1 Проективная геометрия.

§7. Полюсы и поляры.

Сведения из теории

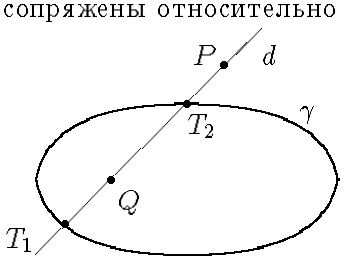
Пусть невырожденная линия второго порядка γ на проективной плоскости задана уравнением

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0 \quad a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3$, $a_{\alpha\beta}$ – вещественные числа, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

Точки $P(p^1, p^2, p^3)$ и $Q(q_1, q_2, q_3)$ сопряжены относительно γ

$a_{\alpha\beta}p^\alpha q^\beta = 0$
или
$(a_{11}p^1 + a_{12}p^2 + a_{13}p^3)q^1 + (a_{12}p^1 + a_{22}p^2 + a_{23}p^3)q^2 +$
$(a_{13}p^1 + a_{23}p^2 + a_{33}p^3)q^3 = 0$



$(T_1T_2, PQ) = -1$

Если фиксировать точку $P(p^1, p^2, p^3)$ и рассмотреть множество всех точек $X(x^1, x^2, x^3)$, сопряженных с точкой P, получим прямую p, которая называется *полярой* точки P. Точка P для прямой p называется *полюсом*.

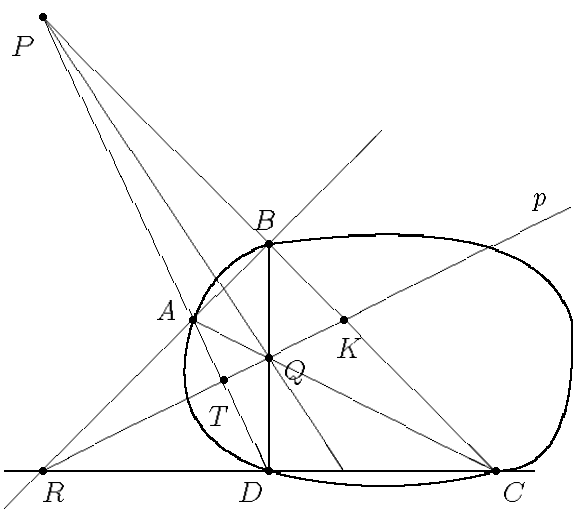
Поляра является касательной тогда и только тогда, когда содержит свой полюс.

Уравнение поляры

$(a_{11}p^1 + a_{12}p^2 + a_{13}p^3)x^1 + (a_{12}p^1 + a_{22}p^2 + a_{23}p^3)x^2 +$
$(a_{13}p^1 + a_{23}p^2 + a_{33}p^3)x^3 = 0$

если $P \in \gamma$, то это уравнение касательной

Построение поляры



Теорема 1.1. (о взаимности поляритета)

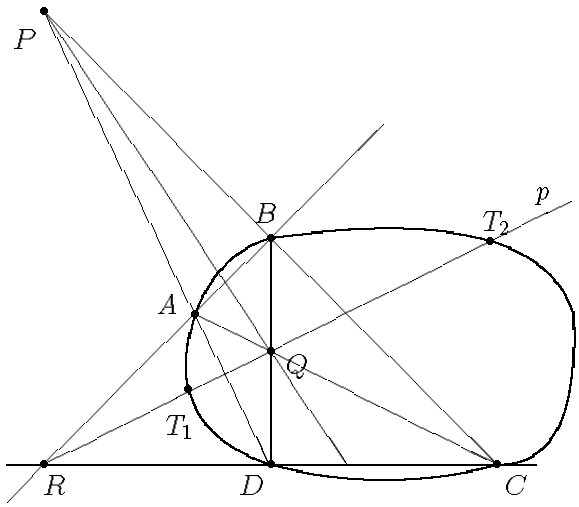
Пусть даны точки A, B и их поляры a, b, соответственно. Тогда

$$A \in b \Leftrightarrow B \in a$$

Задачи.

