1 Проективная геометрия.

§1. Расширенная прямая.

Сведения из теории

В качестве модели проективной прямой будем рассматривать *расширенную прямую* $\bar{d} = d \cup \{A_\infty\}$, где d – "обычная" прямая на евклидовой плоскости, A_∞ – дополнительный элемент, который называется *бесконечно удаленной точкой* расширенной прямой $\bar{d}$.

Проективный репер R на расширенной прямой $\bar{d}$ можно задать как упорядоченную тройку различных точек этой прямой, то есть $R = (A_1, A_2, E)$.

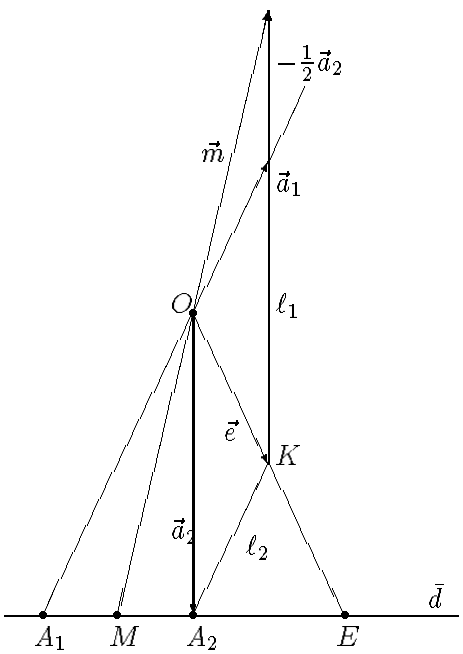
Определение 1.1. *Координатами точки* $M \in \bar{d}$ относительно репера $R = (A_1, A_2, E)$ называется упорядоченная пара чисел (x^1, x^2) такая, что $\vec{m} = x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2$, где векторы $\vec{m}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{e}$ порождают точки M, A_1, A_2, E соответственно, и $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{e}$ (это условие согласованности векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$).

Напомним, что координаты точки относительно проективного репера определяются не однозначно, а с точностью до постоянного множителя.

Задачи.

1. На расширенной прямой $\bar{d}$ дан проективный репер $R = (A_1, A_2, E)$. Построить точку $M(1, -\frac{1}{2})_R$.

Решение.1) Построим систему векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e})$ так, чтобы векторы $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ были согласованы относительно репера R.

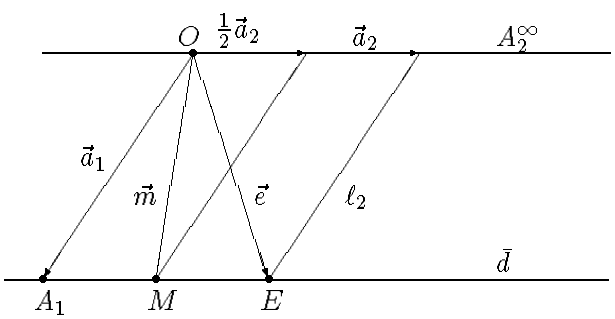


Рассмотрим пучок $\mathcal{P}(O)$ с центром в точке O, который порождает проективную структуру на расширенной прямой $\bar{d}$. Возьмем произвольный вектор $\vec{e}$, параллельный прямой (OE), и отложим его представитель от точки O – получим точку K. Через точку K проведем две прямые $\ell_1 \| (OA_2)$ и $\ell_2 \| (OA_1)$. Тогда прямая ℓ_1 пересечет прямую (OA_1) в конце представителя вектора $\vec{a}_1$, отложенного от точки O. Аналогично, прямая ℓ_2 пересечет прямую (OA_2) в конце представителя вектора $\vec{a}_2$, отложенного от точки O. На картинке мы чисто случайно выбрали вектор $\vec{e}$ так, что прямая ℓ_2 попала в точку A_2. В общем случае такого может не быть.

