1 Проективная геометрия.

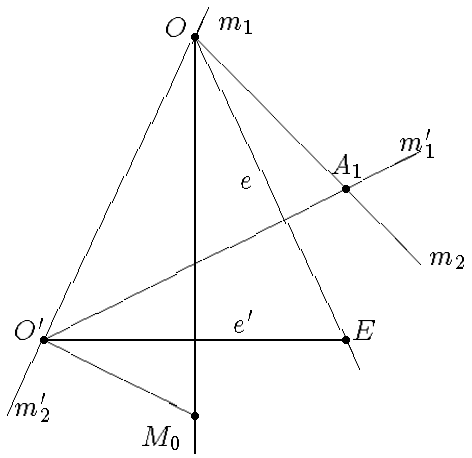
§20. Конструктивные теоремы и задачи теории овальных линий второго порядка.

Теорема 1.30. (Штейнера)
Пусть на проективной плоскости даны два пучка прямых $\mathcal{P}(O)$ и $\mathcal{P}(O')$ с различными центрами и установлено проективное, но не перспективное отображение

$$f : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(O')$$

Тогда точки пересечения соответствующих прямых этих пучков образуют овальную кривую второго порядка, проходящую через центры этих пучков.

Доказательство.



Так как отображение f проективное, оно задается тремя парами соответствующих прямых. Так как отображение f не является перспективным, прямая, соединяющая центры пучков, то есть прямая (OO') не должна быть инвариантной. Тогда отображение f мы можем задать следующим образом: $m_1 \equiv (OO') \to m_1'$, $m_2 \to m_2' \equiv (OO')$, $e \to e'$, где прямые e, e' из соответствующих пучков берем произвольно, но отличными от прямых m_1, m_2, m_1', m_2'.
Обозначим $A_1 = m_2 \cap m_1'$ и $E = e \cap e'$. Рассмотрим репер $R = (O, A_1, O', E)$. Тогда в этом репере $O(1,0,0)$, $A_1(0,1,0)$, $O'(0,0,1)$, $E(1,1,1)$. Тогда получаем уравнения прямых:

$$m_1 \equiv (OO') : x^2 = 0; \quad m_2 \equiv (OA_1) : x^3 = 0; \quad e \equiv (OE) : -x^2 + x^3 = 0$$

Итак, прямые m_1, m_2, e порождаются ковекторами $m_1(0,1,0)$, $m_2(0,0,1)$, $e(0,-1,1)$. Система ковекторов m_1, m_2 не является согласованной, так как $m_1 + m_2 \neq e$. Чтобы согласовать эту систему ковекторов, нужно заменить m_1 на ковектор $-m_1$. Тогда система $(-m_1), m_2$ будет согласована.
Аналогично получим

$$m_1' \equiv (O'A_1) : x^1 = 0; \quad m_2' \equiv (OO') : x^2 = 0; \quad e' \equiv (O'E) : x^1 - x^2 = 0$$

Итак, прямые m_1', m_2', e' порождаются ковекторами $m_1'(1,0,0)$, $m_2'(0,1,0)$, $e'(1,-1,0)$. Система ковекторов m_1', m_2' не является согласованной, так как $m_1' + m_2' \neq e'$. Чтобы согласовать эту систему ковекторов, нужно заменить m_2' на ковектор $-m_2'$. Тогда система $m_1', -m_2'$ будет согласована.
Итак, в пучках $\mathcal{P}(O)$ и $\mathcal{P}(O')$ мы построили два соответствующих репера: $r = r(-m_1, m_2)$ и $r' = r'(m_1', -m_2')$. Тогда проективное отображение $f : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(O')$ задается так: любой прямой $m(\alpha, \beta)_r$ ставится в соответствие прямая $m' = f(m)(\alpha, \beta)_{r'}$ с теми же координатами в репере r'. Пусть ковектор m порождает прямую m. Тогда ковектор $m = \alpha(-m_1) + \beta m_2 = \alpha(0,-1,0) + \beta(0,0,1) = (0, -\alpha, \beta)$ и уравнение прямой $m : -\alpha x^2 + \beta x^3 = 0$. Аналогично получим для ковектора m', порождающего прямую m': $m' = \alpha m_1' + \beta(-m_2') = \alpha(1,0,0) + \beta(0,-1,0) = (\alpha, -\beta, 0)$, то есть уравнение прямой $m' : \alpha x^1 - \beta x^2 = 0$. Тогда точка $M = m \cap m'$ будет задаваться системой уравнений

$$\begin{cases} -\alpha x^2 + \beta x^3 = 0 \\ \alpha x^1 - \beta x^2 = 0 \end{cases}$$

Так как эта система имеет ненулевое решение (α, β), то определитель этой системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} -x^2 & x^3 \\ x^1 & -x^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2)^2 - x^1 x^3 = 0$$

Это уравнение задает овальную линию Q. Подставляя координаты точек O и O' в это уравнение, мы видим, что точки O, O' принадлежат овальной линии.

