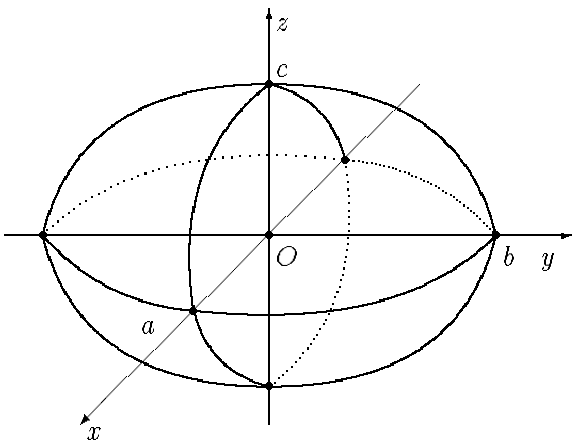
2 Поверхности второго порядка

§21. Эллипсоиды.



Определение 2.4. *Эллипсоидом* называется множество точек пространства, имеющее относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a, b, c – некоторые положительные числа, которые называются *полуосями эллипсоида*. Если $a = b = c$, то эллипсоид является сферой.

Исследуем эллипсоид методом сечений.

1. Рассмотрим плоскости сечений π, параллельные плоскости (Oxy). Уравнение такой плоскости $z = h$, где h – некоторое вещественное число (аппликата точки пересечения плоскости с осью (Oz)). Уравнение сечения в системе координат плоскости $z = h$ имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

а) $|h| < c$. Тогда уравнение можно записать в виде

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

Это эллипсы с центрами на оси (Oz), причем при $|h| \to c$ эти эллипсы уменьшаются. Мы нарисуем эллипс в плоскость (Oxy).

б) $h = \pm c$. Тогда уравнение сечения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это пара мнимых пересекающихся прямых в плоскости сечения. Мы получаем только две видимых точки: $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$.

в) $|h| > c$. Тогда уравнение сечения имеет вид

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{-1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{-1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = -1$$

Это мнимые эллипсы. Их не видно.

2. Рассмотрим плоскость сечения $(Oyz) : x = 0$. Уравнение сечения имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Это эллипс в плоскости (Oyz) с полуосями b и c.

3. Рассмотрим плоскость сечения $(Oxz) : y = 0$. Уравнение сечения имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Это эллипс в плоскости (Oxz) с полуосями a и c.

Свойства.

1^0. Точка O является центром симметрии эллипсоида. (докажите самостоятельно)

2^0. Координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида. (докажите самостоятельно)

Определение 2.5. Прямая, полностью лежащая на поверхности, называется прямолинейной образующей поверхности.

3^0. Эллипсоид находится внутри прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер $2a, 2b, 2c$, следовательно, не имеет прямолинейных образующих.

Доказательство. Рассмотрим уравнение эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Тогда $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\leq 1$, то есть $\frac{x^2}{a^2}\leq 1$, то есть $|x|\leq a$. Остальные неравенства доказываются аналогично (докажите самостоятельно). □

Определение 2.6. *Мнимым эллипсоидом* называется множество точек пространства, имеющей относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

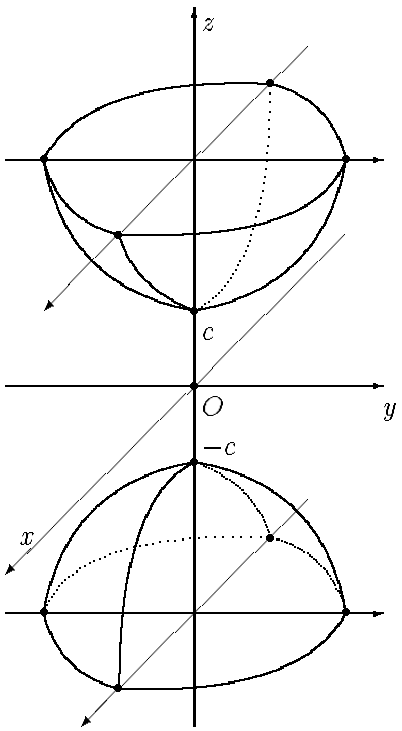
Эта поверхность не имеет вещественных точек, поэтому ее не видно и нарисовать ее не можем. Мнимый эллипсоид симметричен относительно точки O и координатных плоскостей.

