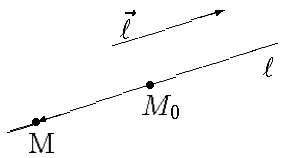
3 Прямые на плоскости. Прямые и плоскости в пространстве.

§15. Различные виды уравнений прямой на плоскости.

Пусть дана плоскость σ и прямая ℓ на этой плоскости.

Определение 3.1. *Направляющим вектором* прямой ℓ называется любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой.



Мы видим, что любую прямую можно однозначно задать какой-либо ее точкой и направляющим вектором. Будем писать $\ell = [M_0, \vec{\ell}]$, где $M_0 \in \ell$, $\vec{\ell} \| \ell$.

Пусть на плоскости σ задана аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда у всех точек этой плоскости и у векторов появляются координаты. Появились координаты и у точки $M_0(x_0, y_0)$ и у направляющего вектора прямой $\vec{\ell}(\ell_1, \ell_2)$.

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка прямой ℓ. Получим уравнение этой прямой.
$M(x, y) \in \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \| \vec{\ell}$

Это условие записать двумя способами:

1. По теореме о коллинеарных векторах $\exists t \in \mathcal{R} : \overrightarrow{M_0M} = t\vec{\ell}$. По теореме о координатах произведения вектора на число получим $\begin{cases} x - x_0 = t\ell_1 \\ y - y_0 = t\ell_2 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x = x_0 + t\ell_1 \\ y = y_0 + t\ell_2 \end{cases}$$

   где t - произвольное вещественное число, которое называется *параметром*. Полученные уравнения называются *параметрическими уравнениями* прямой ℓ.

2. Мы знаем, что два вектора параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x - x_0}{\ell_1} = \frac{y - y_0}{\ell_2}$$

   Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой.*

Если умножить обе части канонического уравнения прямой на $\ell_1\ell_2$, то получим *общее уравнение прямой*

$$\ell_2 x - \ell_1 y + (\ell_1 y_0 - \ell_2 x_0) = 0$$

Обозначим $\ell_2 = A$, $-\ell_1 = B$, $\ell_1 y_0 - \ell_2 x_0 = C$. Заметим, что по определению направляющий вектор $\vec{\ell} \neq \vec{0}$, то есть ${\ell_1}^2 + {\ell_2}^2 \neq 0$. Тогда общее уравнение прямой примет вид

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0$$

Мы видим, что в левой части уравнения прямой стоит многочлен первой степени, то есть прямая является линией первого порядка. Оказывается других линий первого порядка (отличных от прямых) нет.

Теорема 3.1. (о прямой)
Линия на плоскости является прямой тогда и только тогда, когда она задается уравнением первой степени относительно некоторой аффинной системы координат.

Доказательство. $\Rightarrow$) Мы это только что доказали.
$\Leftarrow$). Пусть дано алгебраическое уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Пусть $B \neq 0$ (если $B = 0$, тогда $A \neq 0$ и можно провести аналогичные рассуждения. Сделайте это самостоятельно). Рассмотрим прямую $\ell = [M_0, \vec{\ell}]$, где $M_0(0, -\frac{C}{B})$, $\ell(-B, A)$. Запишем общее уравнение прямой ℓ:

$$\frac{x}{-B} = \frac{y + \frac{C}{B}}{A} \Leftrightarrow Ax = -B(y + \frac{C}{B}) \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$$

Мы видим, что уравнение прямой $\ell = [M_0, \vec{\ell}]$ совпадает с данным уравнением, то есть данное уравнение задает прямую. $\square$

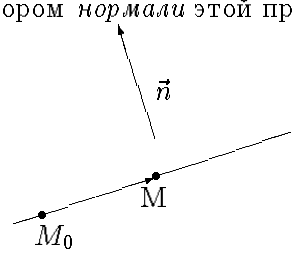
Следствие. Вектор $\ell(-B, A)$ является направляющим вектором прямой ℓ, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ относительно произвольной аффинной системы координат. Вектор $n(A, B)$ не параллелен прямой ℓ, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ относительно произвольной аффинной системы координат.

