4 Преобразования пространства

§32. Движения пространства E^3.

Пусть дано ориентированное пространство E^3.

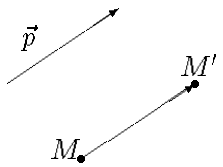
Определение 4.1. *Движением* пространства E^3 называется преобразование E^3, сохраняющее расстояния между парами точек. Другими словами, $g : E^3 \to E^3$ называется движением, если для любых точек A, B пространства и их образов $A' = g(A)$, $B' = g(B)$ имеем $AB = A'B'$.

Примеры движений.

Предложение 4.1. Множество всех движений образует группу относительно операции композиции.

Доказательство. Докажем, что множество всех движений пространства является подгруппой группы всех преобразований пространства E^3, а следовательно, само является группой. Очевидно, что композиция двух движений является движением и обратное преобразование для движения есть движение. □

1. Тождественное преобразование id. Очевидно, движение.
2. Пусть дан вектор $\vec{p} \in V^3$.



Определим преобразование пространства $T_{\vec{p}} : E^3 \to E^3$ следующим образом: каждой точке M это преобразование ставит в соответствие такую точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Это преобразование называется *параллельным переносом.*

Предложение 4.2. Параллельный перенос является движением.

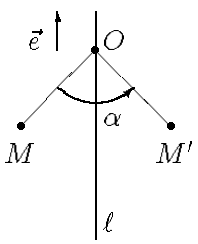
Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $A, B \in E^3$. Обозначим $A' = T_{\vec{p}}(A)$, $B' = T_{\vec{p}}(B)$. По определению параллельного переноса имеем $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{p}$. Применим правило треугольника для вектора $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$$

Получим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. В частности, длины этих векторов равны, то есть $AB = A'B'$. □

Обратное преобразование: $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}}$.

3. Пусть в E^3 дана ось $(\ell, \vec{e})$ и дан ориентированный угол $-\pi \leq \alpha \leq \pi$.

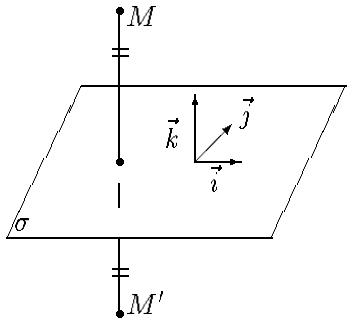


Возьмем произвольную точку M, не лежащую на прямой ℓ и опустим из нее перпендикуляр на прямую ℓ. Основание перпендикуляра обозначим O. Построим отрезок $[OM']$, равный по длине отрезку $[OM]$, перпендикулярный прямой ℓ и такой, что ориентированный угол $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$ в плоскости (OMM'), ориентация которой индуцирована ориентацией пространства E^3. Другими словами, мы смотрим на плоскость OMM' с конца представителя вектора $\vec{e}$, отложенного от точки O. Тогда положительные углы будут против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой стрелке.

Преобразование пространства, которое каждой точке $M \in E^3$, $M \notin \ell$ ставит в соответствие точку M', указанным выше образом, а точке $M \in \ell$ ставит в соответствие саму точку M, называется *поворотом вокруг оси* ℓ на угол α и обозначается R^{α}_{ℓ}. Обратное преобразование $(R^{\alpha}_{\ell})^{-1} = R^{-\alpha}_{\ell}$.

Задача 4.1. Докажите, что поворот вокруг оси есть движение.

4. Пусть дана плоскость σ.



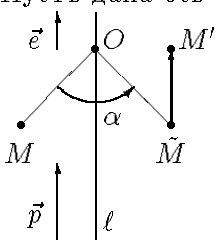
Рассмотрим произвольную точку M пространства E^3, не лежащую на плоскости σ. Поставим ей в соответствие точку M', построенную следующим образом. Проведем через точку M прямую, перпендикулярную плоскости σ. На этой прямой возьмем точку M' так, чтобы середина отрезка $[MM']$ лежала в плоскости σ. Если $M \in \sigma$, то поставим ей в соответствие саму точку M. Преобразование, которое каждой точке M ставит в соответствие точку M', указанным выше образом, называется *симметрией относительно плоскости* или *зеркальной симметрией*. Обозначение S_σ.

