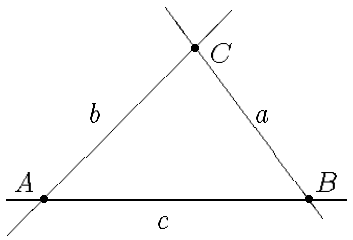
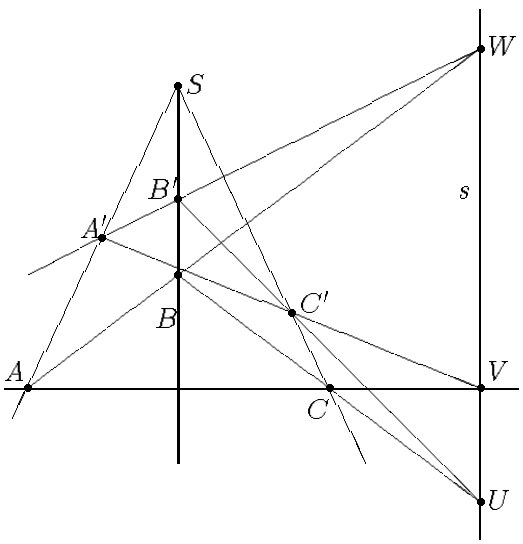
1 Проективная геометрия.

§3. Теорема Дезарга.

Сведения из теории



Определение 1.1. *Трехвершинником* ABC называется фигура, состоящая из трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, и трех прямых (AB), (BC), (AC) попарно соединяющих эти точки. Точки A, B и C называются *вершинами* трехвершинника, а прямые $(AB) = c$, $(BC) = a$, $(AC) = b$ – *сторонами*.



Теорема 1.1. (Дезарга) Пусть даны два трехвершинника ABC и $A'B'C'$ такие, что ни одна из вершин или сторон одного из них не совпадает с соответствующим элементом другого. Тогда

$\mathcal{A}$: если три прямые (AA'), (BB'), (CC') проходят через одну точку, то три точки пересечения прямых $a \cap a'$, $b \cap b'$, $c \cap c'$ лежат на одной прямой.

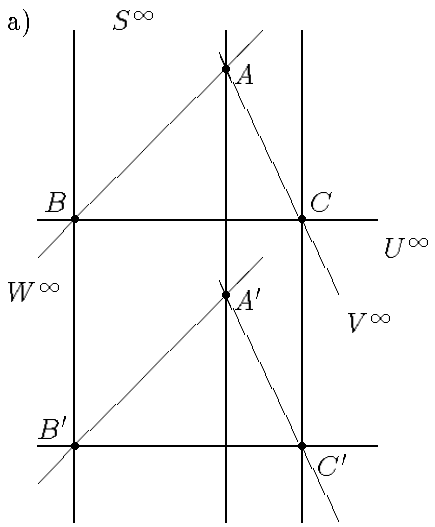
$\mathcal{A}^*$: если три точки пересечения прямых $a \cap a'$, $b \cap b'$, $c \cap c'$ лежат на одной прямой, то три прямые (AA'), (BB'), (CC') проходят через одну точку.

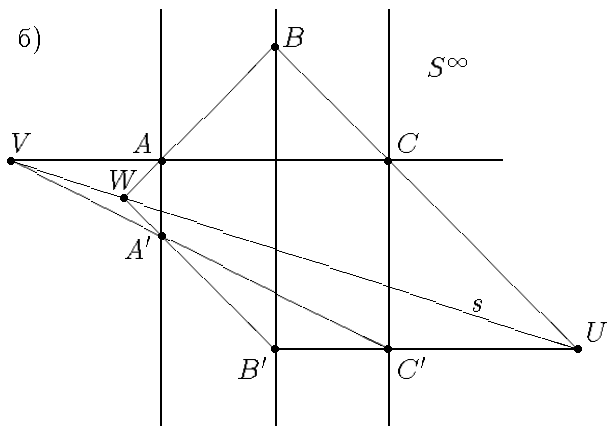
Определение 1.2. Два трехвершинника, имеющих центр (а значит, и ось) перспективы, называются *перспективными*.

Задачи.

1. На расширенной плоскости изобразить два перспективных трехвершинника, имеющих а) бесконечно удаленный центр и бесконечно удаленную ось перспективы; б) бесконечно удаленный центр и собственную ось перспективы.

