3 Преобразования плоскости

§24. Отображения и преобразования множеств.

Пусть X и Y – два множества.

Определение 3.1. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что задано *отображение* $f : X \to Y$ из X в Y и пишут $y = f(x)$. Элемент $y \in Y$ называется *образом* элемента $x \in X$. Элемент $x \in X$ называется *прообразом* элемента $y \in Y$.

Определение 3.2. Отображение f называется *инъективным*, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$$

то есть различным элементам отображение f ставит в соответствие различные элементы.

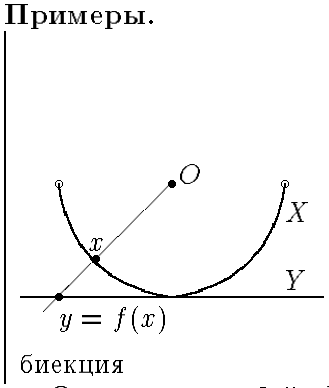
Определение 3.3. Отображение f называется *сюръективным*, если

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$$

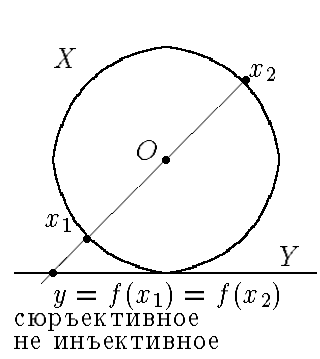
то есть для каждого элемента из Y существует прообраз в множестве X.

Определение 3.4. Отображение называется *биективным (или биекцией или взаимно однозначным)*, если оно инъективно и сюръективно.

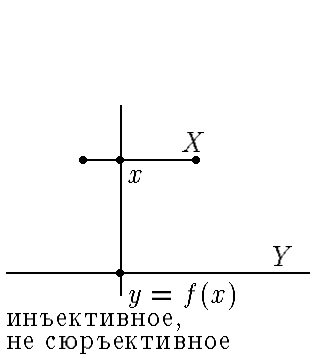
Примеры.



биекция



сюръективное
не инъективное



инъективное,
не сюръективное

Определение 3.5. *Композицией* двух отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ называется отображение $h : X \to Z$ такое, что $\forall x \in X \; h(x) = g(f(x))$. Обозначение $h = g \circ f$.

Определение 3.6. Отображение $f^{-1} : Y \to X$ называется *обратным* к отображению $f : X \to Y$, если оно каждому элементу $y \in Y$ ставит такой элемент $x \in X$, что $f(x) = y$.

Определение 3.7. Отображение $id : X \to X$, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие тот же элемент x, называется *тождественным*.

С помощью тождественного отображения определение обратного отображения можно сформулировать в виде: отображение $f^{-1} : Y \to X$ называется *обратным* к отображению $f : X \to Y$, если $f \circ f^{-1} = id$ и $f^{-1} \circ f = id$.

Определение 3.8. Отображение $f : X \to X$, являющееся биекцией, будем называть *преобразованием* множества X.

Определение 3.9. Преобразование $f : X \to X$ называется инволютивным, если $f = f^{-1}$ (или что равносильно, $f^2 = id$).

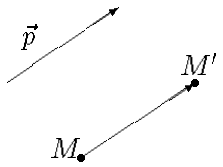
§25. Движения плоскости. Примеры. Свойства.

Рассмотрим в качестве множества X – множество точек плоскости σ. Пусть плоскость σ ориентирована.

Определение 3.10. Преобразование плоскости $f : \sigma \to \sigma$ называется *движением*, если для любых точек $A, B \in \sigma$ и их образов $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ имеет место равенство $A'B' = AB$. Другими словами, движением называется такое преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между любой парой точек.

Примеры.

1. $id : \sigma \to \sigma$ – тождественное преобразование плоскости. Очевидно, является движением.
2. Пусть дан вектор $\vec{p} \| \sigma$.



Определим преобразование плоскости $T_{\vec{p}} : \sigma \to \sigma$ следующим образом: каждой точке M это преобразование ставит в соответствие такую точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Это преобразование называется *параллельным переносом.*

Предложение 3.1. Параллельный перенос является движением.

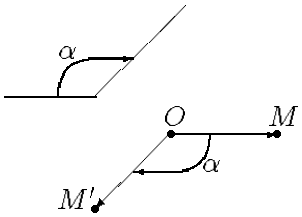
Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $A, B \in \sigma$. Обозначим $A' = T_{\vec{p}}(A)$, $B' = T_{\vec{p}}(B)$. По определению параллельного переноса имеем $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{p}$. Применим правило треугольника для вектора $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$$

Получим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. В частности, длины этих векторов равны, то есть $AB = A'B'$. □

Обратное преобразование: $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}}$.

3. Пусть дана точка $O \in \sigma$ и ориентированный угол α $(-\pi \leq \alpha \leq \pi)$.



Определим преобразование плоскости $R_O^\alpha : \sigma \to \sigma$ следующим образом:

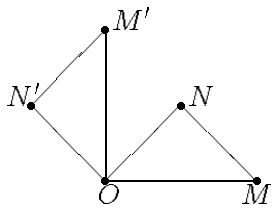
1) $O \to O$

2) $\forall M \neq O \to M'$ такую, что $OM = OM'$ и $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$.

Это преобразование называется *поворотом* плоскости на угол α вокруг точки O. Точка O называется *центром поворота*, угол α – *углом поворота*. При $\alpha = \pi$ поворот называется *центральной симметрией* с центром O.

Предложение 3.2. Поворот является движением.

Доказательство.



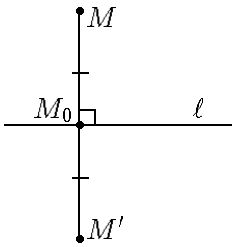
Возьмем две произвольные точки M и N.

1. Пусть точки M, N, O не лежат на одной прямой. Тогда $\Delta OMN = \Delta OM'N'$ (так как $OM = OM'$, $ON = ON'$, $\angle MON = \angle M'ON'$). Тогда $MN = M'N'$.

2. Пусть точки M, N, O лежат на одной прямой. Докажите самостоятельно. □

Обратное преобразование: $(R_O^\alpha)^{-1} = R_O^{-\alpha}$.

4. Пусть дана прямая ℓ на плоскости σ.



Определим преобразование плоскости $S_\ell : \sigma \to \sigma$ следующим образом:

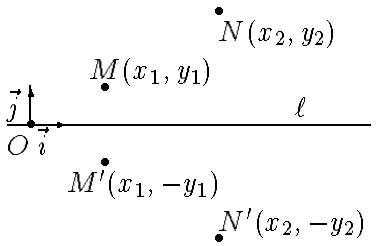
1) $M \in \ell \to M' = M$

2) $M \notin \ell \to M'$ такую, что $(MM') \perp \ell$ и $\text{сер}[MM'] \in \ell$.

Это преобразование называется *осевой симметрией* относительно прямой ℓ. Прямая ℓ называется *осью симметрии.*

Предложение 3.3. Осевая симметрия является движением.

Доказательство.



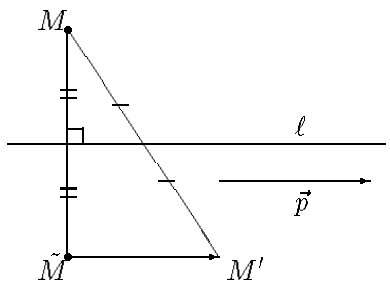
Рассмотрим произвольные точки M и N на плоскости σ. Выберем прямоугольную систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ как показано на рисунке. Пусть точки M и N имееют в этой системе координат координаты $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

Тогда их образы при осевой симметрии с осью ℓ имееют координаты $M'(x_1, -y_1)$, $N'(x_2, -y_2)$. По формуле для вычисления расстояния между точками получим

$$M'N' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = MN$$

Итак, осевая симметрия сохраняет расстояния между точками, то есть ялвяется движением. □ Обратное преобразование: $(S_\ell)^{-1} = S_\ell$, то есть осевая симметрия является инволютивным преобразованием.

5. Пусть даны прямая $\ell \subset \sigma$ и $\vec{p} \| \ell$.