Предложение 4.3. Зеркальная симметрия является движением.

Доказательство. Выберем прямоугольную декартову систему координат с началом в плоскости σ и векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, параллельными этой плоскости. Возьмем произвольные точки $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$. Тогда их образы при зеркальной симметрии имеют координаты $M'(x_1, y_1, -z_1)$, $N'(x_2, y_2, -z_2)$. Вычислим расстояние между точками $MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = M'N'$, то есть зеркальная симметрия сохраняет расстояния между точками. □

Обратное преобразование $(S_\sigma)^{-1} = S_\sigma$.

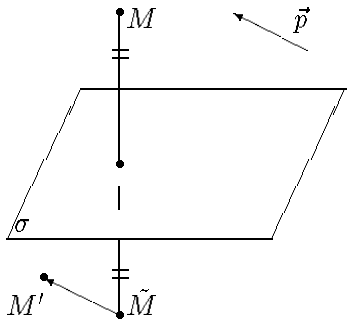
5. Пусть дана ось $(\ell, \vec{e})$, ориентированный угол α и вектор $\vec{p}$, параллельный прямой ℓ.



Преобразование являющееся композицией поворота вокруг оси ℓ на угол α и параллельного переноса на вектор $\vec{p}$, параллельный прямой ℓ называется *винтовым движением* и обозначается $T_{\vec{p}} \circ R_\ell^\alpha$, $\vec{p} \| \ell$. Как композиция двух движений построенное преобразование действительно является движением.

Обратное преобразование $(T_{\vec{p}} \circ R_\ell^\alpha)^{-1} = T_{-\vec{p}} \circ R_\ell^{-\alpha}$.

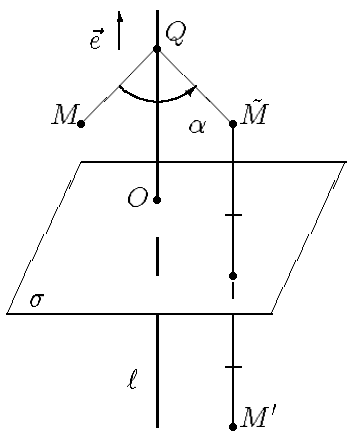
6. Пусть дана плоскость σ и вектор $\vec{p} \| \sigma$.



Композиция зеркальной симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный плоскости зеркальной симметрии является движением (как композиция таковых) и называется *скользящим отражением*. Обозначение $T_{\vec{p}} \circ S_\sigma$.

Обратное преобразование $(T_{\vec{p}} \circ S_\sigma)^{-1} = T_{-\vec{p}} \circ S_\sigma$.

7. Пусть дана плоскость σ, ось $(\ell, \vec{e})$, $\ell \perp \sigma$, $O = \ell \cap \sigma$ и ориентированный угол α.



Композиция поворота вокруг оси и зеркальной симметрии является движением (как композиция таковых) и называется *поворотным отражением* или *зеркальным поворотом*. Обозначение $S_\sigma \circ R_\ell^\alpha$.

Обратное преобразование $(S_\sigma \circ R_\ell^\alpha)^{-1} = S_\sigma \circ R_\ell^{-\alpha}$. Частным случаем зеркального поворота является зеркальный поворот на угол π или, что тоже самое, на угол $-\pi$. Он называется *центральной симметрией* с центром в точке O.

Определение 4.2. Упорядоченная четверка точек $R = (O, A, B, C)$ общего положения (то есть не лежащих в одной плоскости) называется *аффинным репером* пространства E^3.

Так же как и на плоскости каждый аффинный репер однозначно определяет аффинную систему координат и, наоборот, каждая аффинная система координат однозначно определяет аффинный репер. Координаты точки относительно аффинной системы координат будем называть координатами этой точки относительно соответствующего аффинного репера. Далее будем употреблять термины "аффинный репер" и "аффинная система координат" как синонимы.

Определение 4.3. Аффинный репер называется *ортонормированным репером*, если соответствующая ему система координат является прямоугольной декартовой.

Предложение 4.4. Движение переводит ортонормированный репер в ортонормированный репер.