2) Построим точку M по заданным координатам. По определению проективных координат имеем $\vec{m} = 1 \cdot \vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_2$. Построим этот вектор и отложим его представитель от точки O. Тогда, проведя прямую через точку O параллельно вектору $\vec{m}$, в пересечении с прямой $\bar{d}$ получим точку M.

2. На расширенной прямой $\bar{d}$ дан проективный репер $R = (A_1, A_2^\infty, E)$. Построить точку $M(1, \frac{1}{2})_R$.

Решение.1) Построим систему векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e})$ так, чтобы векторы $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ были согласованы относительно репера R.



Принцип построения согласованного базиса такой же как и в предыдущей задаче. Но в данном случае удобно в качестве вектора $\vec{e}$ удобно взять вектор $\overrightarrow{OE}$. Тогда, проведя прямую $\ell_2 \| (OA_2)$ через точку E, получим вектор $\vec{a}_2$. Вектором $\vec{a}_1$ является вектор $\overrightarrow{OA_1}$.

2) Построим точку M. Так как $M(1, \frac{1}{2})_R$, получим $\vec{m} = \vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2$. Строим вектор $\vec{m}$ и откладываем его представитель от точки O.

Проведем прямую через точку O прямую, параллельную вектору $\vec{m}$. Эта прямая пересечет прямую $\bar{d}$ в точке M.

Задачи к зачету и проверочным работам.

1. На расширенной прямой дан проективный репер $R = (A_1, A_2, E^\infty)$. Построить точки $M_1(2,1)_R$, $M_2(-2,1)_R$, $M_3(1,1)_R$, $M_4(-1,1)_R$.

2. На расширенной прямой дан проективный репер $R = (A_1, A_2, E)$. Найти координаты точек A_1, A_2, E в этом репере.

Дополнительные задачи.

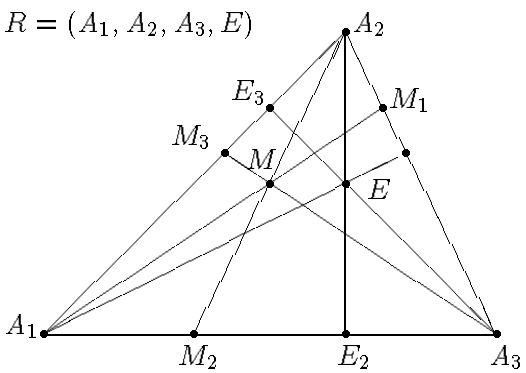
1. На расширенной прямой $\bar{d}$ дан проективный репер $R = (A_1, A_2, E)$, причем $\frac{AE_1}{EA_2} = \frac{m}{n}$. Найдите координаты бесконечно удаленной точки прямой $\bar{d}$.

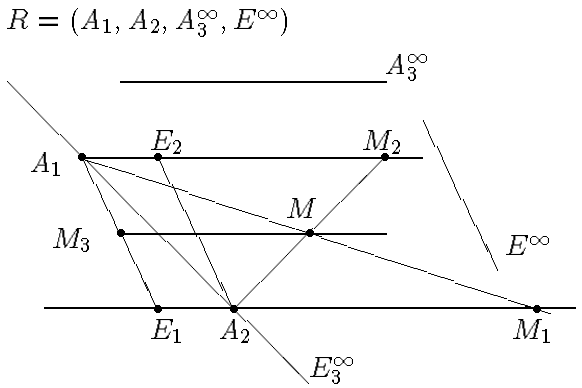
2. Рассмотрим пучок прямых с центром в точке O как одномерное проективное пространство. Напомним, что точками этого проективного пространства являются прямые пучка. Проективный репер этого пространства упорядоченная тройка прямых $R = (a_1, a_2, e)$ этого пучка. Построить точку $m(2,1)_R$.

§2. Расширенная плоскость.