§22. Гиперболоиды.

Определение 2.7. *Двуполостным гиперболоидом* называется множество точек пространство, имеющее относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Исследуем эту поверхность методом сечений.



1. Рассмотрим плоскости сечений π, параллельные плоскости (Oxy). Уравнение такой плоскости $z=h$, где h – некоторое вещественное число (аппликата точки пересечения плоскости с осью (Oz)). Уравнение сечения в системе координат плоскости $z=h$ имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

а) $|h|>c$. Тогда уравнение можно записать в виде

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1$$

Это эллипсы с центрами на оси (Oz). При увеличении $|h|$ их полуоси увеличиваются.

б) $|h|=c$. Тогда уравнение сечения имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

Это пара мнимых пересекающихся прямых. Видны только точки $(0,0,c)$ и $(0,0,-c)$.

в) $|h|<c$. Тогда уравнение сечения примет вид

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=-1$$

Это мнимые эллипсы.

2. Рассмотрим сечение плоскостью $(Oxz) : y = 0$. Уравнение сечения в этой плоскости имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ или

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Это гипербола с вещественной осью (Oz) и мнимой осью (Ox). Ее вершины находятся в точках $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$.

3. Рассмотрим сечение плоскостью $(Oyz) : x = 0$. Уравнение сечения в этой плоскости имеет вид

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Это гипербола с вещественной осью (Oz) и мнимой осью (Oy). Ее вершины находятся в точках $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$.

Замечание. При пересечении гиперболоида с плоскостями (Oxz) и (Oyz) мы получили гиперболы. Если получать сечения гиперболоида всевозможными плоскостями, проходящими через ось (Oz), то мы будем получать в сечении гиперболы (докажите!). У всех таких гипербол есть асимптоты. Множество всех этих асимптот образует коническую поверхность, которая называется *асимптотическим конусом двуполостного гиперболоида*. Его уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Свойства.

1^0. O – центр симметрии. (докажите)

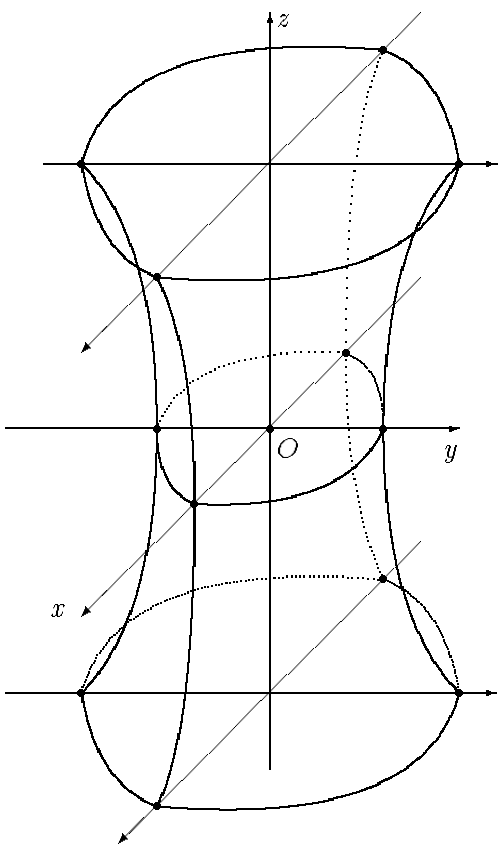
2^0. Координатные плоскости – плоскости симметрии.(докажите)

3^0. Нет прямолинейных образующих. (докажите)

Определение 2.8. *Однополостным гиперболоидом* называется множество точек пространство, имеющее относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Исследуем эту поверхность методом сечений.



1. Рассмотрим плоскости сечений π, параллельные плоскости (Oxy). Уравнение такой плоскости $z = h$, где h – некоторое вещественное число (аппликата точки пересечения плоскости с осью (Oz)). Уравнение сечения в этой плоскости имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

а) $h = 0$ (плоскость (Oxy)). Тогда уравнение сечения имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Это эллипс в плоскости (Oxy) с полуосями a и b. Он называется *горловым эллипсом* однополостного гиперболоида.

б) $h \neq 0$. Тогда уравнение сечения имеет вид

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

Это эллипсы, причем при увеличении $|h|$ их полуоси увеличиваются.