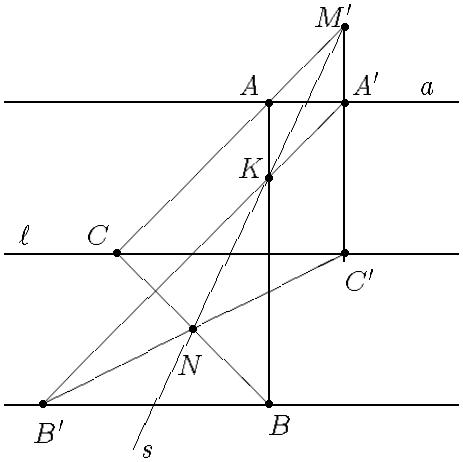
Решение.





2. На евклидовой плоскости даны две параллельные прямые $a \| b$ и точка C, не лежащая на них. Построить прямую ℓ, проходящую через точку C параллельно прямым a и b, используя только линейку.

Решение. Дополним евклидову плоскость бесконечно удаленной прямой до проективной плоскости.



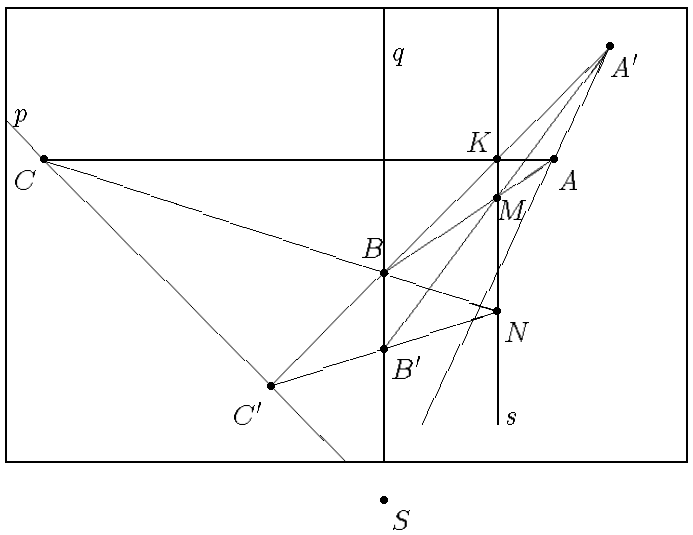
Построим два перспективных трехвершинника ABC и $A'B'C'$ так, чтобы $A, A' \in a$, $B, B' \in b$. Тогда центр перспективы этих трехвершинников будет бесконечно удаленной точкой S^∞, следовательно, их третьи соответствующие вершины C, C' с необходимостью окажутся на прямой ℓ, проходящей через точку S^∞, то есть параллельной прямым a, b.

Начнем построение с оси перспективы трехвершинников. Мы берем произвольную прямую s. На этой прямой выбираем произвольную точку $M \in s$. Точка M будет точкой пересечения прямых (AC) и $(A'C')$. Значит, $(CM) \cap a = A$. Точку A' выбираем произвольно на прямой a и точку B – на прямой b. Тогда обозначим $K = (AB) \cap s$ и точка K должна стать точкой пересечения прямых (AB) и $(A'B')$, следовательно, $B' = (A'K) \cap b$.

Проводим прямую (CB). Она пересечет ось перспективы s в точке N, через которую должна пройти прямая $(B'C')$, то есть $(B'N) \cap (MA') = C'$. Итак, прямая $(CC') = \ell$ – искомая прямая.

3. На чертеже ограниченных размеров заданы точка A и пара прямых p и q, которые пересекаются за пределами чертежа (в недоступной точке S). Воспользовавшись теоремой Дезарга постройте доступную часть прямой (AS).

Решение. Дополним евклидову плоскость бесконечно удаленной прямой до проективной плоскости.

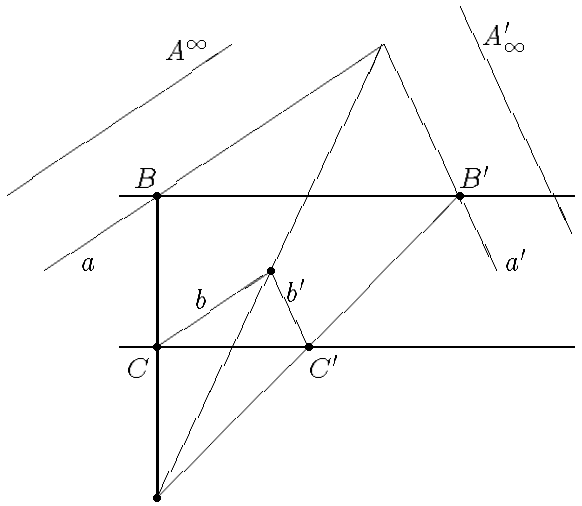


Построим два перспективных трехвершинника ABC и $A'B'C'$ так, чтобы недоступная точка S была их центром перспективы, $C, C' \in p$, $B, B' \in q$. Тогда прямая (AA') будет искомой прямой ℓ.