Сведения из теории
Расширенной плоскостью называется объединение $\bar{\pi} = \pi \cup \{\ell_\infty\}$ плоскости π и бесконечно удаленной прямой ℓ_∞. Бесконечно удаленная прямая состоит из бесконечно удаленных точек. Чтобы задать бесконечно удаленную точку, нужно на расширенной плоскости начертить расширенную прямую, которой принадлежит эта бесконечно удаленная точка.

Проективный репер на расширенной плоскости можно задать как упорядоченную четверку точек общего положения $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ (ни какие три из них не лежат на одной прямой). Заметим, что точки репера могут быть как собственными, так и бесконечно удаленными.





$$M(x^1, x^2, x^3)_R$$

Прямая	Репер	Проекция точки M	Координаты
(A_1A_2)	$R_3 = (A_1, A_2, E_3)$	$M_3 = (A_3M) \cap (A_1A_2)$	$M_3(x^1, x^2)_{R_3}$
(A_2A_3)	$R_1 = (A_2, A_3, E_1)$	$M_1 = (A_1M) \cap (A_2A_3)$	$M_1(x^2, x^3)_{R_1}$
(A_1A_3)	$R_2 = (A_1, A_3, E_2)$	$M_2 = (A_2M) \cap (A_1A_3)$	$M_2(x^1, x^3)_{R_2}$

$$M = (A_1M_1) \cap (A_2M_2) \cap (A_3M_3)$$

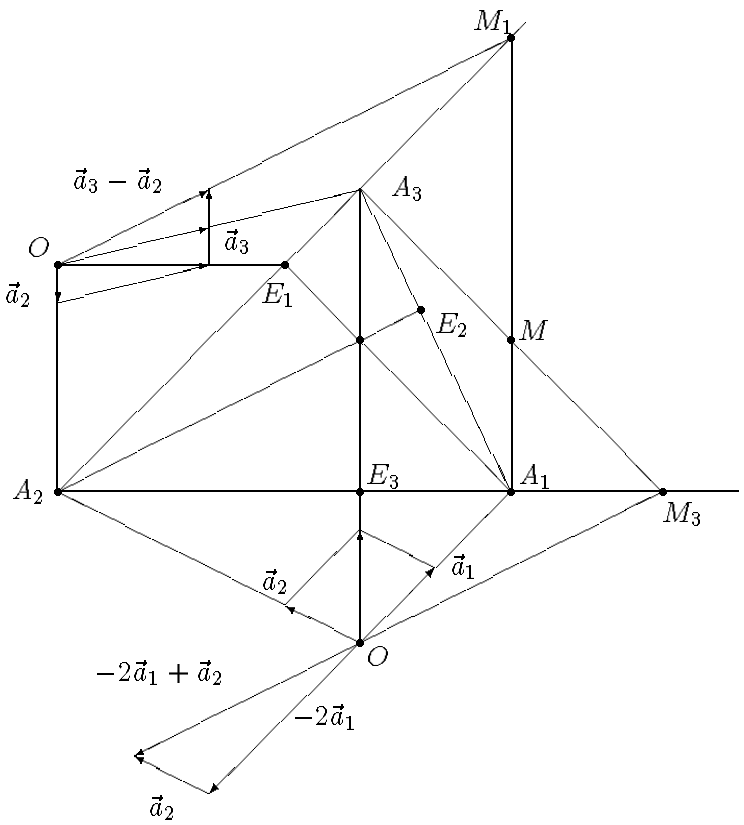
Уравнения прямой ℓ, проходящей через фиксированные точки $C(c^1, c^2, c^3)$ и $D(d^1, d^2, d^3)$

общее: $\begin{vmatrix} x^1 & c^1 & d^1 \\ x^2 & c^2 & d^2 \\ x^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = 0$ параметрические: $\begin{cases} x^1 = \lambda c^1 + \mu d^1; \\ x^2 = \lambda c^2 + \mu d^2; \\ x^3 = \lambda c^3 + \mu d^3; \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

Задачи.
1. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Построить точку $M(-2, 1, -1)_R$.