2. Рассмотрим сечение плоскостью (Oyz) : $x=0$. Его уравнение $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это гипербола с вещественной полуосью (Oy) и вершинами в точках $(0,b,0)$, $(0,-b,0)$.

3. Рассмотрим сечение плоскостью (Oxz) : $y=0$. Его уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это гипербола с вещественной полуосью (Ox) и вершинами в точках $(a,0,0)$, $(-a,0,0)$.

Замечание. При пересечении гиперболоида с плоскостями (Oxz) и (Oyz) мы получили гиперболы. Если получать сечения гиперболоида всевозможными плоскостями, проходящими через ось (Oz), то мы будем получать в сечении гиперболы (докажите!). У всех таких гипербол есть асимптоты. Множество всех этих асимптот образует коническую поверхность, которая называется *асимптотическим конусом однополостного гиперболоида*. Его уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Свойства.

1^0. O – центр симметрии. (докажите)

2^0. Координатные плоскости – плоскости симметрии.(докажите)

Самым замечательным свойством однополостного гиперболоида является наличие прямых, целиком на нем лежащих.

Определение 2.9. Поверхность в пространстве называется *l-кратно линейчатой*, поверхностью, если через любую ее точку проходит l и только l различных прямых, целиком лежащих на этой поверхности. Эти прямые называются *прямолинейными образующими* линейчатой поверхности.

Вопрос 2.1. Являются ли линейчатыми поверхностями эллиптический (параболический, гиперболический) цилиндры? Если да, то какова их кратность?

Теорема 2.1. Однополостный гиперболоид является дважды линейчатой поверхностью.

Доказательство. Напомним, что уравнение однополостного гиперболоида Ф имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Пусть $M(x_0,y_0,z_0)$ – произвольная фиксированная точка на Ф. Проведем через нее прямую ℓ параллельно некоторому вектору $\vec{p}(p_1,p_2,p_3)$:

$$\begin{cases} x=x_0+p_1t \\ y=y_0+p_2t \\ z=z_0+p_3t \end{cases}$$

Будем искать координаты вектора $\vec{p}$, требуя, чтобы прямая ℓ целиком лежала на однополостном гиперболоиде Ф.

Как мы знаем общие точки однополостного гиперболоида и прямой ℓ находятся из системы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=x_0+p_1t \\ y=y_0+p_2t \\ z=z_0+p_2t \end{cases}$$

Подставим последние три уравнения в первое:

$$\frac{(x_0+p_1t)^2}{a^2}+\frac{(y_0+p_2t)^2}{b^2}-\frac{(z_0+p_3t)^2}{c^2}=1$$

Количество решений системы равно количеству корней t этого квадратного уравнения. Рассмотрим его подробнее.

$$\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}-\frac{p_3^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0p_1}{a^2}+\frac{y_0p_2}{b^2}-\frac{z_0p_3}{c^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}-1=0$$

Заметим, что $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}-1=0$, так как точка $M(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит однополостному гиперболоиду Ф. Вспомним, что мы хотели, чтобы прямая ℓ была бы прямолинейной образующей Ф, то есть

целиком на нем лежала, то есть последнее квадратное уравнение должно иметь своим решением любое вещественное число t. Это возможно только в случае, когда все коэффициенты этого уравнения равны нулю. Получаем, что прямая ℓ является прямолинейной образующей тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} - \frac{p_3^2}{c^2} = 0 \\ \frac{x_0 p_1}{a^2} + \frac{y_0 p_2}{b^2} - \frac{z_0 p_3}{c^2} = 0 \end{cases}$$

Эта система уравнений определит нам координаты вектора $\vec{p}$, который задаст прямолинейную образующую. Это система из двух уравнений с тремя неизвестными. Будем выражать неизвестные p_1 и p_2 через p_3. Так как $p_3 \neq 0$ (иначе $p_1 = p_2 = p_3 = 0$), то придадим ему сразу значение $p_3 = c$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_0 p_1}{a^2} + \frac{y_0 p_2}{b^2} = \frac{z_0}{c} \end{cases}$$

Будем дальше упрощать эту систему. Для этого введем обозначения $x_1 = x_0 - p_1 \frac{z_0}{c}$, $y_1 = y_0 - p_2 \frac{z_0}{c}$. Выразим из этих соотношений x_0 и y_0 и подставим во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} \frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_1 p_1}{a^2} + \frac{y_1 p_2}{b^2} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Выясним геометрический смысл чисел x_1, y_1.

