1 Проективная геометрия.

§5. Сложное отношение четырех точек прямой. Гармонические четверки точек и прямых. Полный черырехвершинник. Инволюция.

Сведения из теории

Пусть дана проективная прямая d и на ней точки A, B, C, D такие, что A, B, C – различные, $D \neq A$. Обозначим координаты точки $D(d^1, d^2)_{R_0}$ в репере $R_0 = (A, B, C)$.

Определение 1.1. Число $\frac{d^1}{d^2}$ называется *сложным (или двойным) отношением четырех точек* и обозначается (AB, CD).

Основная формула: Пусть относительно некоторого репера R прямой d эти точки имеют координаты $A(a^1, a^2)$, $B(b^1, b^2)$, $C(c^1, c^2)$, $D(d^1, d^2)$. Тогда

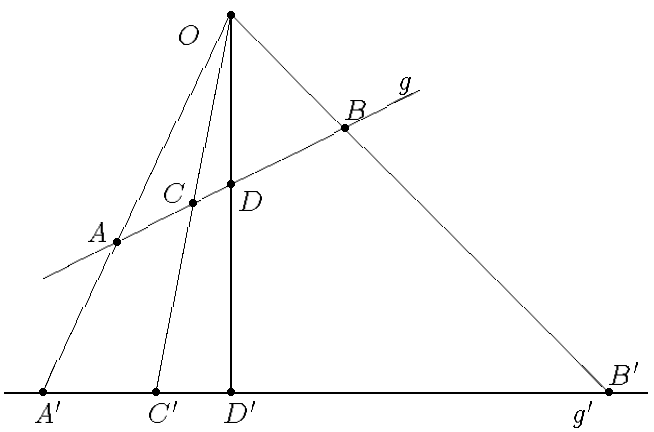
$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & d^1 \\ b^2 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}} \equiv \frac{(AC)}{(AD)} \frac{(BD)}{(BC)}$$

Пусть относительно некоторого репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ проективной плоскости заданы четыре точки $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$, $C(c^1, c^2, c^3)$, $D(d^1, d^2, d^3)$. Тогда можно выбрать из трех формул:

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & d^1 \\ b^2 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}}; \quad (AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^2 & c^2 \\ a^3 & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & d^2 \\ a^3 & d^3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^2 & d^2 \\ b^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2 & c^2 \\ b^3 & c^3 \end{vmatrix}}; \quad (AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^3 & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^3 & d^3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & d^1 \\ b^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^3 & c^3 \end{vmatrix}}$$

На расширенной плоскости можно связать сложное и простое отношения точек прямой

$$(AB, CD) = \frac{(AB,C)}{(AB,D)} \quad (AB, CP^\infty) = -(AB, C)$$



Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{P}(O)$, прямые a, b, c – различные, $d \neq a$. Пусть прямая g, не проходящая через точку O и обозначим A, B, C, D точки пересечения прямой g с прямыми a, b, c, d, соответственно. Тогда сложное отношение (AB, CD) не зависит от выбора прямой g. Оно называется *сложным отношением* (ab, cd) *четырех названных прямых.*

Определение 1.2. Четверка точек A, B, C, D прямой называется *гармонической*, если $(AB, CD) = -1$.

Определение 1.3. Четверка прямых a, b, c, d пучка называется *гармонической*, если $(ab, cd) = -1$.

Определение 1.4. Нетождественное проективное преобразование проективной прямой называется инволюцией, если оно совпадает с обратным преобразованием.

Существует два вида инволюции: эллиптическая (нет инвариантных точек) и гиперболическая (две инвариантные точки).

Теорема 1.1. Две инвариантные точки гиперболической инволюции гармонически разделяют любые две несовпадающие соответствующие точки этой инволюции.

Задачи.

1. На проективной плоскости даны точки $A(1, -1, 2)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(-1, 0, 5)$, $D(-3, 2, 1)$. Найти сложное отношение (AB, CD).