Решение. Изобразим точки репера R и точки E_1, E_2, E_3. Рассмотрим проекции точки M из центров A_1, A_2, A_3 и определим их координаты в реперах соответствующих прямых: $M_1(1,-1)_{(A_2,A_3,E_1)}$, $M_2(-2,-1)_{(A_1,A_3,E_2)}$, $M_3(-2,1)_{(A_1,A_2,E_3)}$. Выберем из них две точки, которые легче строить, например, M_1 и M_3.

1) Рассмотрим расширенную прямую (A_2A_3) и построим на ней точку $M_1(1,-1)_{R_1}$ (так же как мы делали в параграфе 1). Возьмем пучок прямых с центром в некоторой точке O и построим согласованный базис, порождающий репер $R_1 = (A_2, A_3, E_1)$.



Так как координаты точки определены с точностью до постоянного множителя, точка $M_1(-1,1)_{R_1}$. Мы заменили координаты точки M_1 для того, чтобы чертеж не вылез за границы страницы. Тогда строим вектор $-1\cdot\vec{a}_2+1\cdot\vec{a}_3$ и проводим через точку O прямую, параллельную этому вектору. Она пересечет прямую (A_2A_3) в точке M_1.

2) Построение точки $M_3(-2,1)$ на прямой (A_1A_2) аналогично пункту 1). Рассмотрим пучок прямых $\mathcal{P}(O)$ с центром в точке O и строим согласованную систему векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, порождающую репер $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$. Тогда точка M_3 будет точкой пересечения прямой (A_1A_2) и прямой, проходящей через точку O параллельно вектору $-2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Заметим, что обозначения O и $\vec{a}_2$ мы используем здесь для других объектов, отличных от объектов пункта 1).

3) Точка $M = (A_1M_1) \cap (A_3M_3)$. □

2. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = (A_1^\infty, A_2, A_3, E^\infty)$. Написать общее и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M(-2,1,-1)_R$ и $N(1,2,-1)_R$, и построить ее.

Решение. Подставим в общие формулы для общего и параметрических уравнений прямой наши данные:

общее: $\begin{vmatrix} x^1 & -2 & 1 \\ x^2 & 1 & 2 \\ x^3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

параметрические: $\begin{cases} x^1 = \lambda\cdot(-2) + \mu\cdot 1; \\ x^2 = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 2; \\ x^3 = \lambda\cdot(-1) + \mu\cdot(-1); \end{cases} \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

Для общего уравнения раскроем определитель и получим $(MN): x^1 - 3x^2 - 5x^3 = 0$.

Изобразить прямую (MN) можно двумя способами:

1) Построить данные точки M и N как в предыдущей задаче и соединить их по линейке – получим прямую MN.

2) Можно получить координаты точек пересечения прямой (MN) с двумя из трех прямых (A_1A_2), (A_1A_3), (A_2A_3). Построить эти точки и соединить их по линейке. Решим задачу вторым способом.

