1 Проективная геометрия.

§13. Сложное (двойное) отношение четырех точек прямой.

Пусть дана проективная прямая d и на ней точки A, B, C, D такие, что A, B, C – различные, $D \neq A$. Обозначим координаты точки $D(d^1, d^2)_{R_0}$ в репере $R_0 = (A, B, C)$.

Определение 1.19. Число $\frac{d^1}{d^2}$ называется *сложным (или двойным) отношением четырех точек* и обозначается (AB, CD).

Вопрос 1.3. Зачем нужно условие $D \neq A$?

Теорема 1.12. Если A, B, C – различные точки проективной прямой, λ – произвольное вещественное число, то существует единственная точка D такая, что сложное отношение $(AB, CD) = \lambda$.

Доказательство. $\exists$). Рассмотрим на проективной прямой d репер $R_0 = (A, B, C)$ и построим точку $D \in d$, которая имеет координаты $D(\lambda, 1)_{R_0}$ в этом репере. Тогда сложное отношение $(AB, CD) = \frac{\lambda}{1} = \lambda$, то есть точка D нам годится.

!). Пусть существует еще точка X такая, что $(AB, CX) = \lambda$. Обозначим ее координаты относительно репера $R_0 = (A, B, C)$ через $X(x^1, x^2)$. Тогда $\lambda = \frac{x^1}{x^2}$, то есть $x^1 = \lambda x^2$, то есть $X(\lambda x^2, x^2)$. Так как координаты точки относительно репера определены с точностью до постоянного множителя, то разделив на x^2, получим $X(\lambda, 1)_{R_0}$, то есть точка X имеет такие же коодинаты в репере R_0 как и точка D. Следовательно, $D = X$. $\square$

Следствие. Если $(AB, CD) = (AB, CD')$, то $D = D'$.

Выведем формулу для вычисления сложного отношения четырех точек прямой, заданных своими координатами в произвольном репере.

Теорема 1.13. Пусть точки A, B, C, D принадлежат одной проективной прямой d, A, B, C – различны, $D \neq A$. Пусть относительно некоторого репера R прямой d эти точки имеют координаты $A(a^1, a^2)$, $B(b^1, b^2)$, $C(c^1, c^2)$, $D(d^1, d^2)$. Тогда

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & d^1 \\ b^2 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}} \equiv \frac{(AC)}{(AD)} \frac{(BD)}{(BC)}$$

Доказательство. Есть два репера R и $R_0 = (A, B, C)$ на проективной прямой d.

Основная идея доказательства: в репере R_0 считать сложное отношение умеем. Используем формулы перехода, чтобы посчитать сложное отношение в произвольном репере.

Формулы перехода от репера R к реперу R_0 имеют вид

$$\rho x^1 = k_1 a^1 y^1 + k_2 b^1 y^2$$
$$\rho x^2 = k_1 a^2 y^1 + k_2 b^2 y^2$$

где числа k_1, k_2 находятся из условия согласованности

$$\begin{cases} k_1 a^1 + k_2 b^1 = c^1 \\ k_1 a^2 + k_2 b^2 = c^2 \end{cases}$$

по формулам

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c^1 & b^1 \\ c^2 & b^2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

Напомним, что (x^1, x^2) – координаты точек в "старом" репере R, (y^1, y^2) – координаты точек в "новом" репере R_0. Пусть $D(\tilde{d}^1, \tilde{d}^2)_{R_0}$ и подставим в формулы перехода:

$$\rho d^1 = k_1 a^1 \tilde{d}^1 + k_2 b^1 \tilde{d}^2$$
$$\rho d^2 = k_1 a^2 \tilde{d}^1 + k_2 b^2 \tilde{d}^2$$

Это система линейных неоднородных уравнений. Как мы знаем из алгебры, она имеет решение

$$\tilde{d}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho d^1 & k_2 b^1 \\ \rho d^2 & k_2 b^2 \end{vmatrix}}{\tilde{\Delta}} = \frac{\rho k_2 \begin{vmatrix} d^1 & b^1 \\ d^2 & b^2 \end{vmatrix}}{\tilde{\Delta}}, \quad \tilde{d}^2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 a^1 & \rho d^1 \\ k_1 a^2 & \rho d^2 \end{vmatrix}}{\tilde{\Delta}} = \frac{\rho k_1 \begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}}{\tilde{\Delta}}$$

где $\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} k_1 a^1 & k_2 b^1 \\ k_1 a^2 & k_2 b^2 \end{vmatrix} = k_1 k_2 \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = k_1 k_2 \Delta$. Тогда по определению сложного отношения четырех точек имеем

$$(AB, CD) = \frac{\tilde{d}^1}{\tilde{d}^2} = \frac{\rho k_2 \begin{vmatrix} d^1 & b^1 \\ d^2 & b^2 \end{vmatrix} \tilde{\Delta}}{\tilde{\Delta} k_1 \rho \begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & d^1 \\ b^2 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}} \square$$

С помощью этой формулы и непосредственных вычислений получаем

Свойства.

1^0. $(AB, CD) = (CD, AB)$.

Доказательство. Возьмем репер $R_0 = (A, B, C)$. Тогда $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(d^1, d^2)$. Левую часть равенства вычислим по определению: $(AB, CD) = \frac{d^1}{d^2}$. Правую часть равенства вычислим по формуле:

$$(CD, AB) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} d^1 & 0 \\ d^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d^1 & 1 \\ d^2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)}{1} \frac{d^1}{(-d^2)} = \frac{d^1}{d^2}$$

Таким образом, $(AB, CD) = (CD, AB)$. $\square$

2^0. $(AB, CD) = \frac{1}{(AB,DC)} = \frac{1}{(BA,CD)}$, если $(AB, CD) \neq 0$. (докажите самостоятельно).