Так как $M(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$, то $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$. Подставим $x_1 = x_0 - p_1 \frac{z_0}{c}$, $y_1 = y_0 - p_2 \frac{z_0}{c}$, раскроем скобки и приведем подобные. Тогда (x_1, y_1) удовлетворяет уравнению $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. Это уравнение в плоскости (Oxy) определяет горловой эллипс, то есть точка с координатами (x_1, y_1) принадлежит горловому эллипсу однополостного гиперболоида Φ.

Продолжаем решать систему (1). Пусть $p_1 = -\frac{a}{b} y_1 u$, $p_2 = \frac{b}{a} x_1 u$. Эта пара чисел удовлетворяет второму уравнению системы (1). Подберем u так, чтобы эта пара чисел удовлетворяла и первому уравнению: $\frac{1}{a^2}\frac{a^2}{b^2} y_1^2 u^2 + \frac{1}{b^2}\frac{b^2}{a^2} x_1^2 u^2 = 1 \Rightarrow u^2 = 1$, то есть $u = \pm 1$. Итак, мы получили два решения уравнения (1) (при $u = 1$ и $u = -1$). Запишем параметрические уравнения этих прямых:

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{a}{b} y_1 u t \\ y = y_0 + \frac{b}{a} x_1 u t \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \text{где} \begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{a}{b} y_1 u \frac{z_0}{c} \\ y_1 = y_0 - \frac{b}{a} x_1 u \frac{z_0}{c} \end{cases}$$

Выразим из последней системы x_1, y_1. Получим

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{a}{b}\frac{z_0}{c} y_0 u}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}; \quad y_1 = \frac{y_0 - \frac{b}{a}\frac{z_0}{c} x_0 u}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}; \quad u = \pm 1$$

Итак, мы доказали, что если прямолинейные образующие однополостного гиперболоида существуют, то они задаются уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{a}{b} y_1 u t \\ y = y_0 + \frac{b}{a} x_1 u t \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \text{где } x_1 = \frac{x_0 + \frac{a}{b}\frac{z_0}{c} y_0 u}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}; \quad y_1 = \frac{y_0 - \frac{b}{a}\frac{z_0}{c} x_0 u}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}; \quad u = \pm 1$$

Непосредственно проверяется, что прямые, заданные такими уравнениями, действительно лежат на однополостном гиперболоиде, то есть являются прямолинейными образующими. Так как через каждую точку однополостного гиперболоида проходит две и только две прямолинейные образующие, то эта поверхность является дважды линейчатой. $\square$

Запишем уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида в более удобном виде.

Имеем

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - p_1 \frac{z_0}{c} = x_0 - \frac{a}{b} y_1 u \left(-\frac{z_0}{c}\right) \\ y_1 = y_0 - p_2 \frac{z_0}{c} = y_0 + \frac{b}{a} x_1 u \left(-\frac{z_0}{c}\right) \\ 0 = z_0 + c \left(-\frac{z_0}{c}\right) \end{cases}$$

Сравнивая эти равенства с параметрическими уравнениями прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, получим, что точка горлового эллипса $(x_1, y_1, 0)$ принадлежит прямолинейной образующей однополостного гиперболоида (она получается при значении параметра $-\frac{z_0}{c}$). Тогда эти же

параметрические уравнения можно задать точкой $(x_1, y_1, 0)$ и прежними направляющими векторами $\vec{p}(p_1 = -\frac{a}{b}y_1u, p_2 = \frac{b}{a}x_1u, c)$, $u = \pm 1$:

$$\begin{cases} x = x_1 - \frac{a}{b}y_1ut \\ y = y_1 + \frac{b}{a}x_1ut \\ z = 0 + ct \end{cases}, u = \pm 1$$

Определение 2.10. Две прямолинейные образующие однополостного гиперболоида называется *одноименными*, если им соответствует одно и тоже значение u. Две прямолинейные образующие однополостного гиперболоида называется *разноименными*, если им соответствуют различные значения u. Тем самым все образующие разбиваются на два класса: одноименные образующие принадлежат одному классу, разноименные – разным. Эти классы обычно называют *семействами* прямолинейных образующих.

