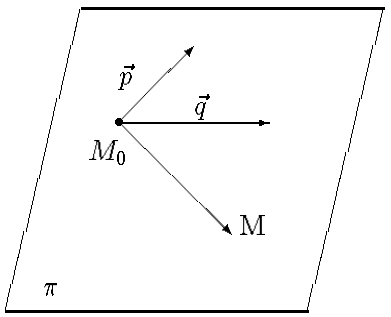
3 Прямые на плоскости. Прямые и плоскости в пространстве.

§19. Различные способы задания плоскости в пространстве.

Пусть в пространстве E^3 дана плоскость π. Напомним, что множество векторов, параллельных плоскости π образует векторное подпространство. Это подпространство называется *направляющим подпространством* плоскости π и обозначается L^2.

Чтобы однозначно определить плоскость, надо на ней задать точку M_0 и два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ из направляющего подпространства. Обозначение $\pi = [M_0, \vec{p}, \vec{q}]$.

Пусть в пространстве E^3 задана аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда у точек и векторов появляются координаты $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$. Получим уравнение плоскости π.



Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка. Тогда $M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}$ - компланарны. Это условие можно записать различными способами:

1. По теореме о компланарных векторах

$$\overrightarrow{M_0M} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}$$

где α, β - произвольные вещественные числа, которые называются *параметрами*. Это уравнение называется *векторным параметрическим уравнением плоскости*.

2. Если к векторному параметрическому уравнению плоскости применить теорему о координатах суммы векторов и произведения вектора на число, то получим *параметрические уравнения* плоскости

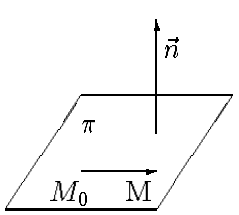
$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha p_1 + \beta q_1 \\ y - y_0 = \alpha p_2 + \beta q_2 \\ z - z_0 = \alpha p_3 + \beta q_3 \end{cases}$$

3. По критерию компланарности векторов

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & p_1 & q_1 \\ y - y_0 & p_2 & q_2 \\ z - z_0 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

Если раскрыть этот определитель, то мы получим уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D - некоторые константы. Это уравнение называется *общим уравнением плоскости*.

Пусть плоскость π задана точкой M_0 и вектором $\vec{n} \perp \pi$. Если задана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, то обозначим $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$.



Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка. Тогда $M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\vec{n} = 0$. Применяя теорему о вычислении скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе, получим уравнение плоскости π

$$(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0$$

Теорема 3.4. (о плоскости)
Любое множество точек, координаты которых относительно некоторой аффинной системы координат

удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D - некоторые константы такие, что $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ есть плоскость. При этом векторы $(-B, A, 0)$, $(C, 0, -A)$, $(0, C, -B)$ параллельны этой плоскости.

Доказательство. По условию хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля. Пусть это число A (остальные случаи рассматриваются аналогично). Возьмем точку $M_0(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{p}(-B, A, 0)$ и вектор $\vec{q}(C, 0, -A)$ и запишем уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Получим

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & -B & C \\ y & A & 0 \\ z & 0 & A \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем этот определитель: $(x + \frac{D}{A})(-A^2) - yAB + z(-AC) = 0$. Так как $A \neq 0$, можно разделить на $-A$. Тогда получим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, то есть данное нам уравнение в условии теоремы. Итак, данное уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ задает плоскость, проходящую через точку $M_0(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{p}(-B, A, 0)$ и $\vec{q}(C, 0, -A)$. □

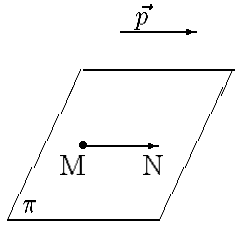
Следствие. Пусть дана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и плоскость π относительно этой системы координат задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\vec{n}(A, B, C) \perp \pi$.

Доказательство. Достаточно доказать, что вектор $\vec{n}$ перпендикулярен двум неколлинеарным векторам, которые параллельны плоскости π. Рассмотрим векторы $\vec{p}(-B, A, 0)$ и $\vec{q}(C, 0, -A)$. Тогда применяя теорему о вычислении скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе, получим $\vec{n}\vec{p} = A(-B) + BA + 0 = 0$ и $\vec{n}\vec{q} = AC + 0 + C(-A) = 0$, то есть $\vec{n} \perp \vec{p}$, $\vec{n} \perp \vec{q}$. □

Лемма 3.1. (о параллельности вектора и плоскости)
Пусть дана произвольная аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и относительно нее заданы плоскость π уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ и вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$. Тогда

$$\vec{p} \| \pi \Leftrightarrow Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$$

Доказательство.



Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - произвольная фиксированная точка плоскости π. Тогда ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости, то есть

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (1)$$

$\Rightarrow$). Пусть $\vec{p} \| \pi$. Тогда $N \in \pi$, то есть

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \qquad (2)$$

Вычтем из (2) (1)

$$A\underbrace{(x_2 - x_1)}_{p_1} + B\underbrace{(y_2 - y_1)}_{p_2} + C\underbrace{(z_2 - z_1)}_{p_3} = 0$$

$\Leftarrow$). Пусть координаты вектора $\vec{p}$ удовлетворяют равенству $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$. Надо доказать, что $N(x_2, y_2, z_2)$ принадлежит плоскости π. Так как $p_1 = x_2 - x_1$, $p_2 = y_2 - y_1$, $p_3 = z_2 - z_1$, то подставляя эти равенство в $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$, получим
$Ax_2 + By_2 + Cz_2 - \underbrace{(Ax_1 + By_1 + Cz_1)}_{-D, \text{т.к.} M_1 \in \pi} = 0$. То есть координаты точки N удовлетворяют уравнению плоскости, значит, эта точка лежит в плоскости и вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости π.□

Следствие. $\vec{a}(0, -C, B) \| \pi$. □

Применим доказанную лемму для изучения взаимного расположения плоскости относительно аффинной системы координат. Пусть дана аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и плоскости π задана относительно нее уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

1. $\vec{e}_1(1, 0, 0) \| \pi \Leftrightarrow A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$ $A = 0$

2. $\vec{e}_2(0,1,0)||\pi \Leftrightarrow B=0$

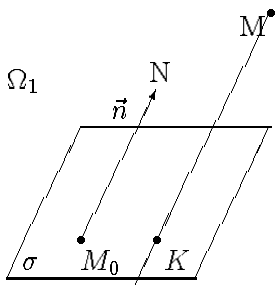
3. $\vec{e}_3(0,0,1)||\pi \Leftrightarrow C=0$

4. $O(0,0,0) \Leftrightarrow D=0$

5. $\pi||(Oxy) \Leftrightarrow \pi||\vec{e}_1$ и $\pi||\vec{e}_2$ и $O \notin \pi \Leftrightarrow A=0, B=0, D\neq 0$

Остальные случаи рассматриваются аналогично (запишите самостоятельно).

§20. Геометрический смысл знака четырехчлена $Ax+By+Cz+D$.



Пусть относительно аффинной системы координат $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ плоскость σ задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$. Тогда множество всех точек пространства E^3 разбивается на три множества: два полупространства и множество точек плоскости σ. Уравнение плоскости σ мы уже знаем. Выведем условия, определяющие полупространства.

Рассмотрим вектор $\vec{n}(A,B,C)$. По лемме о коллинеарности вектора и плоскости $\vec{n}$ $/\!/\sigma$, так как $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$. Возьмем произвольную точку M_0 плоскости σ и отложим от нее представитель вектора $\vec{n}(A,B,C)$. Так как этот вектор не коллинеарен плоскости, то конец его представителя попадет в одно из полупространств. Обозначим это полупространство Ω_1.
Пусть $M(x,y,z)$ - произвольная точка пространства E^3. Проведем через нее прямую, параллельную вектору $\vec{n}$. Обозначим точку пересечения этой прямой с плоскостью σ через $K(x_1,y_1,z_1)$. Тогда $M\in\Omega_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} \uparrow\uparrow \vec{n} \Leftrightarrow \exists\lambda$ - положительное вещественное число такое, что $\overrightarrow{KM}=\lambda\vec{n} \Leftrightarrow x-x_1=\lambda A, y-y_1=\lambda B, z-z_1=\lambda C$.
Найдем $P(M)=Ax+By+Cz+D=A(x_1+\lambda A)+B(y_1+\lambda B)+C(z_1+\lambda C)+D=\lambda(A^2+B^2+C^2)+(Ax_1+By_1+Cz_1+D)>0$, так как $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ (точка $K(x_1,y_1,z_1)\in\sigma$ и ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости σ).
Итак, $M(x,y,z)\in\Omega_1 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D>0$.
Аналогично доказывается, что $M(x,y,z)\in\Omega_2 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D<0$. (докажите самостоятельно)
□

§21. Взаимное расположение двух плоскостей.