3^0. Из 2^0 следует $(AB, CD) = (BA, DC)$.

4^0. $(AB, CC) = 1$, $(AB, CB) = 0$. (Докажите, используя определение)

5^0. $(AB, CD) + (AC, BD) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим репер $R_0 = (A, B, C)$. Тогда $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(d^1, d^2)$. Вычислим

$$(AB, CD) + (AC, BD) = \frac{d^1}{d^2} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & d^1 \\ 0 & d^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & d^1 \\ 1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{d^1}{d^2} + \frac{1}{d^2} \frac{d^2 - d^1}{1} = 1 \square$$

Все, что мы сейчас сказали о сложном отношении четырех точек верно для любой проективной плоскости. Но у нас есть наиболее удобная проективная плоскость – расширенная плоскость. Выясним, какие дополнительные свойства сложное отношение четырех точек имеет на расширенной плоскости и как оно связано с простым отношением трех точек евклидовой плоскости.

Теорема 1.14. Пусть A, B, C, D – собственные точки расширенной прямой, P_∞ – бесконечно удаленная точка. Тогда

$$(AB, CD) = \frac{(AB,C)}{(AB,D)}; \quad (AB, CP_\infty) = -(AB, C)$$

где (AB, C) – простое отношение трех точек евклидовой плоскости.

Доказательство. Выберем специальный репер $R = (A_1, A_2^\infty, E)$, координаты точки $M(m^1, m^2)$ в котором связаны с ее координатой $M(m)$ в аффинной системе координат $I = (A_1, \overrightarrow{A_1 E})$ соотношением $m = \frac{m^2}{m^1}$, $m^1 \neq 0$, а значит, у точки M мы можем взять координаты $M(1, m)_R$.

В таком проективном репере обозначим $A(1, a)_R$, $B(1, b)_R$, $C(1, c)_R$, $D(1, d)_R$, $P_\infty \equiv A_2^\infty(0, 1)_R$ (так как бесконечно удаленная точка одна единственная на расширенной прямой), где $A(a)_I$, $B(b)_I$, $C(c)_I$, $D(d)_I$.

Вычислим сложное отношение (AB, CD) по выведенной выше формуле:

$$(AB,CD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & d \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$$

Вычислим простые отношения, стоящие в правой части равенства.
По определению имеем $(AB, C) = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (c-a) = \lambda(b-c)$.
Аналогично, $(AB, D) = \mu \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \mu\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow (d-a) = \mu(b-d)$. Тогда $\frac{(AB,C)}{(AB,D)} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$. Таким образом, первая формула доказана.

Вычислим сложное отношение

$$(AB, CP^{\infty}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}} = \frac{c-a}{c-b} = -\lambda = -(AB, C). \ \square$$

Вспомним, что простое отношение трех точек аффинной прямой было инвариантом аффинных преобразований аффинной плоскости. Оказывается сложное отношение четырех точек проективной прямой является инвариантом проективных преобразований проективной плоскости. В частности, оно является инвариантом отображения проективной прямой на проективную прямую.

Теорема 1.15. При любом проективном преобразовании проективной плоскости сложное отношение четырех точек прямой сохраняется.

Доказательство. Пусть $f : P^2(V) \to P^2(V)$ – проективное преобразование, переводящее проективную прямую $d \subset P^2(V)$ в проективную прямую $d' \subset P^2(V)$. Рассмотрим четыре точки $A, B, C, D \in d$, A, B, C – различные, $D \neq A$ и обозначим их образы $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$. По свойству проективного преобразования $A', B', C', D' \in d'$(прямую переводит в прямую и сохраняет принадлежность). Как мы доказали выше, сужение проективного преобразования f на прямую d, то есть $f|_d$, будет проективным отображением, которое мы можем задать любой парой соответствующих реперов. Возьмем реперы $R = (A, B, C) \to R' = (A', B', C')$. По определению проективного отображения любая точка $M(m^1, m^2)_R$ перейдет в точку $M'(m^1, m^2)_{R'}$. В частности, точка $D(d^1, d^2)_R$ перейдет в точку $D'(d^1, d^2)_R$. Тогда по определению сложного отношения четырех точек получим $(AB, CD) = \frac{d^1}{d^2} = (A'B', C'D')$. $\square$

Следствие. При любом проективном отображении проективной прямой на проективную прямую сложное отношение четырех точек сохраняется. $\square$

Верно и обратное

Теорема 1.16. Если биекция $\varphi : d \to d'$ сохраняет сложное отношение любых четырех точек прямой, то φ – проективное отображение.

Доказательство. Пусть дана биекция $\varphi : d \to d'$. Рассмотрим три произвольные различные точки $A, B, C \in d$ и их образы $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$. Это три различные точки прямой d'. Мы получаем два проективных репера $R = (A, B, C) \subset d$ и $R' = (A', B', C') \subset d'$. Эта пара реперов задает проективное отображение $f : d \to d'$.

