b^2}\left(\frac{c}{z}y\right)^2 - 1\right) = 0$ или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Докажем, что эта поверхность является невырожденным конусом второго порядка. Для этого перейдем к "новой" прямоугольной декартовой системе координат $(S, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ по формулам $\begin{cases} x = z' \\ y = y' \\ z = x' \end{cases}$.

**Вопрос 2.3.** Как располагаются оси "новой" системы координат по отношению к "старой"?

В "новой" системе координат уравнение конической поверхности примет вид

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = 0$$

или, обозначая переменные привычным образом, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Это уравнение невырожденного конуса второго порядка. Оказывается и эллипс и гипербола в качестве направляющей конической поверхности дают один и тот же невырожденный конус второго порядка.

5. Пусть линия $\gamma$ является парой пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, лежащей в плоскости $\pi : z = c$. В обозначениях формулы конической поверхности получим $h = c$, $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Тогда формула конической поверхности принимает вид: $\left(\frac{z}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{c}{z}x\right)^2 - \frac{1}{b^2}\left(\frac{c}{z}y\right)^2\right) = 0$ или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Это пара пересекающихся плоскостей. Это еще один пример конической поверхности, являющейся одновременно цилиндрической.

6. Пусть линия $\gamma$ является парой параллельных прямых $y^2 - a^2 = 0$, лежащей в плоскости $\pi : z = c$. Тогда уравнение конической поверхности имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Это пара пересекающихся плоскостей.

7. Пусть линия $\gamma$ является парой мнимых параллельных прямых $y^2 + a^2 = 0$, лежащей в плоскости $\pi : z = c$. Тогда уравнение конической поверхности имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Это пара мнимых пересекающихся плоскостей.

8. Пусть линия $\gamma$ является парой совпавших прямых $y^2 = 0$, лежащей в плоскости $\pi : z = c$. Тогда уравнение конической поверхности имеет вид

$$y^2 = 0$$

Это пара совпавших плоскостей.

9. Пусть линия $\gamma$ является параболой $y^2 = 2px$, лежащей в плоскости $\pi : z = c$. Тогда уравнение конической поверхности имеет вид

$$y^2 - \frac{2p}{c}xz = 0$$

На первый взгляд кажется, что мы получили пример еще одной конической поверхности, но это впечатлени ошибочно. Мы опять повернем систему координат и полученное уравнение превратится в

уравнение невырожденной конической поверхности второго порядка, то есть и парабола в качестве образующей конической поверхности дает все тот же самый невырожденный конус второго порядка. Перейдем к прямоугольной декартовой системе координат $(S, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ по формулам

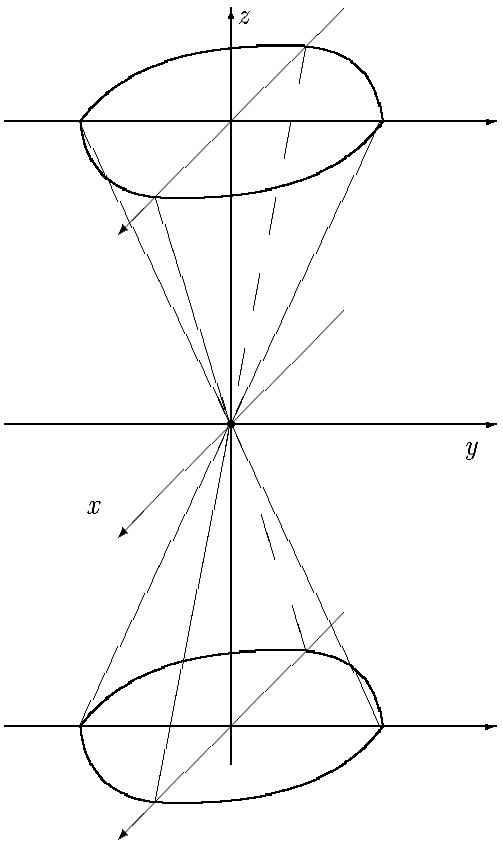
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(z' - x') \\ y = y' \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(z' + x') \end{cases}$$

Тогда в "новой" системе координат уравнение примет вид $(y')^2 - \frac{2p}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}(z' - x')\frac{1}{\sqrt{2}}(z' + x') = 0$ или

$$\frac{(x')^2}{c} + \frac{(y')^2}{p} - \frac{(z')^2}{c} = 0$$

Это уравнение невырожденной конической поверхности второго порядка.

