1 Проективная геометрия.

§17. Кривые второго порядка на проективной плоскости.

Дополним проективную плоскость мнимыми точками так же, как мы дополняли мнимыми точками аффинную плоскость.

Пусть на проективной плоскости $P^2(V)$ дана проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Тогда для каждой точки M проективной плоскости определяется ненулевой упорядоченный набор из трех вещественных чисел (x^1, x^2, x^3) – координат точки M в репере R. Этот набор для каждой точки определен с точностью до постоянного множителя.

В связи с этим введем договоренность: при выбранном репере R *точкой* назовем упорядоченный ненулевой набор из трех комплексных чисел. Сами числа будем называть *координатами* этой точки относительно репера R. При этом будем считать, что два набора комплексных чисел (x^1, x^2, x^3) и (y^1, y^2, y^3) задают одну и туже точку тогда и только тогда, когда существует комплексное число $\lambda \neq 0$ такое, что $y^\alpha = \lambda x^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. Другими словами, координаты точки определены с точностью до постоянного (комплексного!) множителя.

Будем называть точку M вещественной, если все ее координаты *вещественны*, либо могут стать вещественными после умножения на некоторое комплексное число. В противном случае будем называть точку *мнимой*.

Предложение 1.8. Понятие вещественной точки не зависит от выбора проективного репера, все точки которого принадлежат $P^2(V)$.

Доказательство. Пусть дан другой проективный репер R', все точки которого принадлежат проективной плоскости $P^2(V)$. Тогда формулы перехода от репера R к реперу R' будут иметь вещественные коэффициенты, а значит, если точка имела вещественные координаты в одном репере, то она будет иметь вещественные координаты и в другом репере, то есть будет вещественной. □

Определение 1.24. Множество всех вещественных и мнимых точке назовем *комплексной проективной плоскостью* и будем обозначать тем же символом $P^2(V)$.

Определение 1.25. Две точки комплексной проективной плоскости называются *комплексно-сопряженными*, если из соответствующие координаты суть комплексно-сопряженные числа.

Определение 1.26. Прямой линией (или, короче, прямой) комплексной проективной плоскости назовем множество точек (и вещественных и мнимых), координаты которых (x^1, x^2, x^3) при выбранном репере R удовлетворяют линейному однородному уравнению $u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0$, где u_α, $\alpha = 1, 2, 3$ – некоторые постоянные комплексные числа, не равные нулю одновременно. Упорядоченный набор чисел (u_1, u_2, u_3) называется *координатами* прямой в репере R.

Определение 1.27. Прямая называется *вещественной*, если ее координаты – вещественные числа, либо могут быть приведены к вещественным умножением на какое-либо комплексное число. В противном случае прямая называется *мнимой*. Нас в дальнейшем будут интересовать только вещественные прямые и мы будем называть их прямыми (без упоминания вещественности).

На случай комплексной проективной плоскости нам нужно перевести и понятие сложного отношения четырех точек прямой. Положим по определению, что *сложным отношением четырех точек* $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$, $C(c^1, c^2, c^3)$, $D(d^1, d^2, d^3)$ является число (AB, CD), которое вычисляется по формуле

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & d^1 \\ b^2 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix}}$$

или (что эквивалентно) по формулам

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^2 & c^2 \\ a^3 & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & d^2 \\ a^3 & d^3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^2 & d^2 \\ b^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2 & c^2 \\ b^3 & c^3 \end{vmatrix}}$$

Если спроектировать точки A, B, C, D из центра A_2 на прямую (A_1A_3), то получим формулу

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^3 & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^3 & d^3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b^1 & d^1 \\ b^3 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^3 & c^3 \end{vmatrix}}$$

Задача 1.34. (интересная) Докажите, что все три формулы эквивалентны, то есть проводя вычисления по ним, мы получим один и тот же ответ.

Задача 1.35. Пусть $(AB, CD) = r$, где r – вещественное число, а точки A и B комплексно сопряжены. Верно ли, что точки C и D также должны быть комплексно сопряжены? Верно ли, что если точка C вещественна, то точка D также вещественна?