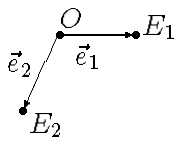


Композиция осевой симметрии с осью ℓ и параллельного переноса на вектор $\vec{p} \| \ell$ называется *скользящей симметрией* с осью ℓ и вектором переноса $\vec{p}$.
Из теоремы Фалеса получаем, что сер$MM' \in \ell$.
Так как каждое движение сохраняет расстояние между точками, то их композиция (то есть последовательное выполнение) также сохраняет расстояние между точками, то есть является движением.

Обратное преобразование: $(T_{\vec{p}} \circ S_\ell)^{-1} = T_{-\vec{p}} \circ S_\ell$.

Для того чтобы ввести теорию координат в теорию движений, нам потребуется определение системы координат без участия векторов.

Определение 3.11. *Аффинным репером* на плоскости называется упорядоченная тройка точек, не лежащих на одной прямой. Обозначение $R = (O, A, B)$.



Каждому реперу $R = (O, A, B)$ мы можем однозначно поставить в соответствие аффинную систему координат $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ и наоборот, каждой аффинной системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – аффинный репер (O, E_1, E_2), где $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$.

Будем говорить, что точка M имеет координаты (x, y) в репере R, если она имеет координаты (x, y) в аффинной системе координат $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, то есть $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB})$. При этом пишут $M(x, y)_R$.

Определение 3.12. Репер $R = (O, A, B)$ называется *ортонормированным*, если $OA = OB = 1$, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$.

Очевидно, что ортонормированному реперу соответствует прямоугольная декартова система координат.

Так как между аффинными реперами и аффинными системами координат существует взаимно однозначное соответствие, то будем употреблять термины "аффинный репер" и "аффинная система координат" как синонимы.

Предложение 3.4. Движение переводит аффинный репер в аффинный репер, ортонормированный репер – в ортонормированный репер.

Доказательство. Рассмотрим произвольный аффинный репер $R = (O, A, B)$. Посмотрим на него как на треугольник. Для этого треугольника выполняются неравенства треугольника: $OA < OB + BA$, $OB < OA + AB$, $AB < OA + OB$. Так как движение сохраняет расстояния, то для образа $R' = (O', A', B')$ репера $R = (O, A, B)$ выполняются такие же неравенства, то есть треугольник $O'A'B'$ невырожденный, то есть R' является аффинным репером.

Пусть $R = (O, A, B)$ – ортонормированный. По теореме Пифагора $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Тогда для образа этого репера имеем $(A'B')^2 = (O'A')^2 + (O'B')^2$, так как $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, $AB = A'B'$. Тогда по теореме обратной теореме Пифагора получим, что R' является ортонормированным репером. □

Оказывается, что ортонормированные реперы играют ключевую роль в теории движений.

Лемма 3.1. (о единственности)
Пусть даны два аффинных репера $R = (O, A, B)$ и $R' = (O', A', B')$. Тогда существует не более одного движения, переводящего R в R'.

Доказательство. Пусть существует два движения f, g, переводящие репер R в R' и $f \neq g$. Тогда существует точкм M такая, что $M' \neq M''$, где $M' = f(M)$, $M'' = g(M)$. Так как $f, g : O \to O'$, то $OM = O'M'$ и $OM = O'M''$, следовательно, $O'M' = O'M''$, то есть O' принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку $[M'M'']$.
Рассуждая аналогично, получим, что точки A' и B' также принадлежат серединному перпендикуляру к отрезку $[M'M'']$, то есть точки O', A', B' лежат на одной прямой, что противоречит определению аффинного репера. Мы получили противоречие, то есть $f = g$. $\square$

Теорема 3.1. (основная теории движений)
Пусть даны два ортонормированных репера $R = (O, A, B)$ и $R' = (O', A', B')$. Тогда существует единственное движение f, переводящее репер R в репер R'. При этом любая точка $M(x, y)_R$ переходит в точку $M'(x, y)_{R'}$.

Доказательство. Единственность уже доказана в лемме. Нам осталось доказать существование. Построим отображение $f : \sigma \to \sigma$ по правилу $\forall M(x, y)_R \to M'(x, y)_{R'}$. Нам нужно доказать, что это отображение является, во-первых, преобразованием(то есть инъективно и сюръективно), во-вторых, что оно сохраняет расстояния между любыми парами точек плоскости и, в-третьих, что репер R переходит в репер R'.
1) а) Пусть $M(x_1, y_1)_R$, $N(x_2, y_2)_R$ – произвольные точки, $N \neq M$. Тогда $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$. Следовательно, образы $M' = f(M)$ и $N' = f(N)$ по определению отображения f имеют те же координаты, но в репере R': $M'(x_1, y_1)_{R'}$, $N'(x_2, y_2)_{R'}$, то есть $M' \neq N'$, то есть отображение f инъективно.
б) Рассмотрим произвольную точку $M'(x, y)_{R'}$. Тогда по числам (x, y) можно построить точку M, которая будет иметь координаты (x, y) в репере R, то есть у любой точки M' существует прообраз M, то есть отображение f сюръективно.
Итак, f является преобразованием.
2) докажем, что f сохраняет расстояния. Рассмотрим произвольные точки $M(x_1, y_1)_R$, $N(x_2, y_2)_R$. Тогда $M'(x_1, y_1)_{R'}$, $N'(x_2, y_2)_{R'}$. Так как реперы ортонормированные, применим формулу для вычисления расстояния между точками в прямоугольной декартовой системе координат: $MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = M'N'$.
3) докажем, что $f : R \to R'$. Действительно, точка $O(0, 0)_R$ перейдет в точку с координатами $(0, 0)_{R'}$, то есть в точку O'. Аналогично получим, что $f : A \to A'$, $f : B \to B'$, то есть $f : R \to R'$. $\square$

Задача 3.1. Задайте парой ортонормированных реперов параллельный перенос, поворот, осевую симметрию, скользящую симметрию.

Вопрос 3.1. Единственным ли образом можно задать данное движение парой ортонормированных реперов?

Задача 3.2. Возьмите упорядоченную пару произвольных ортонормированных реперов и постройте образ и прообраз произвольной точки при движении, которое они задают.

Вопрос 3.2. Можно ли задать движение парой аффинных реперов (не обязательно ортонормированных)? Если да, то постройте образ и прообраз произвольной точки при движении, которое они задают.

Свойства движений.
1^0. Движение переводит прямую в прямую; параллельные прямые – в параллельные прямые.

Доказательство. Пусть дано движение f. Возьмем произвольный ортонормированный репер R и обозначим $R' = f(R)$ образ репера R при движении f. Тогда по основной теореме пара реперов R и R' задает движение f по правилу $\forall M(x, y)_R \to M'(x, y)_{R'}$. Рассмотрим произвольную прямую ℓ на плоскости σ. Посмотрим на нее как на множество точек $M(x, y)_R$ плоскости σ, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Применим отображение f. Каждая точка M прямой ℓ перейдет в точку M' с теми же координатами в репере R', значит, координаты точек M' будут удовлетворять тому же уравнению $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, но записанному относительно репера R'. Как мы знаем из прошлого семестра, линейное уравнение задает прямую. Итак, образом прямой ℓ является прямая.
Аналогично, рассмотрим пару параллельных прямых. Относительно репера R они могут быть заданы уравнениями $a : Ax + By + C_1 = 0$ и $b : Ax + By + C_2 = 0$. Их образы относительно репера R' будут задаваться теми же уравнениями $a' : Ax + By + C_1 = 0$ и $b' : Ax + By + C_2 = 0$, то есть $a' \| b'$. $\square$

2^0. Движение f переводит полуплоскость Ω с границей ℓ в полуплоскость Ω' с границей $f(\ell)$.

Доказательство. Пусть дано движение f. Возьмем произвольный ортонормированный репер R и обозначим $R' = f(R)$ образ репера R при движении f. Тогда по основной теореме пара реперов R и R' задает движение f по правилу $\forall M(x,y)_R \to M'(x,y)_{R'}$. По геометрическому смыслу трехчлена полуплоскость Ω как множество точек задается неравенством $Ax+By+C>0$ (или $Ax+By+C<0$), где $Ax+By+C=0$ – ее граница ℓ. Применим движение f. Тогда Ω перейдет во множество точек Ω', которое относительно репера R' задается тем же неравенством $Ax+By+C>0$, то есть Ω' является полуплоскостью. Прямая $\ell: Ax+By+C=0$ – граница полуплоскости Ω перейдет в прямую $\ell': Ax+By+C=0$, то есть границу полуплоскости Ω'. □

3^0. Движение сохраняет простое отношение трех точек.