Теорема 2.2. (о свойствах прямолинейных образующих однополостного гиперболоида)
1^0. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит одна и только одна прямолинейная образующая каждого семейства.
2^0. Любые две разноименные образующие лежат в одной плоскости.
3^0. Любые две различные одноименные образующие скрещиваются.
4^0. Никакие три одноименные попарно различные образующие не параллельны никакой плоскости.

Доказательство. 1^0 мы уже доказали.
2^0, 3^0. Пусть точки различные точки $P(x_1, y_1, 0), Q(x_2, y_2, 0)$ принадлежат горловому эллипсу. Направляющие векторы прямолинейных образующих, проходящих через эти точки

$$\vec{p}(-u_1\frac{a}{b}y_1, u_1\frac{b}{a}x_1, c) \quad u_1 = \pm 1$$
$$\vec{q}(-u_2\frac{a}{b}y_2, u_2\frac{b}{a}x_2, c) \quad u_2 = \pm 1$$

Обозначим $u = u_1u_2 = \frac{u_1}{u_2}$. Исследуем взаимное расположение этих прямолинейных образующих.
1) Если $\vec{p}\|\vec{q}$, то прямолинейные образующие параллельны, следовательно, лежат в одной плоскости (может ли такое быть для однополостного гиперболоида?).
2) Если $\vec{p} \nparallel \vec{q}$, то выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{PQ}, \vec{p}, \vec{q}$. Применим критерий компланарности.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & -u_1\frac{a}{b}y_1 & -u_2\frac{a}{b}y_2 \\ y_2 - y_1 & u_1\frac{b}{a}x_1 & u_2\frac{b}{a}x_2 \\ 0 & c & c \end{vmatrix} =$$
$$= -c\left((x_2 - x_1)u_2\frac{b}{a}x_2 + (y_2 - y_1)\frac{a}{b}u_2y_2\right) + c\left((x_2 - x_1)u_1\frac{b}{a}x_1 + (y_2 - y_1)u_1\frac{a}{b}y_1\right) =$$
$$= -abcu_2\left(\frac{(x_2 - x_1)(x_2 - ux_1)}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)(y_2 - uy_1)}{b^2}\right).$$

1) $u = 1$, то есть u_1 и u_2 одного знака, то есть прямолинейные образующие из одного семейства. Тогда $\Delta = -abcu_2\left(\frac{(x_2 - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{b^2}\right) \neq 0$, то есть одноименные прямолинейные образующие скрещиваются.
2) $u = -1$, то есть u_1 и u_2 имеют различные знаки, то есть прямолинейные образующие принадлежат различным семействам. Тогда $\Delta = -abcu_2\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2}\right) = -abcu_2\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - (\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2})\right) = 0$, так как $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. Итак, разноименные прямолинейные образующие лежат в одной плоскости.
4^0. Пусть $P(x_1, y_1, 0)$, $Q(x_2, y_2, 0)$, $R(x_3, y_3, 0)$ – различные точки, принадлежащие горловому эллипсу. Рассмотрим три прямолинейные образующие, проходящие через эти точки и принадлежащие горловому эллипсу. Их направляющие вектора: $\vec{p}(-u\frac{a}{b}y_1, u\frac{b}{a}x_1, c)$, $\vec{q}(-u\frac{a}{b}y_2, u\frac{b}{a}x_2, c)$, $\vec{r}(-u\frac{a}{b}y_3, u\frac{b}{a}x_3, c)$,где $u = 1$, либо $u = -1$. Докажем, что эти векторы не компланарны. Применим критерий компланарности векторов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -u\frac{a}{b}y_1 & -u\frac{a}{b}y_2 & -u\frac{a}{b}y_3 \\ u\frac{b}{a}x_1 & u\frac{b}{a}x_2 & u\frac{b}{a}x_3 \\ c & c & c \end{vmatrix} = -u\frac{a}{b}u\frac{b}{a}c\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ так как}$$

Лемма 2.1. $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow P(x_1, y_1, 0)$, $Q(x_2, y_2, 0)$, $R(x_3, y_3, 0)$ принадлежат одной прямой.