Определение 1.28. Множество всех точек комплексной проективной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0 \qquad (1)$$

или, в сокращенной записи,

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0 \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

где $a_{\alpha\beta}$ – некоторые вещественные числа такие, что $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, называется *линией второго порядка* (или *кривой второго порядка*).

Теорема 1.26. Пусть на комплексной проективной плоскости даны линия второго порядка Q и прямая d. Тогда возможны два случая:
1) прямая d пересекает кривую Q в двух точках (вещественных, мнимых или совпавших);
2) прямая d целиком содержится в линии Q. При этом кривая Q распадается на пару прямых, одна из которых есть прямая d.

Доказательство. Пусть на комплексной проективной плоскости кривая второго порядка Q задана общим уравением (1). Пусть прямая d задана двумя вещественными точками $A(a^1, a^2, a^3)$ и $B(b^1, b^2, b^3)$. Тогда параметрические уравнения прямой d имеют вид $x^\alpha = \lambda a^\alpha + \mu b^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. Напомним, что λ и μ – это параметры точек прямой. Раньше они были только вещественными, а теперь могут принимать произвольные комплексные значения.

Общие точки прямой d и линии Q мы находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0 \\ x^\alpha = \lambda a^\alpha + \mu b^\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{\alpha\beta}(\lambda a^\alpha + \mu b^\alpha)(\lambda a^\beta + \mu b^\beta) = 0 \\ x^\alpha = \lambda a^\alpha + \mu b^\alpha \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее первое уравнение этой системы:

$$\lambda^2 a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta + 2\lambda\mu a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta + \mu^2 a_{\alpha\beta}b^\alpha b^\beta = 0$$

Назовем это уравнение *характеристическим*. Количество отношений $\frac{\lambda}{\mu}$, удовлетворяющих характеристическому уравнению, даст нам количество общих точек прямой d и линии Q. Исследуем характеристическое уравнение на количество корней.
1. Пусть $a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta \neq 0$ (или $a_{\alpha\beta}b^\alpha b^\beta \neq 0$), то есть $A \notin Q$ (или $B \notin Q$), то есть уравенение является квадратным. Тогда $\mu \neq 0$ (если бы $\mu = 0$, то из характеристического уравнения $\lambda = 0$). Разделим обе части характеристического уравнения на μ^2:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta + 2\frac{\lambda}{\mu}a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta + a_{\alpha\beta}b^\alpha b^\beta = 0$$

Это квадратное уравнение, которое всегда имеет два корня $\frac{\lambda}{\mu}$ (вещественных, мнимых, совпавших), а значит, прямая d и линия Q в этом случае имеют две общие точки.
2. Пусть $a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta = a_{\alpha\beta}b^\alpha b^\beta = 0$, то есть $A \in Q$ и $B \in Q$. Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\lambda\mu a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = 0$$

а) $a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta \neq 0$. Тогда мы имеем два решения этого уравнения:$\lambda = 0$ (при этом $\mu \neq 0$) и $\mu = 0$ (при этом $\lambda \neq 0$). Подставим первое решение в уравнения прямой и получим, что оно задает точку B, то

есть $B \in Q$. Во втором случае аналогично получаем, что $A \in Q$. Итак, в этом случае мы получили также две общие точки: A и B.

б) $a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = 0$. Тогда любая пара чисел λ, μ удовлетворяет характеристическому уравнению и мы получаем, что прямая d целиком содержится в кривой Q.

Нам осталось доказать, что в этом случае кривая Q распадается на две прямые. Для этого выберем проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ так, чтобы его точки A_2 и A_3 лежали на прямой d. Тогда в таком репере уравнение прямой $d : x^1 = 0$. Так как любая точка $M(0, x^2, x^3) \in d$ лежит на кривой Q, то ее координаты удовлетворяют уравнению Q: $a_{11}(0)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}\cdot 0\cdot x^2 + 2a_{13}\cdot 0\cdot x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$ или

$$a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$$

Это равенство верно для любых x^2, x^3, а значит, $a_{22} = a_{33} = a_{23} = 0$. Таким образом, уравнение линии Q принимает вид

$$x^1(a_{11}x^1 + 2a_{12}x^2 + 2a_{13}x^3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^1 = 0 \\ a_{11}x^1 + 2a_{12}x^2 + 2a_{13}x^3 = 0 \end{array}\right.$$

Мы видим, что уравнение линии второго порядка Q распалось на два линейных однородных уравнения, то есть линия Q распалась на две прямые, одна из которых d. □

Определение 1.29. Кривые второго порядка, распадающиеся на пару прямых назовем *вырожденными*, а остальные кривые второго порядка назовем *невырожденными*.