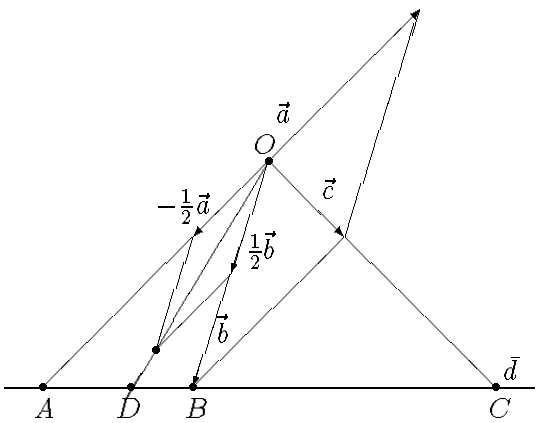
Решение. 1) Проверим, лежат ли точки A, B, C, D на одной прямой. Вспомним, что три точки на проективной плоскости лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы, порождающие эти точки компланарны.
а) Берем векторы $\vec{a}(1,-1,2)$, $\vec{b}(-2,1,3)$, $\vec{c}(-1,0,5)$, которые порождают точки A, B, C, соответственно, и проверяем их на компланарность:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -1(-3-2)+5(1-2) = 0$$

Итак, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, а значит, точки A, B, C лежат на одной прямой.
б) Аналогично проверяем точки A, C, D. Проведите вычисления самостоятельно.
2) Вычислим сложное отношение четырех точек по формуле:

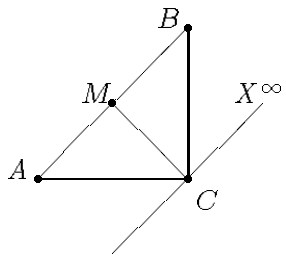
$$(AB,CD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-1\cdot(-1)}{(-1)\cdot 1} = -1$$

2. На расширенной прямой $\bar{d}$ даны точки A, B, C. Построить точку D такую, что $(AB,CD) = -1$.
Решение.



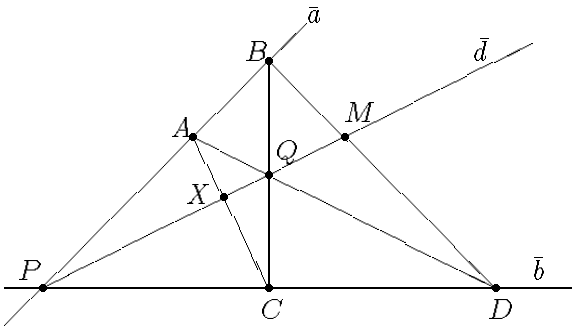
Рассмотрим репер $R = (A, B, C)$ и обозначим координаты точки $D(d^1, d^2)_R$. По определению сложного отношения четырех точек имеем $\frac{d^1}{d^2} = -1$, то есть $d^1 = -d^2$. Так как координаты точек в проективном репере определены с точностью до постоянного множителя, то возьмем координаты точки $D(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_R$. Строим согласованную систему векторов $(\vec{a}, \vec{b})$ (согласованность означает, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$) и вектор $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Тогда точка пересечения прямой, проходящей через точку O параллельно вектору $\vec{d}$, и прямой $\bar{d}$ есть искомая точка D. □

3. Доказать, что прямая (CM), содержащая медиану треугольника ABC и прямая (CX^∞), параллельная прямой (AB), гармонически разделяют прямые (CA) и (CB).
Решение.



Нужно доказать, что $((CM)(CX^\infty),(CA)(CB)) = -1$. Выберем "удобную" прямую, которая пересекала бы все четыре данные прямые в известных точках. Возьмем прямую (AB). Тогда $((CM)(CX^\infty),(CA)(CB)) = (MX^\infty, AB) = (AB, MX^\infty) = -(AB,M) = -1$. (Так как M – середина $[AB]$, то есть $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, простое отношение $(AB,M) = 1$). □

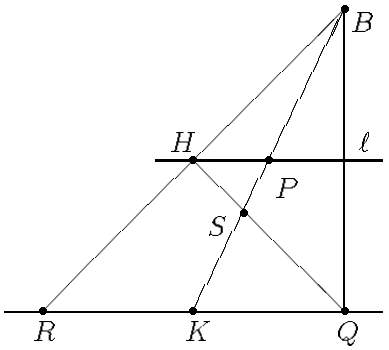
4. На расширенной прямой $\bar{d}$ даны точки P, Q, M. Построить точку X такую, что $(PQ,MX) = -1$, пользуясь только линейкой.
Решение.



Достроим данные точки до полного четырехвершинника, считая точки P и Q его диагональными точками, а точку M – точкой пересечения одной из сторон, проходящей через третью диагональную точку, с прямой (PQ). Проведем через точку P две произвольные прямые a и b. На прямой a возьмем произвольно точку A. Тогда $(AQ) \cap b = D$, $(DM) \cap a = B$, $(BQ) \cap b = C$, $(AC) \cap \bar{d} = X$. $\square$

5. На евклидовой прямой d даны точки R, K, Q, точка K – середина отрезка $[RQ]$. Через точку $P \notin (RQ)$ провести прямую ℓ, параллельную прямой (RQ), пользуясь только линейкой.