Чтобы два трехвершинника были перспективными, они должны иметь ось перспективы. Проведем произвольную прямую s. Точка A нам уже дана. Возьмем произвольно точки B, C и C'. Обозначим $K = (AC) \cap s$, $M = (AB) \cap s$, $N = (BC) \cap s$. Тогда $B' = (C'N) \cap s$ и $A' = (B'M) \cap (C'K)$.

4. В трехвершинниках ABC и $A'B'C'$, имеющих центр перспективы, вершины A и A' – несобственные, а стороны (BC) и $(B'C')$ не параллельны. Сформулируйте предложение евклидовой геометрии, которое соответствует теореме Дезарга.

Решение.



Пусть дана трапеция $BB'C'C$ с основанием BB'. Проведем через ее вершины B и B' две пересекающиеся прямые a и a', соответственно, а через вершины C и C' прямые $b \| a$ и $b' \| a'$. Тогда точки пересечения прямых $a \cap a'$, $b \cap b'$ и $(BC) \cap (B'C')$ лежат на одной прямой.

Задачи к зачету и проверочным работам.

1. Изобразите два трехвершинника, центр перспективы которых – собственная точка, а ось перспективы – бесконечно удаленная прямая.

2. Постройте два перспективных трехвершинника, центр перспективы которых принадлежит оси перспективы (все точки собственные).

3. Используя теорему Дезарга, докажите, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке.

4. На евклидовой плоскости даны треугольник ABC и точка S, не лежащая на прямых, содержащих стороны этого треугольника. Пусть $A' = (AS) \cap (BC)$, $B' = (BS) \cap (AC)$, $C' = (CS) \cap (AB)$. Докажите, что точки $(BC) \cap (B'C')$, $(AC) \cap (A'C')$, $(AB) \cap (A'B')$ лежат на одной прямой.

5. В плоскости трехвершинника ABC дана точка S, не лежащая на его сторонах. Пусть $A' = (AS) \cap (BC)$, $B' = (BS) \cap (AC)$, $C' = (CS) \cap (AB)$. Используя теорему Дезарга, доказать, что точки $(BC) \cap (B'C')$, $(AC) \cap (A'C')$, $(AB) \cap (A'B')$ лежат на одной прямой.

6. На чертеже ограниченных размеров даны две пары прямых p, q, пересекающихся в недоступной точке A, и u, v, пересекающихся в недоступной точке B. Построить доступную часть прямой AB.

7. На чертеже ограниченных размеров заданы две пары прямых p, q, пересекающиеся в недоступной точке A, и две прямые u, v, пересекающиеся в недоступной точке B. Построить часть какой-либо прямой, проходящей через точку пересечения прямой (AB) с прямой t, заданной ее доступной частью. (Короче, найти точку пересечения доступной прямой с недоступной.)

8. В четырехугольник $ABCD$ вписана трапеция $MNPQ$, стороны которой MN и PQ параллельны его диагонали AC. Используя теорему Дезарга, доказать, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали.

9. Трапеция $ABCD$ пересечена прямыми p, q, параллельными основанию AB, $p \cap (AD) = M$, $p \cap (AC) = P$, $q \cap (BD) = N$, $q \cap (BC) = Q$. Используя теорему Дезарга, доказать, что точка $(MN) \cap (PQ)$ лежит на прямой (AB).

10. Треугольники ABC и DBC пересечены тремя параллельными прямыми $p, q, r = (AD)$, $p \cap (AB) = M$, $p \cap (DB) = P$, $q \cap (AC) = N$, $q \cap (DC) = Q$. Используя теорему Дезарга, доказать, что прямые (MN), (PQ), (BC) принадлежат одному пучку.

Дополнительные задачи.

1. Даны трехвершинник ABC и точки M, N, P, лежащие на прямой p. Постройте трехвершинник QRL так, чтобы точки Q, R, L лежали, соответственно, на прямых (BC), (CA), (AB), а стороны (RL), (QL), (QR) проходили, соответственно, через точки M, N, P.

2. Дан параллелограмм, прямая m и точка A. С помощью одной линейки через точку A провести прямую, параллельную прямой m.

3. Построить прямую, проходящую через недоступную точку пересечения двух данных прямых и параллельную двум другим данным параллельным прямым.

4. Доказать, что если оси перспективы трех попарно перспективных трехвершинников ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ совпадают, то их центры перспективы лежат на одной прямой. Докажите, что верно и обратное утверждение.