Докажем обратно, что любая точка M овальной линии Q может быть получена как точка пересечения соответствующих при проективном преобразовании прямых $m \in \mathcal{P}(O)$ и $m' \in \mathcal{P}(O')$. Для точек

O, O' линии Q получаем $O' = m_1 \cap m_1'$, $O = m_2 \cap m_2'$.
Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, отличную от точек O и O', координаты которой удовлетворяют уравнению овальной линии, то есть

$$(x_0^2)^2 - x_0^1 x_0^3 = 0 \tag{1}$$

Так как $O(1,0,0) \in (OM_0) \equiv m$, получим $(OM_0) : u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0$. Так как $M_0 \in (OM_0)$, то

$$u_2 x_0^2 + u_3 x_0^3 = 0 \tag{2}$$

Так как $M_0 \neq O$, то x_0^2 и x_0^3 не равны нулю одновременно. Пусть $x_0^2 \neq 0$. Тогда $u_3 \neq 0$ и мы можем из равенства (2) выразить $x_0^3 = -\frac{u_2}{u_3} x_0^2$ и подставить в (1). Тогда мы получим

$$(x_0^2)^2 + x_0^1 \tfrac{u_2}{u_3} x_0^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0^2 \left(x_0^2 + \tfrac{u_2}{u_3} x_0^1 \right) = 0$$

Так как $x_0^2 \neq 0$, то координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению $x_0^2 + \frac{u_2}{u_3} x_0^1 = 0$ или $u_3 x_0^2 + u_2 x_0^1 = 0$. Но прямой m', заданной этим уравнением принадлежит точка $O'(0,0,1)$. Кроме того, координаты этих прямых $m(-u_2, u_3)_r$, $m'(-u_2, u_3)_{r'}$, то есть координаты этих прямых в соответствующих реперах равны. Итак, любая точка $M_0 \in Q$ может быть получена как точка пересечения соответствующих прямых данных пучков. □

По виду уравнения Q замечаем, что трехвершинник OA_1O' является автополярным трехвершинником второго рода, а значит, прямые $(A_1O) \equiv m_2$ и $(A_1O') \equiv m_1'$ являются касательными к линии Q в точках O и O' соответственно. Таким образом, мы получили

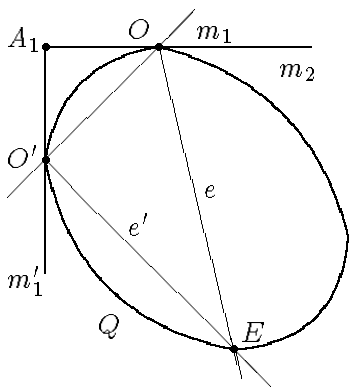
Следствие. В условиях теоремы Штейнера получим
1) $f(OO')$ – касательная к линии Q в точке O';
2) $f^{-1}(OO')$ – касательная к Q в точке O. □

Замечание. Если $f : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(O')$ – перспективное отображение пучков, то в результате получим вырожденную кривую второго порядка, которая распадается на пару прямых: (OO') и s – ось перспективы отображения f.

Задача 1.39. Докажите.

Теорема 1.31. (обратная Штейнера)
Пусть Q – овальная кривая второго порядка; точки O, O' – две различные точки на кривой Q. Тогда отображение $f : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(O')$, заданное по правилу: $\forall m \equiv (OM) \in \mathcal{P}(O)$ ставится в соответствие прямая $m' \equiv (O'M)$, где M – вторая точка пересечения прямой m с линией Q, является проективным, но не перспективным.

Доказательство.



Рассмотрим две произвольные точки O, O' на овальной линии Q. Проведем в этих точках касательные к Q и обозначим их точку пересечения A_1. Возьмем точку E произвольно на Q (естественно точка E отлична от точек O, O'). Тогда в репере $R = (O, A_1, O', E)$ овальная линия Q задается уравнением $(x^2)^2 - x^1 x^3 = 0$, так как трехвершинник OA_1O' является для линии Q автополярным трехвершинником второго рода. Рассмотрим проективное отображение $\varphi : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(O')$, заданное парой реперов $r = (m_1, m_2, e) \to r' = (m_1', m_2', e')$. По теореме Штейнера точки пересечения соответствующих прямых отображения φ образуют овальную линию, уравнение которой в репере R имеет вид $(x^2)^2 - x^1 x^3 = 0$. Следовательно, эта овальная линия и есть овальная линия Q, данная в условии задачи, а значит, отображение f совпадает с проективным отображением φ, то есть само является проективным.

Так как прямая (OO'), соединяющая центры пучков, не является инвариантной ($(OO') \equiv m_1$ переходит в прямую $(O'A_1) \equiv m_1' \neq (OO')$), то по критерию отображение f не будет перспективным. □

Замечание. Теорема Штейнера позволяет определить овальную линию с помощью проективного отображения пучка на пучок, а теорема, обратная теореме Штейнера, говорит, что центры пучков можно выбрать произвольно.

Следствие 1. Если на проективной плоскости даны пять точек M_α, $\alpha = 1, \ldots, 5$ общего положиния

(то есть никакие три из них не лежат на одной прямой), то существует единственная овальная линия второго порядка, проходящая через эти пять точек.

Доказательство. $\exists$). Рассмотрим проективное отображение $f : \mathcal{P}(M_1) \to \mathcal{P}(M_2)$, задаваемое тремя парами соответствующих прямых: $(M_1M_3) \to (M_2M_3)$, $(M_1M_4) \to (M_2M_4)$, $(M_1M_5) \to (M_2M_5)$. Так как точки M_3, M_4, M_5 не лежат на одной прямой, отображение f не является перспективным. По теореме Штейнера это отображение задаст овальную линию второго порядка, проходящую через все пять данных точек.