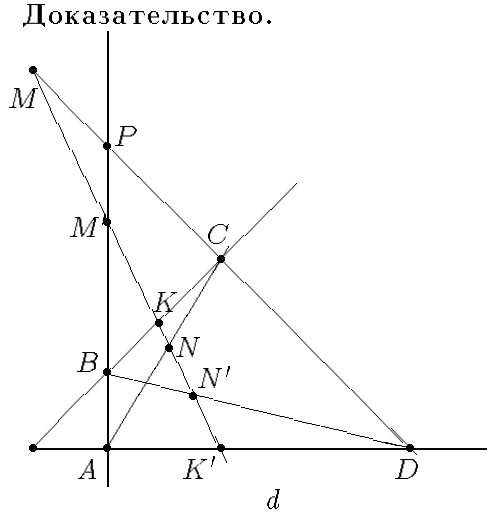
Решение.



Возьмем на прямой (KP) произвольно точку B и построим точку S такую, что $(KP, BS) = -1$, то есть точка S является четвертой гармонической к точкам K, P, B. Построим точку $H = (BR) \cap (QS)$. Тогда (HP) – искомая прямая ℓ. Объясните, почему прямая $\ell \| (RQ)$. $\square$

6. Докажите, что любая прямая проективной плоскости, не проходящая через вершины полного четырехвершинника, пересекает его противоположные стороны в соответствующих точках инволюции.

Доказательство.

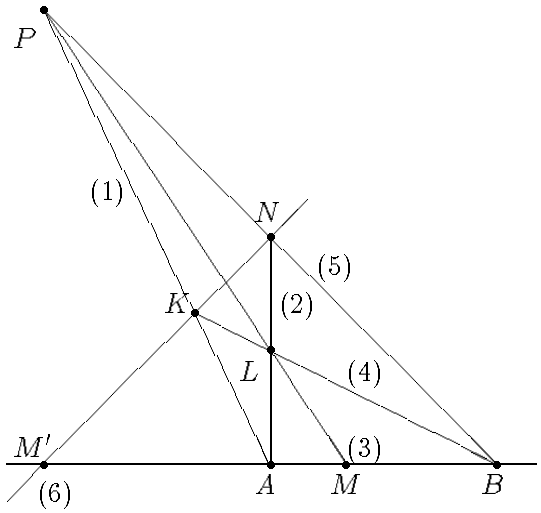


Пусть дана прямая d и стороны четырехвершинника $ABCD$ пересекают ее в точках M, M', N, N', K, K' как показано на рисунке. Зададим проективное преобразование $f : d \to d$ прямой d парой реперов $R = (M, N, K) \to R' = (M', N', K')$. Докажем, что f является инволюцией. Спроектируем точки A, B, P, M' из точки C на прямую d, а затем, из точки D на прямую d. Как мы помним, при проектировании сохраняется сложное отношение четырех точек, а значит, мы получим
1) из точки C: $(AB, PM') = (NK, MM')$;
2) из точки D: $(AB, PM') = (K'N', MM')$.
Откуда получаем $(MM', NK) = (M'M, N'K')$.

Предположим, что $f : M' \to M''$. Так как f сохраняет сложное отношение четырех точек, получим $(MM', NK) = (M'M'', N'K')$, следовательно, $(M'M, N'K') = (M'M'', N'K')$, то есть $M' = M''$. Тогда f является инволюцией по признаку. $\square$

7. Гиперболическая инволюция $f : \bar{d} \to \bar{d}$ задана парой инвариантный точек A и B. Построить образ произвольной точки $M \in \bar{d}$.

Решение.



Согласно теореме нужно достроить точки A, B, M до полного четырехвершинника, где A, B – его диагональные точки, M – точка пересечения стороны, проходящей через третью диагональную точку. Строим четырехвершинник $KLNP$. Последовательность проведения прямых указана на рисунке. Тогда $(6) \cap \bar{d} = M'$. $\square$

Задачи к зачету и проверочным работам.

1. На проективной плоскости даны точки $A(1,0,1)$, $B(1,1,3)$, $C(2,1,4)$, $D(0,1,2)$. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной прямой и вычислите их сложное отношение.

2. На расширенной прямой $\bar{d}$ даны три точки A, B, C. Постройте точку D такую, что $(AB, CD) = 2$.

3. На проективной плоскости даны точки $A(1,2,3)$, $B(-3,2,4)$, $C(-2,4,7)$. Докажите, что они лежат на одной прямой и найдите координаты четвертой гармонической точки D.