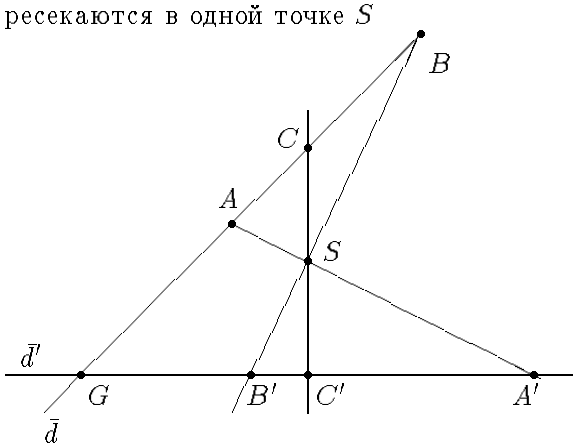
§4. Проективные отображения прямых и пучков.

Сведения из теории

Определение 1.3. Пусть даны два $n-$ мерных проективных пространства P и P' $(n = 1, 2)$. Фиксируем два проективных репера $R \subset P$ и $R' \subset P'$. Тогда отображение $f : P \to P'$, ставящее в соответствие каждой точке $M(x^\alpha)_R \in P$ точку $M'(x^\alpha)_{R'} \in P'$, называется *проективным отображением* проективного пространства P на проективное пространство P'. Проективное отображение $f : P \to P$ проективного пространства P на себя называется *проективным преобразованием* проективного пространства P.

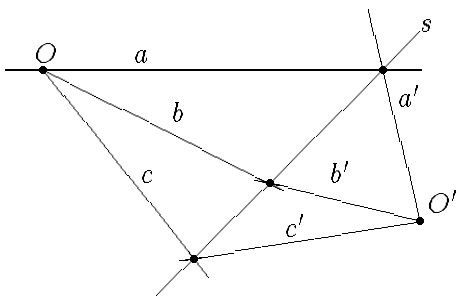
В частности, если P и P' – проективные прямые, то проективное отображение задается тремя парами соответствующих точек $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, где $R = (A, B, C) \subset P$ – проективный репер прямой P, $R' = (A', B', C') \subset P'$ – проективный репер прямой P'.

Перспективное отображение прямой на прямую
$f : \bar{d} \to \bar{d}'$
Все прямые, соединяющие соответствующие точки, пересекаются в одной точке S



S – центр перспективы
Проективное отображение f прямой на прямую является перспективным тогда и только тогда, когда точка $G = \bar{d} \cap \bar{d}'$ – инвариантна.

Перспективное отображение пучка на пучок
$f : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(O')$
Все точки пересечения соответствующих прямых лежат на одной прямой s



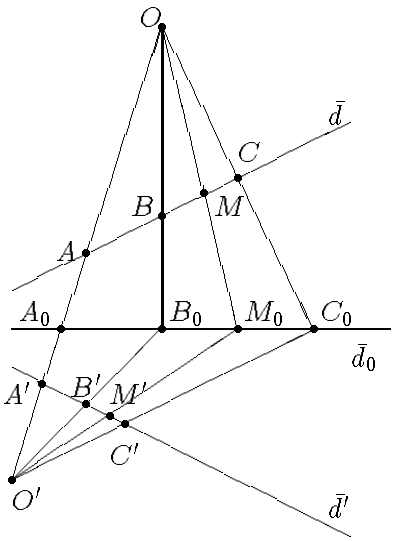
s – ось перспективы
Проективное отображение f пучка на пучок является перспективным тогда и только тогда, когда прямая DD' – инвариантна.

Основная идея решения задач: Любое проективное отображение раскладывается в композицию перспективных отображений.

Задачи.

1. Проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$ задано тремя парами соответствующих точек $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Построить образ произвольной точки $M \in \bar{d}$.

Решение.