Доказательство. Пусть дано движение f. Возьмем произвольный ортонормированный репер R и обозначим $R' = f(R)$ образ репера R при движении f. Тогда по основной теореме пара реперов R и R' задает движение f по правилу $\forall M(x,y)_R \to M'(x,y)_{R'}$.

Рассмотрим три точки $M_1(x_1,y_1)_R$, $M_2(x_2,y_2)_R$, $M(x,y)_R$. Тогда простое отношение трех точек $\lambda = (M_1M_2, M)$ определяется из соотношения $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, то есть $\lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x}$. Применим к данным точкам движение f. Тогда они перейдут в точки $M_1'(x_1,y_1)_{R'}$, $M_2'(x_2,y_2)_{R'}$, $M'(x,y)_{R'}$. Тогда простое отношение трех точек $\lambda' = (M_1'M_2', M')$ будет равно $\lambda' = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda$. □

Следствие. Движение сохраняет отношение "лежать между".

Доказательство. Напомним, что точка B лежит между точками A и C (пишут $A-B-C$) тогда и только тогда, когда простое отношение трех точек $(AC,B)>0$. Тогда если точка B лежит между точками A и C, то есть $(AC,B)>0$, то для образов A', B', C' этих точек имеем $(A'C',B') = (AC,B) > 0$, то есть точка B' лежит между точками A' и C'. □

4^0. Движение переводит отрезок в равный ему отрезок, луч – в луч. 5^0. Движение переводит угол в равный угол.

Доказательство. 1) Угол – развернутый. Тогда утверждение свойства следует из 1^0.

2) Пусть дан неразвернутый угол $\angle BAC$. Так как движение репер переводит в репер, точки A, B, C, не лежащие на одной прямой перейдут в точки A', B', C' также не лежащие на одной прямой. Рассмотрим два треугольника: ΔABC и $\Delta A'B'C'$. Так как движение сохраняет расстояния между точками, то $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, то есть треугольники ΔABC и $\Delta A'B'C'$ равны по третьему признаку. Следовательно, $\angle BAC = \angle B'A'C'$. □

§26. Два рода движений. Формулы движений.

Определение 3.13. Два репера называются *одинаково ориентированными* (*противоположно ориентированными*), если одинаково (противоположно) ориентированы соответствующие им аффинные системы координат.

Определение 3.14. Будем говорить, что преобразование f *сохраняет* ориентацию плоскости, если любой репер R переходит при этом преобразовании в репер R' той же ориентации. Такие преобразования называются преобразованиями *первого рода*. Будем говорить, что преобразование f *меняет* ориентацию плоскости, если любой репер R переходит при этом преобразовании в репер R' той же ориентации. Такие преобразования называются преобразованиями *второго рода*.

Теорема 3.2. Любое движение либо сохраняет, либо меняет ориентацию плоскости.

Доказательство. Рассмотрим произвольное движение f. Возьмем ортонормированный репер R_0 и его образ при движении f: $R_0' = f(R)$. Тогда в силу основной теоремы движение f задается парой ортонормированных реперов R_0, R_0' по правилу $M(x,y)_{R_0} \to M'(x,y)_{R_0'}$.

Пусть $R = (O,A,B)$ – произвольный аффинный репер, $R' = f(R) = (O',A',B')$ – его образ при движении f. Тогда

$$O(x_O,y_O)_{R_0} \to O'(x_O,y_O)_{R_0'}$$
$$A(x_A,y_A)_{R_0} \to A'(x_A,y_A)_{R_0'}$$
$$B(x_B,y_B)_{R_0} \to B'(x_B,y_B)_{R_0'}$$

Напомним, что для получения матрицы перехода от репера R_0 к реперу R (то есть от системы координат, соответствующей реперу R_0 к системе координат, соответствующей реперу R) нужно по столбцам написать координаты векторов репера R в репере R_0. Тогда

$$R_0|R = \begin{vmatrix} x_A-x_O & x_B-x_O \\ y_A-y_O & y_B-y_O \end{vmatrix} \quad R_0'|R' = \begin{vmatrix} x_A-x_O & x_B-x_O \\ y_A-y_O & y_B-y_O \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы перехода от репера R к реперу R': $R|R' = (R|R_0)(R_0|R'_0)(R'_0|R') =$
$= \frac{1}{R_0|R}(R_0|R'_0)(R'_0|R') = (R_0|R'_0)$.
Итак, если $(R_0|R'_0) > 0$, то для любого репера R $R|R' > 0$ и движение f сохраняет ориентацию плоскости. Если $(R_0|R'_0) < 0$, то для любого репера R $R|R' < 0$ и движение f меняет ориентацию плоскости. □

Задача 3.3. Докажите, что тождественное движение, параллельный перенос, поворот (в частности, центральная симметрия) являются движениями первого рода, а осевая симметрия и скользящая симметрия являются движениями второго рода.

Чтобы получить формулы движения, вспомним, что формулы перехода от одной прямоугольной декартовой системы координат координат I к другой прямоугольной декартовой системе координат II имеют вид

I, IIодинаково ориентированы
$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

I, IIпротивоположно ориентированы
$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

Эти два случая можно объединить в одной записи:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ ($+1$ соответствует случаю одинаково ориентированных систем координат, а -1 – случаю противоположно ориентированных систем координат).

Пусть дано движение f. Рассмотрим произвольный ортонормированный репер R и ортонормированный репер $R' = f(R)$. Тогда из основной теоремы следует, что движение f задается следующим образом: $\forall M(x,y)_R \to M'(x,y)_{R'}$. Обозначим координаты $M'(x',y')_R$. Тогда репер R – "старая" система координат, репер R' – "новая" система координат и формулы перехода для точки M' примут вид

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + x_0 \\ y' = x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + y_0 \end{cases} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Посмотрим на эти формулы как на формулы связывающие координаты точек $M(x,y)$ и $M'(x',y')$ в ортонормированном репере R. Эти формулы называются *формулами движения*, записанными относительно ортонормированного репера.
Составим из коэффициентов при x, y матрицу

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\varepsilon\sin\alpha \\ \sin\alpha & \varepsilon\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Эта матрица обладает следующими свойствами:
1) Сумма квадратов элементов, стоящих в каждом столбце равна 1, то есть $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ и $(-\varepsilon\sin\alpha)^2 + (\varepsilon\cos\alpha)^2 = 1$;
2) Сумма произведений соответствующих элементов столбцов равна 0, то есть $(\cos\alpha)(-\varepsilon\sin\alpha) + (\sin\alpha)(\varepsilon\cos\alpha) = 0$.
Матрицы второго порядка, удовлетворяющие этим условиям называются *ортогональными*.
Итак, мы получили, что матрица C для движения f ортогональна. Будем называть матрицу C *матрицей движения* f.
Вычислим $detC = (\cos\alpha)(\varepsilon\cos\alpha) + (-\varepsilon\sin\alpha)(\sin\alpha) = \varepsilon = \pm 1$. Итак, определитель матрицы движения равен ± 1. При этом $detC = +1$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon = +1$, то есть реперы R и R' одинаково ориентированы, то есть движение f является движением первого рода. Аналогично получаем, что $detC = -1$ тогда и только тогда, когда движение f – второго рода.
Оказывается верно и обратное.

Теорема 3.3. Пусть по отношению к некоторому ортонормированному реперу R заданы формулы

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + x_0 \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + y_0 \end{cases} \quad (1)$$

такие, что матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ ортогональна, то есть

$$1)\ (c_{11})^2 + (c_{21})^2 = 1 \quad 3)\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0$$
$$2)\ (c_{12})^2 + (c_{22})^2 = 1$$

Тогда формулы (1) определяют движение f. При этом если $detC = +1$, то движение f имеет первый род, а если $detC = -1$, то движение f имеет второй род.