Доказательство. Допустим, что $n \| \ell$. Тогда координаты этих векторов должны быть пропорциональны, то есть $\frac{-B}{A} = \frac{A}{B}$, то есть $A^2 + B^2 = 0$, что противоречит условию. Значит, $n \not\| \ell$ $\square$

Пусть дана аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Выясним геометрический смысл коэффициентов A, B, C в общем уравнении прямой $\ell : Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$.

1. $C = 0 \Leftrightarrow Ax + By = 0 \Leftrightarrow O(0,0) \in \ell$ Итак, $C = 0 \Leftrightarrow$ начало аффинной системы координат O принадлежит прямой ℓ.
2. $A = 0 \Leftrightarrow \vec{\ell}(-B, 0)$, то есть $\vec{\ell} \| \vec{e}_1(1, 0)$. Итак, $A = 0 \Leftrightarrow$ прямая ℓ либо параллельна оси абсцисс $(C \neq 0)$, либо совпадает с ней $(C = 0)$.
3. $B = 0 \Leftrightarrow \vec{\ell}(0, A)$, то есть $\vec{\ell} \| \vec{e}_1(0, 1)$. Итак, $B = 0 \Leftrightarrow$ прямая ℓ либо параллельна оси ординат $(C \neq 0)$, либо совпадает с ней $(C = 0)$.

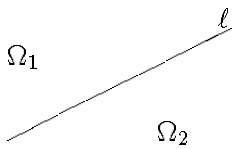
Определение 3.2. Вектор $\vec{n}$, ортогональный направляющему вектору $\vec{\ell}$ прямой ℓ, называется вектором *нормали* этой прямой.



Пусть прямая ℓ задана точкой M_0 и вектором нормали $\vec{n}$. Введем прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Тогда $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{n}(n_1, n_2)$. Запишем общее уравнение прямой ℓ.

$\forall\, M(x, y) \in \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 = 0.$

§16. Геометрический смысл знака трехчлена $Ax + By + C$.

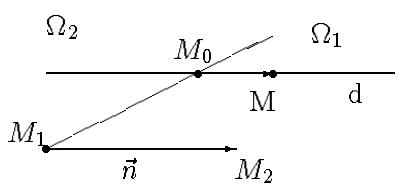


Пусть на плоскости σ дана прямая ℓ. Эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, которые мы обозначим Ω_1 и Ω_2. Имеем $\sigma = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ell$.

Мы знаем, что относительно произвольной аффинной системы координат множество точек прямой ℓ задается линейным уравнением $Ax + By + C = 0$. Выясним, какими условиями задаются множества точек полуплоскостей Ω_1 и Ω_2.

Теорема 3.2. (о полуплоскостях)
Пусть относительно произвольной аффинной системы координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ прямая $\ell : Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Тогда множество точек одной полуплоскости задается неравенством $Ax + By + C > 0$, а другой - неравенством $Ax + By + C < 0$.

Доказательство.



Обозначим $P(M) = P(x, y) = Ax + By + C$. Как мы видели, вектор $\vec{n}(A, B) \not\| \ell$. Возьмем произвольную точку $M_1 \in \ell$ и отложим от нее представитель $\overline{M_1M_2}$ вектора $\vec{n}$. Тогда обозначим через Ω_1 ту полуплоскость, в которой лежит точка M_2.

Найдем условия, определяющие множество точек полуплоскости Ω_1.
Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка плоскости. Проведем прямую d через точку M параллельно вектору $\vec{n}$. Обозначим $d \cap \ell = M_0(x_0, y_0)$. Тогда $M(x, y) \in \Omega_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{n} \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 : \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{n}$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda A \\ y - y_0 = \lambda B \end{cases}$$

$\Leftrightarrow P(M) = P(x,y) = Ax + By + C = A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + A^2 + B^2$. Так как точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит прямой ℓ, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению этой прямойO, то есть $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Тогда $P(M) = P(x,y) = Ax + By + C = A^2 + B^2 > 0$.