Предложение 1.9. Кривая второго порядка является невырожденной тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = 3$$

Доказательство. В предыдущей теореме мы получили вырожденные линии в случае 2б), то есть линия вырождена тогда и только когда, $a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta = a_{\alpha\beta}b^\alpha b^\beta = 0$, $a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = 0$. В этом случае мы выбрали проективный репер так, что линия второго порядка приняла вид $a'_{11}(x^1)^2 + 2a'_{12}x^1x^2 + 2a'_{13}x^1x^3 = 0$. Тогда матрица в таком репере имеет вид

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & 0 & 0 \\ a'_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Две последние строки этой матрицы пропорциональны, следовательно, ее ранг не превышает 2. Можно доказать, что ранг матрицы линии второго порядка не зависит от выбора проективного репера, то для исходной марицы имеем: ее ранг не может превосходить 2. □

Определение 1.30. Прямая d называется *касательной* к невырожденной линии второго порядка Q, если прямая пересекает линию в двух совпавших точках. Эта точка называется *точкой касания*.

Выведем уравнение касательной ℓ к линии Q в точке $A(a^1, a^2, a^3) \in Q$.

Пусть $X(x^1, x^2, x^3) \in \ell$ – произвольная фиксированная точка, отличная от точки A. Тогда параметрические уравнения прямой $\ell \equiv (AX)$ имеют вид $y^\alpha = \lambda a^\alpha + \mu x^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, а характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta + 2\lambda\mu a_{\alpha\beta}a^\alpha x^\beta + \mu^2 a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$$

Так как точка $A \in Q$, то $a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta = 0$ и характеристическое уравнение распадается на два

$$\mu\left(2\lambda a_{\alpha\beta}a^\alpha x^\beta + \mu a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \mu = 0 \\ 2\lambda a_{\alpha\beta}a^\alpha x^\beta + \mu a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0 \end{array}\right.$$

Решение первого уравнения: $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ – любое. Так как мы хотим, чтобы прямая (AX) пересекала Q в двух совпавших точках, то второе уравнение системы должно иметь точно такой же корень (а точнее отношение μ к λ), то есть любая пара чисел $0, \lambda$ должна удовлетворять второму уравнению системы. Это возможно тогда и только тогда, когда $a_{\alpha\beta}a^\alpha x^\beta = 0$ или, подробнее,

$$(a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3)x^1 + (a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3)x^2 + (a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3)x^3 = 0 \qquad (2)$$

Это уравнение не всегда задает прямую.

Определение 1.31. Назовем точку $A \in Q$ *особой*, если $a_{\alpha\beta}a^{\alpha} = 0$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Мы видим, что в особой точке уравнение (2) превращается в тождество вида $0 = 0$, а значит, прямую не задает, следовательно, в особой точке понятие касательной вводить не будем.

Определение 1.32. Не особую точку назовем *обыкновенной*.

В обыкновенной точке уравение (2) является уравнением прямой и, следовательно, однозначно задает касательную. Итак, мы доказали

Теорема 1.27. В любой обыкновенной точке $A(a^1, a^2, a^3)$ линии второго порядка Q существует единственная касательная, которая задается уравнением

$$(a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3)x^1 + (a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3)x^2 + (a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3)x^3 = 0$$

Замечание. Выясним, сколько особых точек может иметь линии второго порядка Q. По определению точка $A(a^1, a^2, a^3)$ является особой точкой линии второго порядка тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3 = 0 \\ a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3 = 0 \\ a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Это система трех линейных однородных уравнений. Возможны случаи:

1) ранг матрицы $(a_{\alpha\beta}) = 3$. В этом случае система имеет единственное нулевое решение. Как мы знаем на проективной плоскости нет точек с нулевым набором координат, а значит, особых точек нет.