!). Пусть существует еще одна овальная линия $\tilde{Q}$, проходящая через данные пять точек M_α. По теореме, обратной теореме Штейнера, линия $\tilde{Q}$ определяет проективное отображение $\varphi : \mathcal{P}(M_1) \to \mathcal{P}(M_2)$, которое для любой точки $M \in \tilde{Q}$ ставит в соответствие прямой $(M_1M) \in \mathcal{P}(M_1)$ прямую $(M_2M) \in \mathcal{P}(M_2)$. Тогда отображение φ переводит $(M_1M_3) \to (M_2M_3)$, $(M_1M_4) \to (M_2M_4)$, $(M_1M_5) \to (M_2M_5)$. Но точно так же поступает и проективное отображение f, которое порождает кривую Q, то есть $f = \varphi$, следовательно, $Q = \tilde{Q}$. $\square$

Следствие 2. Если на проективной плоскости даны четыре точки общего положения A, B, C, D и прямая a, содержащая точку A и не проходящая через точки B, C, D, то существует единственная овальная линия Q, проходящая через точки B, C, D и касающаяся прямой a в точке A.

Доказательство. $\exists$). Рассмотрим проективное отображение $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, задаваемое тремя парами соответствующих прямых: $a \to (AB)$, $(AC) \to (BC)$, $(AD) \to (BD)$. По теореме Штейнера это отображение задаст овальную линию второго порядка Q.

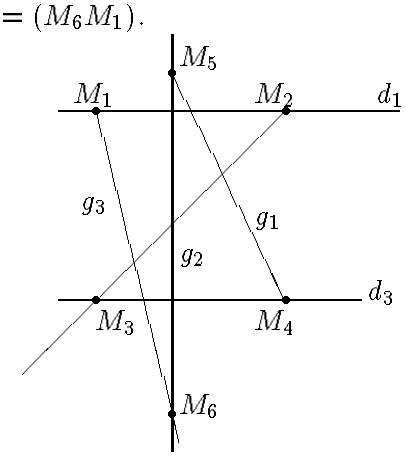
!). Пусть существует еще одна овальная линия $\tilde{Q}$, проходящая через данные четыре точки и касающаяся прямой a в точке A. По теореме, обратной теореме Штейнера, линия $\tilde{Q}$ определяет проективное отображение $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, которое для любой точки $M \in \tilde{Q}$ ставит в соответствие прямой $(AM) \in \mathcal{P}(A)$ прямую $(BM) \in \mathcal{P}(B)$. Тогда отображение φ переводит $a \to (BA)$, $(AC) \to (BC)$, $(AD) \to (BD)$. Но точно так же поступает и проективное отображение f, которое порождает кривую Q, то есть $f = \varphi$, следовательно, $Q = \tilde{Q}$. $\square$

Следствие 3. Пусть на проективной плоскости даны три точки общего положения A, B, C и две прямые a, b такие, что $A \in a$, $B \in b$, $B, C \notin a$, $A, C \notin b$. Тогда существует единственная овальная линия второго порядка Q, проходящая через точки A, B, C и имеющая касательные a и b в точках A и B, соответственно.

Доказательство. Овальная линия второго порядка Q задается проективным отображением $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$: $a \to (AB)$, $(AB) \to b$, $(AC) \to (BC)$. Единственность доказывается аналогично предыдущим следствиям (докажите самостоятельно). $\square$

Мы доказали, что пять точек общего положения однозначно определяют овальную кривую второго порядка, следовательно, такую кривую нельзя провести через любые шесть точек общего положения. И в самом деле, мы сейчас докажем необходимое условие для того, чтобы данные шесть точек лежали на одной овальной линии.

Определение 1.34. Пусть на проективной плоскости дана упорядоченная шестерка точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Обозначим $d_1 = (M_1M_2)$, $d_2 = (M_2M_3)$, $d_3 = (M_3M_4)$ и $g_1 = (M_4M_5)$, $g_2 = (M_5M_6)$, $g_3 = (M_6M_1)$.

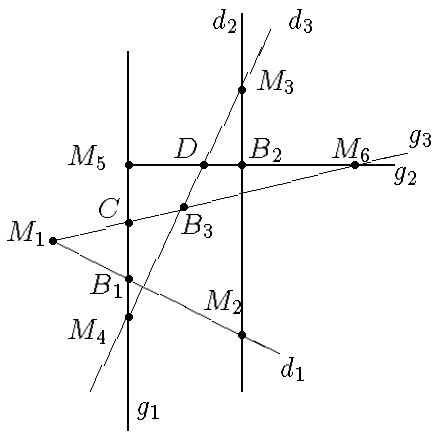


Фигура, образованная шестеркой точек M_α, $\alpha = 1, \ldots, 6$ и шестью прямыми d_1, d_2, d_3, g_1, g_2, g_3, называется *шестивершинником*. Точки M_α называются *вершинами*, прямые d_1, d_2, d_3, g_1, g_2, g_3 называются *сторонами*, пары прямых d_i, g_i, $i = 1, 2, 3$ называются *противоположными сторонами шестивершинника*.

Замечание. Если переставить в каком-либо другом порядке данные шесть точек шестивершинника, мы получим, вообще говоря, новый шестивершинник. Например, $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ и $M_2M_1M_3M_4M_5M_6$ – различные шестивершинники, так как у второго шестивершинника есть сторона (M_1M_3), которой нет у первого шестивершинника.

Теорема 1.32. (Паскаля)
Точки пересечения противоположных сторон любого шестивершинника, вписанного в овальную линию второго порядка, лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Паскаля.*

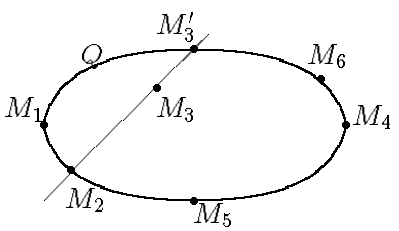
Доказательство.