Итак, мы получили только две новые поверхности второго порядка: невырожденный конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ и мнимый конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$. У мнимого конуса видна только одна точка (0,0,0), а невырожденный конус мы сейчас нарисуем, используя метод сечений.




1. Рассмотрим сечения конуса плоскостями, параллельными плоскости $(Oxy)$. Уравнение такой плоскости $z = h$, где $h$ – вещественное число. Чтобы получить уравнение сечения в "плоской" системе координат, индуцированной на плоскости $z = h$ "пространственной" системой координат, нужно в уравнение конуса подставить $z = h$. Получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

В этом уравнении справа стоит константа, которая может быть либо положительной, либо равной нулю. Рассмотрим два случая:

а) $\frac{h^2}{c^2} = 0$, то есть $h = 0$, то есть плоскость сечения совпадает с плоскостью $(Oxy)$. В этом случае уравнение сечения имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Это пара мнимых пересекающихся прямых. Видимой точкой является только точка (0,0) плоскости $(Oxy)$. Ставим ее на рисунке.

б) $\frac{h^2}{c^2} > 0$, то есть $h \neq 0$, то есть плоскость сечения параллельна плоскости $(Oxy)$. В этом случае уравнение сечения имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$. Разделим обе части уравнения на положительное число $\frac{h^2}{c^2}$ и получим

$$\frac{x^2}{\left(a\frac{h}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\frac{h}{c}\right)^2} = 1$$

Это уравнение эллипса. При этом, увеличивая по модулю $h$ (то есть плоскость сечения удаляется от начала координат по оси $(Oz)$), получаем, что полуоси эллипса увеличиваются. Два таких эллипса изображены на картинке.

0 2. Рассмотрим сечение конуса плоскостью $(Oxz)$ : $y = 0$. Получим в системе координат этой плоскости уравнение сечения: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Это пара пересекающихся прямых.

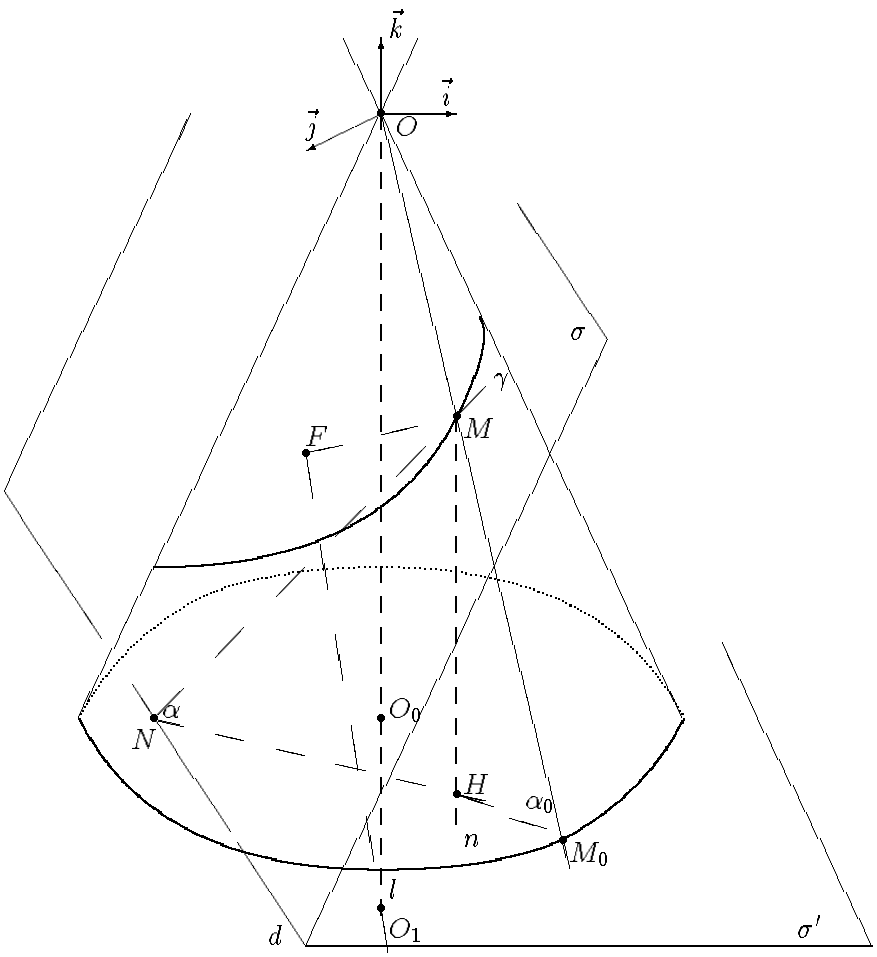
3. Аналогично рассмотрите сечение конуса плоскостью $(Oyz) : x = 0$. Что получится?