4. Прямые a и b пересекаются в точке C, прямые c и d содержат биссектрисы углов, образованных прямыми a и b. Докажите, что $(ab, cd) = -1$.

5. На проективной плоскости даны точки $A(1,2,5)$, $B(1,0,3)$, $C(-1,2,-1)$. Докажите, что они лежат на одной прямой и найдите координаты точки D такой, что $(AB, CD) = 5$.

6. Докажите, что прямые, содержащие диагонали параллелограмма гармонически разделяют прямые, проходящие через центр параллелограмма параллельно его сторонам.

7. Найдите четвертую гармоническую к двум сторонам треугольника и медиане, проведенной к третьей стороне.

8. Найдите четвертую гармоническую к двум сторонам угла и его биссектрисе.

9. На расширенной плоскости даны три прямые a, b, c, принадлежащие одному пучку с собственным центром. Построить четвертую гармоническую прямую пучка: а) циркулем и линейкой; б) только линейкой.

10. На расширенной плоскости даны прямые a, b, c, принадлежащие пучку с несобственным центром. Построить четвертую гармоническую прямую пучка.

11. Найти четвертую гармоническую к двум смежным сторонам ромба и диагонали ромба, проходящей через их общую вершину.

12. На евклидовой плоскости даны две параллельные прямые. Пользуясь одной линейкой построить середину отрезка, заданного на одной из данных параллельных прямых.

13. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины ее оснований лежат на одной прямой.

Дополнительные задачи.

1. На проективной плоскости дан репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Точка E_α – проекция точки E из вершины A_α на сторону $(A_\beta A_\gamma)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$. Докажите, что три точки $M_\gamma = (E_\alpha E_\beta) \cap (A_\alpha A_\beta)$ лежат на одной прямой d и являются четвертыми гармоническими к тройкам $(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma)$. Найдите координаты прямой d в репере R.

2. На расширенной плоскости даны три прямые a, b, c^∞, принадлежащие пучку с несобственным центром. Построить четвертую гармоническую прямую.

3. На расширенной плоскости даны три прямые a, b, c, которые задают три несобственные точки A^∞, B^∞, C^∞ несобственной прямой d_∞. Построить на этой прямой четвертую гармоническую точку D^∞, используя только линейку.

4. На евклидовой плоскости дан треугольник ABC. Найдите сложное отношение $((CA)(CB), (CM)(CN))$, где (CM) – медиана, а (CN) – биссектриса треугольника ABC. Замените медиану на высоту и вычислите полученной сложное отношение. Замените одну из прямых на прямую, параллельную третьей стороне, и вычислите сложное отношение.

5. Дан эллипс. Построить пару сопряженных диаметров этого эллипса, гармонически разделяющих пару главных диаметров.

6. Дан эллипс и пара его сопряженных диаметров d_1, d_2. Построить пару сопряженных диаметров ℓ_1, ℓ_2 таких, что $(d_1 d_2, \ell_1 \ell_2) = -1$.

7. Найти какую-либо пару прямых, гармонически разделяющих пару асимптот гиперболы.

8. Докажите, что для пяти различных точек A, B, M, U, V проективной прямой имеет место равенство $(AB, MV) = (AB, MU)(AB, UV)$.

9. На расширенной прямой $\bar{d}$ даны точки A, B, C. С помощью одной линейки построить точку D такую, что $(AB, CD) = n$, где n – данное натуральное число.

10. На проективной прямой даны три различные точки A, B, C. Доказать, что пара точек X и Y гармонически разделяет пару A, B тогда и только тогда, когда $(AB, CX) + (AB, CY) = 0$.

11. Проективное преобразование прямой задано формулами $y^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2$, $y^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2$. Получите аналитический критерий того, что f – инволюция.

12. Инволюция f прямой $\bar{d}$ задана инвариантной точкой A и парой соответствующих точек $B \to B'$. Построить вторую инвариантную точку и образ произвольной точки $M \in \bar{d}$.

13. На расширенной прямой $\bar{d}$ инволюция f задана четырьмя различными точками $A \to B$, $C \to D$. По расположению точек определить, какая задана инволюция: эллиптическая или гиперболическая.

§6. Гомологии проективной плоскости.

Сведения из теории

Определение 1.5. Нетождественное проективное преобразование плоскости называется *гомологией*, если оно имеет прямую инвариантных точек s. Эта прямая называется *осью гомологии*. С необходимостью такое преобразование имеет еще пучок инвариантных прямых. Центр этого пучка является инвариантной точкой. Он называется *центром гомологии*.

Если центр гомологии не принадлежит оси гомологии, то она называется *гиперболической*. Если центр гомологии принадлежит оси гомологии, то гомология называется *параболической*.