Пусть шестивершинник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ вписан в овальную линию Q. Обозначим точки так как показано на рисунке. По обратной теореме Штейнера существует проективное отображение $f : \mathcal{P}(M_1) \to \mathcal{P}(M_3)$ такое, что $(M_1M_2) \equiv d_1 \to (M_3M_2) \equiv d_2$, $(M_1M_4) \to (M_3M_4) \equiv d_3$, $(M_1M_6) \equiv g_3 \to (M_3M_6)$, $(M_1M_5) \to (M_3M_5)$. Рассмотрим прямые g_1 и g_2, проходящие через точку M_5. На этих прямых отображение f индуцирует проективное отображение $\varphi : g_1 \to g_2$ по закону $\forall M \in g_1$ переходит в точку $M' \in g_2$ такую, что прямые (M_1M) и (M_3M') соответствуют друг другу при отображении f, то есть $f((M_1M)) = (M_3M')$. Тогда точка $M_4 = g_1 \cap (M_1M_4)$ при отображении φ будет переходить в точку $g_2 \cap (M_3M_4) = D$. Для точки $C = g_1 \cap (M_1M_6)$ получим $\varphi(C) = g_2 \cap (M_3M_6) = M_6$. Для точки $B_1 = g_1 \cap (M_1M_2)$ получим $\varphi(B_1) = g_2 \cap (M_3M_2) = B_2$.
Точка M_5, являющаяся точкой пересечения прямых g_1 и g_2, будет инвариантной точкой отображения φ, а значит, по критерию проективное отображение φ будет перспективным. Обозначим центр перспективы B_3. Так как через него проходят все прямые, соединяющие соответствующие точки перспективного отображения φ, получим $B_3 = (M_4D) \cap (CM_6) \cap (B_1B_2)$. В частности, $B_3 \in (B_1B_2)$. Но $B_1 = d_1 \cap g_1$, $B_2 = d_2 \cap g_2$, $B_3 = d_3 \cap g_3$, то есть точки пересечения противоположных сторон шестивершинника лежат на одной прямой. □

Теорема 1.33. (обратная Паскаля)
Пусть дан шестивершинник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$, у которого никакие три вершины не лежат на одной прямой. Тогда если три точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой, то все шесть вершин лежат на одной и той же овальной линии второго порядка.

Доказательство.



Пусть шестивершинник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ удовлетворяет условию теоремы: его противоположные стороны пересекаются в точках $B_1 = (M_1M_2) \cap (M_4M_5)$, $B_2 = (M_2M_3) \cap (M_5M_6)$, $B_3 = (M_3M_4) \cap (M_6M_1)$ и точки B_1, B_2, B_3 лежат на одной прямой. Тогда $B_3 = (B_1B_2) \cap (M_1M_6)$. Кроме того, $M_3 = (M_2M_3) \cap (B_3M_4)$ (Действительно, если точка B_3 лежит на прямой (M_3M_4), то точка M_3 лежит на прямой (B_3M_4)).
Рассмотрим точки M_1, M_2, M_4, M_5, M_6. Так как это точки общего положения, по доказанному выше через них проходит овальная линия второго порядка Q. Допустим, что точка $M_3 \notin Q$. Обозначим вторую точку пересечения Q и прямой (M_2M_3) через M_3'. Тогда в овальную линию Q вписан шестивершинник $M_1M_2M_3'M_4M_5M_6$ и для него выполняется теорема Паскаля, то есть
$(M_1M_2) \cap (M_4M_5) = B_1$, $(M_2M_3') \cap (M_5M_6) = (M_2M_3) \cap (M_5M_6) = B_2$, $(M_3'M_4) \cap (M_6M_1) = B_3'$. При этом точки B_1, B_2, B_3' лежат на одной прямой. Априори точка B_3' не обязана совпадать с точкой B_3. Но $B_3' = (B_1B_2) \cap (M_6M_1) = B_3$. Следовательно, $M_3' = (M_2M_3) \cap (B_3M_4)$. Как мы видели выше $M_3 = (M_2M_3) \cap (B_3M_4)$, а значит, $M_3 = M_3'$ лежит на линии Q. □

§21. Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой.

Рассмотрим проективную плоскость $P^2(V^3)$. Возьмем на проективной плоскости прямую d_0. Выберем проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ так, чтобы $A_1, A_2 \in d_0$.

Предложение 1.9. На множестве $\mathcal{A} = P^2 \setminus d_0$ существует структура аффинной плоскости.

Доказательство. Напомним определение аффинного пространства.

Определение 1.35. Пусть дано непустое множество $\mathcal{A}$ произвольной природы и векторное пространство V. Тогда говорят, что на множестве $\mathcal{A}$ задана *структура аффинного пространства* (а

его элементы называют *точками*), если задано отображение $\sigma : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$, удовлетворяющее двум условиям (аксиомам аффинного пространства):
1) Для любой точки $A \in \mathcal{A}$ и любого вектора $\vec{p} \in V$ существует единственная точка $B \in \mathcal{A}$ такая, что $\sigma(A, B) = \vec{p}$. При этом вводят обозначение $\sigma(A, B) = \overrightarrow{AB}$;
2) Для любых точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ выполняется $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Множество $\mathcal{A}$, на котором фиксирована аффинная структура, называется *аффинным пространством*. Если векторное пространство двумерно, то полученное аффинное пространство называется *аффинной плоскостью*.