Пусть относительно аффинной системы координат $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ плоскости заданы уравнениями σ_1 : $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\sigma_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Теорема 3.5. (о совпадении плоскостей)
$\sigma_1=\sigma_2 \Leftrightarrow \exists\lambda\neq 0: A_1=\lambda A_2, B_1=\lambda B_2, C_1=\lambda C_2, D_1=\lambda D_2$.

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\sigma_1=\sigma_2$. Тогда рассмотрим вектор $\vec{a}(-B_1,A_1,0)||\sigma_1 \Rightarrow \vec{a}||\sigma_2$ (так как эти плоскости совпадают)$\Rightarrow -A_2B_1+B_2A_1=0$ (по лемме о коллинеарности вектора плоскости) $\Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ Обозначим это отношение λ. Тогда $A_1=\lambda A_2, B_1=\lambda B_2$.
Аналогично $\vec{b}(0,-C_1,B_1)||\sigma_2 \Rightarrow \lambda=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.
Итак, мы доказали

$$A_1=\lambda A_2, B_1=\lambda B_2, C_1=\lambda C_2 \tag{3}$$

Нам осталось доказать, что $D_1=\lambda D_2$. Для этого рассмотрим какую-нибудь точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\sigma_1$, то есть ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости σ_1: $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0$. Подставим в это равенство найденные соотношения (3): $\lambda A_2x_0+\lambda B_2y_0+\lambda C_2z_0+D_1=0$. Так как по условию плоскости совпадают, то $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\sigma_2$, то есть $A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$. Сравнивая полученные соотношения, получим $D_1=\lambda D_2$.
$\Leftarrow$) Пусть $\exists\lambda\neq 0: A_1=\lambda A_2, B_1=\lambda B_2, C_1=\lambda C_2, D_1=\lambda D_2$. Надо доказать, что плоскости совпадают.

Подставим данные соотношения в уравнение первой плоскости и сократим на λ. Мы получим такое же уравнение как у первой плоскости, то есть $\sigma_1 = \sigma_2$. $\square$

Следствие 1. $\sigma_1 || \sigma_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2, D_1 \neq \lambda D_2$.

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\sigma_1 || \sigma_2$ Равенства $\exists \lambda \neq 0 : A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2$ доказываются также как в теореме. Докажем, что $D_1 \neq \lambda D_2$. Возьмем какую-либо точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma_1$. Тогда эта точка не принадлежит плоскости σ_2. Из этого получим $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0$ и $A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 \neq 0$. Используем доказанные соотношения $D_1 = -(A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0) = -\lambda(A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0) \neq \lambda D_2$.
$\Leftarrow$). Составим систему уравнений из уравнений плоскостей σ_1 и σ_2:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

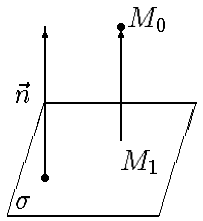
В этой системе уравнений коэффициенты при переменных пропорциональны, а свободные члены не пропорциональны. Как известно из алгебры, такая система решений не имеет, то есть данные плоскости не имеют общих точек, то есть параллельны. $\square$

§22. Метрические задачи теории плоскостей.

Пусть дана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Пусть даны плоскость $\sigma : Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Выведем формулу для вычисления расстояния от точки M_0 до плоскости σ.

$$\rho(M_0, \sigma) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Доказательство.



Опустим из точки M_0 перпендикуляр на плоскость σ и обозначим основание перпендикуляра M_1. Обозначим $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда $\rho(M_0, \sigma) = |\overrightarrow{M_1 M_0}|$. Рассмотрим вектор $\vec{n}(A, B, C)$. Так как система координат прямоугольная декартова, $\vec{n} \perp \sigma$, то есть $\vec{n} || \overrightarrow{M_1 M_0}$. По определению скалярного произведения имеем

$$\vec{n}\overrightarrow{M_1 M_0} = |\vec{n}||\overrightarrow{M_1 M_0}| \underbrace{cos\angle(\vec{n}, \overrightarrow{M_1 M_0})}_{\pm 1}$$