1. На расширенной плоскости дана овальная линия γ и точка P вне нее. С помощью одной линейки построить касательные к γ, проходящие через точку P.

Решение. Обозначим T_1 и T_2 точки касания касательных t_1 и t_2, проходящих через точку P. Обозначим через p поляру точки P. Так как касательная является полярой своей точки касания, T_1 и t_1;



T_2 и t_2 – соответствующие полюс и поляра. По теореме о взаимности поляритета из того, что $P \in t_1$ следует, что $T_1 \in p$. Аналогично, $T_2 \in p$. Таким образом, точки T_1 и T_2 являются точками пересечения поляры p точки P и линии γ.
Проведем через точку P две произвольные прямые, каждая из которых пересекает линию γ в двух вещественных точках. Мы получаем точки A, B, C, D – вершины полного четырехвершинника, вписанного в линию γ. Строим диагональные точки $R = (AB) \cap (CD)$ и $Q = (AC) \cap (BD)$. Тогда прямая $p = (RQ)$ – поляра точки P. Точки пересечения прямой p и линии γ суть точки T_1, T_2 касания.

2. Найти уравнение касательной, проведенной из точки $A(3, -2, 2)$ к овальной линии γ, заданной уравнением $3(x^1)^2 + (x^2)^2 - 5(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 4x^2x^3 = 0$.
Решение. Обозначим точку касания $T(p^1, p^2, p^3)$. Тогда уравнение касательной t к линии γ будет иметь вид (см. общее уравнение касательной)

$$t : (3p^1 + p^2 + p^3)x^1 + (p^1 + p^2 - 2p^3)x^2 + (p^1 - 2p^2 - 5p^3)x^3 = 0$$

Так как точка $A(3, -2, 2)$ принадлежит прямой t, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, то есть $(3p^1 + p^2 + p^3)3 + (p^1 + p^2 - 2p^3)(-2) + (p^1 - 2p^2 - 5p^3)2 = 0$. Так как точка T также принадлежит прямой t, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой t, то есть $(3p^1 + p^2 + p^3)p^1 + (p^1 + p^2 - 2p^3)p^2 + (p^1 - 2p^2 - 5p^3)p^3 = 0$. Тогда координаты точки T находим, решая систему уравнений

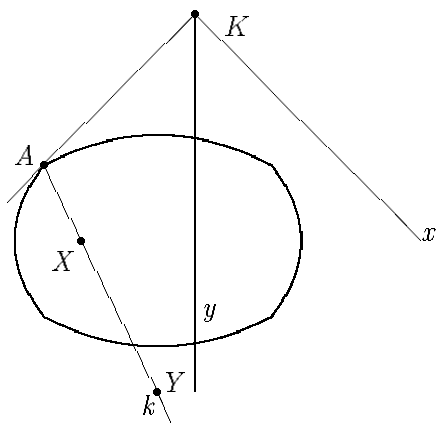
$$\begin{cases} 3p^1 - p^2 - p^3 = 0 \\ 3(p^1)^2 + (p^2)^2 - 5(p^3)^2 + 2p^1p^2 + 2p^1p^3 - 4p^2p^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 = 3p^1 - p^3 \\ 3(p^1)^2 + (3p^1 - p^3)^2 - 5(p^3)^2 + 2p^1(3p^1 - p^3) + 2p^1p^3 - 4(3p^1 - p^3)p^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 = 3p^1 - p^3 \\ 18(p^1)^2 - 18p^1p^3 = 0 \end{cases}$$

Откуда получаем координаты точек касания: $T_1(0, 1, -1)$ и $T_2(1, 3, 0)$. Подставляя координаты этих точек в уравнение прямой t, получим две касательные: $t_1 : x^2 + x^3 = 0$ и $t_2 : 6x^1 + x^2 - 8x^3 = 0$.

3. Дана овальная линия γ и точка $A \in \gamma$. Построить касательную к γ в точке A.
Решение.