Доказательство. Пусть дан ортонормированный репер $R = (O, A, B, C)$, то есть треугольники OAB, OAC, OBC – равнобедренные прямоугольные. Обозначим образ репера R при движении f через $R' = (O', A', B', C')$. Так как движение сохраняет расстояния между точками, то по обратной теореме Пифагора треугольники $O'A'B'$, $O'A'C'$, $O'B'C'$ – равнобедренные прямоугольные. Если предположить, что точки O', A', B', C' лежат в одной плоскости, то придем к противоречию (нарисуйте картинки для возможного расположения точек и поясните, в чем заключается противоречие), то есть точки O', A', B', C' не лежат в одной плоскости и удовлетворяют определению ортонормированного репера. □

Теорема 4.1. (основная)
Пусть даны два ортонормированных репера $R = (O, A, B, C)$ и $R' = (O', A', B', C')$. Тогда существует единственное движение f пространства, переводящее репер R в репер R'. При этом любая точка $M(x, y, z)_R$ с координатами в репере R переходит в точку $M'(x, y, z)_{R'}$ с теми же координатами в репере R'.

Доказательство. $\exists$). Определим отображение $f : E^3 \to E^3$ по правилу $\forall M(x, y, z)_R \to M'(x, y, z)_{R'}$. Докажем, что это преобразование, то есть биекция. Действительно, если даны две различные точки $M(x, y, z)_R$, $N(a, b, c)_R$, то в наборах их координат есть отличие хотя бы в одной координате. Так как образы $M'(x, y, z)_{R'}$, $N'(a, b, c)_{R'}$ имеют такие же координаты, но в репере R',то точки M' и N' также различны, то есть f инъективно.
Пусть $M'(x, y, z)_{R'}$. Тогда возьмем числа (x, y, z) и построим точку $M(x, y, z)_R$, то есть прообраз для точки M' существует и отображение f сюръективно.

Докажем, что f сохраняет расстояния между точками. Пусть даны произвольные точки $M(x_1, y_1, z_1)_R$, $N(x_2, y_2, z_2)_R$. Тогда их образы имеют координаты $M'(x_1, y_1, z_1)_{R'}$, $N'(x_2, y_2, z_2)_{R'}$. Так как реперы R, R' – ортонормированные, получим $MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = M'N'$, то есть f является движением.
Наконец, докажем, что при отображении f репер R переходит в репер R'. Действительно, точка $O(0, 0, 0)_R$ перейдет в точку с теми же координатами $(0, 0, 0)_{R'}$, то есть в точку O'. Рассуждения для остальных точек репера R аналогичны (докажите самостоятельно). Итак, при движении f репер R переходит в репер R'.

!). Пусть существует еще движение g, переводящее репер R в репер R' и отличное от движения f, то есть существует точка M в пространстве такая, что $f(M) \neq g(M)$. Обозначим $M' = f(M)$, $M'' = g(M)$. Тогда так как $O' = f(O) = g(O)$, то $OM = O'M'$ (действует движение f) и $OM = O'M''$ (действует движение g). Следовательно, $O'M' = O'M''$, то есть точка O' лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка $[M'M'']$ перпендикулярно ему. Аналогичными рассуждениями (проведите их) получаем, что точки A', B', C' лежат в этой же плоскости, что противоречит определению репера, то есть f – единственно. □

Используя эту теорему легко доказать свойства движений.
1^0. Любое движение переводит плоскость в плоскость, параллельные плоскости – в параллельные плоскости.

Доказательство. Пусть дано движение f и ортонормированный репер R. Обозначим $R' = f(R)$ – образ репера R при движении f. Это по доказанному выше ортонормированный репер. Тогда по основной теореме движение f задается парой реперов R, R' по правилу $\forall M(x, y, z)_R \to M'(x, y, z)_{R'}$. Пусть произвольная плоскость σ задается в репере R линейным уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда множество точек, являющееся образом плоскости σ при движении f задается в репере R' тем же уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Как мы знаем, линейное уравнение, записанное относительно любого репера, в частности, относительно ортонормированного репера, задает в пространстве плоскость. Таким образом, любое движение переводит плоскость в плоскость.
Пусть даны две параллельные плоскости σ_1 и σ_2. Относительно репера R их можно задать линейными

уравнениями $\sigma_1 : Ax+By+Cz+D_1 = 0$ и $\sigma_2 : Ax+By+Cz+D_2 = 0$. Тогда множества точек, являющиеся образами этих плоскостей задаются относительно репера R' теми же линейными уравнениями $Ax+By+Cz+D_1 = 0$ и $Ax+By+Cz+D_2 = 0$. Так как уравнения линейны и коэффициенты при переменных пропорциональны, то эти множества точек являются параллельными плоскостями. □

2^0. Любое движение переводит прямую в прямую, параллельные прямые – в параллельные прямые.