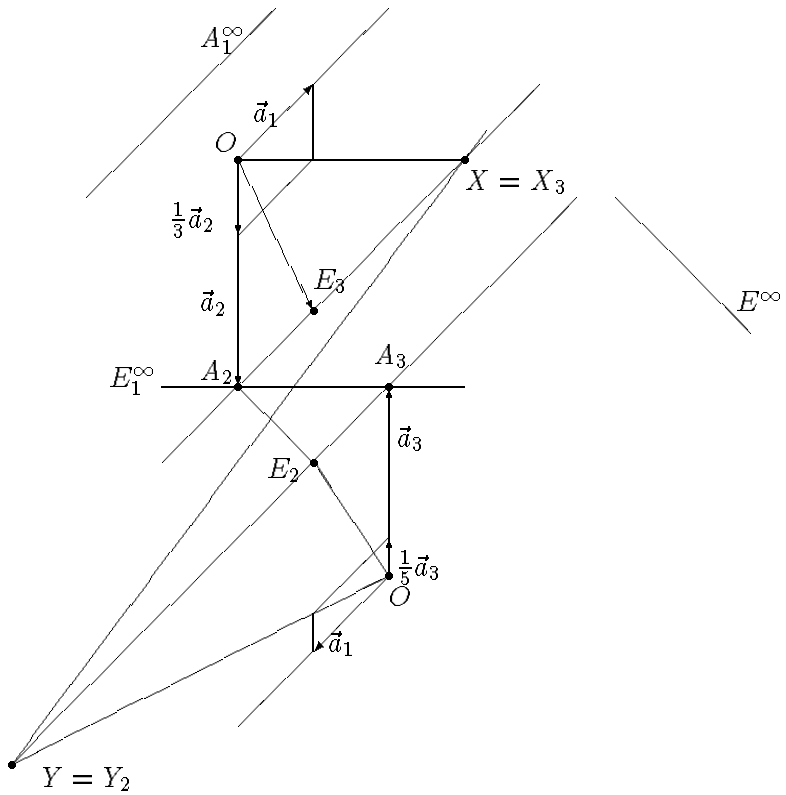
Заметим, что точка A_1 порождается вектором $\vec{a}_1$ проективного репера R и $\vec{a}_1 = 1\cdot\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3$, а значит, $A_1(1,0,0)_R$. Аналогично рассуждая, получим, что $A_2(0,1,0)_R$, $A_3(0,0,1)_R$. Тогда, используя

общий вид общего уравнения прямой легко получаем уравнения

$$\underset{x^3=0}{\begin{vmatrix} x^1 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \\ x^3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}^{(A_1A_2)} = 0 \qquad \underset{x^1=0}{\begin{vmatrix} x^1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & 0 \\ x^3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}^{(A_2A_3)} = 0 \qquad \underset{x^2=0}{\begin{vmatrix} x^1 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}^{(A_1A_3)} = 0$$

Найдем точку пересечения прямой MN и прямой (A_1A_2). Для этого нужно решить систему

$$\begin{cases} x^1 - 3x^2 - 5x^3 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = 3x^2 \\ x^3 = 0 \end{cases}$$



Так как координаты точек в проективном репере определены с точностью до постоянного множителя, то мы можем придать произвольное значение x^2, а остальные две переменные вычислить из полученной системы. Пусть $x^2 = 1$. Тогда $x^1 = 3$, $x^3 = 0$. Обозначим эту точку $X(3,1,0) \in (MN)$. Эта точка хороша тем, что она совпадает со своей проекцией из центра A_3, то есть $X = X_3(3,1)_{R_3}$.

Проводя аналогичные рассуждения, получим, что точка пересечения Y прямой MN с прямой (A_1A_3) имеет координаты $Y(5,0,1)_R$. Она также совпадает со своей проекцией $Y = Y_2(5,1)_{R_2}$. Строить точки X и Y мы уже умеем. На чертеже (чтобы чертеж располагался компактнее) у точки X в качестве координат взяты числа $X = X_3(1, \frac{1}{3})$, а у точки $Y = Y_3(1, \frac{1}{5})$. Эта замена правомерна, так как координаты в проективном репере определены с точностью до постоянного множителя. Тогда $(MN) = (XY)$. □

3. На двух различных прямых m и n взяты точки $A_1, A_3, A_5 \in m$ и $A_2, A_4, A_6 \in n$. Доказать, что точки $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, $R = (A_3A_4) \cap (A_1A_6)$ лежат на одной прямой. (Теорема Паскаля-Паппа)