Берем обе части равенства по модулю

$$\rho(M_0, \sigma) = \frac{|\vec{n}\overrightarrow{M_1 M_0}|}{|\vec{n}|}$$

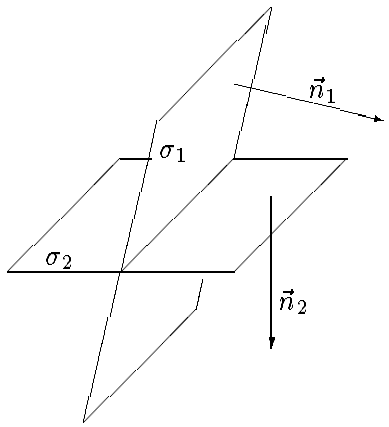
Применим формулы для вычисления скалярного произведения и длины вектора в ортонормированном базисе:

$$\rho(M_0, \sigma) = \frac{|A(x_0 - x - 1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Так как $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \sigma$, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости σ, то есть $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$.

$$\rho(M_0, \sigma) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \square$$

Пусть дана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Пусть даны две пересекающиеся плоскости $\sigma_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $\sigma_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$. Выведем формулу для вычисления угла между этими плоскостями.



Напомним, что вектор, перпендикулярный плоскости, называется *вектором нормали* этой плоскости. Обозначим $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1) \perp \sigma_1$, $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2) \perp \sigma_2$- векторы нормали плоскостей σ_1, σ_2. Тогда угол между плоскостями равен углу между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, если $\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leq \frac{\pi}{2}$ и равен углу между векторами $\vec{n}_1$ и $-\vec{n}_2$, если $\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) > \frac{\pi}{2}$.

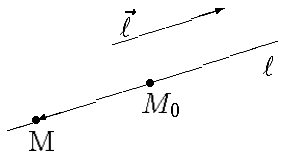
Объединяя оба случая, получим $cos\angle(\sigma_1, \sigma_2) = |cos\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2+{C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2+{C_2}^2}}$.
Итак,

$$cos\angle(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}$$

Следствие. $\sigma_1 \perp \sigma_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

§23. Различные способы задания прямой в пространстве.

Пусть прямая ℓ в пространстве E^3 задана точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{\ell}$. Фиксируем в пространстве аффинную систему координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\ell(p_1, p_2, p_3)$. Получим различные виды уравнений прямой ℓ.



Рассмотрим $\forall M(x, y, z)$. Тогда $M \in \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} || \vec{\ell}$.
Это можно записать различными способами:

1. По теореме о коллинеарных векторах $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{\ell}$, t - вещественное число. В координатах это векторное равенство принимает вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tp_1 \\ y = y_0 + tp_2 \\ z = z_0 + tp_3 \end{cases}, t \in \mathcal{R}$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями* прямой ℓ. Число t называется *параметром*.

2. Вспомним, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями* прямой.
Эта цепочка равенств равносильна системе двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{p_1} = \frac{y-y_0}{p_2} \\ \frac{y-y_0}{p_2} = \frac{z-z_0}{p_3} \end{cases}$$

Раскрывая пропорции, мы получим систему из двух линейных уравнений, которая задает прямую ℓ. Каждое уравнение задает плоскость в пространстве, значит, прямая ℓ в этом случае задается как линия пересечения двух плоскостей.

Замечание. Если $p_1 = 0$, то канонические уравнения прямой принимают вид

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y-y_0}{p_2} = \frac{z-z_0}{p_3} \end{cases}$$

Если $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, то канонические уравнения примут вид

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$$

Запишите аналогичные системы уравнений в случаях равенства нулю других координат направляющего вектора прямой.

Пусть прямая ℓ задается как линия пересечения двух плоскостей, то есть $\ell = \pi_1 \cap \pi_2$. Относительно произвольной аффинной системы координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ имеем систему уравнений.

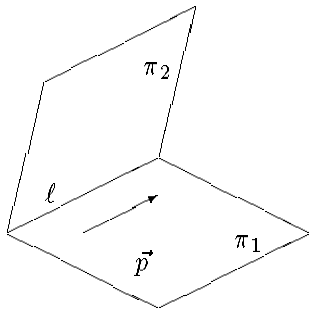
$$\ell : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Возникает вопрос: как в этом случае найти направляющий вектор такой прямой?

Лемма 3.2. (о направляющем векторе прямой)
Пусть прямая ℓ задана системой (5). Тогда

$$\vec{p} \left(\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C1 & C_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \right) \| \ell$$

Доказательство.