Сначала нам нужно подобрать двумерное векторное пространство для множества $\mathcal{A}$. Рассмотрим двумерное подпространство $T \subset V^3$, которое порождает прямую d_0. Так как $d_0 = (A_1A_2) : x^3 = 0$, то любая точка $X \in d_0$ имеет координаты $X(x^1, x^2, 0)$, а значит, векторы, порождающие точки прямой d_0, имееют координаты $\vec{x}(x^1, x^2, 0)$. А если точка $M \notin d_0$, то она имеет координаты $M(m^1, m^2, m^3)$, $m^3 \neq 0$. Следовательно, точки $M \in \mathcal{A}$ порождаются векторами вида $\vec{m}(m^1, m^2, 1) \in V^3 \setminus T$. Заметим, что для каждой точки $M \in \mathcal{A}$ вектор такого вида (третья координаты равна 1) единственен. Везде далее мы будем рассматривать только такие векторы для порождения точек проективной плоскости.

Пусть M, N – произвольные точки множества $\mathcal{A}$. Тогда для векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, порождающих эти точки, имеем $\vec{n} - \vec{m}(n^1 - m^1, n^2 - m^2, 1 - 1)$, то есть $\vec{n} - \vec{m} \in T$. Будем обозначать вектор $\vec{n} - \vec{m} = \overrightarrow{MN} \in T$. Это обстоятельство позволяет ввести на множестве $\mathcal{A}$ отображение $\sigma : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to T$ по правилу $\sigma(M, N) = \vec{n} - \vec{m} \equiv \overrightarrow{MN}$. Проверим выполнение аксиом аффинного пространства:
1) Рассмотрим произвольную точку $M(m^1, m^2, 1) \in \mathcal{A}$ и произвольный вектор $\vec{p}(p^1, p^2, 0) \in T$. Тогда определим вектор $\vec{n} = \vec{m} + \vec{p}$. Его координаты $\vec{n}(m^1 + p^1, m^2 + p^2, 1 + 0)$, то есть $\vec{n} \in V^3 \setminus T$, то есть этот вектор порождает точку $N \in \mathcal{A}$. При этом $\sigma(M, N) = \vec{m} + \vec{p} - \vec{m} = \vec{p}$, то есть точка N такая, что $\sigma(M, N) = \vec{p}$.

Докажем, что такая точка единственна. Предположим, что существует еще точка $\tilde{N}(\tilde{n}^1, \tilde{n}^2, 1)$ такая, что $\sigma(M, \tilde{N}) = \vec{p}$. Тогда $\tilde{n}^1 - m^1 = p^1$, $\tilde{n}^2 - m^2 = p^2$, то есть $\tilde{n}^1 = m^1 + p^1 = n^1$, $\tilde{n}^2 = m^2 + p^2 = n^2$, то есть $\tilde{N} = N$.
2) Проверим вторую аксиому аффинного пространства. Пусть $M, N, L \in \mathcal{A}$ – произвольные точки. Тогда $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NL} = \vec{n} - \vec{m} + \vec{\ell} - \vec{n} = \vec{\ell} - \vec{m} = \overrightarrow{ML}$.

Итак, двумерное векторное пространсво T, порождающее прямую d_0, определяет на множестве $\mathcal{A} = P^2 \setminus d_0$ структуру аффинной плоскости. □

Если мы хотим из аффинной плоскости $\mathcal{A}$ построить расширенную плоскость $\bar{A}$, то есть проективное пространство P^2, то к $\mathcal{A}$ нужно добавить прямую d_0, которая будет играть роль бесконечно удаленной прямой. В связи с этим прямую d_0 будем называть *несобственной прямой* или *бесконечно удаленной прямой*.

Следствие. Напомним, что на аффинной плоскости мы построили аффинную систему координат, связанную с проективным репером, две первые точки которого являются бесконечно удаленными. А именно, для проективного репере $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, где $A_1, A_2 \in d_0$ – бесконечно удаленные точки, определяется аффинная система координат $I = (A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$. Если точка $M(m^1, m^2, m^3)_R$, то она имеет координаты $M(\frac{m^1}{m^3}, \frac{m^2}{m^3})_I$. Так как в нашем случае $m^3 = 1$, получим, что точка $M(m^1, m^2, 1)_R \in \mathcal{A}$ имеет координаты $M(m^1, m^2)_I$. Далее на аффинной плоскости $\mathcal{A}$ будем рассматривать именно такую аффинную систему координат. □

Определение 1.36. Пусть на проективной плоскости P^2 даны две проективные прямые a, b, отличные от прямой d_0. Будем называть проективные прямые a и b *параллельными*, если $a \cap b \in d_0$, то есть если они пересекаются на бесконечно удаленной прямой d_0.

Далее, введем понятие аффинной прямой и простого отношения трех точек.
Пусть дана проективная прямая d, отличная от прямой d_0. Рассмотрим три произвольные точки $M, N, L \in d \cap \mathcal{A}$. Как обычно обозначим $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{\ell}$ – векторы, порождающие точки M, N, L соответственно. Так как эти точки лежат на одной прямой, то векторы, порождающие их, линейно зависимы, то есть $\vec{\ell} = p\vec{m} + q\vec{n}$, где p, q – некоторые вещественные числа. Так как третьи координаты векторов $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{\ell}$ равны 1, то из последнего векторного равенства получим $1 = p + q$. Тогда $\overrightarrow{ML} = \vec{\ell} - \vec{m} = p\vec{m} + q\vec{n} - \vec{m} = -q\vec{m} + q\vec{n} = q(\vec{n} - \vec{m})$. Аналогично, $\overrightarrow{LN} = \vec{n} - \vec{\ell} = \vec{n} - p\vec{m} - q\vec{n} = p(\vec{n} - \vec{m})$. Откуда получим

$$\overrightarrow{ML} = \frac{q}{p}\overrightarrow{LN}$$

Это означает, что векторы $\overrightarrow{ML}$ и $\overrightarrow{LN}$ коллинеарны.
Обратно, если векторы $\overrightarrow{ML}$ и $\overrightarrow{LN}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{ML} = \lambda\overrightarrow{LN}$, то есть $\vec{\ell} - \vec{m} = \lambda(\vec{n} - \vec{\ell})$. Так как

число λ отлично от 0, это означает, что векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{\ell}$ линейно зависимы, то есть точки которые они порождают, лежат на одной прямой.