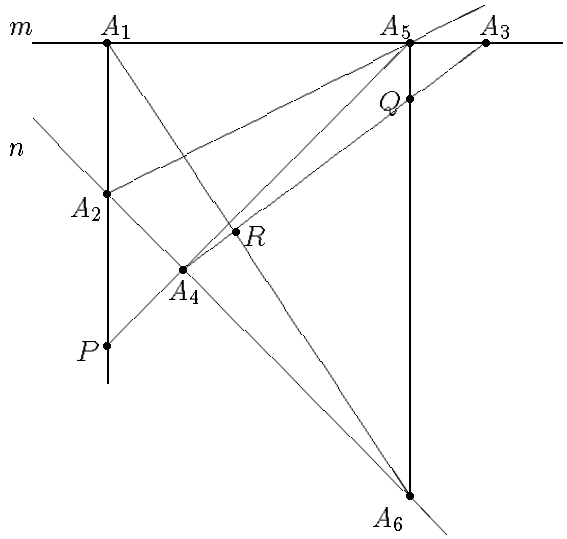
Решение. Введем проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, A_4)$. Тогда $A_1(1,0,0)_R$, $A_2(0,1,0)_R$, $A_3(0,0,1)_R$, $A_4(1,1,1)$. Действительно, для трех первых точек мы нашли координаты в предыдущей задаче. Для того, чтобы найти координаты точки A_4, заметим, что она является единичной точкой проективного репера R, то есть для вектора $\vec{a}_4$, порождающего эту точку, имеем $\vec{a}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$, а значит, $A_4(1,1,1)_R$.

Далее, точка $A_5 \in (A_1A_3)$, следовательно, ее вторая координата равна 0. Так как $A_5 \neq A_3$, то ее первая координата не равна нулю, то есть мы можем ввести обозначение $A_5(1,0,a)_R$, $a \in \mathbf{R}$ – некоторое ненулевое вещественное число.

Рассмотрим точку $A_6 \in (A_2A_4)$. Выведем уравнение прямой (A_2A_4): $\begin{vmatrix} x^1 & 0 & 1 \\ x^2 & 1 & 1 \\ x^3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^1 - x^3 = 0.$

Так как A_6 лежит на этой прямой, ее координаты должны удовлетворять полученному уравнению, а значит, первая и третья координаты точки A_6 равны. Так как A_6 не лежит на прямой A_1A_3, то ее вторая координата не равна нулю. Тогда обозначим координаты точки $A_6(1,b,1)_R$, $b \in \mathbf{R}$ – некоторое

ненулевое вещественное число.



Найдем координаты точек P, Q, R в репере R. Имеем $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$. Чтобы найти координаты точки P, нам нужно решить систему уравнений, состоящую из уравнения прямой (A_1A_2) и уравнения прямой (A_4A_5). Запишем уравнение прямой

$$(A_4A_5): \begin{vmatrix} x^1 & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 0 \\ x^3 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax^1 - (a-1)x^2 - x^3 = 0.$$ Тогда

$$P: \begin{cases} x^3 = 0 \\ ax^1 - (a-1)x^2 - x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ ax^1 = (a-1)x^2 \end{cases}$$ Откуда получаем $P(a-1, a, 0)_R$.

Аналогично вычислим координаты точки $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$. Запишем уравнение прямой (A_5A_6): $\begin{vmatrix} x^1 & 1 & 1 \\ x^2 & 0 & b \\ x^3 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow abx^1 + (1-a)x^2 - bx^3 = 0$. Тогда

$$Q: \begin{cases} x^1 = 0 \\ abx^1 - (a-1)x^2 - bx^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = 0 \\ (1-a)x^2 = bx^3 \end{cases}$$ Откуда получаем $Q(0, b, 1-a)_R$.

Аналогично вычислим координаты точки $R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$. Запишем уравнение прямой (A_3A_4): $\begin{vmatrix} x^1 & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \\ x^3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^1 - x^2 = 0.$

Запишем уравнение прямой (A_6A_1): $\begin{vmatrix} x^1 & 1 & 1 \\ x^2 & 0 & b \\ x^3 & 01 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - bx^3 = 0$. Тогда

$$Q: \begin{cases} x^1 = x^2 \\ x^2 = bx^3 \end{cases}$$ Откуда получаем $R(b, b, 1)_R$.