□ Пусть $P(x_1, y_1, 0)$, $Q(x_2, y_2, 0)$, $R(x_3, y_3, 0)$ принадлежат одной прямой, то есть $\overrightarrow{PQ}\|\overrightarrow{QR}$, то есть

$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}$, то есть

$$x_2y_3-x_2y_2-x_1y_3+x_1y_2-x_3y_2+x_3y_1+x_2y_2-x_2y_1=0$$

С другой стороны, $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_2y_3-x_2y_2-x_1y_3+x_1y_2-x_3y_2+x_3y_1+x_2y_2-x_2y_1=0$. □

Итак, мы получили, что $\Delta \neq 0$, так как точки P, Q, R не лежат на одной прямой, то есть векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ не компланарны, следовательно, не существует плоскости, которой были бы параллельны все три одноименные образующие однополостного гиперболоида. □

Замечание. Мы доказали, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две и только две прямолинейные образующие и получили их параметрические уравнения. Получим общие уравнения прямолинейных образующих.

Рассмотрим уравнение однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ и запишем его в виде: $\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$. Рассмотрим две системы уравнений

$$L_1:\begin{cases} p_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=q_1\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ q_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=p_1\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases} \qquad L_2:\begin{cases} p_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=q_2\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ q_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=p_2\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

где p_1, q_1 – вещественные числа, не равные нулю одновременно и p_2, q_2 – вещественные числа, не равные нулю одновременно.

Задача 2.1. Докажите, что при фиксированной паре чисел p_1, q_1 (p_2, q_2) каждая система задает прямую.

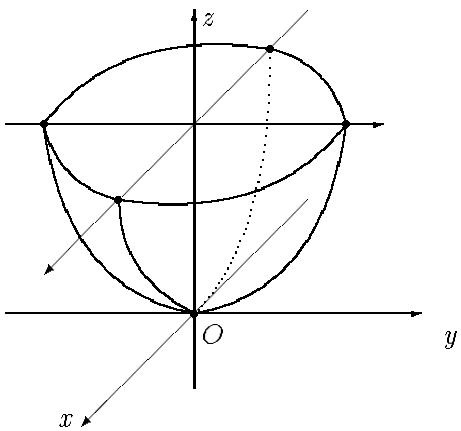
Задача 2.2. Докажите, что каждая прямая из множеств прямых L_1 и L_2 лежит на однополостном гиперболоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Итак, эти системы уравнений определяют два семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.

§23. Параболоиды.

Определение 2.11. *Эллиптическим параболоидом* называется множество точек пространства, имеющих относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



1. Рассмотрим сечение плоскостями $z=h$. Уравнение сечения имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h$$

а) $h>0$, то разделив на $2h$ получим $\frac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2}=1$. Это эллипсы. Они увеличиваются при увеличении h.

б) $h=0$. Тогда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Это пара мнимых пересекающихся прямых.

в) $h<0$. Тогда $\frac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{-2h})^2}=-1$. Это мнимые эллипсы.

2. Рассмотрим сечение плоскостью (Oxz) : $y=0$. Уравнение сечения: $x^2=2a^2z$. Это парабола в плоскости (Oxz) с вершиной в начале координат и ветвями, расположенными вдоль оси (Oz).

3. Рассмотрим сечение плоскостью (Oyz) : $x=0$. Уравнение сечения: $y^2=2b^2z$. Это парабола в плоскости (Oyz) с вершиной в начале координат и ветвями, расположенными вдоль оси (Oz).

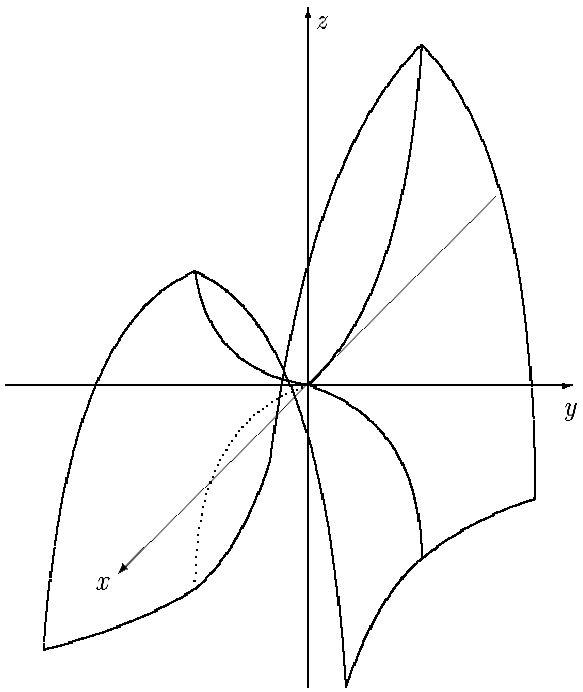
Свойства.