Итак, мы доказали, что три произвольные точки $M, N, L \in \mathcal{A}$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{ML}$ и $\overrightarrow{LN}$ коллинеарны.

Рассмотрим вектор $\vec{x} = \vec{m} - \vec{n}$. Так как вектор $\vec{x}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, то он порождает точку, лежащую на прямой $(MN) \equiv d$. С другой стороны, третья координата вектора $\vec{x}$ равна нулю (почему?), а значит, он порождает точку, лежащую на прямой d_0. Таким образом, мы построили точку $X = d \cap d_0$, то есть *несобственную точку* прямой d.

Определение 1.37. Множество точек $d \setminus \{X\}$ будем называть *аффинной прямой* аффинной плоскости $\mathcal{A}$.

Для любых трех точек $M, N, L \in d \setminus \{X\}$ имеем $\overrightarrow{ML} = \frac{q}{p}\overrightarrow{LN}$. Будем называть число $\lambda \equiv \frac{q}{p}$ *простым отношением трех точек* (MN, L).

Так как $p + q = 1$, то $\frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = -1 + \frac{1}{p} \neq -1$. Кроме того, так как $\vec{\ell} = p\vec{m} + q\vec{n}$, $\vec{x} = 1\vec{m} + (-1)\vec{n}$ по формуле для вычисления сложного отношения четырех точек прямой получим $(MN, LX) = \frac{q}{p}\frac{1}{-1} = -\frac{q}{p}$, то есть

$$(MN, L) = -(MN, LX)$$

где X – бесконечно удаленная точка прямой d.

Если есть простое отношение трех точек прямой, то мы можем ввести отношение "лежать между".

Определение 1.38. Будем говорить, что точка L *лежит между* точками M и N и писать $M - L - N$, если $(MN, L) > 0$ (или что эквивалентно $(MN, LX^{\infty}) < 0$).

Далее, мы обычным образом можем определить отрезок и луч.

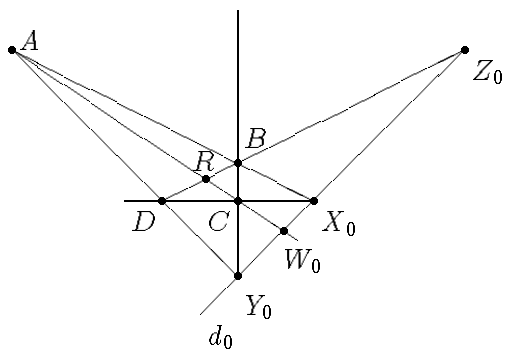
Отрезком $[AB]$ назовем множество точек, состоящее из точек A,B и множества точек $C \in (AB)$ прямой (AB), лежащих между точками A и B.

Пусть на прямой d дана точка $A \in \mathcal{A}$. Тогда множество точек прямой $d \cap \mathcal{A}$ разбивается на два класса: любые две точки $C_1, C_2 \in d \cap \mathcal{A}$ принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда точка A не лежит между точками C_1 и C_2; любые две точки $C_1, C_2 \in d \cap \mathcal{A}$ принадлежат разным классам тогда и только тогда, когда точка A лежит между точками C_1 и C_2. Каждый из полученных двух классов называется *лучом*.

Серединой C отрезка $[AB]$ определим условием $(AB, C) = 1$ (или что эквивалентно $(AB, CX^{\infty}) = -1$).

В качестве примера, показывающего преимущество построенной модели аффинной плоскости, рассмотрим следующее утверждение: диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство.



В качестве проективной плоскости, используя которую мы будем строить аффинную плоскость, возьмем расширенную плоскость. На ней выберем прямую d_0 – бесконечно удаленную прямую. Заметим, что при этом несобственные точки, которые мы добавляли при построении расширенной плоскости, становятся "обычными" точками аффинной плоскости $\mathcal{A}$.

Изобразим параллелограмм в этой модели. Нам нужно взять две пары параллельных прямых. Мы помним, что параллельными являются те проективные прямые, которые пересекаются на прямой d_0. Итак, мы получаем параллелограмм $ABCD$.