Пусть $\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \| \ell$. Тогда этот вектор должен быть параллелен как плоскости π_1, так и плоскости π_2. Применив критерий коллинеарности вектора плоскости, получим, что вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \| \ell$ тогда и только тогда, когда его координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} A_1 p_1 + B_1 p_2 + C_1 p_3 = 0 \\ A_2 p_1 + B_2 p_2 + C_2 p_3 = 0 \end{cases}$$

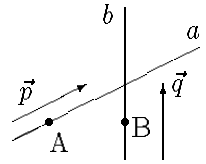
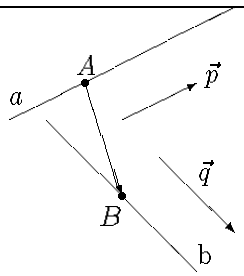
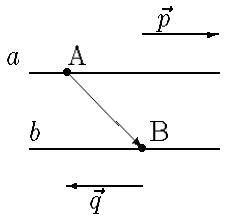
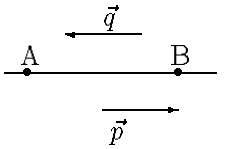
Проверим, что координаты данного вектора удовлетворяют этой системе уравнений.

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C1 & C_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = A_1(B_1C_2 - B_2C_1) + B_1(C_1A_2 - C_2A_1) + C_1(A_1B_2 - A_2B_1) = 0$$

Аналогично проверяется, что координаты данного вектора удовлетворяют второму уравнению. Таким образом, данный вектор $\vec{p} \| \ell$. □

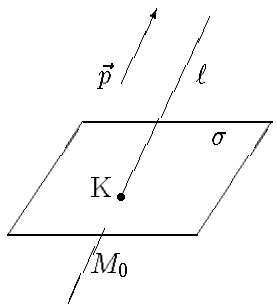
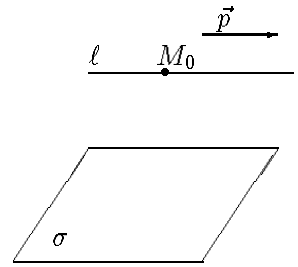
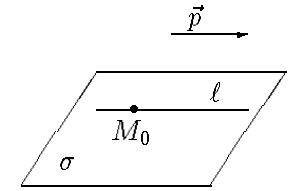
§24. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Пусть дана аффинная система координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и прямые $a = [A, \vec{p}]$ и $b = [B, \vec{q}]$ заданы параметрическими уравнениями. $a: \begin{cases} x = a_1 + p_1 t \\ y = a_2 + p_2 t \\ z = a_3 + p_3 t \end{cases}$ $b: \begin{cases} x = b_1 + q_1 t \\ y = b_2 + q_2 t \\ z = b_3 + q_3 t \end{cases}$, где $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$. Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения двух прямых.

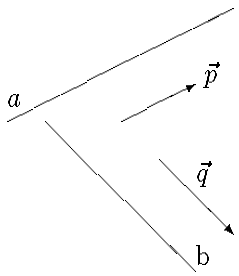
$a \cap b = C$	$a \dot{-} b$	$a \| b$	$a = b$
			
$\vec{p} \not\| \vec{q}$		$\vec{p} \| \vec{q}$	
проверяем пропорциональность координат векторов			
$\overrightarrow{AB}, \vec{p}, \vec{q}$ - компланарны | $\overrightarrow{AB}, \vec{p}, \vec{q}$ - не компланарны		$\overrightarrow{AB} \not\| \vec{p}$	$\overrightarrow{AB} \| \vec{p}$
считаем определитель		проверяем пропорциональность координат векторов	

Пусть относительно аффинной системы координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ плоскость $\sigma : Ax+By+Cz+D = 0$ и прямая $\ell = [M_0, \vec{p}]$ параметрическими уравнениями $\ell : \begin{array}{l} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \\ z = z_0 + p_3 t \end{array}$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$.

Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости.

$\ell \cap \sigma = K$	$\ell \| \sigma$	$\ell \subset \sigma$
		
$\vec{p} \not\| \sigma$	$\vec{p} \| \sigma$ и $M_0 \notin \sigma$	$\vec{p} \| \sigma$ и $M_0 \in \sigma$
$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 \neq 0$	$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$

§25. Метрические задачи теории прямых и плоскостей.



Определение 3.5. *Углом между двумя прямыми* a, b назовем тот из углов между их направляющими векторами, который не превосходит $\frac{\pi}{2}$.