2) ранг матрицы $(a_{\alpha\beta}) = 2$. Система имеет множество решений любые два из которых отличаются на постоянный множитель, то есть существует единственная особая точка.

3) ранг матрицы $(a_{\alpha\beta}) = 1$. Тогда все три уравнения пропорциональны, следовательно, каждое из них задает одну и туже прямую особых точек.

Задача 1.36. Докажите, что если координаты точки $A(a^1, a^2, a^3)$ удовлетворяют системе уравнений (3), то точка A принадлежит кривой Q.

§18. Полюс и поляра. Поляритет.

Пусть на комплексной проективной плоскости дана линия второго порядка Q своим общим уравнением $a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = 0$. Возьмем произвольную точку $A(a^1, a^2, a^3)$ и рассмотрим множество точек $X(x^1, x^2, x^3)$, удовлетворяющих условию $a_{\alpha\beta}a^{\alpha}x^{\beta} = 0$ или, подробнее,

$$(a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3)x^1 + (a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3)x^2 + (a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3)x^3 = 0 \tag{4}$$

Если точка A обыкновенная, то это линейное однородное уравнение, а значит, оно задает прямую a. Эта прямая называется *полярой* точки A, а точка A называется *полюсом* прямой a.

Для особой точки поляра не определяется.

Вопрос 1.8. Может ли поляра вещественной точки быть мнимой прямой?

Пусть линия Q не имеет особых точек, то есть $rg(a_{\alpha\beta}) = 3$. Тогда для любой точки A комплексной проективной плоскости существует единственная поляра, определяемая уравнением (4).

Обратно, пусть дана прямая $a : u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0$. Нам нужно доказать, что для этой прямой существует единственный полюс. Обозначим координаты точки $A(a^1, a^2, a^3)$ – претендента на звание полюса. Ее поляра задается уравнением

$$(a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3)x^1 + (a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3)x^2 + (a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3)x^3 = 0$$

Мы хотим, чтобы эта поляра совпадала с прямой a, то есть координаты поляры и прямой a должны быть пропорциональны, то есть

$$\begin{cases} a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3 = \lambda u_1 \\ a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3 = \lambda u_2 \\ a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3 = \lambda u_3 \end{cases}$$

Посмотрим на эту систему как на систему линейных уравнений с неизвестными a^1, a^2, a^3. Так как определитель $det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$ при каждом фиксированном λ эта система имеет единственное решение.

При изменении λ мы получим другое решение, отличающееся от прежнего на постоянный множитель, то есть каждая прямая a имеет единственный полюс A, для которой она является полярой.

Пусть даны две различные точки $A(a^1, a^2, a^3)$ и $B(b^1, b^2, b^3)$. Докажем, что их поляры a и b различны. Действительно, предположим, что $a = b$. Тогда координаты этих прямых пропорциональны, то есть $a_{\alpha\beta}a^\beta = \lambda a_{\alpha\beta}b^\beta$, где λ – некоторое вещественное число. Мы получаем систему линейных уравнений $a_{\alpha\beta}(a^\beta - \lambda b^\beta) = 0$ относительно неизвестных $a^\beta - \lambda b^\beta$, $\beta = 1, 2, 3$. Так как ранг матрицы $(a_{\alpha\beta})$ равен трем, то эта система уравнений имеет единственное нулевое решение, то есть $a^\beta - \lambda b^\beta = 0$, $\beta = 1, 2, 3$. Мы получили, что координаты точек $A(a^\beta)$ и $B(b^\beta)$ пропорциональны, то есть точки A и B совпадают. Это противоречит предположению, то есть $a \neq b$.

Итак, мы получили, что всякая невырожденная линия второго порядка Q определяет биекцию $p : P^2(V) \to \Pi^*$, ставящую каждой точке проективной плоскости ее поляру. Эта биекция называется *полярите́том*.

Изучим взаимное расположение полюсов и поляр.

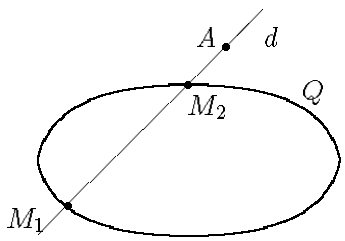
Предложение 1.10. Точка A принадлежит своей поляре a тогда и только тогда, когда прямая a является касательной невырожденной линии Q в точке A.