С точки зрения проективной геометрии $ABCD$ является полным четырехвершинником. Прямые (AC) и (BD) являются противоположными сторонами четырехвершинника и пересекаются в диагональной точке R. Двумя другими диагональными точками являются точки X_0 и Y_0. Так как диагональные точки полного четырехвершинника не лежат на одной прямой, то $R \notin (X_0Y_0) \equiv d_0$, то есть $R \in \mathcal{A}$. С другой стороны, для параллелограмма $ABCD$ прямые (AC) и (BD) являются диагоналями, и следовательно, пересекаются в точке R. Как мы знаем, на каждой диагонали полного четырехвершинника имеются четверки гармонических точек: $(AC, RW_0) = -1$, то есть R – середина отрезка $[AC]$. Аналогично, точка R является серединой отрезка $[BD]$. □

Рассмотрим на проективной плоскости кривую второго порядка Q:

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{23}x^2x^3 + 2a_{13}x^1x^3 = 0$$

Рассмотрим множество точек $Q^1 = Q \cap \mathcal{A}$. Так как у всех точек множества $\mathcal{A}$ третья координата равна 1, то для множества Q^1 получим уравнение

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33} + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{23}x^2 + 2a_{13}x^1 = 0 \tag{3}$$

Если мы посмотрим на это уравнение как на уравнение, записанное относительно аффинной системы координат I (почему мы можем это сделать?), то получаем, что оно задает линию второго порядка на аффинной плоскости $\mathcal{A}$.

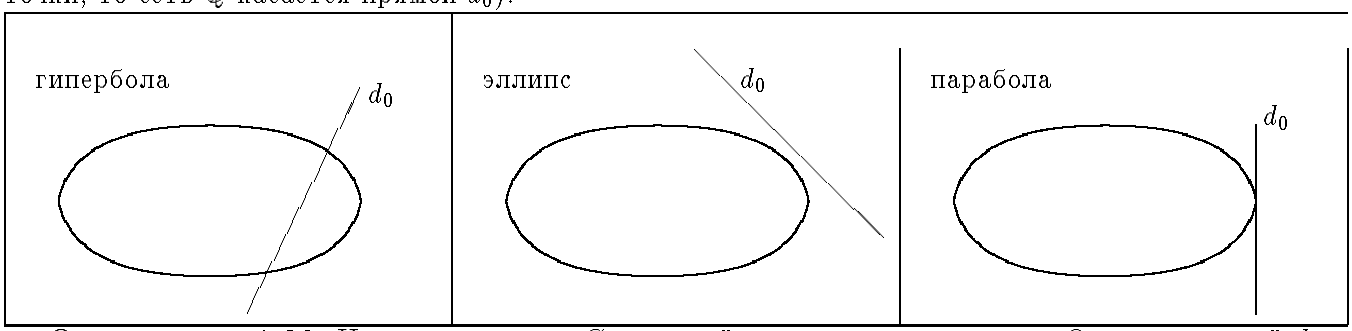
Итак, сужение кривой второго порядка проективной плоскости на множество $\mathcal{A}$ дает нам линию второго порядка.

Рассмотрим более подробно овальную линию второго порядка Q и исследуем вопрос о количестве общих точек Q и прямой d_0. Мы помним, что $d_0 = (A_1A_2)$, а значит, ее уравнение в проективном репере R имеет вид $x^3 = 0$. Тогда количество общих точек овальной линии Q и прямой d_0 задается системой уравнений

$$\begin{cases} a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{23}x^2x^3 + 2a_{13}x^1x^3 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{12}x^1x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases}$$

Так как на проективной плоскости координаты точек относительно проективного репера задаются с точностью до постоянного множителя, то количесво общих точек Q и d_0 равно количеству корней $\frac{x^1}{x^2}$ первого уравнения системы. Так как это уравнение квадратное, то оно всегда имеет два корня:
1) два вещественных корня $\Leftrightarrow$ дискриминант $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Тогда определитель $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ и уравнение (3) задает гиперболу. Напомним, что мы рассматриваем овальную линию, то есть невырожденную, то есть не распадающуюся на пару прямых, следовательно, пара пересекающихся прямых (для которых Δ так же меньше нуля) здесь отпадают.
2) два мнимых корня $\Leftrightarrow$ дискриминант $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. Тогда определитель $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ и уравнение (3) задает эллипс. Пара мнимых пересекающихся прямых отпадает по тем же соображениям, что и выше. А мнимый эллипс отпадает, так как овальная линия второго порядка имеет вещественные точки.
3) два совпавших корня $\Leftrightarrow$ дискриминант $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Тогда определитель $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ и уравнение (3) задает параболу.

Итак, в нашей модели аффинной плоскости мы получили, что в зависимости от расположения относительно прямой d_0 овальная линия второго порядка может задавать либо гиперболу (две вещественные общие точки), либо эллипс (две мнимые общие точки), либо параболу (две совпавшие общие точки, то есть Q касается прямой d_0).

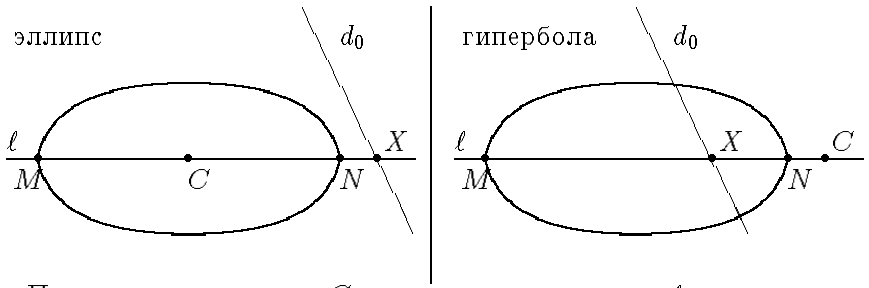


Определение 1.39. Назовем *центром* C овальной линии второго порядка Q полюс прямой d_0.

Мы сразу получаем, что центр для овальной линии второго порядка единственен.
Выясним, чем является центр овальной линии Q для эллипса, гиперболы и параболы, которые моделирует Q.

Предложение 1.10. В случае гиперболы (эллипса) центр овальной линии Q является центром гиперболы (эллипса).