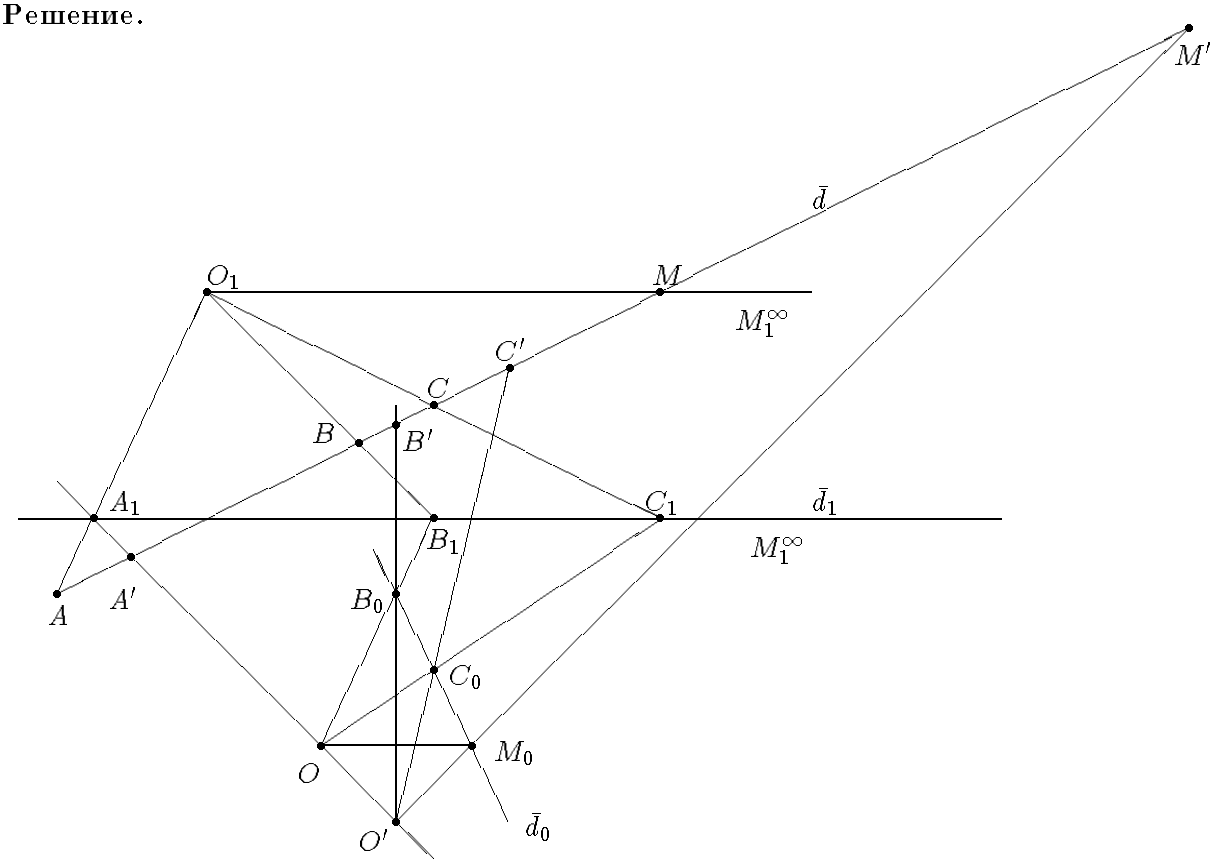
Разложим проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$ в композицию двух перспективных отображений $f_1 : \bar{d} \to \bar{d}_0$ и $f_2 : \bar{d}_0 \to \bar{d}'$. Для этого проведем через любую пару данных соответствующих точек прямую. Например, через точки A и A'. На прямой AA' произвольно выберем две точки: O и O' – это будут центры перспективы отображений f_1 и f_2. Нам осталось построить прямую d_0. Обозначим $B_0 = (OB) \cap (O'B')$ и $C_0 = (OC) \cap (O'C')$. Тогда $\bar{d}_0 = (B_0C_0)$. Действительно, если обозначить $A_0 = \bar{d}_0 \cap (AA')$, то перспективное отображение $f_1 : \bar{d} \to \bar{d}_0$ с центром перспективы O задается парой проективных реперов $R = (A, B, C) \to R_0 = (A_0, B_0, C_0)$, а перспективное отображение $f_2 : \bar{d}_0 \to \bar{d}'$ с центром перспективы O' задается парой проективных реперов $R_0 = (A_0, B_0, C_0) \to R' = (A', B', C')$. Тогда $f = f_2 \circ f_1$.

Возьмем произвольную точку $M \in \bar{d}$. Построим ее образ при перспективном отображении f_1. Для этого соединим точку M с точкой O и обозначим точку пересечения $(OM) \cap \bar{d}_0 = M_0$. Тогда $M_0 = f_1(M)$. Аналогично строим образ M' точки M_0 при перспективном отображении f_2: $M' = (O'M_0) \cap \bar{d}'$. Тогда $M' = f_2 \circ f_1(M) = f(M)$.

Чтобы построить прообраз произвольной точки прямой $\bar{d}'$, нужно провести эти построения в обратном порядке.

2. Проективное преобразование $f : \bar{d} \to \bar{d}$ задано тремя парами соответствующих точек $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Построить образ произвольной точки $M \in \bar{d}$.

Решение.