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть точка A принадлежит своей поляре. Тогда координаты точки A удовлетворяют уравнению поляры, то есть $(a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3)a^1 + (a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3)a^2 + (a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3)a^3 = 0$ или, записывая коротко, $a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta = 0$, то есть точка A принадлежит кривой Q. Так как кривая Q невырожденная, то A – это две совпавшие общие точки линии Q и прямой a, то есть прямая a является касательной к линии Q в точке A.

Вопрос 1.9. Почему в этом случае не существуют еще общие точки a и Q, отличные от A?

$\Leftarrow$). Пусть прямая a является касательной к невырожденной линии Q в точке A. Тогда, сравнивая уравнения касательной в точке A и уравнение поляры точки A, мы видим, что это одно и тоже уравнение, а значит, касательная является полярой своей точки касания. □

Пусть теперь точка A не принадлежит линии Q.



Проведем через точку A прямую d. Пусть $d \cap Q = \{M_1, M_2\}$. Рассмотрим случаи:

1) Точки M_1, M_2 – две различные точки (вещественные либо мнимые). Построим на прямой d точку B такую, что $(M_1M_2, AB) = -1$. Точка $B \neq A$ (так как если $B = A$, то по определению сложного отношения трех точек $(M_1M_2, AB) = 1$) и $B \notin Q$ (если $B \in Q$, то она должна совпасть либо с M_1, либо с M_2). Рассмотрим произвольную точку M на прямой d. Ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} x^1 &= \lambda a^1 + \mu b^1 \\ x^2 &= \lambda a^2 + \mu b^2 \\ x^3 &= \lambda a^3 + \mu b^3 \end{aligned}$$

где λ и μ – произвольные комплексные числа. Точки M_1 и M_2 прямой d задаются значениями параметров λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2, соответственно, причем отношения $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ и $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ являются корнями характеристического уравнения

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta + 2\frac{\lambda}{\mu}a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta + a_{\alpha\beta}b^\alpha b^\beta = 0$$

Согласно замечанию из §13 имеем $\frac{\mu_1\lambda_2}{\mu_2\lambda_1} = -1$, то есть $\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0$. Тогда по теореме Виета $(a_{\alpha\beta}a^\alpha)b^\beta = 0$, то есть точка B принадлежит поляре точки A.

Обратно, пусть точка $A \notin Q$ и точка B принадлежит поляре точки A. Тогда координаты точки B удовлетворяют уравнению поляры точки A, то есть уравнению $(a_{\alpha\beta}a^\alpha)b^\beta = 0$, а значит, по теореме Виета $\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0$, то есть сложное отношение $(M_1M_2, AB) = -1$.

2) Точки M_1 и M_2 – две совпавшие точки. Тогда в качестве точки B точку $M_1 \equiv M_2$ – это точка касания. Тогда точка A принадлежит касательной, проведенной в точке B, а значит, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной

$$(a_{11}b^1 + a_{12}b^2 + a_{13}b^3)a^1 + (a_{21}b^1 + a_{22}b^2 + a_{23}b^3)a^2 + (a_{31}b^1 + a_{32}b^2 + a_{33}b^3)a^3 = 0$$

или перегруппировав члены, получим $a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = 0$, то есть точка B принадлежит поляре точки A.

Итак, мы получили

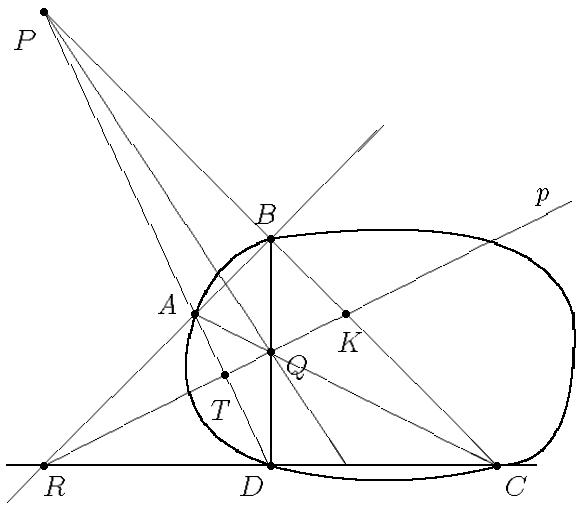
Предложение 1.11. Точка B принадлежит поляре точки A тогда и только тогда, когда она является четвертой гармонической к точкам M_1, M_2, A, где M_1, M_2 – точки пересечения прямой, проходящей через точку A, и линии Q, либо точкой касания касательной, проходящей через точку A. □