Через точку A проведем произвольную прямую k. Обозначим через K полюс прямой k. По теореме о взаимности поляритета $A \in k \Leftrightarrow K \in a$, где прямая a – поляра точки A, то есть касательная в точке A. Таким образом, касательная $a = (AK)$, где K – полюс прямой k. Чтобы построить полюс прямой k опять воспользуемся теоремой о взаимности поляритета. Возьмем на прямой k две произвольные точки X и Y. Построим их поляры x и y. Тогда $X \in k \Rightarrow K \in x$ и $Y \in k \Rightarrow K \in y$, то есть $K = x \cap y$. Итак, строим поляры точек X и Y как в задаче 1 и проводим касательную (AK).

Задачи к зачету и проверочным работам.

1. Дана точка M внутри овальной линии γ. Построить ее поляру.

2. На расширенной плоскости дана овальная линия второго порядка. Построить полюс бесконечно удаленной прямой.

3. На расширенной плоскости дана овальная линия второго порядка и бесконечно удаленная точка M^∞. Построить поляру точки M^∞.

4. На прямой $2x^1 - x^2 - 9x^3 = 0$ найти точку, сопряженную точке $A(-1, 2, 1)$ относительно линии второго порядка $\gamma : (x^1)^2 - (x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 6x^2x^3 = 0$.

5. Найти уравнения касательных, проведенных из точки $A(3, -2, 2)$ к овальной линии $\gamma : 3(x^1)^2 + (x^2)^2 - 5(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 4x^2x^3 = 0$.

6. Дана линия второго порядка $\gamma : 2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2(x^3)^2 - 6x^1x^2 + 4x^2x^3 = 0$. Найти координаты полюса прямой $7x^1 + 4x^2 - 10x^3 = 0$.

Дополнительные задачи.

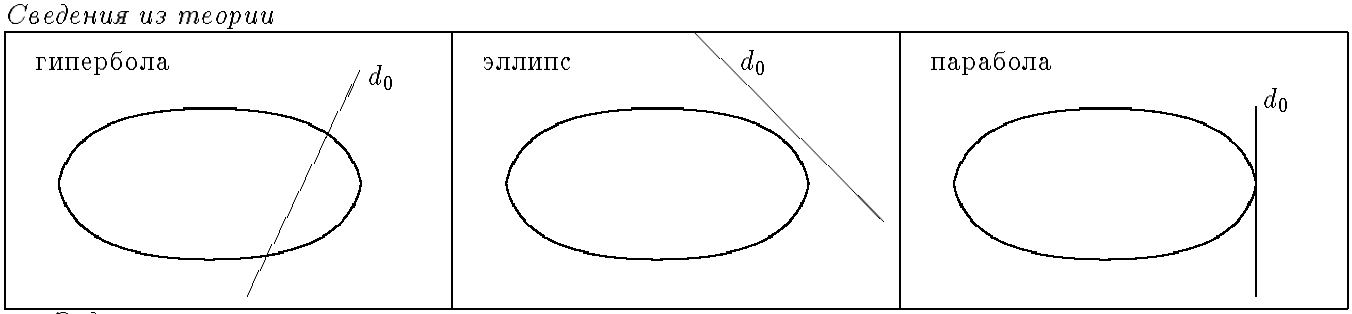
1. Трехвершинники ABC и $A'B'C'$ называются *полярными* относительно невырожденной линии второго порядка Q, если вершины A, B, C одного из них являются по отношению к Q соответственно полюсами сторон $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ другого. Докажите, что указанное свойство трехвершинников является взаимным и что два полярных трехвершинника всегда имеют центр перспективы.

2. Даны овальная линия второго порядка Q и прямая ℓ, которая не касается данной линии. Доказать, что преобразование прямой ℓ, при котором любая точка $A \in \ell$ переходит в точку $A' \in \ell$, сопряженную точке A относительно Q, есть инволюция. Она называется *инволюцией сопряженных точек*. Определите вид этой инволюции (эллиптическая, гиперболическая).

3. Касательные в точках A и B овальной линии второго порядка Q пересекаются в точке O; касательная к Q в произвольной точке $M \in Q$, $M \neq A, B$ пересекает прямые (OA), (OB), (AB) соответственно в точках M_1, M_2, M_3. Доказать, что $(M_1M_2, M_3M) = -1$.