Рассмотрим произвольную точку $M \in d$, $M \neq A$ и обозначим $M^* = f(M)$ и $M' = \varphi(M)$. По условию имеем $(AB, CM) = (A'B', C'M')$, так как φ сохраняет сложное отношение четырех точек. Так как f является проективным отображением, то оно также сохраняет сложное отношение четырех точек, то есть $(AB, CM) = (A'B', C'M^*)$. Тогда $(A'B', C'M') = (A'B', C'M^*)$, то есть $M' = M^*$, а значит, $\varphi = f$ и тем самым является проективным отображением. $\square$

Следствие. Биекция $\varphi : d \to d'$ является проективным отображением тогда и только тогда, когда она сохраняет сложное отношение любых четырех точек прямой. $\square$

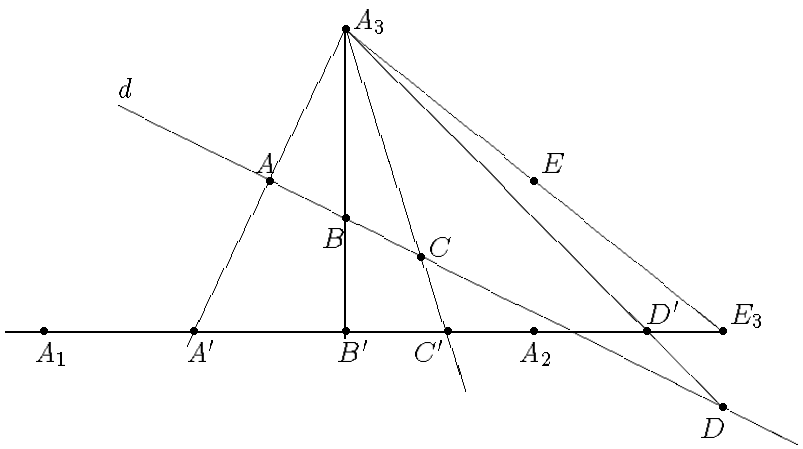
Мы уже научились считать сложное отношение четырех точек, если они заданы своими координатами относительно произвольного репера проективной прямой. А что делать, если точки заданы своми координатами относительно проективного репера проективной плоскости, то есть у них уже не две координаты, а три?

Теорема 1.17. Пусть на проективной плоскости относительно некторого проективного репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ заданы точки A, B, C, D такие, что A, B, C – различные, $D \neq A$ своими координа-

тами $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$, $C(c^1, c^2, c^3)$, $D(d^1, d^2, d^3)$. Тогда

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & d^1 \\ b^2 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}}$$

Доказательство.



Спроектируем точки A, B, C, D на прямую (A_1A_2) из центра A_3. Мы получим точки A', B', C', D', соответственно. Вспомним, что точки A', B', C', D' будут иметь координаты $A'(a^1, a^2)$, $B'(b^1, b^2)$, $C'(c^1, c^2)$, $D'(d^1, d^2)$ в репере $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$ прямой (A_1A_2). С другой стороны, проектирование из центра A_3 является перспективным отображением прямой на прямую, а значит, и проективным отображением.

Как мы знаем, проективные отображения сохраняют сложное отношение четырех точек прямой, то есть $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. Вычислять сложное отношение четырех точек по их координатам в проективном репере прямой мы уже умеем. Применим наши знания и получим требуемую формулу.

Замечание. Если спроектировать точки A, B, C, D из центра A_1 на прямую (A_2A_3), то получим формулу

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^2 & c^2 \\ a^3 & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & d^2 \\ a^3 & d^3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^2 & d^2 \\ b^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2 & c^2 \\ b^3 & c^3 \end{vmatrix}}$$

Если спроектировать точки A, B, C, D из центра A_2 на прямую (A_1A_3), то получим формулу

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^3 & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^3 & d^3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & d^1 \\ b^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^3 & c^3 \end{vmatrix}}$$

Замечание. Выведем формулу для вычисления сложного отношения четырех точек прямой, заданных значениями своих параметров на этой прямой.

Пусть на проективной плоскости дана прямая $d = (AB)$ и некоторый проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ на этой плоскости. Обозначим координаты точек $A(a^1, a^2, a^3)_R$, $B(b^1, b^2, b^3)_R$. Тогда параметрические уравнения прямой d имеют вид

$$\begin{cases} x^1 = \lambda a^1 + \mu b^1 \\ x^2 = \lambda a^2 + \mu b^2 \\ x^3 = \lambda a^3 + \mu b^3 \end{cases}$$

Обозначим значения параметров для точки C через λ_C и μ_C, а для точки D – λ_D и μ_D. Тогда в репере R точки C и D имеют координаты $C(\lambda_C a^1 + \mu_C b^1, \lambda_C a^2 + \mu_C b^2, \lambda_C a^3 + \mu_C b^3)$, $D(\lambda_D a^1 + \mu_D b^1, \lambda_D a^2 + \mu_D b^2, \lambda_D a^3 + \mu_D b^3)$. Вычислим сложное отношение (AB, CD) по выведенной выше формуле