Доказательство. Построим отображение $f : \sigma \to \sigma$ по правилу: любой точке $M(x,y)_R$ поставим в соответствие точку $M'(x',y')_R$, где координаты x', y' вычисляются по формулам (1). Так как формулы (1) линейны и $detC \neq 0$ (почему?), отображение f является биекцией. Докажем, что эта биекция сохраняет расстояния между точками.

Пусть $M(x_1,y_1)_R$, $N(x_2,y_2)_R$ – две произвольные точки плоскости, $M'(x'_1,y'_1)_R$, $N'(x'_2,y'_2)_R$ – их образы при отображении f, то есть координаты вычислены по формулам (1). Вычислим

$M'N' = \sqrt{(x'_1-x'_2)^2+(y'_1-y'_2)^2} = \sqrt{(x_1c_{11}+y_1c_{12}-x_2c_{11}-y_2c_{12})^2+(x_1c_{21}+y_1c_{22}-x_2c_{21}-y_2c_{22})^2} =$

$= \sqrt{((x_1-x_2)c_{11}+(y_1-y_2)c_{12})^2+((x_1-x_2)c_{21}+(y_1-y_2)c_{22})^2} =$

$= \sqrt{(x_1-x_2)^2(c_{11}^2+c_{21}^2)+(y_1-y_2)^2(c_{12}^2+c_{22}^2)+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)(c_{11}c_{12}+c_{21}c_{22})}$. Так как матрица C ортогональна, то $M'N' = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = MN$, то есть f сохраняет расстояния между точками, то есть является движением.

Определим род движения f. Пусть репер $R = (O,A,B)$. Тогда в этом репере его точки имеют координаты $O(0,0)_R$, $A(1,0)_R$, $B(0,1)_R$. Применим формулы (1) и вычислим координаты образов этих точек при движении f: $O'(x_0,y_0)_R$, $A'(c_{11}+x_0, c_{21}+y_0)_R$, $B'(c_{12}+x_0, c_{22}+y_0)_R$. Тогда $\overrightarrow{O'A'}(c_{11},c_{21})$, $\overrightarrow{O'B'}(c_{12},c_{22})$. Следовательно, определитель матрицы перехода от репера R к реперу $R' = (O',A',B')$ имеет вид

$R|R' = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} = detC$. Если $detC = R|R' > 0$, то есть реперы одинаково ориентированы, то движение f имеет первый род. Если $detC = R|R' < 0$, то есть реперы противоположно ориентированы, то движение f имеет второй род. □

Примеры. Пусть дан ортонормированный репер $R = (O,E_1,E_2)$. Запишем в нем формулы следующих движений.

1. $f = id$ – тождественное преобразование. По определению $id : M(x,y)_R \to M(x,y)_R$, то есть

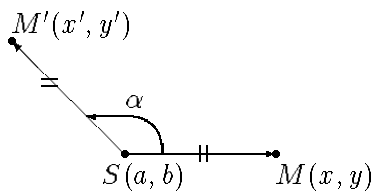
$$id : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

2. $f = T_{\vec{p}}$ – параллельный перенос на вектор $\vec{p}(p_1,p_2)$.

Имеем $T_{\vec{p}} : M(x,y)_R \to M'(x',y')_R$ такую, что $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$, то есть в координатах $x'-x = p_1$; $y'-y = p_2$, то есть

$$T_{\vec{p}} : \begin{cases} x' = x + p_1 \\ y' = y + p_2 \end{cases}$$

3. $f = R_S^\alpha$ – поворот вокруг точки $S(a,b)$ на ориентированный угол α.



По формулам для косинуса и синуса ориентированного угла имеем

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{SM}\overrightarrow{SM'}}{|\overrightarrow{SM}||\overrightarrow{SM'}|} = \frac{(x-a)(x'-a)+(y-b)(y'-b)}{|\overrightarrow{SM}|^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x-a & x'-a \\ y-b & y'-b \end{vmatrix}}{|\overrightarrow{SM}|^2} = \frac{(x-a)(y'-b)-(y-b)(x'-a)}{|\overrightarrow{SM}|^2}$$

Тогда мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (x-a)(x'-a)+(y-b)(y'-b) = |\overrightarrow{SM}|^2\cos\alpha \\ (x-a)(y'-b)-(y-b)(x'-a) = |\overrightarrow{SM}|^2\sin\alpha \end{cases}$$

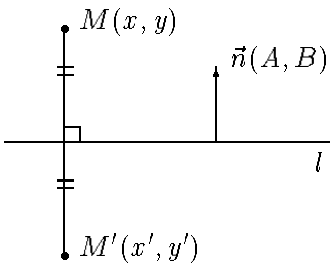
Умножим сначала первое уравнение на $(x-a)$ и вычтем из него второе уравнение, умноженное на $(y-b)$. Затем умножим первое уравнение на $(y-b)$ и прибавим второе уравнение, умноженное на $(x-a)$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left((x-a)^2+(y-b)^2\right)(x'-a) = |\overrightarrow{SM}|^2\left((x-a)\cos\alpha-(y-b)\sin\alpha\right) \\ \left((x-a)^2+(y-b)^2\right)(y'-b) = |\overrightarrow{SM}|^2\left((x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha\right) \end{cases}$$

Так как $(x-a)^2+(y-b)^2 = |\overrightarrow{SM}|^2$, то окончательно получим формулы поворота.

$$R^{\alpha}_{S(a,b)}: \begin{cases} x'-a = (x-a)\cos\alpha-(y-b)\sin\alpha \\ y'-b = (x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

4. Осевая симметрия S_l с осью l.



Пусть ось симметрии l задана уравнением $Ax+By+C=0$. Тогда вектор $\vec{n}(A,B)$ будет перпендикулярен прямой l, то есть $\overrightarrow{MM'}\|\vec{n}$. Тогда существует число λ такое, что $\overrightarrow{MM'}=\lambda\vec{n}$. В координатах получим

$$\begin{cases} x'-x = \lambda A \\ y'-y = \lambda B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+\lambda A \\ y' = y+\lambda B \end{cases}$$

Найдем число λ. Так как середина отрезка $[MM']$ принадлежит прямой l и координаты середины отрезка $[MM']$ $\left(\frac{x+x+\lambda A}{2}, \frac{y+y+\lambda B}{2}\right)$, получим
$A\frac{x+x+\lambda A}{2}+B\frac{y+y+\lambda B}{2}+C=0$. Откуда выразим $\lambda = -\frac{2}{A^2+B^2}(Ax+By+C)$. Тогда получим формулы осевой симметрии

$$S_l: \begin{cases} x' = x-\frac{2A}{A^2+B^2}(Ax+By+C) \\ y' = y-\frac{2B}{A^2+B^2}(Ax+By+C) \end{cases}$$

5. Скользящая симметрия $T_{\vec{p}}\circ S_l$ $(\vec{p}\|l)$. Мы уже знаем уравнения параллельного переноса и осевой симметрии. Найдем их композицию следующим образом. Пусть дана точка $M(x,y)$. Осевая симметрия переведет ее в точку $\tilde{M}(\tilde{x},\tilde{y})$. Значит, формулы осевой симметрии с осью $Ax+By+C=0$ для такой пары точек запишутся в виде

$$S_l: \begin{cases} \tilde{x} = x-\frac{2A}{A^2+B^2}(Ax+By+C) \\ \tilde{y} = y-\frac{2B}{A^2+B^2}(Ax+By+C) \end{cases}$$

Далее, точку $\tilde{M}(\tilde{x},\tilde{y})$ берет параллельный перенос $T_{\vec{p}}$ и переводит в точку $M'(x',y')$. Значит, формулы параллельного переноса на вектор $\vec{p}(p_1,p_2)$ для такой пары точек примут вид

$$T_{\vec{p}}: \begin{cases} x' = \tilde{x}+p_1 \\ y' = \tilde{y}+p_2 \end{cases}$$

Тогда композиция осевой симметрии и параллельного переноса переводит точку $M(x,y)$ в точку $M'(x',y')$. Для получения формул композиции нужно подставить выражения для $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ из формул осевой симметрии в формулы для параллельного переноса.

$$T_{\vec{p}}\circ S_l: \begin{cases} x' = x-\frac{2A}{A^2+B^2}(Ax+By+C)+p_1 \\ y' = y-\frac{2B}{A^2+B^2}(Ax+By+C)+p_2 \end{cases}$$

§27. Классификация движений.