§8. Модель аффинной плоскости в проективной геометрии. Задачи на построение, связанные с линиями второго порядка аффинной плоскости.

Сведения из теории



Задачи.

1. Из данной точки M евклидовой плоскости провести касательную к данной окружности с помощью одной линейки.

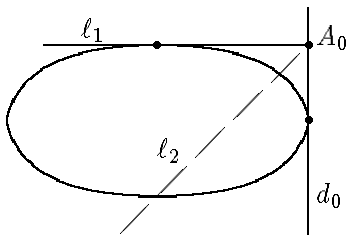
Решение. Дополним евклидову плоскость бесконечно удаленной прямой до проективной плоскости. Тогда окружность евклидовой плоскости – это овальная линия второго порядка проективной плоскости. Наша задача свелась к задаче 1 предыдущего параграфа: через данную точку провести касательные к овальной линии второго порядка (см. задачу 1 предыдущего параграфа).

2. Парабола дана своим очертанием. Построить касательные к параболе, проходящие через данную точку, не лежащую на параболе (с помощью одной линейки).

Решение. Дополним евклидову плоскость бесконечно удаленной прямой до проективной плоскости. Тогда парабола евклидовой плоскости – это овальная линия второго порядка проективной плоскости. Наша задача свелась к задаче 1 предыдущего параграфа: через данную точку провести касательные к овальной линии второго порядка (см. задачу 1 предыдущего параграфа).

3. Докажите, что парабола не имеет параллельных касательных.

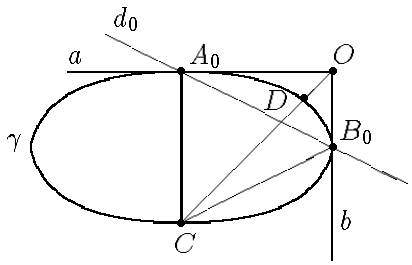
Решение.



Рассмотрим параболу в модели аффинной плоскости. Парабола – овальная линия γ, касающаяся бесконечно удаленной прямой d_0. Предположим, что парабола имеет две параллельные касательные ℓ_1 и ℓ_2. Из параллельности этих прямых следует, что в модели они изображаются прямыми, пересекающимися в точке A_0 на прямой d_0. Тогда через точку A_0 проходит три касательных к овальной линии γ. Мы получили противоречие, а значит, параллельных касательных у параболы нет.

4. Гипербола задана парой своих асимптот и точкой. Построить касательную к гиперболе в данной точке и несколько точек гиперболы.

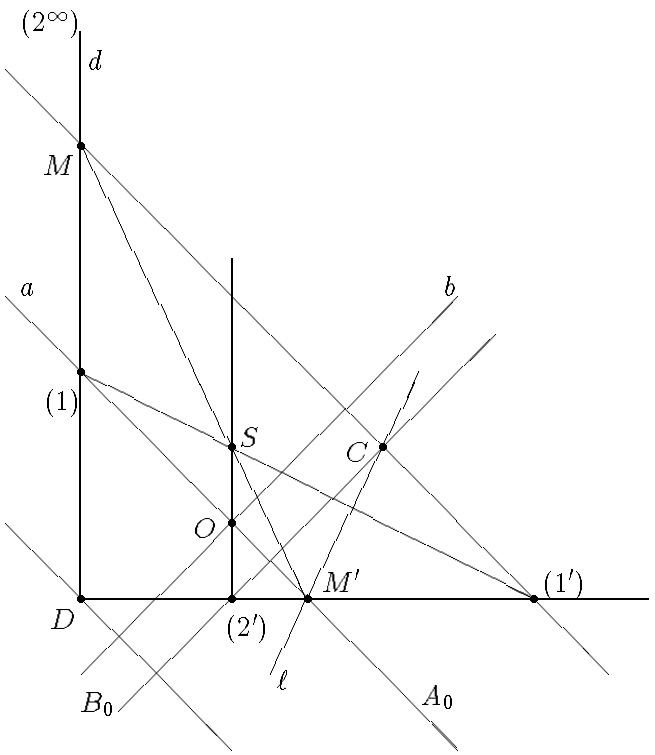
Решение.