Доказательство. Пусть дано движение f. Зададим его парой ортонормированных реперов, как в свойстве 1^0. Пусть дана произвольная прямая ℓ. Рассмотрим ее как пересечение двух плоскостей $\ell = \sigma_1 \cap \sigma_2$. Так как движение является преобразованием (биекцией) и переводит плоскости в плоскости, прямая ℓ перейдет при движении f во множество точек, являющееся пересечением плоскостей σ_1' и σ_2', то есть в прямую.

Пусть даны две параллельные прямые $\ell_1 || \ell_2$. Допустим, что движение переведет их в пересекающиеся прямые $\ell_1' \cap \ell_2' = M'$. Так как движение является биекцией, у точки M' существует прообраз M, принадлежащий как прямой ℓ_1 так и прямой ℓ_2, что противоречит параллельности прямых ℓ_1 и ℓ_2. Допустим, что ℓ_1', ℓ_2' скрещиваются. Тогда на них можно выбрать четыре точки, не лежащие в одной плоскости: A', B', C', D'. Обозначим A, B, C, D их прообразы при движении f и через σ – плоскость, в которой лежат параллельные прямые $\ell_1 || \ell_2$. Получим, что в плоскости σ существует точка D, которая при движении f перейдет в точку D', не принадлежащую плоскости $\sigma' = f(\sigma)$. Это противоречит свойству 1^0. Случай, когда прямые ℓ_1', ℓ_2' совпадают разберите самостоятельно. □

3^0. Любое движение f переводит полупространство с границей σ в полупространство с границей $f(\sigma)$.

Доказательство. Вспомните, что по теореме о геометрическом смысле знака четырехчлена полупространство задается неравенством $Ax+By+Cz+D > 0$ (или $Ax+By+Cz+D < 0$) и докажите это свойство аналогично свойству 1^0. □

4^0. Любое движение сохраняет простое отношение трех точек, следовательно, сохраняет отношение "лежать между". Тогда любое движение переводит отрезок в отрезок, луч в луч.

Доказательство. Вспомните, как мы доказывали такое же свойство для плоскости и измените его для трехмерного случая. □

5^0. Угол переводит в равный ему угол.

Доказательство. Если дан развернутый угол, то утверждение свойства следует из свойства 2^0. Если дан не развернутый угол $\angle AOB$, то рассмотрим треугольник ΔAOB. При движении f этот треугольник перейдет в равный треугольник $\Delta A'O'B'$ (по третьему признаку). Тогда соответствующие углы этих треугольников будут равны, то есть $\angle AOB = \angle A'O'B'$. □

6^0. Любое движение f переводит аффинный репер в аффинный репер.

Доказательство. Предположим, что образом аффинного репера $R = (O, A, B, C)$ является четверка точек O', A', B', C', лежащая в одной плоскости. Тогда обратное преобразование, которое также является движением переведет точку O', принадлежащую плоскости $A'B'C'$ в точку O, не принадлежащую плоскости ABC, что противоречит свойству 2^0. □

Аналогично плоскому случаю вводятся два рода движения.

Определение 4.4. Пусть даны два аффинных репера R, R'. Будем говорить, что они *одинаково ориентированы*, если определитель матрицы перехода от репера R к реперу R' больше нуля и *противоположно ориентированы*, если – меньше нуля.

Определение 4.5. Будем говорить, что движение $f : E^3 \to E^3$ *сохраняет ориентацию пространства*, если для любого аффинного репера R его образ $f(R)$ одинаково с ним ориентирован и *меняет ориентацию пространства*, если R и $f(R)$ противоположно ориентированы.