Определение 3.15. *Инвариантной точкой* движения f называется точка, переходящая при этом движении в себя, то есть M инвариантная, если $f(M)=M$.

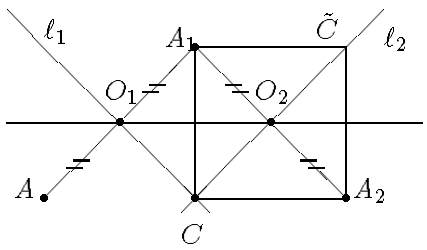
Определение 3.16. *Инвариантной прямой* движения f называется прямая, переходящая при этом движении в себя, то есть l инвариантна, если $f(l)=l$. Прямая, каждая точка которой при движении f является инвариантной, называется *прямой инвариантных точек.*

Заметим, что прямая инвариантных точек является инвариантной прямой. Обратное, вообще говоря, не верно.

Задача 3.4. Приведите примеры инвариантных точек, инвариантных прямых и прямых инвариантных точек для различных видов движений.

Лемма 3.2. Движение f, не имеющее ни одной инвариантной точки, имеет хотя бы одну инвариантную прямую.

Доказательство.



Пусть $A \in \sigma$ – произвольная точка плоскости. Пусть $A_1 = f(A)$. Тогда $A_1 \neq A$, так как инвариантных точек по условию нет. Пусть $A_2 = f(A_1)$. Тогда $A_2 \neq A_1$ и $A_2 \neq A$ (если $A_2 = A$, то середина отрезка $[AA_1]$ будет инвариантной точкой, что противоречит условию). Возможны следующие случаи:

1) Точки A, A_1, A_2 лежат на одной прямой. Тогда эта прямая и будет искомой инвариантной прямой.

2) Точки A, A_1, A_2 не лежат на одной прямой. Тогда возьмем точку O_1 – середину отрезка $[AA_1]$ и точку O_2 – середину отрезка $[A_1A_2]$ и докажем, что прямая (O_1O_2) есть искомая инвариантная прямая. Рассмотрим прямую ℓ_1, проходящую через точку O_1 перпендикулярно прямой AA_1 и прямую ℓ_2, проходящую через точку O_2 перпендикулярно прямой A_1A_2. Обозначим точку пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 через C. Заметим, что при движении f отрезок $[AA_1]$ переходит в отрезок $[A_1A_2]$. Тогда середина отрезка $[AA_1]$ – точка O_1 перейдет в середину отрезка $[A_1A_2]$ – точку O_2, так как движение сохраняет простое отношение трех точек. Так как движение сохраняет величины углов, то прямая ℓ_1, проходящая через точку O_1 перпендикулярно AA_1 перейдет в прямую, проходящую через $f(O_1) = O_2$ перпендикулярно $f([AA_1]) = [A_1A_2]$, то есть в прямую ℓ_2. При этом точка $C \in \ell_1$ перейдет в такую точку $f(C)$, что $f(C) \in \ell_2$ и $O_1C = O_2f(C)$. Претендентов на роль точки $f(C)$ две: точка C и точка $\tilde{C}$, симметричная точке C относительно точки O_2 (Действительно, из равенства прямоугольных треугольников A_1O_1C и A_1O_2C получим $O_1C = O_2C$). Так как по условию инвариантных точек у движения f нет, то $f(C) = \tilde{C}$. Следовательно, четырехугольник $A_1CA_2\tilde{C}$ является параллелограммом по признаку (диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам). Значит, $A_1C \| \tilde{C}A_2$.
Так как точки A_1 и C равноудалены от точек O_1 и O_2, то $A_1C \perp O_1O_2$, следовательно, прямой O_1O_2 перпендикулярна и прямая $\tilde{C}A_2$.
Наконец, предположим, что $f : (O_1O_2) \to m'$. Тогда так как $(A_1C) \perp (O_1O_2)$, то образы этих прямых также должны быть перпендикулярны, то есть $(A_2\tilde{C}) \perp m'$. Кроме того, $O_1 \in (O_1O_2)$ при движении f перейдет в точку $O_2 \in m'$. Имеем, через точку O_2 проходят две прямые O_1O_2 и m', перпендикулярные прямой $A_2\tilde{C}$. Это противоречие, следовательно, $m' = (O_1O_2)$, то есть прямая (O_1O_2) является искомой инвариантной прямой. □

Лемма 3.3. Движение второго рода либо не имеет инвариантных точек, либо имеет бесконечно много инвариантных точек.

Доказательство. Рассмотрим произвольное движение f второго рода. Запишем его уравнения относительно некоторого ортонормированного репера R.

$$f : \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0 \\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

Пусть точка $M(x, y)_R$ – инвариантна. Тогда ее образ при движении f эта же точка M все с теми же координатами $(x, y)_R$. Так как координаты образа точки мы ставим в формулы движения вместо букв x', y', то для инвариантной точки M из формул движения получим

$$\begin{cases} x = x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0 \\ y = x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

Это система двух уравнений с двумя неизвестными x, y. Ее решения суть координаты всех инвариантных точек движения. Исследуем эту систему уравнений.

$$\begin{cases} x(\cos\alpha - 1) + y\sin\alpha + x_0 = 0 \\ x\sin\alpha + y(-1 - \cos\alpha) + y_0 = 0 \end{cases}$$

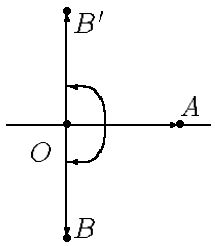
Это система двух линейных неоднородных уравнений. Из алгебры известно, что такая система не имеет решений или имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из коэффициентов при x и y, равен нулю. Посчитаем такой определитель в нашем случае.
$\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -1 - \cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos\alpha + 1 - \cos^2\alpha + \cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$. Таким образом, система либо не имеет корней, либо имеет бесконечно много корней, то есть движение второго рода либо не имеет инвариантных точек, либо имеет бесконечно много инвариантных точек. □

Вопрос 3.3. Что за фигуру образует множество всех инвариантных точек движения второго рода?

Приступим к классификации движений. Основание классификации – количество инвариантных точек.

1. **Движения первого рода.**

1) Движение f имеет по крайней мере 2 инвариантные точки.



Пусть A, O – две инвариантные точки. Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O, A, B)$ (мы всегда можем принять отрезок $[OA]$ за единичный). Мы знаем, что любое движение переводит ортонормированный репер в ортонормированный репер. Тогда движение f может перевести репер R либо в тот же самый репер R, либо в репер $R' = (O, A, B')$, где B' – точка, симметричная точке B относительно прямой (OA) (Напомним, что точки O и A остаются на месте, так как являются инвариантными). Второй случай нам не подходит, так как реперы R и R' имеют противоположные ориентации, а движение f – первого рода – ориентацию сохраняет.

Следовательно, у нас имеет место первый случай, то есть $f : R \to R$. Но мы знаем, что тождественное преобразование id действует точно так же: $id : R \to R$. По лемме к основной теореме теории движений получаем, что $f = id$.

2) Движение f имеет единственную инвариантную точку O.

Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O, E_1, E_2)$, то есть за начало репера берем инвариантную точку. Выясним, как в этом репере будут выглядеть общие формулы движения первого рода:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0 \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

Так как точка $O(0,0)_R$ – инвариантная, то есть $f : O(0,0)_R \to O(0,0)_R$, то

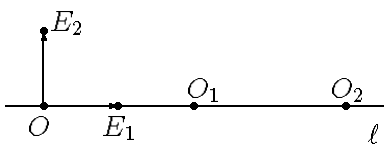
$$\begin{cases} 0 = 0\cos\alpha - 0\sin\alpha + x_0 \\ 0 = 0\sin\alpha + 0\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

Откуда получим $x_0 = 0, y_0 = 0$. Итак, в репере $R = (O, E_1, E_1)$, где O – инвариантная точка, формулы движения первого рода примут вид

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Но точно так же выглядят формулы поворота вокруг точки $O(0,0)$ (см. формулы поворота при $a = 0, b = 0$). Значит, движение первого рода с единственной инвариантной точкой является поворотом вокруг точки O на угол α.