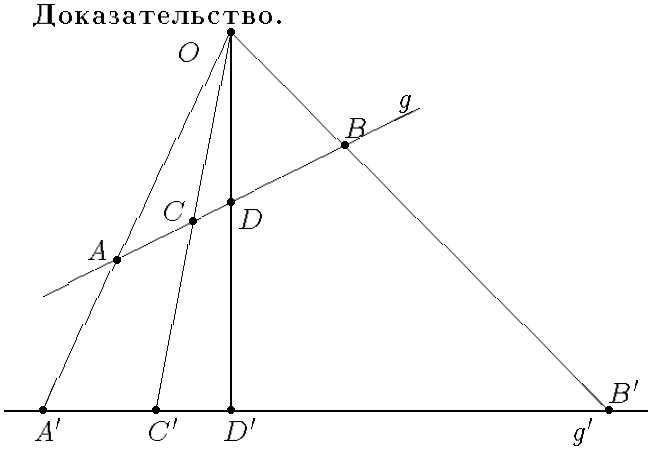
$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & \lambda_C a^1 + \mu_C b^1 \\ a^2 & \lambda_C a^2 + \mu_C b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & \lambda_D a^1 + \mu_D b^1 \\ a^2 & \lambda_D a^2 + \mu_D b^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & \lambda_D a^1 + \mu_D b^1 \\ b^2 & \lambda_D a^2 + \mu_D b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & \lambda_C a^1 + \lambda_C b^1 \\ b^2 & \lambda_C a^2 + \lambda_C b^2 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_C}{\mu_D} \frac{\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\lambda_D}{\lambda_C} \frac{\begin{vmatrix} b^1 & a^1 \\ b^2 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & a^1 \\ b^2 & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_C}{\mu_D} \frac{\lambda_D}{\lambda_C}$$

Мы воспользовались тем, что точки A и B различны, следовательно, ранг матрицы $rg\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} =$ 2, следовательно, $\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \neq 0$. $\square$

Воспользуемся принципом двойственности и посмотрим, что получается на двойственной плоскости.

Теорема 1.18. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{P}(O)$, прямые a, b, c – различные, $d \neq a$. Пусть прямая g, не проходящая через точку O и обозначим A, B, C, D точки пересечения прямой g с прямыми a, b, c, d, соответственно. Тогда сложное отношение (AB, CD) не зависит от выбора прямой g. Оно называется *сложным отношением* (ab, cd) *четырех названных прямых.*

Доказательство.



Рассмотрим еще одну прямую g', не проходящую через точку O. Обозначим точки пересечения прямой g' с прямыми a, b, c, d через A', B', C', D', соответственно. Пучок $\mathcal{P}(O)$ устанавливает перспективное отображение $f : g \to g'$. Как мы знаем, перспективное отображение является проективным, а проективное отображение сохраняет сложное отношение четырех точек, то есть $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. Таким образом, определение сложного отношения четырех прямых пучка не зависит от выбора прямой g. $\square$

По принципу двойственности теоремы и свойства о сложном отношении четырех точек прямой переносятся на четверку прямых пучка.

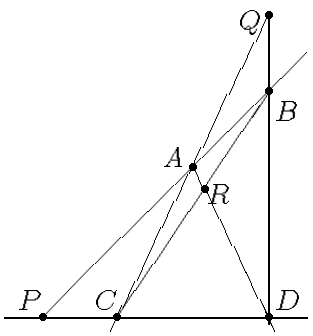
Задача 1.30. Сформулируйте и запишите соответствующие утверждения.

§14. Гармонические четверки точек. Полный четырехвершинник.

Определение 1.20. Четверка точек A, B, C, D прямой называется *гармонической*, если $(AB, CD) = -1$. Говорят также, что точки C и D гармонически сопряжены относительно точек A и B. Также говорят, что пары точек A, B и C, D *гармонически разделяют одна другую.* Точка D называется *четвертой гармонической.*

Определение 1.21. Четверка прямых a, b, c, d пучка называется *гармонической*, если $(ab, cd) = -1$.

Определение 1.22. Пусть даны четыре точки A, B, C, D общего положения (то есть никакие три из них не лежат на одной прямой). Фигура, образованная четырьмя точками A, B, C, D и прямыми, попарно соединяющими эти точки, называется *полным четырехвершинником.*



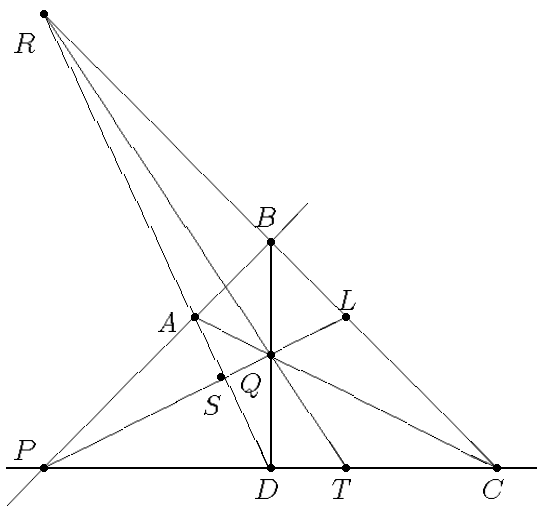
Точки A, B, C, D называются *вершинами* полного четырехвершинника, прямые – сторонами. Прямые (AB) и (CD); (AC) и (BD); (AD) и (BC) называются *противоположными сторонами.* Точки P, Q, R, в которых пересекаются противоположные стороны полного четырехвершинника, называются *диагональными.* Прямые (PQ), (QR), (PR), которые попарно соединяют диагональные точки, называются *диагоналями полного четырехвершинника.*

Теорема 1.19. Полный четырехвершинник обладает следующими свойствами:
1) На каждой диагонали имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат диагональные точки, а другой парой – точки пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку;
2) На каждой стороне имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат вершины, а другая пара образована диагональной точкой и точкой пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки;

3) Через каждую диагональную точку проходит гармоническая четверка прямых, в которой одной парой служат противоположные стороны, а другой – диагонали.