Сведем данную задачу к предыдущей. Возьмем произвольную прямую $\bar{d}_1$ и произвольную точку $O_1 \notin \bar{d}_1$. Отобразим точки $A, B, C \in \bar{d}$ на прямую $\bar{d}_1$ при помощи перспективного отображения f_1 с центром O_1. Мы получим точки A_1, B_1, C_1. Тогда исходное преобразование $f : \bar{d} \to \bar{d}$ представится в виде $f = \tilde{f} \circ f_1$, где $f_1 : \bar{d} \to \bar{d}_1$ – перспективное отображение с центром O_1 и отображения $\tilde{f}$:

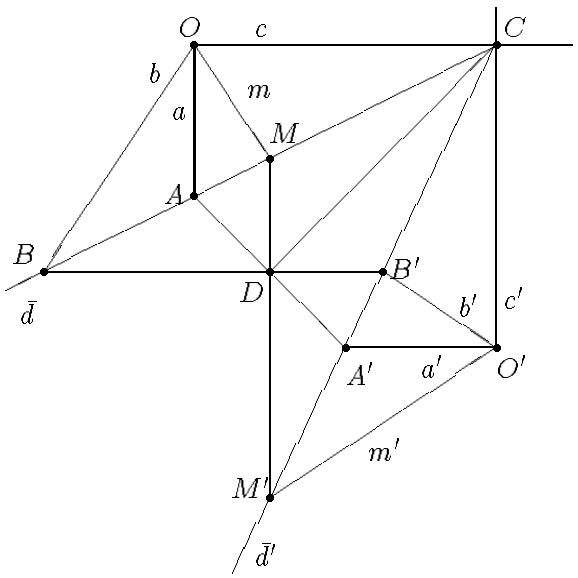
$\bar{d}_1 \to \bar{d}$. Аналогично предыдущей задаче разложим отображение $\tilde{f}$ в композицию двух перспективных отображений $f_2 : \bar{d}_1 \to \bar{d}_0$ и $f_3 : \bar{d}_0 \to bar d$. Для этого соединим точки A' и A_1 (мы могли выбрать и другие пары соответствующих точек B', B_1 или C', C_1) и возьмем на прямой (A_1A') любые две точки O и O'. Они будут центрами перспективы для отображений f_2 и f_3, соответственно. Прямая $\bar{d}_0 = (B_0C_0)$, где $B_0 = (OB_1) \cap (O'B')$, $C_0 = (OC_1) \cap (O'C')$.

Итак, исходное преобразование f прямой $\bar{d}$ мы разложили в композицию трех перспективных отображений: $\bar{d} \overset{f_1}{\to} \bar{d}_1 \overset{f_2}{\to} \bar{d}_0 \overset{f_3}{\to} \bar{d}$.

Рассмотрим произвольную точку $M \in \bar{d}$. Чтобы построить образ точки M при отображении f_1, нужно провести прямую (O_1M) до пересечения с прямой $\bar{d}_1$. В нашем случае точки выбраны так, что $(O_1M) \cap \bar{d}_1 = M_1^\infty$ – бесконечно удаленная точка. Далее, чтобы построить ее образ M_0 при отображении f_2, нужно провести прямую (OM_1^∞) до пересечения с прямой $\bar{d}_0$. Напомним, что для построения прямой, проходящей через бесконечно удаленную точку, нужно через собственную точку O провести прямую, параллельную той прямой, на которой лежит бесконечно удаленная точка (в нашем случае это прямая $\bar{d}_1$). Тогда получим $M_0 = (OM_1^\infty) \cap \bar{d}_0$. Наконец, чтобы получить точку M' – образ точки M_0 при отображении f_3, нужно провести прямую $(O'M_0)$ и пересечь ее с прямой $\bar{d}'$. Тогда $M' = f(M)$.

3. Проективное отображение $f : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(O')$ задано тремя парами соответствующих прямых $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$. Построить образ произвольной прямой $m \in \mathcal{P}(O)$.

Решение.



Решение этой задачи получается по принципу двойственности из решения задачи 1. Разложим отображение f в композицию двух перспективных отображений f_1 и f_2. Для этого через точку пересечения двух соответствующих прямых данных пучков (мы выберем прямые c и c') проведем две прямые $\bar{d}$ и $\bar{d}'$ – оси перспективы отображений f_1 и f_2. Обозначим точки пересечения $A = \bar{d} \cap a$, $B = \bar{d} \cap b$, $A' = \bar{d}' \cap a'$, $B' = \bar{d}' \cap b'$. Рассмотрим точку $D = (BB') \cap (CC')$. Эта точка будет центром вспомогательного пучка, то есть $f_1 : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(D)$, $f_2 : \mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(O')$. Действительно, тройка прямых $(a, b, c) \overset{f_1}{\to} ((DA), (DB), (DC)) \overset{f_2}{\to} (a', b', c')$, то есть $f = f_2 \circ f_1$.