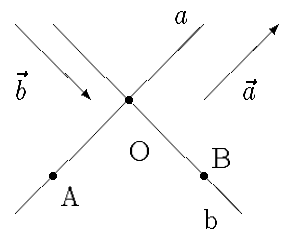
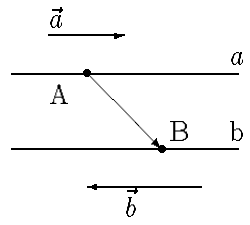
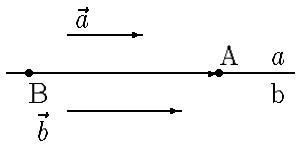
$$M(x,y) \in \Omega_1 \Leftrightarrow Ax + By + C > 0$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$M(x,y) \in \Omega_2 \Leftrightarrow Ax + By + C < 0 \square$$

§17. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Пусть на плоскости σ заданы две прямые $a = [A, \vec{a}]$ и $b = [B, \vec{b}]$. Эти прямые могут располагаться тремя различными способами:

$a \cap b = O$	$a \| b$	$a = b$
		
$\vec{a} \not\| \vec{b}$	$\vec{a} \| \vec{b}$ и $\overrightarrow{AB} \not\| \vec{a}$	$\vec{a} \| \vec{b}$ и $\overrightarrow{AB} \| \vec{a}$

Пусть дана аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и заданы две прямые своими уравнениями относительно этой системы координат

$$a : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,\ {A_1}^2 + {B_1}^2 \neq 0$$

$$b : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,\ {A_2}^2 + {B_2}^2 \neq 0$$

Выясним, как по виду этих уравнений определить взаимное расположение данных прямых.

Теорема 3.3. (о совпадении двух прямых)

$$a = b \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 :\ A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $a = b$. Тогда $\vec{a} \| \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. По теореме о коллинеарных векторах $\exists \lambda \neq 0 : \vec{b} = \lambda \vec{a}$. Так как $\vec{a}(-B_1, A_1)$, $\vec{b}(-B_2, A_2)$, получим из последнего векторного равенства

$$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1 \tag{1}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0) \in a$ - фиксированная точка прямой a. Так как прямые a и b совпадают, то $M_0(x_0, y_0) \in b$, следовательно, координаты точки M_0 удовлетворяют как уравнению прямой a, так и уравнению прямой b: $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 = 0$, $A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0$. С учетом (1) получим $C_2 = -(A_2 x_0 + B_2 y_0) = -(\lambda A_1 x_0 + \lambda B_1 y_0) = -\lambda(A_1 x_0 + B_1 y_0) = \lambda C_1$.
$\Leftarrow$). Пусть $\exists \lambda \neq 0 :\ A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$. Подставим в уравнение прямой b: $\lambda A_1 x + \lambda B_1 y + \lambda C_1 = 0$ и сократим на λ. Тогда b задается таким же уравнением, как и прямая a, то есть $a = b$. $\square$

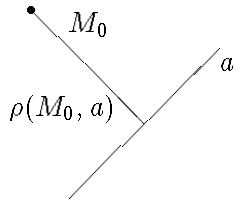
Следствие.
1, $a \| b \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 :\ A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 \neq C_1$;
2, $a \cup b = O \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1}$.