Замечание. Данная теорема дает способ построения четвертой гармонической точки с помощью одной линейки.

Доказательство.



Спроектируем точки

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & C & \longrightarrow & Q \\ Q & \longrightarrow & B & \longrightarrow & P \\ S & \longrightarrow & R & \longrightarrow & S \\ L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L \\ & \text{на} BC \text{из} D & & \text{на} PQ \text{из} A & \end{array}$$

Так как при проектировании сложное отношение четырех точек прямой сохраняется, получим $(PQ, SL) = (QP, SL) = \frac{1}{(PQ,SL)}$. Откуда следуют две возможности:
а) $(PQ, SL) = 1$. Тогда $L = S$ (почему?), следовательно, $(AD) = (BC)$, что противоречит определению полного четырехвершинника, то есть этот случай не возможен.
б) $(PQ, SL) = -1$, то есть пункт 1) теоремы доказан.

Кроме того, мы получаем, что $-1 = (PQ, SL) = (CB, RL)$ (см. выше проектирование точек), следовательно, доказан пункт 2) теоремы.

Наконец, рассмотрим прямые (PL), (RT), (AC), (BD). Пересечем их прямой (BC). Тогда $((PL)(RT), (AC)(BD)) = (LR, CB) = -1$. □

§15. Проективные преобразования прямой. Инволюции.

Рассмотрим проективное преобразование f проективной прямой d и выясним, какими эти преобразования могут быть.

Предложение 1.8. Нетождественное проективное преобразование прямой имеет не более двух инвариантных точек.

Доказательство. Предположим, что проективное преобразование f имеет по крайней мере три инвариантные точки A, B, C. Тогда f можно задать парой соответствующих реперов $R = (A, B, C) \to R = (A, B, C)$, но так же задается и тождественное преобразование прямой, то есть $f = id$. □

Определение 1.23. Проективное преобразование f прямой d, отличное от тождественного, называется
– *эллиптическим*, если оно не имеет инвариантных точек,
– *гиперболическим*, если оно имеет две инвариантные точки,
– *параболическим*, если оно имеет одну инвариантную точку.

Рассмотрим важный частный случай проективного преобразования прямой – *инволюцию*, то есть такое нетождественное проективное преобразование f, что $f^2 = id$.

Теорема 1.20. (критерий инволюции).
Пусть f – проективное преобразование прямой. Тогда f – инволюция тогда и только тогда, когда существует точка A такая, что $f(A) = B \neq A$ и $f(B) = A$ (другими словами, проективное преобразование является инволюцией тогда и только тогда, когда оно меняет местами какую-либо пару точек прямой).

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть проективное преобразование f является инволюцией, то есть для любой точки $M \in d$ имеем $f^2(M) = M$, то есть $f(f(M)) = M$. Возьмем такую точку M, что $f(M) \neq M$. (почему всегда можно взять такую точку?) Обозначим $f(M) = N$. Тогда $f(M) = N$, $f(N) = f(f(M)) = M$, то есть мы нашли такую пару точек, которая меняется местами при инволюции.
$\Leftarrow$). Пусть существует пара точек $A, B \in d$ такая, что $f(A) = B$, $f(B) = A$. Рассмотрим произвольную точку $M \in d$ и введем обозначения $M' = f(M)$, $M'' = f(M')$. Докажем, что $M'' = M$.
Так как f – проективное преобразование, f сохраняет сложное отношение четырех точек, то $(AB, MM') =$

$(BA, M'M'')$. Воспользуемся свойствами сложного отношения четырех точек прямой: $(AB, M'M) = (AB, M'M'')$. Так как сложное отношение однозначно определяет четвертую точку, получим $M'' = M$, то есть $f(f(M)) = M$ для любой точки $M \in d$, то есть f инволюция по определению. □

Теорема 1.21. Инволюция либо не имеет ни одной инвариантной точки (и называется *эллиптической*), либо имеет две инвариантные точки (и называется *гиперболической*).

Доказательство. Докажем, что если инволюция имеет одну инвариантную точку, то она имеет еще одну инвариантную точку. Пусть A – инвариантная точка, M, M' – пара соответствующих точек инволюции f. Построим точку B такую, что $(MM', AB) = -1$. Тогда $B \neq A$, (так как если бы $B = A$, то $(MM', AB) = 1$.) Обозначим $B' = f(B)$. Мы хотим доказать, что $f(B) = B$, то есть B – вторая инвариантная точка инволюции. Так как инволюция сохраняет сложное отношение четырех точек, $-1 = (MM', AB) = (M'M, AB')$. По свойствам сложного отношения $(M'M, AB') = \frac{1}{(MM', AB')} = -1$. Следовательно, $(MM', AB) = (MM', AB')$, то есть $B = B'$. □

Теорема 1.22. Пусть f – гиперболическая инволюция с инвариантными точками A и B. Тогда для любой точки M и ее образа $M' = f(M)$ имеем $(AB, MM') = -1$.

Доказательство. Так как инволюция имеет не более двух инвариантных точек, то точка B, построенная в предыдущей теореме будет одна и таже для любой пары соответствующих точек $M \to M'$. Тогда по доказанному $(AB, MM') = -1$. □

Замечание. Доказанная теорема дает способ построения образа (прообраза) произвольной точки инволюции с помощью полного четырехвершинника.

Докажем, что инволюции прямой существуют.