Рассмотрим произвольную прямую $m \in \mathcal{P}(O)$. Обозначим $M = m \cap \bar{d}$. Тогда образ – прямая пучка $\mathcal{P}(D)$ – прямой m при перспективном отображении f_1 пройдет, во-первых, через точку D, во-вторых, через точку M, то есть $f_1(m) = (DM)$. Аналогично строим образ прямой (DM) при отображении f_2: обозначим $M' = \bar{d}' \cap (DM)$. Тогда $f_2((DM)) = (O'M')$, а значит, $f(m) = m'$.

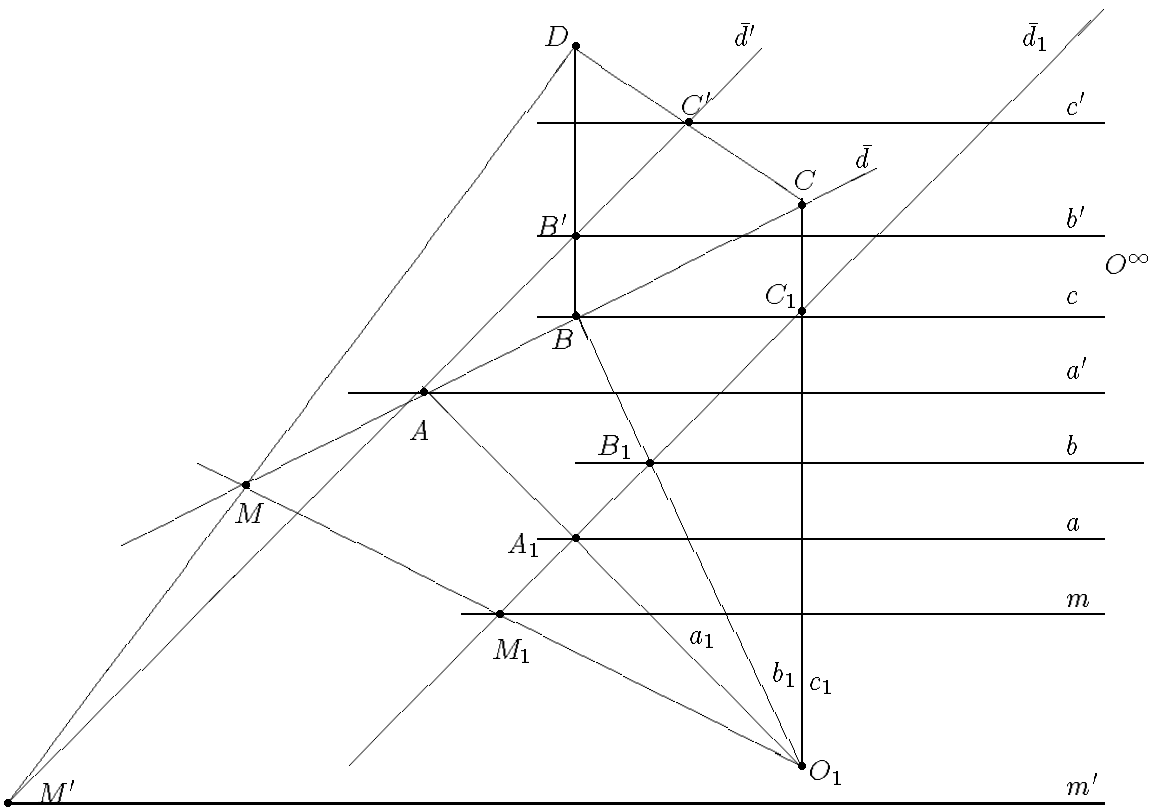
4. Проективное отображение $f : \mathcal{P}(O^\infty) \to \mathcal{P}(O^\infty)$ задано тремя парами соответствующих прямых $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$. Постройте образ произвольной прямой $m \in \mathcal{P}(O^\infty)$.

Решение. Решение задачи двойственно решению задачи 2. Возьмем произвольную точку O_1 и произвольную прямую $\bar{d}_1$, $O_1 \notin \bar{d}_1$ и зададим перспективное отображение $f_1 : \mathcal{P}(O^\infty) \to \mathcal{P}(O_1)$ с центром O_1 и осью перспективы $\bar{d}_1$. При этом прямые $a, b, c \in \mathcal{P}(O^\infty)$ перейдут в прямые $a_1, b_1, c_1 \in \mathcal{P}(O_1)$. Тогда отображение $f : \mathcal{P}(O^\infty) \to \mathcal{P}(O^\infty)$ разложится в композицию $f = \tilde{f} \circ f_1$, где $\tilde{f} : \mathcal{P}(O_1) \to \mathcal{P}(O^\infty)$ – некоторое проективное отображение пучка $\mathcal{P}(O_1)$ на пучок $\mathcal{P}(O^\infty)$, задаваемое соответсвующими прямыми $a_1 \to a'$, $b_1 \to b'$, $c_1 \to c'$. Аналогично задаче 3 разложим отображение $\tilde{f}$ в композицию двух перспективных отображений (центр вспомогательного пучка – точка $D = (BB') \cap (CC')$).