3) Движение f не имеет ни одной инвариантной точки. Тогда по лемме 3 оно имеет инвариантную прямую ℓ.



Возьмем ортонормированный репер $R = (O, E_1, E_2)$ такой, что $O, E_1 \in \ell$, где ℓ – инвариантная прямая. Выясним, какой вид примут общие формулы движения первого рода в таком "удобном" репере. Обозначим $O_1 = f(O)$ и $O_2 = f(O_1)$.

Заметим, что $O_1 \neq O_2$, так как иначе середина отрезка $[OO_1]$ была бы инвариантной точкой. Тогда обозначим координаты $O_1(a,0)_R$. Так как движение сохраняет расстояния между точками и $f : [OO_1] \to [O_1O_2]$, то координаты точки $O_2(2a,0)$. Имеем $f : O(0,0)_R \to O_1(a,0)_R$. Подставим

эти координаты в общие формулы движения первого рода: $\begin{cases} a = x_0 \\ 0 = y_0 \end{cases}$.

Так как $f : O_1(a,0)_R \to O_2(2a,0)_R$, получим $\begin{cases} 2a = a\cos\alpha + x_0 \\ 0 = a\sin\alpha + y_0 \end{cases}$.

Из этих уравнений получаем $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$. Итак, в репере $R = (O, E_1, E_2)$, где E_1, E_2 – точки, лежащие на инвариантной прямой ℓ, формулы движения первого рода принимают вид

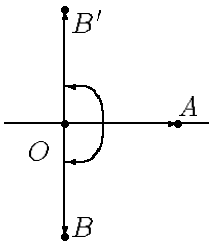
$$f : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y \end{cases}$$

Но точно также выглядят формулы паралельного переноса на вектор $\vec{p}(a,0)$, то есть движение первого рода, не имеющее инвариантных точек, – это параллельный перенос.

2. **Движения второго рода.**

По лемме 3 такое движение либо не имеет инвариантных точек, либо имеет бесконечно много инвариантных точек.

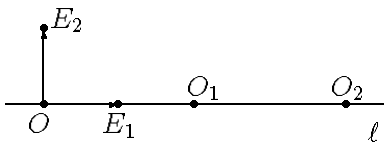
1) Движение имеет по крайней мере 2 инвариантные точки.



Пусть A, O – две инвариантные точки. Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O, A, B)$ (мы всегда можем принять отрезок $[OA]$ за единичный). Мы знаем, что любое движение переводит ортонормированный репер в ортонормированный репер. Тогда движение f может перевести репер R либо в тот же самый репер R, либо в репер $R' = (O, A, B')$, где B' – точка, симметричная точке B относительно прямой (OA) (Напомним, что точки O и A остаются на месте, так как являются инвариантными). Первый случай нам не подходит, так как реперы R и R имеют одинаковую ориентацию, а движение f – второго рода – ориентацию репера меняет.

Следовательно, у нас имеет место второй случай, то есть $f : R \to R'$. Но мы знаем, что осевая симметрия S_ℓ действует точно так же: $S_l : R \to R'$. По лемме к основной теореме теории движений получаем, что $f = S_\ell$.

2) Движение не имеет инвариантных точек.Тогда по лемме 3 оно имеет инвариантную прямую ℓ.



Возьмем ортонормированный репер $R = (O, E_1, E_2)$ такой, что $O, E_1 \in \ell$, где ℓ – инвариантная прямая. Выясним, какой вид примут общие формулы движения второго рода

$$\begin{cases} x = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0 \\ y = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

в таком "удобном" репере. Обозначим $O_1 = f(O)$ и $O_2 = f(O_1)$. Заметим, что $O_1 \neq O_2$, так как иначе середина отрезка $[OO_1]$ была бы инвариантной точкой. Тогда обозначим координаты $O_1(a,0)_R$. Так как движение сохраняет расстояния между точками и $f : [OO_1] \to [O_1O_2]$, то координаты точки $O_2(2a,0)$. Имеем $f : O(0,0)_R \to O_1(a,0)_R$. Подставим эти координаты в общие формулы движения второго рода: $\begin{cases} a = x_0 \\ 0 = y_0 \end{cases}$.

Так как $f : O_1(a,0)_R \to O_2(2a,0)_R$, получим $\begin{cases} 2a = a\cos\alpha + x_0 \\ 0 = a\sin\alpha + y_0 \end{cases}$.

Из этих уравнений получаем $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$. Итак, в репере $R = (O, E_1, E_2)$, где E_1, E_2 – точки, лежащие на инвариантной прямой ℓ, формулы движения первого рода принимают вид

$$f : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = -y \end{cases}$$

Но точно также выглядят формулы скользящей симметрии с осью $y = 0$ и вектором переноса $\vec{p}(a,0)$, то есть движение второго рода, не имеющее инвариантных точек, – это скользящая симметрия.

§28. Композиция движений. Разложение движений в композицию осевых симметрий.

Напомним, что композицией движений является последовательное выполнение этих движений, то есть $\forall M \in \sigma \ (g \circ f)(M) = g(f(M))$.

Примеры.

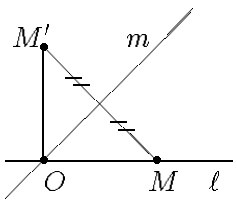
1. Пусть f, g – движения первого рода. Тогда их композиция $g \circ f$ также движение первого рода. Действительно, пусть дана репер R. Движение f переведет репер R в репер $\tilde{R}$ той же ориентации. Далее, на репер $\tilde{R}$ подействует движение g и переведет его в репер R' такой же ориентации. Тогда композиция $g \circ f$ переводит репер R в репер R' одинаковой ориентации, то есть $g \circ f$ – движение первого рода.

Задача 3.5. Какой род имеет композиция двух движений а) второго рода; б) первого и второго рода?

2. Пусть даны поворот R^α_O и осевая симметрия S_ℓ, $O \in \ell$. Определим вид движения $f = S_\ell \circ R^\alpha_O$. Движение f является композицией движений первого и второго рода, то есть является движением второго рода. Найдем образ точки O при движении f: $f(O) = S_\ell \circ R^\alpha_O(O) = S_\ell(O) = O$, то есть движение второго рода имеет инвариантную точку, следовательно, имеет бесконечно много инвариантных точек. В силу классификации движений это осевая симметрия S_m, причем O – ее инвариантная точка, следовательно, эта точка лежит на оси m. Итак, мы получили, что $S_\ell \circ R^\alpha_O = S_m$ или $S_\ell \circ S_\ell \circ R^\alpha_O = S_\ell \circ S_m$, то есть

$$R^\alpha_O = S_\ell \circ S_m, \ \ell \cap m = O$$

Выясним, чему равен ориентированный угол между прямыми ℓ и m.



Возьмем точку $M \in \ell$ и найдем ее образ при композиции осевых симметрий $S_m \circ S_\ell(M) = S_m(M) = M'$. Тогда треугольник MOM' равнобедренный ($OM = OM'$ по определению поворота) и прямая m содержит медиану, высоту и биссектрису этого треугольника, то есть $(\widehat{\ell, m}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \frac{1}{2}\alpha$. Итак, мы получили

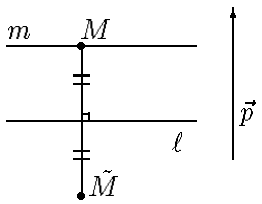
Предложение 3.5. Любой поворот R^α_O представим в виде композиции двух осевых симметрий S_ℓ и S_m, причем оси этих симметрий пересекаются в центре поворота – точке O, а ориентированный угол между прямыми ℓ и m равен половине угла поворота. □

Вопрос 3.4. Единственна ли пара прямых ℓ и m, которая является осями в разложении поворота R^α_O?

Задача 3.6. Докажите, что композиция любых осевых симметрий $S_m \circ S_\ell$ с осями ℓ и m, $m \cap \ell = O$ является поворотом вокруг точки O на угол $(\widehat{\ell, m})$.

Вопрос 3.5. Верно ли равенство $S_\ell \circ S_m = S_m \circ S_\ell$?