Теорема 1.23. Если на проективной прямой заданы четыре точки A, B, C, D, то существует единственная инволюция f такая, что $f(A) = B$, $f(C) = D$.

Доказательство. Зададим проективное отображение f парой реперов $R = (A, B, C) \to R' = (B, A, D)$. Так как $f(A) = B$ и $f(B) = A$, по признаку проективное преобразование f является инволюцией. □

Замечание. По принципу двойственности понятие инволюции переносится на пучок прямых.

Задача 1.31. На картинке нарисована прямая и четыре различные точки A, B, C, D на ней. Как определить, какая инволюция задана гиперболическая или эллиптическая.

§ 16. Проективные преобразования плоскости. Гомология.

Пусть на проективной плоскости дан репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и проективное преобразование f относительно этого репера задано формулами

$$\begin{array}{l} y^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3 \\ y^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3 \\ y^3 = c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + c_3^3 x^3 \end{array} \quad det(c_\beta^\alpha) \neq 0 \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Пусть $M(x^1, x^2, x^3)$ является инвариантной, то есть $M = f(M)$. Тогда координаты M и $f(M)$ пропорциональны, то есть

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda x^1 = c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3 \\ \lambda x^2 = c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3 \\ \lambda x^3 = c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + c_3^3 x^3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (c_1^1 - \lambda) x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3 = 0 \\ c_1^2 x^1 + (c_2^2 - \lambda) x^2 + c_3^2 x^3 = 0 \\ c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + (c_3^3 - \lambda) x^3 = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель

$$\left| \begin{array}{ccc} c_1^1 - \lambda & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 - \lambda & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 - \lambda \end{array} \right| = 0$$

Если мы раскроем определитель, то получим уравнение третьей степени относительно λ. Как известно из алгебры, уравнение третьей степени с вещественными коэффициентами всегда имеет хотя бы один вещественный корень. Следовательно, проективное преобразование плоскости всегда имеет хотя бы одну инвариантную точку.

Рассмотрим произвольную прямую d на проективной плоскости, заданную относительно данного репера уравнением $d : v_1 y^1 + v_2 y^2 + v_3 y^3 = 0$. Найдем ее прообраз с помощью формул проективного

преобразования: d^* : $v_1(c_1^1x^1 + c_2^1x^2 + c_3^1x^3) + v_2(c_1^2x^1 + c_2^2x^2 + c_3^2x^3) + v_3(c_1^3x^1 + c_2^3x^2 + c_3^3x^3) = 0$ или $(v_1c_1^1+v_2c_1^2+v_3c_1^3)x^1+(v_1c_2^1+v_2c_2^2+v_3c_2^3)x^2+(v_1c_3^1+v_2c_3^2+v_3c_3^3)x^3 = 0$. Прямая d является инвариантной, то есть $d = d^*$ тогда и только тогда, когда координаты этих прямых пропорциональны, то есть

$$\begin{cases} \lambda v^1 = v_1c_1^1 + v_2c_1^2 + v_3c_1^3 \\ \lambda v^2 = v_1c_2^1 + v_2c_2^2 + v_3c_2^3 \\ \lambda v^3 = v_1c_3^1 + v_2c_3^2 + v_3c_3^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(c_1^1 - \lambda) + v_2c_1^2 + v_3c_1^3 = 0 \\ v_1c_2^1 + v_2(c_2^2 - \lambda) + v_3c_2^3 = 0 \\ v_1c_3^1 + v_2c_3^2 + v_3(c_3^3 - \lambda) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} c_1^1 - \lambda & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 - \lambda & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Если мы раскроем определитель, то получим уравнение третьей степени относительно λ. Как известно из алгебры, уравнение третьей степени с вещественными коэффициентами всегда имеет хотя бы один вещественный корень. Следовательно, проективное преобразование плоскости всегда имеет хотя бы одну инвариантную прямую. Итак, доказана

Теорема 1.24. Любое проективное преобразование проективной плоскости имеет хотя бы одну инвариантную точку и хотя бы одну инвариантную прямую. □

Рассмотрим частный случай проективного преобразования плоскости. Пусть $\lambda = \lambda_1$ такое решение системы, что в системе уравнений (1) все три уравнения имеют пропорциональные коэффициенты, то есть ранг матрицы $rg(C_\beta^\alpha - \lambda\delta_\beta^\alpha) = 1$. Тогда множеством инвариантных точек проективного преобразования будет прямая (ее уравнение – это любое из уравнений системы (1)). Кроме того, матрица системы (2) получается из матрицы системы (1) транспонированием, а следовательно, также имеет ранг 1, то есть множеством ее решений является пучок прямых, то есть преобразование имеет пучок инвариантных прямых. Очевидно, что центр этого пучка будет инвариантной точкой.

Итак, в рассматриваемом случае проективное преобразование плоскости имеет прямую инвариантных точек и пучок инвариантных прямых. В связи с этим введем

Определение 1.24. Нетождественное проективное преобразование плоскости называется *гомологией*, если оно имеет прямую s инвариантных точек (а значит, и пучок инвариантных прямых $\mathcal{P}(S)$). Прямая s называется *осью гомологии*, а центр пучка инвариантных прямых называется *центром гомологии*. Если центр гомологии не принадлежит оси гомологии, то гомология называется *гиперболической*. Если центр гомологии принадлежит оси гомологии, то гомология называется *параболической*.

Свойства.