Итак, мы разложили преобразование f в следующую композицию перспективных отображений $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, где $f_1 : \mathcal{P}(O^\infty) \to \mathcal{P}(O_1)$, $f_2 : \mathcal{P}(O_1) \to \mathcal{P}(D)$, $f_3 : \mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(O^\infty)$.

Рассмотрим произвольную прямую $m \in \mathcal{P}(O^\infty)$. Тогда

$$m \underset{\to}{^{f_1}} (O_1M_1) \underset{\to}{^{f_2}} (DM) \underset{\to}{^{f_3}} (O^\infty M') \equiv m'$$



Задачи к зачету и проверочным работам.

1. Проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$ задано тремя парами соответствующих собственных точек $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, причем $A - B - C$, $A' - B' - C'$. Построить образ произвольной точки $M \in \bar{d}$. Рассмотрите два случая:а) точка M собственная; б) точка M бесконечно удаленная.

2. Проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$ задано тремя парами соответствующих собственных точек $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, причем $A-B-C$, $A'-B'-C'$. Построить прообраз произвольной точки $M' \in \bar{d}'$. Рассмотрите два случая:а) точка M' собственная; б) точка M' бесконечно удаленная.

3. Проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$ задано тремя парами соответствующих точек $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'_\infty$. Построить образ произвольной точки $M \in \bar{d}$.

4. Проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$ задано тремя парами соответствующих точек $A^\infty \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Построить прообраз точки $M'_\infty \in \bar{d}'$.

5. Дано проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$, точка $A = \bar{d} \cap \bar{d}'$ – инвариантна, $B \to B'$, $C \to C'_\infty$. Построить образ произвольной точки $M \in \bar{d}$.

6. Дано проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$, точка $A = \bar{d} \cap \bar{d}'$ – инвариантна, $B \to B'$, $C \to C'_\infty$. Построить прообраз произвольной точки $M' \in \bar{d}'$.

7. Проективное отображение пучков прямых $f : \mathcal{P}(O^\infty) \to \mathcal{P}(O')$ задано тремя парами соответствующих прямых $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$. Построить прообраз произвольной прямой $\ell' \in \mathcal{P}(O')$.

8. Дано проективное преобразование $f : \bar{d} \to \bar{d}$ тремя парами соответствующих точек $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'_\infty$. Построить образ (прообраз) произвольной точки $M \in \bar{d}$.

Дополнительные задачи.

1. Проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$ задано тремя парами соответствующих точек $A \to A'_\infty$, $B^\infty \to B'$, $C \to C$, где $C = \bar{d} \cap \bar{d}'$. Построить образ произвольной точки $M \in \bar{d}$.

2. Проективное преобразование прямой $f : \bar{d} \to \bar{d}$ задано парой инвариантных точек A, B и парой соответствующих точек $C \to C'$. Построить образ точки $M^\infty \in \bar{d}$.

3. Проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$ задано тремя парами соответствующих точек $A \to A'_\infty$, $B^\infty \to B'$, $C \to C'$. Построить образ и прообраз точки $D = \bar{d} \cap \bar{d}'$ при отображении f.

4. Проективное отображение пучков прямых $f : \mathcal{P}(O^\infty) \to \mathcal{P}(O')$ задано тремя парами соответствующих прямых $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$. Построить образ прямой $\ell_\infty \in \mathcal{P}(O^\infty)$.

5. Проективное отображение пучков прямых $f : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(O'_\infty)$ задано тремя парами соответствующих прямых $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$. Построить прообраз прямой $\ell'_\infty \in \mathcal{P}(O'_\infty)$.

6. Проективное преобразование пучка $f : \mathcal{P}(O^\infty) \to \mathcal{P}(O^\infty)$ задано тремя парами соответствующих прямых $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$. Построить образ (прообраз) прямой ℓ^∞.

7. Рассмотрим пучок $\mathcal{P}(O)$ прямых евклидовой плоскости – модель проективной прямой P^1. Определим преобразование f пучка $\mathcal{P}(O)$ условием $f(m) \perp m$, $\forall m \in \mathcal{P}(O)$. Докажите, что f – эллиптическая инволюция на модели проективной прямой P^1.