Теорема 4.2. Любое движение пространства либо сохраняет, либо меняет ориентацию пространства.

Доказательство. Рассмотрим произвольное движение f. Возьмем ортонормированный репер R_0 и его образ при движении f: $R_0' = f(R)$. Тогда в силу основной теоремы движение f задается парой ортонормированных реперов R_0, R_0' по правилу $M(x,y,z)_{R_0} \to M'(x,y,z)_{R_0'}$.

Пусть $R = (O, A, B, C)$ – произвольный аффинный репер, $R' = f(R) = (O', A', B', C')$ – его образ при движении f. Тогда

$$O(x_O, y_O, z_0)_{R_0} \to O'(x_O, y_O, z_0)_{R_0'}$$
$$A(x_A, y_A, z_A)_{R_0} \to A'(x_A, y_A, z_A)_{R_0'}$$
$$B(x_B, y_B, z_B)_{R_0} \to B'(x_B, y_B, z_B)_{R_0'}$$
$$C(x_C, y_C, z_C)_{R_0} \to C'(x_C, y_C, z_C)_{R_0'}$$

Напомним, что для получения матрицы перехода от репера R_0 к реперу R (то есть от системы ко-

ординат, соответствующей реперу R_0 к системе координат, соответствующей реперу R) нужно по столбцам написать координаты векторов репера R в репере R_0. Тогда

$$R_0|R = \begin{vmatrix} x_A - x_O & x_B - x_O & x_C - x_0 \\ y_A - y_O & y_B - y_O & y_C - y_0 \\ z_A - z_0 & z_B - z_0 & z_C - z_0 \end{vmatrix} \quad R'_0|R' = \begin{vmatrix} x_A - x_O & x_B - x_O & x_C - x_0 \\ y_A - y_O & y_B - y_O & y_C - y_0 \\ z_A - z_0 & z_B - z_0 & z_C - z_0 \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы перехода от репера R к реперу R': $R|R' = (R|R_0)(R_0|R'_0)(R'_0|R') =$
$= \frac{1}{R_0|R}(R_0|R'_0)(R'_0|R') = (R_0|R'_0)$.
Итак, если $(R_0|R'_0) > 0$, то для любого репера R $R|R' > 0$ и движение f сохраняет ориентацию пространства. Если $(R_0|R'_0) < 0$, то для любого репера R $R|R' < 0$ и движение f меняет ориентацию пространста. □

Определение 4.6. Движения, сохраняющие ориентацию пространства называются движениями *первого рода*, а движения, меняющие ориентацию пространства – движениями *второго рода*.

Задача 4.2. Для всех примеров движений пространства определите их род.

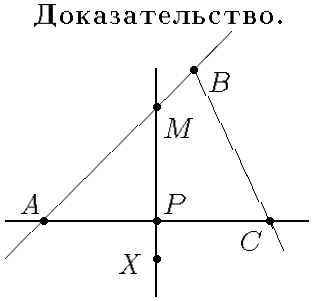
В заключение этого параграфа докажем несколько полезных утверждений.

Предложение 4.5. (о неподвижной прямой)
Если A, B – инвариантные точки при движении f, то любая точка X прямой (AB) будет инвариантной.

Доказательство. Пусть образ точки $X \in (AB)$ обозначен X'. Так как движение сохраняет простое отношение трех точек прямой, то $(AB, X) = (AB, X')$. Так как простое отношение однозначно определяет третью точку, $X = X'$. □

Предложение 4.6. (о неподвижной плоскости)
Если на плоскости σ существуют три инвариантные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, то любая точка этой плоскости инвариантна.

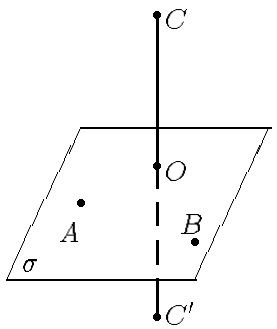
Доказательство.



Рассмотрим произвольную точку $X \in \sigma$. Проведем через эту точку прямую, пересекающую прямые (AB), (AC) в точках M, P соответственно. По предложению о неподвижной прямой точки M, P инвариантны. Далее применим то же предложение к прямой (MP) и точке X. Получим, что X – инвариантная. □

Теорема 4.3. (признак зеркальной симметрии)
Если множество инвариантных точек движения f есть плоскость, то f – зеркальная симметрия.