3. Пусть даны осевая симметрия S_ℓ и параллельный перенос $T_{\vec{p}}$ на вектор $\vec{p} \perp \ell$.



Так как осевая симметрия – это движение второго рода, а параллельный перенос – движение первого рода, то их композиция – это движение второго рода. Постараемся угадать инвариантные точки этого движения. Рассмотрим точку M, находящуюся на расстоянии $\frac{|\vec{p}|}{2}$ от прямой ℓ как показано на рисунке. Тогда $T_{\vec{p}} \circ S_\ell(M) = T_{\vec{p}}(\tilde{M}) = M$. Итак, мы получили, что все точки прямой m (см. рисунок) являются инвариантными точками композиции $T_{\vec{p}} \circ S_\ell$, то есть $T_{\vec{p}} \circ S_\ell = S_m$ или умножая справа обе части равенства на S_ℓ, получим $T_{\vec{p}} = S_m \circ S_\ell$.

Итак, мы доказали

Предложение 3.6. Любой параллельный перенос $T_{\vec{p}}$ можно представить в виде композиции $T_{\vec{p}} = S_m \circ S_\ell$, где $\ell \perp \vec{p}$ и $m = T_{\frac{\vec{p}}{2}}(\ell)$. □

Вопрос 3.6. Единственно ли такое разложение?

Задача 3.7. Докажите, что композиция двух произвольных осевых симметрий $S_m \circ S_\ell$ с параллельными осями ℓ и m есть параллельный перенос на вектор $\vec{p}$, который перпендикулярен обеим прямым ℓ и m, его длина равна удвоенному расстоянию от ℓ до m и направлен этот вектор от прямой ℓ к прямой m.

Задача 3.8. Разложите в композицию осевых симметрий скользящую симметрию и тождественное преобразование.

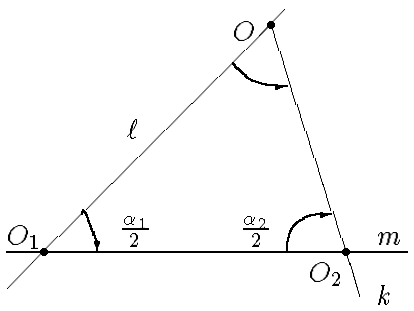
Объединяя результаты полученных предложений и результат последней задачи, получим

Теорема 3.4. Любое движение плоскости можно представить в виде композиции не более, чем трех осевых симметрий. □

Вопрос 3.7. Можно ли представить движение в виде композиции более, чем трех осевых симметрий?

Пользуясь разложениеми поворотов в композицию осевых симметрий, можно для любых двух поворотов $R^{\alpha_1}_{O_1}$ и $R^{\alpha_2}_{O_2}$ определить вид их композиции.

1. $\alpha_1 \neq -\alpha_2$.



Разложим повороты в композиции осевых симметрий так, чтобы первая ось второго поворота была такая же как вторая ось первого поворота. Обозначим эту ось m. Она должна проходить и через точку O_1 и через точку O_2, то есть это прямая (O_1O_2).

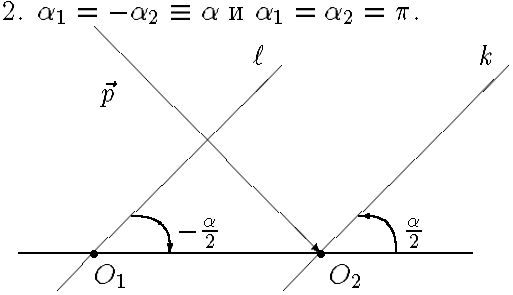
$$R^{\alpha_2}_{O_2} \circ R^{\alpha_1}_{O_1} = (S_k \circ S_m) \circ (S_m \circ S_\ell)$$

Тогда однозначно определяются оси k и ℓ как показано на рисунке.

Так как $S_m \circ S_m = id$, $k \not\parallel \ell$ (иначе $\alpha_1 = -\alpha_2$, что противоречит условию) и, следовательно, $k \cap \ell = O$, то $R^{\alpha_2}_{O_2} \circ R^{\alpha_1}_{O_1} = S_k \circ S_\ell = R^{\varphi}_{O}$. Найдем угол φ. Этот угол равен $\varphi = 2(\widehat{\ell, k})$. По свойству ориентированных углов имеем $(\widehat{\ell, k}) = (\widehat{\ell, m}) + (\widehat{m, k}) = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2}$, то есть $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2$. Итак,

$$R^{\alpha_2}_{O_2} \circ R^{\alpha_1}_{O_1} = R^{\alpha_1+\alpha_2}_{O}; \ \alpha_1 \neq -\alpha_2$$

2. $\alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$.



Разложим композицию поворотов в композицию осевых симметрий как показано на рисунке. Мы опять выбрали оси так, чтобы средние сомножители дали тождественное преобразование. Тогда

$$R^{-\alpha}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1} = (S_k \circ S_m) \circ (S_m \circ S_\ell) = S_k \circ S_\ell$$

Так как прямые ℓ и k параллельны, то композиция $S_k \circ S_\ell = T_{\vec{p}}$ – параллельный перенос. При этом вектор параллельного переноса перпендикулярен прямым ℓ и k, по длине равен двум расстояниям между прямыми ℓ и k и направлен от ℓ к k. Итак,

$$R^{-\alpha}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1} = T_{\vec{p}}$$

Задача 3.9. Нарисуйте картинку для случая $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$. Чему равен вектор $\vec{p}$ в этом случае?

Задача 3.10. Определите вид композиций движений (рассмотрите разные виды движений), раскладывая движения в композицию осевых симметрий. Например, определите вид движения $T_{\vec{p}} \circ S_\ell$, $\vec{p} \not\parallel \ell$.

§29. Группа движений и ее подгруппы.

Определение 3.17. Непустое множество G, на котором определена бинарная операция $\circ$ (то есть отображение $\circ : G \times G \to G$), удовлетворяющая условиям

1) $\circ$ – ассоциативна, то есть $\forall a, b, c \in G \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

2) $\exists e \in G : \forall a \in G \ a \circ e = e \circ a = a$; (элемент e называется *нейтральным элементом* группы)

3) $\forall a \in G \ \exists a' \in G : a \circ a' = a' \circ a = e$, (элемент a' называется *симметричным элементом*)

называется *группой*. Обозначение $(G, \circ)$.

Определение 3.18. Подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы G, если

1) $\forall a, b \in H \ a \circ b \in H$;

2) $\forall a \in H \ a' \in H$.

Очевидно, что $(H, \circ)$ является в этом случае группой с той же бинарной операцией.

Рассмотрим множество $E \neq \emptyset$. Обозначим G_E – множество преобразований множества E. Бинарная операция $\circ$ определяется следующим образом:

$$\forall f, g \in G_E \ (g \circ f)(x) = g(f(x)), \ x \in E$$

Эту бинарную операцию называют операцией *композиции*.

Теорема 3.5. $(G_E, \circ)$ – группа.

Доказательство. Ассоциативность операции композиции очевидна.
Далее, нейтральным элементом e является тождественное преобразование множества E, так как $\forall f \in G_E \ f \circ id = id \circ f = f$.
Симметричным элементом f' является обратное преобразование f^{-1} (почему оно существует для любого $f \in G_E$?), так как $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$. $\square$

Пусть E – это множество точек плоскости σ, G_σ – группа преобразований плоскости σ. Рассмотрим множество движений D плоскости σ. Так как композиция двух движений есть движение (почему?) и обратное преобразование для движения есть движение (почему?), множество $(D, \circ)$ является подгруппой группы всех преобразований плоскости, а, значит, является и группой.

Примеры подгрупп группы движений.

1. Множество D_1 всех движений первого рода – подгруппа группы движений (почему?).
2. Рассмотрим множество $D_2 = \{id, R_O^\alpha | O$– фиксированная точка, α– всевозможные углы$\}$. Это множество является подгруппой, так как для любых двух поворотов R_O^α, R_O^β из этого множества их композиция $R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^{\alpha+\beta}$ также принадлежит этому множеству и для любого поворота R_O^α обратный ему поворот $R_O^{-\alpha}$ также принадлежит D_2.