Доказательство. 1. Пусть $a \| b$. Тогда $\vec{a} \| \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. По теореме о коллинеарных векторах $\exists \lambda \neq 0 : \vec{b} = \lambda \vec{a}$. Так как $\vec{a}(-B_1, A_1)$, $\vec{b}(-B_2, A_2)$, получим из последнего векторного равенства

$$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1 \tag{2}$$

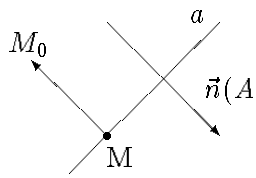
Пусть $M_0(x_0, y_0) \in a$ - фиксированная точка прямой a. Так как прямые a и b параллельны (то есть не имеют ни одной общей точки), то $M_0(x_0, y_0) \notin b$, следовательно, координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению прямой a, но не удовлетворяют уравнению прямой b: $A_1x_0+B_1y_0+C_1 = 0$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2 \neq 0$. С учетом (2) получим $C_2 \neq -(A_2x_0 + B_2y_0) = -(\lambda A_1x_0 + \lambda B_1y_0) = -\lambda(A_1x_0 + B_1y_0) = \lambda C_1$.
Обратно, пусть $\exists\lambda \neq 0 : A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 \neq \lambda C_1$. Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0) \in b$ и предположим, что $M_0(x_0, y_0) \in a$. Тогда $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$, $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$. Откуда как в доказательстве теоремы получим $C_2 = \lambda C_1$, что противоречит условию. Итак, $a||b$.
2, Две прямые пересекаются тогда и только тогда, когда они не совпадают и не параллельны, то есть $\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1}$. □

§18. Метрические задачи теории прямой (расстояние от точки до прямой и угол между двумя прямыми).



Определение 3.3. *Расстоянием* от точки M_0 до прямой a назвается длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую a.

Пусть дана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Тогда $M_0(x_0, y_0)$ и $a : Ax + By + C = 0$.



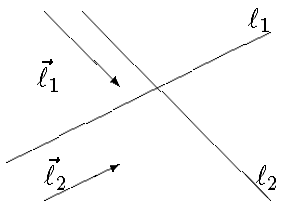
Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка. $M(x, y) \in a \Leftrightarrow \vec{n}||\overrightarrow{MM_0}$. Тогда $\vec{n}\overrightarrow{MM_0} = |\vec{n}||\overrightarrow{MM_0}|cos\angle(\vec{n}, \overrightarrow{MM_0})$. Так как $\vec{n}||\overrightarrow{MM_0}$, то $cos\angle(\vec{n}, \overrightarrow{MM_0}) = \pm 1$.

$\vec{n}\overrightarrow{MM_0} = |\vec{n}||\overrightarrow{MM_0}|(\pm 1)$ Возьмем модуль обеих частей этого равенства $|\vec{n}\overrightarrow{MM_0}| = |\vec{n}||\overrightarrow{MM_0}|$
Применим теорему о вычислении скалярного произведения в ортонормированном базисе

$$|A(x_0 - x) + B(y_0 - y)| = \sqrt{A^2 + B^2}\rho(M_0, a) \tag{3}$$

Так как $M(x, y) \in a$, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой a, то есть $Ax + By + C = 0$. Выразим отсюда $Ax + By$ и подставим в (3).

$$\rho(M_0, a) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Определение 3.4. *Величиной угла между двумя прямыми* ℓ_1 и ℓ_2 будем называть тот из углов между их направляющими векторами, которых не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Обозначение (ℓ_1, ℓ_2). Заметим, что, в частности, величина угла между параллельными прямыми равна 0.

Пусть даны две прямые ℓ_1 и ℓ_2 и их произвольные направляющие векторы $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$. Если $\angle(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2) \leq \frac{\pi}{2}$, то $(\ell_1, \ell_2) = \angle(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)$ и $cos(\ell_1, \ell_2) = cos\angle(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)$.
Если $\angle(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2) > \frac{\pi}{2}$, то $(\ell_1, \ell_2) = \angle(\vec{\ell}_1, -\vec{\ell}_2)$ и $cos(\ell_1, \ell_2) = cos\angle(\vec{\ell}_1, -\vec{\ell}_2) = cos(\pi - \angle(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)) = -cos\angle(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)$.
Тогда, объединяя оба случая, получим

$$cos(\ell_1, \ell_2) = |cos\angle(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)|$$