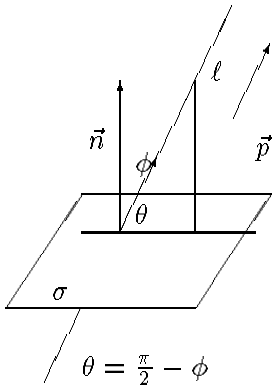
Пусть дана прямоугольная декартова система координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Пусть относительно этой системы координат известны координаты направляющих векторов этих прямых: $\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \| a$, $\vec{q}(q_1, q_2, q_3) \| b$.

Аналогично случаю угла между прямыми на плоскости, получим

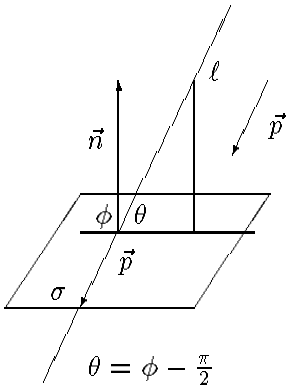
$$cos\angle(a, b) = |cos\angle(\vec{p}, \vec{q})| = \frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{|p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3|}{\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2}\sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2}}$$

Пусть относительно прямоугольной декартовой системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ заданы прямая $\ell : \begin{array}{l} x = x_1 + p_1 t \\ y = y_2 + p_2 t \\ z = z_3 + p_3 t \end{array}$ и плоскость $\sigma : Ax + By + Cz + D = 0$.

Определение 3.6. *Углом между прямой* ℓ *и плоскостью* σ называется угол между прямой ℓ и ее ортогональной проекцией на плоскость σ.



$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$



$\theta = \phi - \frac{\pi}{2}$

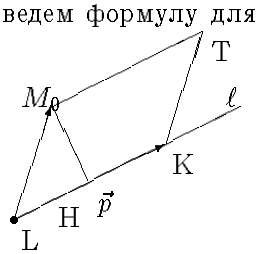
$sin\theta = sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = cos\phi$ $sin\theta = sin(\phi - \frac{\pi}{2}) = -cos\phi$

Объединяя оба случая, получаем

$$sin\theta = |cos\phi| = \left|\frac{\vec{n}\vec{p}}{|\vec{n}||\vec{p}|}\right| = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2}}$$

Определение 3.7. *Расстоянием* от точки M_0 до прямой ℓ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.

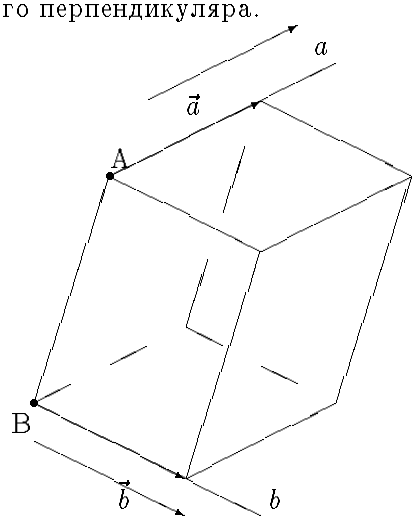
Выведем формулу для вычисления расстояния от точки до прямой.



Вычислим площадь параллелограмма $LKTM_0$ двумя способами: $S = LK \cdot M_0H = |\vec{p}|\rho(M_0, \ell)$. С другой стороны, по определению векторного произведения $S = |[\overrightarrow{LM_0}, \vec{p}]|$. Приравнивая правые части равенств, получим

$$\rho(M_0, \ell) = \frac{|[\overrightarrow{LM_0}, \vec{p}]|}{|\vec{p}|}$$

Определение 3.8. *Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми* называется длина их общего перпендикуляра.



Пусть даны скрещивающиеся прямые $a = [A, \vec{a}]$ и $b = [B, \vec{b}]$. Достроим эти прямые до параллелепипеда как показано на рисунке. Тогда расстояние $\rho(a, b)$ равно высоте построенного параллелепипеда. Вычислим объем этого параллелепипеда двумя способами: во-первых, $V = S_{\text{ОСН}}h = |[\vec{a}\vec{b}]|\rho(a, b)$, во-вторых, по теореме о геометрическом смысле смешанного произведения $V = |(\overrightarrow{AB}\vec{a}\vec{b})|$. Приравнивая обе правые части этих равенств, получим

$$\rho(a, b) = \frac{|(\overrightarrow{AB}\vec{a}\vec{b})|}{|[\vec{a}\vec{b}]|}$$