Следствие 1. 1) Точками касания касательных, проведенных через точку A к линии Q, являются точки пересечения поляры точки A с линией Q.
2) Через вещественную точку A комплексной проективной плоскости проходят две касательные к линии второго порядка Q тогда и только тогда, когда поляра точки A пересекает Q в двух вещественных различных точках.

Определение 1.33. Если через точку A проходит две касательные к линии второго порядка Q, то точку A назовем *внешней точкой* линии второго порядка Q (то есть если поляра точки A пересекает Q в двух различных вещественных точках). Если через точку A нельзя провести касательные к Q (то есть поляра пересекает линиию Q в двух мнимых точках), то точку A назовем *внутренней точкой* линии Q.

Следствие 2. Пусть полный четырехвершинник вписан в невырожденную линию второго порядка (то есть все его вершины лежат на линии второго порядка). Тогда каждая его диагональная точка является полюсом диагонали, проходящей через две другие диагональные точки.

Доказательство.



По свойству четырехвершинника имеем $(AD, PT) = -1$, $(BC, KP) = -1$, то есть точки T и K принадлежат поляре точки P по доказанному предложению, а значит, вся прямая $(TK) \equiv (RQ)$ является полярой точки P.

Следствие 2 дает способ построения поляры с помощью одной линейки, а следствие 1 вместе со следствием 2 – способ построения касательной, проходящей через данную точку, не лежащую на кривой. А для построения полюса по данной поляре и построения касательной, проходящей через точку, лежащую на линии второго порядка нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1.28. (о взаимности поляритета)
Если точка B лежит на поляре точки A, то точка A лежит на поляре точки B.

Доказательство. Пусть как всегда координаты точек $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$. Тогда уравнение поляры точки A имеет вид

$$(a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3)x^1 + (a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3)x^2 + (a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3)x^3 = 0$$

Условие принадлежности точки B поляре точки A запишется в виде

$$(a_{11}a^1 + a_{12}a^2 + a_{13}a^3)b^1 + (a_{21}a^1 + a_{22}a^2 + a_{23}a^3)b^2 + (a_{31}a^1 + a_{32}a^2 + a_{33}a^3)b^3 = 0$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по-другому.

$$(a_{11}b^1 + a_{12}b^2 + a_{13}b^3)a^1 + (a_{21}b^1 + a_{22}b^2 + a_{23}b^3)a^2 + (a_{31}b^1 + a_{32}b^2 + a_{33}b^3)a^3 = 0$$

Это уравнение является условием того, что точка A принадлежит поляре точки B. Так как точки A и B равноправны, то верно и обратное. □

§19. Классификация кривых второго порядка на проективной плоскости.

Пусть на комплексной проективной плоскости дана кривая второго порядка Q:

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$$

Рассмотрим два случая:
1) Уравнение кривой Q имеет хотя бы один коэффициент $a_{\alpha\alpha} \neq 0$. Пусть $a_{11} \neq 0$. Тогда применим метод выделения полных квадратов. Соберем в одну скобку все слагаемые, содержащие переменную x^1 и вынесем a_{11} за скобку:

$$a_{11}\left((x^1)^2 + 2x^1(\frac{a_{12}}{a_{11}}x^2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x^3) \pm (\frac{a_{12}}{a_{11}}x^2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x^3)^2\right) + 2a_{23}x^2x^3 = 0$$

$$a_{11}\left(x^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x^2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x^3\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}(x^2)^2 - 2\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{11}x^2x^3 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}(x^3)^2 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$$

Введем обозначения

$$y^1 = x^1 + \tfrac{a_{12}}{a_{11}}x^2 + \tfrac{a_{13}}{a_{11}}x^3; \quad y^2 = x^2; \quad y^3 = x^3$$