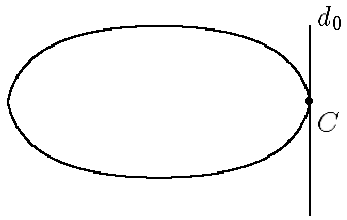
Доказательство.



Проведем через точку C произвольную прямую ℓ, пересекающую овальную линию Q в двух вещественных точках M и N. Так как точка C является полюсом для прямой d_0, получим $(MN, CX) = -1$, где $X = \ell \cap d_0$. Тогда по определению середины отрезка получим, что точка C является серединой отрезка $[MN]$, то есть точка C является центром эллипса (гиперболы). $\square$

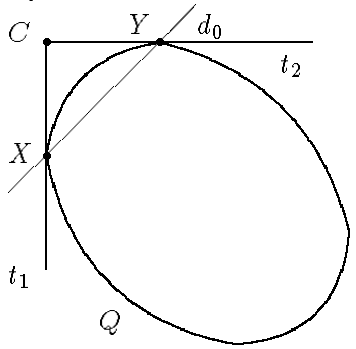
Следствие. Эллипс и гипербола имеют единственный центр.

параболa



В случае параболы полюс C прямой d_0 является точкой касания, то есть $C \in d_0$, то есть центр овальной линии Q в этом случае не принадлежит множеству $Q^1 = Q \cap \mathcal{A}$. Таким образом, парабола центров не имеет.

Пусть овальная линия Q задает гиперболу. Тогда через центр C можно провести две касательные к Q.



Каждая из прямых t_1 и t_2 пересекают линию Q в двух совпавших точках X и Y, соответственно. По теореме о количестве общих точек прямой и линии второго порядка других общих точек у t_1, t_2 и линии Q быть не может. Тогда гипербола $Q^1 = Q \cap \mathcal{A}$ не имеет общих точек с прямыми t_1 и t_2, то есть они являются ее асимптотами. Таким образом, у гиперболы существует две и только две (почему?) асимптоты и они пересекаются в центре гиперболы.

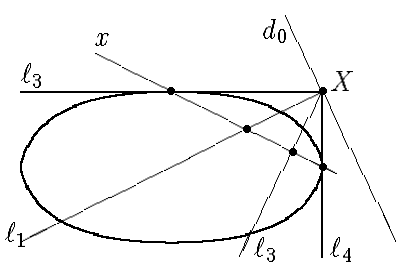
Задача 1.40. Используя модель, докажите, что эллипс и парабола не имеют асимптот.

Определение 1.40. *Диаметром* овальной линии второго порядка Q назовем поляру любой точки $X \in d_0$.

По теореме о взаимности поляритета получим, что все диаметры овальной линии второго порядка проходят через центр C линии Q.

Предложение 1.11. Диаметры овальной линии второго порядка Q являются диаметрами эллипса, гиперболы, параболы Q^1.

Доказательство. Рассмотрим доказательство для эллипса (для гиперболы все аналогично).

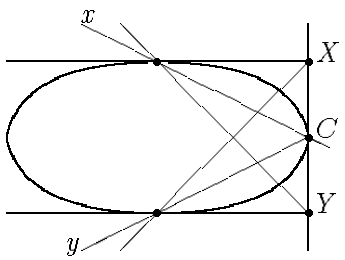


Проведем пучок параллельных прямых. Это все прямые, проходящие через некоторую точку $X \in d_0$. На рисунке изображены четыре такие прямые: ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4. Тогда поляра x точки X будет пересекать эти прямые в четвертых гармонических точках, то есть в серединах хорд прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, ... Таким образом, прямая x (конечно без точки, принадлежащей прямой d_0) будет являться диаметром эллипса Q^1. Так как множество поляр всех точек прямой d_0 является пучком прямых, проходящих через полюс этой прямой, то есть через точку C, то получим, что множество всех диаметров эллипса есть пучок прямых с центром в центре эллипса.

Задача 1.41. Постройте центр эллипса в данной модели.

Рассмотрим случай параболы.

Проводя пучок параллельных прямых через точку $X \in d_0$, мы также убеждаемся, что поляра x точки X пересекает эти прямые в четвертых гармонических точках, то есть в серединах хорд.



Таким образом, для параболы Q^1 поляра x овальной линии Q будет диаметром. Кроме того, заметим, что если мы возьмем другую точку $Y \in d_0$, то поляра y точки Y также пройдет через точку C также как и поляра x точки X. Итак, поляры всех точек прямой d_0 образуют пучок прямых с центром в точке C. С точки зрения параболы, которую моделирует линия Q это означает, что все диаметры параболы образуют пучок параллельных прямых. При этом все прямые этого пучка пересекают параболу только в одной точке, а значит, имеют асимптотическое направление. Сравните это доказательство с доказательством этого же утверждения в прошлом году! □

Задача 1.42. Докажите, что парабола не имеет параллельных касательных.

Определение 1.41. Два диаметра овальной линии второго порядка Q назовем *сопряженными*, если каждый из них проходит через полюс другого.

Задача 1.43. Докажите, что сопряженные диаметры овальной линии второго порядка Q моделируют сопряженные диаметры соответствующей линии Q^1.

Задача 1.44. Докажите, что прямые, проходящие через центр эллипса (гиперболы) параллельно сторонам параллелограмма, вписанного в данный эллипс (гиперболу), являются сопряженными диаметрами.

Задача 1.45. Выясните, будут ли диагонали параллелограмма, вписанного в эллипс (гиперболу), сопряженными диаметрами.