1^0. Координатные плоскости (Oxz) и (Oyz) являются плоскостями симметрии эллиптического параболоида (докажите).

2^0. Эллиптический параболоид не имеет прямолинейных образующих (докажите).

Определение 2.12. Гиперболическим параболоидом называется множество точек пространства, имеющих относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



1. Рассмотрим сечение плоскостью $(Oyz) : x = 0$. Уравнение сечения: $y^2 = -2b^2z$. Это парабола с вершиной в начале системы координат и ветвями вдоль отрицательного направления оси (Oz).
2. Рассмотрим сечение плоскостью $(Oxz) : y = 0$. Уравнение сечения: $x^2 = 2a^2z$. Это парабола с вершиной в начале системы координат и ветвями вдоль положительного направления оси (Oz).
3. Рассмотрим сечения плоскостями $\pi : z = h$, параллельными плоскости (Oxy). Уравнение сечения: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h$.
а) $h > 0$. Это гиперболы $\frac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2} = 1$ с вещественной осью (Ox).
б) $h = 0$. Это пара пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.
в) $h < 0$. Это гиперболы $\frac{y^2}{(b\sqrt{-2h})^2} - \frac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2} = 1$ с вещественной осью (Oy).

4. Рассмотрим сечения плоскостями $\pi : x = h$, параллельными плоскости (Oyz). Уравнение сечения: $\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ или $y^2 = -2b^2z + \frac{b^2}{a^2}h^2$. Это параболы с вершиной в точке $(h, 0, \frac{h^2}{2a^2}$ (точка пересечения главного диаметра параболы $y = 0$ в плоскости $x = h$ и параболы $y^2 = -2b^2z + \frac{b^2}{a^2}h^2$).

Свойства.
1^0. Координатные плоскости (Oyz) и (Oxz) являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида.

Теорема 2.3. Гиперболический параболоид является дважды линейчатой поверхностью.

Доказательство. Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная фиксированная точка гиперболического параболоида Ф. Проведем через точку M прямую ℓ, параллельную вектору $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$: $\begin{cases} x = x_0 + p_1t \\ y = y_0 + p_2t \\ z = z_0 + p_3t \end{cases}$.

Потребуем, чтобы прямая ℓ целиком лежала на Ф, то есть система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = x_0 + p_1t \\ y = y_0 + p_2t \\ z = z_0 + p_3t \end{cases}$$

имела бы бесконечно много решений (при любом t). Это означает, что любое t является корнем квадратного уравнения $\frac{(x_0+p_1t)^2}{a^2} - \frac{(y_0+p_2t)^2}{b^2} = 2(z_0 + p_3t)$ (мы подставили три последних уравнения системы в первое). Подробнее распишем это квадратное уравнение.

$$t^2\left(\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2}\right) + 2t\left(\frac{p_1x_0}{a^2} - \frac{p_2y_0}{b^2} - p_3\right) + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 2z_0 = 0$$

Свободный член тождественно равен нулю, так как точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит гиперболическому параболоиду Ф. Нам осталось потребовать, чтобы коэффициенты при t^2 и t были тождественно равны нулю. Получаем систему уравнений, из которой мы найдем p_1, p_2, p_3:

$$\begin{cases} \frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2} = 0 \\ \frac{p_1x_0}{a^2} - \frac{p_2y_0}{b^2} - p_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1b = \pm p_2a \\ p_3 = \frac{p_1x_0}{a^2} - \frac{p_2y_0}{b^2} \end{cases}$$

Откуда мы видим, что существуют два направления, задаваемых векторами $\vec{p}_1(a, b, \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b})$ и $\vec{p}_2(a, -b, \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b})$ или объединяя оба вектора в одной записи, получим $\vec{p}(a, ub, \frac{x_0}{a} - u\frac{y_0}{b})$, где $u = \pm 1$. Таким образом, мы получаем, что не более двух прямых претендуют на роль прямолинейных образующих гиперболического параболоида:

$$\ell_{1,2} : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + but \\ z = z_0 + (\frac{x_0}{a} - u\frac{y_0}{b})t \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что обе прямые лежат на гиперболическом параболоиде. □