Если мы выразим x^1, x^2, x^3 через y^1, y^2, y^3, то получим формулы перехода к новому реперу R' с координатами y^1, y^2, y^3, в котором уравнение данной линии второго порядка Q имеет вид

$$a_{11}(y^1)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}(y^2)^2 - 2\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{11}y^2y^3 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}(y^3)^2 + 2a_{23}y^2y^3 = 0$$

или

$$a_{11}(y^1)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}(y^2)^2 + 2\left(a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}\right)y^2y^3 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}(y^3)^2 = 0$$

Сгруппируем все слагаемые, содержащие y^2 и дополним их до полного квадрата.

$$a_{11}(y^1)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\left((y^2)^2 - 2y^2(\frac{a_{23}a_{11}}{a_{12}^2} - \frac{a_{13}}{a_{12}})y^3 \pm ((\frac{a_{23}a_{11}}{a_{12}^2} - \frac{a_{13}}{a_{12}})y^3)^2\right) - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}(y^3)^2 = 0$$

Свернем полный квадрат

$$a_{11}(y^1)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\left(y^2 - (\frac{a_{23}a_{11}}{a_{12}^2} - \frac{a_{13}}{a_{12}})y^3\right)^2 - ((\frac{a_{23}a_{11}}{a_{12}^2} - \frac{a_{13}}{a_{12}})y^3)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}(y^3)^2 = 0$$

Введем обозначения

$$z^1 = y^1; \quad z^2 = y^2 - (\tfrac{a_{23}a_{11}}{a_{12}^2} - \tfrac{a_{13}}{a_{12}})y^3; \quad z^3 = y^3$$

Выражая y^1, y^2, y^3 через z^1, z^2, z^3, получим формулы перехода от репера R' к реперу R'', в котором уравнение линии Q примет вид

$$b_{11}(z^1)^2 + b_{22}(z^2) + b_{33}(z^3)^2 = 0$$

где $b_{\alpha\beta}$ мы обозначили для краткости полученные коэффициенты. Этот вид уравнения называется *канонический*.

2) Все коэффициенты $a_{\alpha\alpha} = 0$ в уравнении кривой Q, то есть кривая Q имеет вид

$$a_{12}x^1x^2 + a_{13}x^1x^3 + a_{23}x^2x^3 = 0$$

Рассмотрим формулы перехода к новому реперу

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 + y^2 \\ x^2 &= y^1 - y^2 \\ x^3 &= y^3 \end{aligned}$$

В этом репере уравнение линии Q примет вид

$$a_{12}(y^1)^2 - a_{12}(y^2)^2 + a_{13}(y^1 + y^2)y^3 + a_{23}(y^1 - y^2)y^3 = 0$$

Таким образом, мы пришли к виду уравнения, рассмотренного в первом пункте. Такое уравнение мы уже умеем приводить к каноническому виду.

Итак, мы получаем, что для любой линии второго порядка существует репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, в котором ее уравнение имеет канонический вид

$$b_{11}(z^1)^2 + b_{22}(z^2) + b_{33}(z^3)^2 = 0$$

Задача 1.37. Пользуясь этим уравнением, докажите, что в случае канонического уравнения трехвершинник $A_1A_2A_3$ является *автополярным трехвершинником первого рода*, то есть для любых различных $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ точка A_α принадлежит поляре точки A_β. Изобразите линию Q и ее автополярный трехвершинник первого рода.

Используя каноническое уравнение, проведем классификацию кривых второго порядка на проективной плоскости. Рассмотрим возможные случаи:

1) $b_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, $b_{33} \neq 0$. Это невырожденные линии второго порядка.

а) все $b_{\alpha\alpha}$ одного знака. Тогда положим $w^1 = \sqrt{b_{11}}z^1$, $w^2 = \sqrt{b_{22}}z^2$, $w^3 = \sqrt{b_{33}}z^3$ и получим уравнение

$$(w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 = 0$$

Эта кривая называется *нулевой кривой второго порядка*. Она не имеет вещественных точек.