1^0. Пусть S – центр гомологии f, s – ее ось. Рассмотрим произвольную точку M проективной плоскости $M \neq S$. Тогда прямая $(SM) \in \mathcal{P}(S)$, то есть принадлежит пучку инвариантных прямых, а значит, точка $M' = f(M) \in (SM)$.

Итак, для любой точки $M \neq S$ проективной плоскости точки M, M', S лежат на одной прямой.

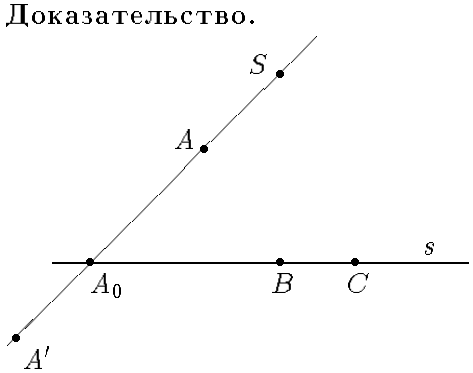
2^0. Рассмотрим произвольную прямую d проективной плоскости. Обозначим $D = d \cap s$. Тогда точка D будет инвариантной и, следовательно, образ $d' = f(d)$ прямой d будет проходить через точку D.

Итак, любая прямая d проективной плоскости и ее образ $d' = f(d)$ пересекаются на оси гомологии.

Докажем, что гомологии существуют.

Теорема 1.25. Если на плоскости даны прямая s и три точки A, A', S, лежащие на одной прямой, причем $A, A' \neq S$, то существует единственная гомология f с осью s, центром S и парой соответствующих точек $f(A) = A'$.

Доказательство.

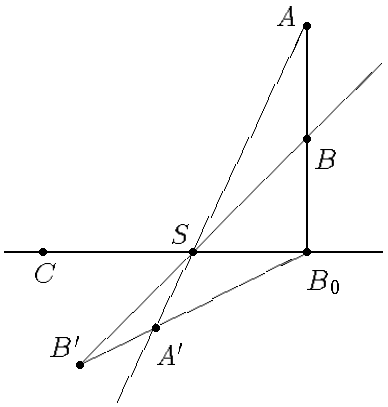


1. Пусть $S \notin s$, то есть гомология гиперболическая.

$\exists$). Обозначим $A_0 = (AA') \cap s$ и возьмем произвольно две точки $B, C \in s$. Зададим проективное преобразование f парой реперов $R = (A, B, C, S) \to R' = (A', B, C, S)$. Чтобы убедиться, что f гомология, нам нужно доказать, что все точки прямой s инвариантны.

Имеем точки B и C инвариантны, то есть инвариантны прямая (BC). Прямая (AA') инвариантна, так как принадлежит пучку инвариантных прямых. Тогда рассмотрим точку $A_0 = (AA') \cap (BC) \overset{f}{\to} (AA') \cap (BC) = A_0$,

то есть на прямой s есть три инвариантные точки, следовательно, $f|_s = id$, то есть любая точка прямой s инвариантна. !). Пусть существует еще гомология g с осью s, центром S и парой соответствующих точек $g(A) = A'$. Тогда g задается той же парой реперов $R \to R'$.



2. Пусть $S \in s$, то есть гомология параболическая.
∃). Нам опять нужно подобрать пару реперов, которые зададут гомологию. Возьмем точку $B \notin s$ и построим точку B' следующим образом: $B' = (A'B_0) \cap (SB)$, где $B_0 = (AB) \cap s$. Возьмем точку $C \in s$, $C \neq B_0, S$. Тогда зададим проективное преобразование f парой реперов $R = (S, A, C, B) \to R' = (S, A', C, B')$. Имеем точки C и S инвариантны, то есть инвариантна прямая $(CS) \equiv s$. Кроме того, точка $B_0 = (AB) \cap (CS) \overset{f}{\to} (A'B') \cap (CS) = B_0$, то есть инвариантна. Итак, на прямой s мы нашли три инвариантные точки, а значит, сужение $f|_s = id$, то есть каждая точка прямой s инвариантна.
!). Дословное повторение доказательства пункта 1. □

Задача 1.32. Докажите, что гомология не может иметь инвариантных точек, отличных от точек прямой s и точки S. Рассмотрите отдельно случаи гиперболической и параболической гомологии.

Задача 1.33. Выясните, может ли гомология иметь инвариантные прямые, не принадлежащие пучку инвариантных прямых.

Вопрос 1.4. Когда вводили понятие гомологии, мы решали систему, которая определяла инвариантные точки. Эта система выдала нам прямую инвариантных точек. Откуда взялась еще одна инвариантная точка в гиперболической гомологии?

С помощью гомологии мы можем построить примеры преобразований проективной прямой.
Мы не доказали, что существуют параболические преобразования проективной прямой. Восполним этот пробел.

Рассмотрим параболическую гомологию f с центром S и осью s. Рассмотрим произвольную прямую d, проходящую через точку S. Эта прямая принадлежит пучку инвариантных прямых, то есть является инвариантной, а значит, мы можем рассмотреть сужение $f|_d$ гомологии f на эту прямую. Как мы знаем, преобразование $f|_d$ является проективным. Точка $S \in d$ является инвариантной. Предположим, что существует еще одна инвариантная точка $A \in d$. Тогда гомология f имеет инвариантную точку, отличную от точек прямой s и точки S, что противоречит результатам задачи (см. выше). Итак, сужение параболической гомологии f на любую прямую пучка инвариантных прямых является примером параболического проективного преобразования прямой.