Итак, мы получили изображение невырожденной конической поверхности второго порядка. Заметим, что эта поверхность неограничено продолжается в обоих направлениях оси $(Oz)$.

**Определение 2.3.** Невырожденный конус второго порядка назовем *круговым*, если сечения его плоскостями, перпендикулярными оси $(Oz)$ являются окружностями.

**Теорема 2.2.** Сечениями круговой конической поверхности плоскостями, не проходящими через вершину, является либо эллипс, либо гипербола, либо парабола.

**Доказательство.**




Пусть плоскость сечения $\sigma$. Она пересекает цилиндрическую поверхность $K$ по линии $\gamma$. Обозначим угол $(\sigma, Oxy) = \alpha$.

1) Рассмотрим сферу с центром в точке $O_1$, вписанную в коническую поверхность $K$ и касающуюся плоскости $\sigma$ по окружности $\omega_0(O_0, r_0)$, $O_0 \in l$ – центр окружности. Обозначим $\sigma'$ плоскость, содержащую окружность $\omega_0$, пусть $\sigma \cap \sigma' = d$.

2) Опустим перпендикуляр из точки $O_1$ на плоскость $\sigma$. Длина этого перпендикуляра равна радиусу сферы. Обозначим его основание через $F$ – это точка касания сферы и плоскости $\sigma$.

3) Возьмем произвольную точку $M \in \gamma$, обозначим $(OM) \cap \omega_0 = M_0$. Тогда $FM \perp O_1F$ (так как $FM \subset \sigma \perp O_1F$). Следовательно, $FM$ – касательная к сфере, проведенная из точки $M$ и $MM_0$ – касательная к сфере, проведенная из точки $M$, то есть $MM_0 = FM$.

4) Пусть точка $N : MN \perp d$ и прямая $n : M \in n$, $n \perp \sigma'$, $n \cap \sigma' = H$.

5) По теореме о трех перпендикулярах $\angle MNH$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями $\sigma$ и $\sigma'$, следовательно, $\angle MNH = \alpha$.

6) Обозначим $\angle MM_0H = \alpha_0 (= \angle((MM_0), Oxy))$.

7) Рассмотрим треугольники $\Delta MHN : MH = MN \sin\alpha$, $\Delta MHM_0 : MH = MM_0 \sin\alpha_0$, следователь-

но, $\frac{MM_0}{MN} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$. Так как $MM_0 = MF$, то $\frac{MF}{MN} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} = \varepsilon$ – константа для любой точки $M \in \gamma$. По директориальному свойству эллипса и гиперболы и определению параболы получим, что $\gamma$ – эллипс, гипербола или парабола. При этом точка $F$ является фокусом, а прямая $d$ – директрисой $\gamma$. $\square$