Наконец, чтобы выяснить, лежат ли три точки на одной прямой, нужно вычислить определитель состоящий из координат этих точек. Если он равен нулю, то точки лежат на одной прямой, если – нет, то не лежат. Вычисляем:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & b \\ a & b & b \\ 0 & 1-a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(b-b(1-a)) + a(b(1-a)) = b(a-1) + b(a-1)^2 + ab(1-a) = (a-1)(b+ab-b-ab) =$$

0. Итак, мы доказали, что точки P, Q, R лежат на одной прямой. □

Задачи к зачету и проверочным работам.

Во всех задачах данного параграфа, если не указано противное, предполагается, что задана расширенная плоскость. Если у точки нет знака ∞, то она предполагается собственной.

1. Построить прямую $a: x^1 + x^2 - 2x^3 = 0$ в репере $R = (A_1, A_2, A_3, E)$.
2. Построить прямую $a: x^1 - x^2 + x^3 = 0$ в репере $R = (A_1, A_2, A_3, E)$.
3. Построить прямую $a: x^1 + x^2 = 0$ в репере $R = (A_1^\infty, A_2, A_3, E)$.
4. Доказать, что точки $A(5, 1, 3)$, $B(-2, 4, -3)$, $C(8, 6, 3)$ лежат на одной прямой и записать ее общее и параметрические уравнения.
5. Построить прямую $a: 2x^1 + x^2 + x^3 = 0$ в репере $R = (A_1, A_2^\infty, A_3, E)$.
6. Построить прямую $a: x^1 + x^2 = 0$ в репере $R = (A_1^\infty, A_2^\infty, A_3, E)$.
7. Построить прямую $a: x^2 + x^3 = 0$ в репере $R = (A_1^\infty, A_2, A_3, E^\infty)$.

8. Построить точку пересечения прямых $a : 2x^1 + 3x^2 - 6x^3 = 0$ и $b : x^1 + 3x^3 = 0$ в репере $R = (A_1^\infty, A_2, A_3, E)$.

Дополнительные задачи.

1. Построить прямую $x^2 + x^3 = 0$ в репере $R = (A_1^\infty, A_2, A_3, E)$, где точка E_1 – середина отрезка $[A_2A_3]$.

2. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, где точки A_1, A_2, A_3, E – вершины параллелограмма. Найти координаты бесконечно удаленной точки прямой $2x^1 + x^2 + 5x^3 = 0$.

3. Напишите уравнение бесконечно удаленной прямой в репере $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, где E – точка пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$.

4. Написать уравнение бесконечно удаленной прямой в репере $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, где $A_1A_2A_3E$ – параллелограмм.

5. Пусть $O_1O_2O_3$ – произвольный треугольник, E – точка, не лежащая на его сторонах, $E_1 = (O_1E) \cap (O_2O_3)$, $E_2 = (O_2E) \cap (O_1O_3)$, $E_3 = (O_3E) \cap (O_1O_2)$. На прямой O_1E_1 взята произвольная точка B и рассмотрены точки $C = (BE_2) \cap (O_3E)$ и $D = (BE_3) \cap (O_2E)$. Докажите, что прямые $O_2O_3)$, (E_2E_3) и (CD) проходят через одну точку.

6. Пусть ABC – произвольный треугольник, а P – точка на прямой (BC), отличная от точек B и C. Через точку P проведена переменная прямая ℓ, которая пересекает прямые (AC) и (AB) соответственно в точках M и N. Докажите, что прямая (LM), где $L = (AP) \cap (NC)$, при любом положении прямой ℓ проходит через фиксированную точку Q плоскости.

7. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены в плоскости так, что прямые (AA_1), (BB_1) и (CC_1) пересекаются в точке O_1, а прямые (AB_1), (BC_1) и (CA_1) – в точке O_2. Докажите, что прямые (AC_1), (BA_1) и (CB_1) также пересекаются в точке O_3. (Теорема о дважды перспективных трехвершинниках)