Определение 2.13. Две прямолинейные образующие гиперболического параболоида называется *одноименными*, если им соответствует одно и тоже значение u. Две прямолинейные образующие гиперболического параболоида называется *разноименными*, если им соответствуют различные значения u. Тем самым все образующие разбиваются на два класса: одноименные образующие принадлежат одному классу, разноименные – разным. Эти классы обычно называют *семействами* прямолинейных образующих.

Теорема 2.4. (о свойствах прямолинейных образующих гиперболического параболоида)
1^0. Через каждую точку гиперболического параболоида проходит одна и только одна прямолинейная образующая каждого семейства.
2^0. Любые две разноименные образующие гиперболического параболоида пересекаются, следовательно, лежат в одной плоскости.
3^0. Любые две различные одноименные прямолинейные образующие гиперболического параболоида скрещиваются.
4^0. Все образующие одного семейства параллельны одной плоскости.

Доказательство. 1^0 уже доказано.
2^0. Рассмотрим две прямолинейные образующие, принадлежащие различным семействам и проходящие через точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$:

$$\ell_1 : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + t(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}) \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = x_2 + at \\ y = y_2 - bt \\ z = z_2 + t(\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b}) \end{cases}$$

Рассмотрим их направляющие векторы: $\vec{p}(a, b, \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b})$, $\vec{q}(a, -b, \frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b})$. Заметим, что $\vec{p} \not\parallel \vec{q}$, так как $\frac{a}{a} \neq \frac{b}{-b}$, то есть прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Выясним, компланарны ли векторы $\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}$. Для этого применим критерий компланарности векторов: $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & a & a \\ y_2 - y_1 & b & -b \\ z_2 - z_1 & \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} & \frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b} \end{vmatrix} = ab\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} - 2(z_2 - z_1)\right) = ab\left(\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - 2z_2 - (\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 2z_1)\right) = 0$, то есть разноименные прямолинейные образующие пересекаются.
3^0. Рассмотрим две одноименные прямолинейные образующие:

$$\ell_1 : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + ubt \\ z = z_1 + t(\frac{x_1}{a} - u\frac{y_1}{b}) \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = x_2 + at \\ y = y_2 + ubt \\ z = z_2 + t(\frac{x_2}{a} - u\frac{y_2}{b}) \end{cases}$$

$u = \pm 1$. Чтобы доказать, что они скрещиваются достаточно проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}$ не компланарны. По критерию компланарности векторов имеем
$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & a & a \\ y_2 - y_1 & ub & ub \\ z_2 - z_1 & \frac{x_1}{a} - u\frac{y_1}{b} & \frac{x_2}{a} - u\frac{y_2}{b} \end{vmatrix} = abu\left(\frac{(x_1 - x_2)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{b^2}\right) > 0$, так как точки P и Q различны.
4^0. Рассмотрим плоскости $\alpha_{1,2} : \frac{x}{a} - u\frac{y}{b} = 0, u = \pm 1$. По критерию параллельности вектора и плоскости мы видим, что $\vec{p}(a, ub, \frac{x_0}{a} - u\frac{y_0}{b}) \| \alpha_{1,2}$: $\frac{a}{a} - u\frac{ub}{b} = 0$. □

Замечание. Получим общие уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Запишем уравнение гиперболического параболоида в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2 \cdot z$$

Тогда два семейства прямолинейных образующих задаются уравнениями

$$L_1 : \begin{cases} p_1\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2q_1 \\ q_1\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = p_1 z \end{cases} \qquad L_1 : \begin{cases} p_2\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z q_2 \\ q_2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2p_2 \end{cases}$$

где p_1, q_1 – вещественные числа, не равные нулю одновременно и p_2, q_2 – вещественные числа, не равные нулю одновременно.

Задача 2.3. Докажите, что при фиксированной паре чисел p_1, q_1 (p_2, q_2) каждая система задает прямую.

Задача 2.4. Докажите, что каждая прямая из множеств прямых L_1 и L_2 лежит на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.