Свойства.

1^0. Прямые, соединяющие соответствующие точки гомологии, образуют пучок с центром в инвариантной точке S. Точка S называется *центром гомологии*.

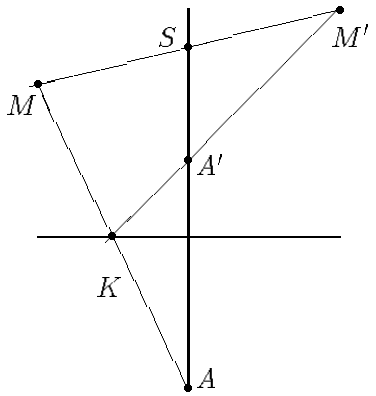
2^0. Все прямые, соединяющие соответствующие точки гомологии, инвариантны.

3^0. Все точки оси гомологии инвариантны.

Задачи

1. Гиперболическая гомология задана осью s, центром S и парой соответствующих точек $A \to A'$. Построить образ точки M.

Решение.



Построим точку $K = (AM) \cap s$ – это инвариантная точка, так как лежит на оси гомологии. Значит, через эту точку должна пройти прямая $(A'M')$ – образ прямой (AM) при гомологии, то есть $M' \in (A'K)$. С другой стороны, все прямые, соединяющие соответствующие точки гомологии, проходят через одну точку – центр гомологии S, то есть $S \in (A'M')$ или $M' \in (SA')$. Итак, $M' = (A'K) \cap (SA')$.

Задачи к зачету и проверочным работам.

1. На расширенной плоскости $\bar{\sigma}$ параболическая гомология f задана центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$. Построить $f^2(M)$ для произвольной точки $M \in \bar{\sigma}$.

2. На расширенной плоскости $\bar{\sigma}$ параболическая гомология f задана центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$. Построить образ данной прямой d.

3. Гиперболическая гомология f задана осью s, центром S и парой соответствующих прямых $a \to a'$. Построить прообраз данной прямой d'.

4. Построить образ данной точки M при параболической гомологии, заданной осью s, центром S^∞ и парой соответствующих точек $A \to A'$.

5. Параболическая гомология задана осью s, центром S и парой соответствующих точек $A \to A'_\infty$. Построить прообраз данной прямой d. Построить образ бесконечно удаленной прямой.

6. Параболическая гомология задана осью s^∞, центром S^∞ и парой соответствующих точек $A \to A'$. Построить прообраз данной прямой d'.

7. Параболическая гомология f задана центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$. На данной прямой p найти точку X, образ которой лежит на данной прямой q $(q \neq f(p))$.

8. Параболическая гомология f задана центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$. Построить образы двух данных параллельных прямых p и q.

9. Параболическая гомология f задана центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$. Построить прообразы двух данных параллельных прямых p и q.

Дополнительные задачи.

1. Гомология f задана тремя точками A, B, C, не лежащими на одной прямой, и их образами $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, причем прямые $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = S$. На данной прямой p найти точку X, образ которой лежит на данной прямой $q \neq f(p)$.

2. Гомология (параболическая, гиперболическая) задана центром S, парой соответствующих точек $A \to A'$ и парой соответствующих прямых $a \to a'$. Построить образ данной точки M при данной гомологии.

3. Дана точка S и прямая a ($S \notin a$). Построить прямую s так, чтобы при параболической гомологии с центром S и осью s, прямая a была образом бесконечно удаленной прямой и найти образ произвольной точки M при этой гомологии.

4. Дана точка S, пара соответствующих точек $A \to A'$ и прямая a. Построить ось s так, чтобы гиперболическая гомология f с центром S, осью s и парой соответствующих точек $A \to A'$ переводила прямую a в бесконечно удаленную прямую.

5. Гиперболическая гомология f называется *гармонической*, если $(SA_0, AA') = -1$, где S – центр f, s – ось; $A' = f(A)$, $A, A' \notin s$; $A_0 = (AA') \cap s$. Докажите, что гармоническую гомологию можно задать осью s, парой соответствующих точек $A, A' \notin s$ и условием $(SA_0, AA') = -1$. Докажите, что если условие $(SA_0, AA') = -1$ справедливо для одной пары точек $A \to A'$, то оно справедливо и для любой пары точек $M \to M'$.

6. Докажите, что гармоническая гомология является единственным инволютивным преобразованием плоскости.

7. На расширенной плоскости задайте гомологию с собственной осью и собственным центром так, чтобы образом эллипса была гипербола (парабола), образом гиперболы – парабола.