Пусть гипербола γ задана точкой C и парой асимптот a и b. Как мы знаем, асимптоты пересекаются в центре гиперболы – точке O. Тогда точка D, симметричная точке C относительно цетра O будет принадлежать гиперболе γ.

Рассмотрим модель аффинной плоскости. Гипербола γ моделируется овальной линией, которая пересекает бесконечно удаленную прямую d_0 в двух вещественных точках A_0 и B_0. Асимптоты гиперболы – это касательные к овальной линии в точках A_0 и B_0, соответственно.

Зададим проективное отображение $f : \mathcal{P}(A_0) \to \mathcal{P}(C)$ тремя парами соответствующих прямых $a \to (CA_0)$, $d_0 \to (CB_0)$, $(A_0D) \to (CD)$. По следствию из теоремы Штейнера касательная в точке C есть прямая $\ell = f(A_0C)$.



Построение проводим на расширенной плоскости. Даны прямые a, b, пересекающиеся в точке O, и точка C. Строим точку D такую, что $OD = OC$, $D \in (OC)$. Через точку $D = (A_0D) \cap (CD)$ – точку пересечения соответствующих прямых – проводим две произвольные прямые d и d'. Тогда $d \cap a = (1)$, $d \cap d_0 = (2^\infty)$, $d' \cap (CA_0) = (1')$, $d' \cap (CB_0) = (2')$ и центр S вспомогательного пучка $S = ((1)(1')) \cap ((2^\infty)(2'))$. Строим образ прямой (A_0C): $M = (A_0C) \cap d$, $(SM) \cap d' = M'$, $(CM') = \ell$ – искомая касательная.

Чтобы построить точки гиперболы нужно взять произвольную прямую $m \in \mathcal{P}(A_0)$ и найти ее образ

m' при отображении f. Тогда точка $E = m \cap m'$ – точка гиперболы по теореме Штейнера.

Задачи к зачету и проверочным работам.

1. Парабола дана своим очертанием. Построить касательную к параболе в точке, принадлежащей данной параболе (с помощью одной линейки).

2. На расширенной плоскости дана окружность и ее произвольный диаметр. Построить полюс данного диаметра.

3. Докажите, что касательные к эллипсу параллельны тогда и только тогда, когда прямая, соединяющая точки касания, является диаметром эллипса. Верно ли это утверждение для гиперболы?

4. На расширенной плоскости дана гипербола. Построить ее автополярный трехвершинник первого рода.

5. В окружности Q проведены параллельные хорды и в их концах – касательные к окружности. Доказать, что точки пересечения касательных в концах каждой из хорд лежат на одной прямой, перпендикулярной этим хордам и проходящей через центр окружности Q.

6. Прямая d не имеет общих точек с окружностью Q. Доказать, что прямые, соединяющие точки касания касательных, проведенных из произвольной точки $M \in d$ к окружности Q, проходят через одну и туже точку.

7. Овальная линия второго порядка задана пятью точками общего положения. Построить несколько точек этой линии, используя теорему Паскаля.

8. Даны пять точек общего положения и прямая, проходящая через одну из них и не проходящая через остальные точки. Построить вторую точку пересечения данной прямой с овальной линией второго порядка, проходящей через данные пять точек, используя теорему Штейнера.

9. Даны пять точек общего положения. Построить касательную в одной из этих точек к овальной линии γ, проходящей через них.

10. Овальная линия второго порядка γ задана четырьмя точками общего положения и касательной в одной из данных точек. Построить несколько точек линии γ.

11. Овальная линия γ задана пятью точками общего положения, две из которых бесконечно удаленные. Построить вторую точку пересечения данной линии γ и данной прямой, проходящей через одну из данных точек γ.

12. Гипербола задана тремя своими точками и двумя асимптотическими направлениями. Построить несколько точек данной гиперболы.

Дополнительные задачи.

1. На расширенной плоскости дан эллипс. Докажите, что полярой фокуса эллипса является соответствующая директриса.

2. На расширенной плоскости дана парабола. Определите точку, являющуюся полюсом ее директрисы.