б) коэффициенты $b_{\alpha\alpha}$ разных знаков. Без ограничения общности можно считать, что $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $b_{33} < 0$. Тогда положим $w^1 = \sqrt{|b_{11}|}z^1$, $w^2 = \sqrt{|b_{22}|}z^2$, $w^3 = \sqrt{|b_{33}|}z^3$ и получим уравнение

$$(w^1)^2 + (w^2)^2 - (w^3)^2 = 0$$

Эта кривая называется *овальной кривой второго порядка*.

2) Пусть один из коэффициентов $b_{\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$ равен нулю. Пусть $b_{33} = 0$.

а) Пусть b_{11} и b_{22} имеют одинаковые знаки. Тогда уравнение примет вид

$$(w^1)^2 + (w^2)^2 = 0$$

Это *пара мнимых пересекающихся прямых*.

б) Пусть b_{11} и b_{22} имеют разные знаки. Тогда уравнение примет вид

$$(w^1)^2 - (w^2)^2 = 0$$

Это *пара вещественных пересекающихся прямых*.

3) Пусть два коэффициента равны нулю. Тогда

$$(w^1)^2 = 0$$

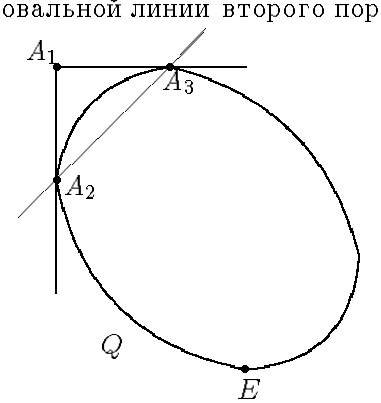
Это *пара совпавших прямых*.

Итак, доказана

Теорема 1.29. На комплексной проективной плоскости существует пять видов кривых второго порядка

1) $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ – нулевая линия второго порядка;
2) $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ – овальная линия второго порядка;
3) $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ – пара мнимых пересекающихся прямых;
4) $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ – пара вещественных пересекающихся прямых;
5) $(x^1)^2 = 0$ – пара совпавших прямых. □

Замечание. Иногда бывает удобен другой выбор проективного репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ для овальной линии второго порядка. Это так называемый *автополярный трехвершинник второго рода*.



Возьмем в качестве точки A_1 точку, через которую проходят две касательные к линии Q. Их точки касания примем за вершины A_2, A_3.

Запишем уравнение поляры точки $A_1(1, 0, 0)$:

$$a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = 0$$

Как мы знаем, это должна быть прямая $A_2A_3 : x^1 = 0$, следовательно, $a_{12} = a_{13} = 0$ и уравнение кривой Q уже упрощается

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$$

Так как точка $A_2(0,1,0)$ принадлежит Q, подставляя ее координаты в уравнение Q, получим $a_{22}=0$. Аналогично, так как $A_3 \in Q$, получим $a_{33}=0$. Итак, уравнение Q еще упростилось

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$$

Так как овальная линии является невырожденной линией (то есть не распадается на пару прямых), то $a_{11} \neq 0$ и $a_{23} \neq 0$.
Возьмем точку $E(1,1,1)$ на линии Q. Тогда $a_{11}+2a_{23}=0$, то есть $a_{11}=-2a_{23}$. Итак, окончательно, уравнение овальной линии в автополярном трехвершиннике второго рода имеет вид

$$(x^1)^2 - x^2x^3 = 0$$

Докажем обратное, что любая линия второго порядка, заданная относительно автополярного трехвершинника второго рода уравнением $(x^1)^2-x^2x^3=0$, является овальной линией, то есть нам нужно доказать, что существует проективный репер, в котором уравнение линии Q имеет вид $(y^1)^2+(y^2)^2-(y^3)^2=0$. Возьмем в качестве формул перехода к такому реперу следующие формулы

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 \\ x^2 &= -y^2 + y^3 \\ x^3 &= y^2 + y^3 \end{aligned}$$

Задача 1.38. Покажите, что эти формулы задают переход к требуемому реперу.
Объединяя результаты, получим

Кривая второго порядка является овальной линией тогда и только тогда, когда она задается уравнением

$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ относительно автополярного трехвершинника первого рода	$(x^1)^2 - x^2x^3 = 0$ относительно автополярного трехвершинника второго рода