Заметим, что если мы возьмем множество $\tilde{D}_2 = \{id, R_O^\alpha | O$– всевозможные точки, α– всевозможные углы$\}$, то такое множество группой не будет (почему?)

3. Рассмотрим множество $D_3 = \{id, T_{\vec{p}}, \vec{p}$– всевозможные векторы$\}$. Так как $T_{\vec{q}} \circ T_{\vec{p}} = T_{\vec{p}+\vec{q}} \in D_3$ и $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}} \in D_3$, это множество образует подгруппу группы движений.

Заметим, что множество $\tilde{D}_3 = \{id, T_{\vec{p}}, \vec{p}$– фиксированный вектор$\}$ не является подгруппой, так как $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}} \notin \tilde{D}_3$. Дополним это множество минимальным количеством движений так, чтобы получилась подгруппа $\bar{D}_3$. Заметим, что $T_{\vec{p}} \circ T_{\vec{p}} = T_{2\vec{p}}$, $T_{\vec{p}} \circ T_{2\vec{p}} = T_{3\vec{p}}$ и так далее. Кроме того, если $T_{\vec{p}} \in \bar{D}_3$, то этому же множеству должен принадлежать и параллельный перенос $T_{-\vec{p}}$ и так далее. Таким образом, мы получаем, что множество $\bar{D}_3$ является группой, если имеет вид $\bar{D}_3 = \{id, T_{n\vec{p}}, n$– всевозможные целые числа$\}$.

Вопрос 3.8. Образуют ли подгруппу движений все движения второго рода?

Задача 3.11. Рассмотрим множество $D_4 = \{id, S_\ell, S_m, \ell, m$ – фиксированные взаимно перпендикулярные прям
Образует ли это множество группу? Если нет, то дополните до группы минимальным количеством движений.

4. **Группа симметрий фигуры.**

Пусть F – произвольная фигура на плоскости σ. Обозначим $D_F = \{f \in D | \ f(F) = F\}$ множество всех движений, переводящих фигуру F в себя.

Задача 3.12. Докажите, что $(D_F, \circ)$ является группой.

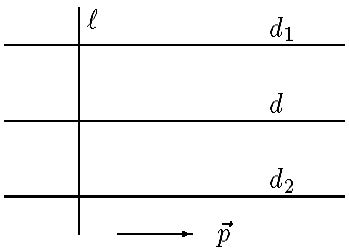
Определение 3.19. Группа D_F называется *группой симметрий* фигуры F. Если $D_F = \{id\}$, то говорят, что фигура F *не имеет симметрий*.

Определение 3.20. Прямая d называется *осью симметрии* фигуры F, если осевая симметрия S_d с осью d принадлежит группе симметрий фигуры F.

Определение 3.21. Точка M_0 называется центром симметрии фигуры F, если центральная симметрия S_{M_0} с центром в этой точке принадлежит группе симметрий фигуры F.

Примеры.

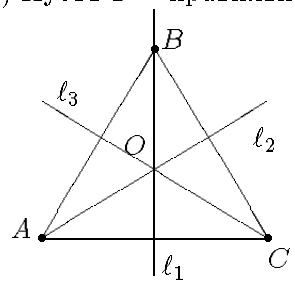
1) Пусть $F = \omega(O, r)$ – окружность с центром в точке O радиуса r.
Тогда $D_\omega = \{id, R_O^\alpha, \forall \alpha; S_d, \forall d | \ O \in d\}$.
2) Пусть F – полоса между двумя параллельными прямыми $d_1 \| d_2$.



Пусть d – прямая, находящаяся на одинаковом расстоянии от прямых d_1, d_2. Тогда прямая d и любая прямая ℓ, перпендикулярная прямой d являются осями симметрии фигуры F. Любая точка O, принадлежащая фигуре F, является ее центром симметрии.

Таким образом, $D_F = \{id;\ S_d;\ S_\ell, \forall \ell \perp d;\ S_O,\ \forall O \in d;\ T_{\vec{p}} \circ S_d,\ \forall \vec{p} \| d\}$.

3) Пусть F – правильный треугольник ABC.



Центров симметрии нет. Оси симметрии ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 – прямые, содержащие высоты (медианы, биссектрисы) треугольника ABC. Тогда

$$D_{ABC} = \{id;\ R_O^{\pm 120^0};\ S_{\ell_1};\ S_{\ell_2};\ S_{\ell_3}\}$$

Определение 3.22. Фигура F называется *ограниченной*, если существует вещественное число m, такое что расстояние между любыми двумя точками фигуры F меньше m.

Например, окружность и правильный треугольник – ограниченные фигуры, полоса между двумя параллельными прямыми – не ограниченная фигура.

Свойства ограниченных фигур.

1^0. Если фигура F ограничена, то группа симметрий D_F фигуры F не содержит параллельных переносов на ненулевые векторы и скользящих симметрий.

Доказательство. 1) Пусть существует $T_{\vec{p}} \in D_F$. Так как фигура F ограничена, существует вещественное число m, такое что расстояние между любыми двумя точками фигуры F меньше m. Пусть M_0 – точка фигуры F. Тогда точка $M_1 = T_{\vec{p}}(M_0) \in F$, точка $M_2 = T_{\vec{p}}(M_1) \in F$, ..., $M_k = T_{\vec{p}}(M_{k-1}) \in F$, где k – натуральное число, для которого $k|\vec{p}| > m$. Тогда $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{p}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{p}$, ..., $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \vec{p}$, следовательно, $\overrightarrow{M_0M_k} = \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \ldots + \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = k\vec{p}$, значит, $M_0M_k = k|\vec{p}| > m$. Итак, на фигуре F мы нашли две точки M_0 и M_k, расстояние между которыми больше m, что противоречит определению ограниченной фигуры.

2) Пусть f – скользящая симметрия, принадлежащая группе D_F. По опрделению группы $f \circ f \in D_F$. Определим вид $f \circ f = T_{\vec{p}} \circ S_\ell \circ T_{\vec{p}} \circ S_\ell$, где $\vec{p} \| \ell$. В этом случае параллельный перенос перестановочен с осевой симметрией, то есть $T_{\vec{p}} \circ S_\ell = S_\ell \circ T_{\vec{p}}$. Тогда получим $f \circ f = T_{\vec{p}} \circ S_\ell \circ T_{\vec{p}} \circ S_\ell = T_{\vec{p}} \circ S_\ell \circ S_\ell \circ T_{\vec{p}} = T_{2\vec{p}}$, то есть $T_{2\vec{p}} \in D_F$. Но мы в первом пункте доказали, что параллельных переносов в группе симметрий ограниченной фигуры быть не может. $\square$

2^0. Ограниченная фигура имеет не более одного центра симметрии.

Доказательство. Пусть ограниченная фигура имеет два различных центра симметрии O_1, O_2. Тогда центральные симметрии S_{O_1}, S_{O_2} принадлежат группе симметрий фигуры F. Тогда их композиция $S_{O_1} \circ S_{O_2} \in D_F$. Определим вид этой композиции: $S_{O_1} \circ S_{O_2} = R^\pi_{O_1} \circ R^\pi_{O_2} = T_{\vec{p}}$ (см. предыдущий параграф). Мы опять получили противоречие, то есть более одного центра симметрии у ограниченной фигуры быть не может. $\square$

Задача 3.13. Докажите, что если ограниченная фигура имеет центр симметрии M_0, то все оси симметрии (если они существуют) проходят через точку M_0.

Задача 3.14. Докажите, что если ограниченная фигура имеет более 1 оси симметрии, то все они пересекаются в одной точке. Всегда ли эта точка является центором симметрии?

Задача 3.15. Докажите, что если ограниченная фигура имеет ось симметрии и центр симметрии, то она имеет еще хотя бы одну ось симметрии.

Определение 3.23. Точка M_0 называется *центром вращения порядка* n (n – натуральное число, большее 1) фигуры F, если поворот плоскости вокруг точки M_0 на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ принадлежит D_F.

Например, центр симметрии фигуры является центром вращения второго порядка. Для правильного

треугольника из примера 2 точка O является центром вращения третьего порядка.

Определение 3.24. Центры симметрии, оси симметрии и центры вращения порядка n фигуры F называются *элементами симметрии* этой фигуры.