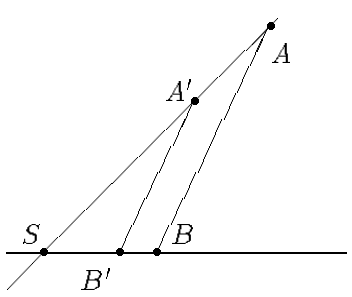
Вопрос 1.5. Какие преобразования будут индуцироваться на инвариантных прямых гиперболической гомологии?

Вопрос 1.6. Существует ли прямая, на которой гомология индуцировала бы эллиптическую инволюцию?

Рассмотрим расширенную плоскость $\bar{\sigma}$ и выясним, какие преобразования на евклидовой плоскости σ может индуцировать гомология.
1. Пусть гиперболическая гомология f имеет несобственную ось s^∞ и собственный центр S.

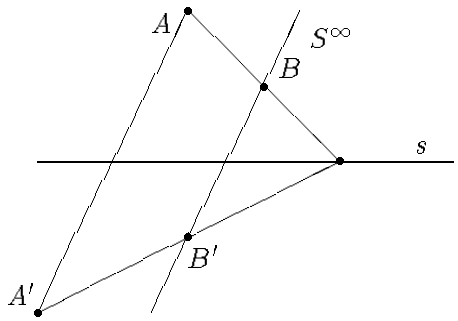
Вопрос 1.7. Может ли гомология с несобственной осью и собственным центром быть параболической?

Так как несобственная прямая (которая содержит все несобственные точки расширенной плоскости) является инвариантной, то определено сужение $f|_\sigma : \sigma \to \sigma$. Выясним, что это за преобразование плоскости σ.



Пусть гомология задается парой точек $f : A \to A'$. Возьмем произвольную собственную точку B. Тогда прямая (BB') принадлежит пучку инвариантных прямых с центром S, то есть $S \in (BB')$. С другой стороны, прямые (AB) и $(A'B')$ должны пересекаться на оси гомологии. Так как ось бесконечно удаленная, то прямые (AB) и $(A'B')$ пересекаются в бесконечно удаленной точке, то есть параллельны. Тогда из подобия треугольников SAB и $SA'B'$ получаем $\overrightarrow{SB'} = k\overrightarrow{SB}$, то есть $f|_\sigma$ является **гомотетией**.

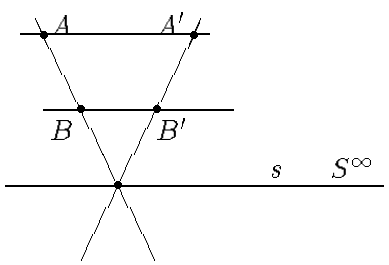
2. Рассмотрим гиперболическую гомологию с собственной осью s и несобственным центром S^∞.



Во-первых, докажем, что бесконечно удаленные элементы переходят в бесконечно удаленные. Допустим, что это не так, то есть существует бесконечно удаленная точка $K^\infty \neq S^\infty$, которая переходит в собственную точку K. Тогда прямая KK^∞ должна проходить через центр гомологии S^∞. Но так как на каждой прямой существует единственная бесконечно удаленная точка, то $K^\infty = S^\infty$, что противоречит выбору точки K^∞.
Во-вторых, докажем, что $f|_\sigma$ будет аффинным преобразованием.

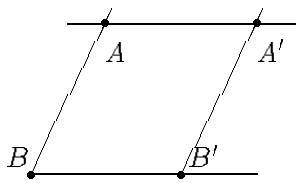
Рассмотрим три произвольные собственные точки A, B, C, лежащие на одной прямой. Пусть P_∞ – бесконечно удаленная точка, добавленная к этой прямой. Тогда простое отношение $(AB, C) = -(AB, CP_\infty) = -(A'B', C'P'_\infty) = (A'B', C')$, где $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $P'_\infty = f(P_\infty)$. Таким образом, отображение $f|_\sigma$ сохраняет простое отношение трех точек прямой, то есть является аффинным преобразованием. Кроме того, это аффинное преобразование имеет прямую инвариантных точек, то есть является перспективно-аффинным. Более того, так как центр гомологии не лежит на оси гомологии, то прямые, соединяющие соответствующие точки f не параллельны прямой s, то есть перспективно аффинное преобразование является **косым сжатием**.

3. Рассмотрим параболическую гомологию с собственной осью s и несобственным центром S^∞.



Из предыдущего пункта дословно переносится доказательство того, что бесконечно удаленные точки не могут переходить в собственные и что преобразование $f|_\sigma$ сохраняет простое отношение трех точек прямой. Кроме того, расширенные прямые соединяющие соответствующие точки гомологии f должны проходить через точку $S^\infty \in s$, то есть сами прямые параллельны оси гомологии s. Таким образом, мы получаем аффинное преобразование, имеющее прямую инвариантных точек и прямые, соединяющие соответствующие точки этого преобразования параллельны прямой инвариантных точек. Это **сдвиг**.

4. Рассмотрим параболическую гомологию с несобственной осью s^∞ и несобственным центром S^∞.



Так как ось гомологии – бесконечно удаленная прямая, то прямая (AB) параллельна прямой $(A'B')$. Так как центр является несобственной точкой, то $(AA')||(BB')$. Таким образом, для любых соответствующих точек получим $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, то есть $f|_\sigma$ является **параллельным переносом**.