Доказательство.



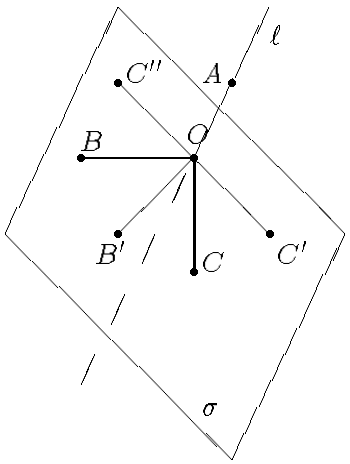
Обозначим σ – плоскость инвариантных точек. Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O, A, B, C)$, где $O, A, B \in \sigma$. Обозначим $R' = (O, A, B, C')$ – образ репера R при движении f. Репер R' является ортонормированным, следовательно, точка C' должна лежать на прямой (CO) и $CO = C'O$ (движение сохраняет расстояния). Тогда точка C' либо совпадает с точкой C, либо симметрична ей относительно плоскости σ. Первый случай не возможен, так как вне плоскости σ движение не имеет инвариантных точек.

Значит, имеет место второй случай. Но зеркальная симметрия $S_\sigma : R \to R'$ так же как и движение f. Тогда по основной теореме (единственность) $f = S_\sigma$. □

Следствие. Если движение пространства имеет по крайней мере три инвариантные точки, не лежащие на одной прямой, то это движение либо тождественное преобразование, либо зеркальная симметрия (докажите самостоятельно).

Теорема 4.4. (признак поворота вокруг оси)
Если множество инвариантных точек движения f есть прямая, то f является поворотом вокруг оси.

Доказательство.



Обозначим прямую инвариантных точек ℓ. Возьмем ортонормированный репер $R = (O, A, B, C)$ так, чтобы $O, A \in \ell$. Образом ортонормированного репера является ортонормированный репер $R' = (O, A, B', C')$, либо ортонормированный репер $R'' = (O, A, B', C'')$ как показано на рисунке. Так как прямые (OB), (OB'), (OC), (OC'), (OC'') перпендикулярны прямой ℓ, то точки B, B', C, C', C'' лежат в одной плоскости, перпендикулярной прямой ℓ. Разберем два возможных случая подробнее:

а) $f : R \to R'$. Имеем $OB' = OB$, $OC' = OC$. Докажем, что $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}})$.

Действительно, $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) + (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}}) + (\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OB'}}) = \pm\frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}}) + \mp\frac{\pi}{2} = (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}})$.

Обозначим $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}}) = \alpha$. Тогда поворот вокруг ℓ на угол α тоже переводит репер R в репер R'. По основной теореме получаем, что $f = R^{\alpha}_{\ell}$.

б) $f : R \to R''$. Имеем $OB' = OB$, $OC'' = OC$. Обозначим плоскость, в которой лежат точки B, B', C, C', C'', σ. Тогда в плоскости σ индуцируется движение, которое меняет ориентацию репера и имеет по крайней мере одну инвариантную точку O, то есть осевая симметрия. Она имеет еще инвариантные точки, отличные от O, то есть не лежащие на прямой ℓ. Это противоречит условию теоремы. □

§33. Композиция движений пространства E^3.

Определение 4.7. *Композицией* преобразований называется их последовательное выполнение.

$$g \circ f(M) = g(f(M)),\ M \in E^3$$

Лемма 4.1. (о подвижности пространства)
Пусть в E^3 заданы два плоских ортонормированных репера $R = (O, A, B)$ и $R' = (O', A', B')$. Тогда существует единственное движение первого рода f, переводящее R в R' и единственное движение второго рода g, переводящее репер R в репер R'. При этом $g = S_{(O'A'B')} \circ f$.

Доказательство. ∃). Дополним плоский ортонормированный репер R до правого пространственного ортонормированного репера $\tilde{R} = (O, A, B, C)$. Плоский ортонормированный репер R' дополним сначала до правого пространственного ортонормированного репера $\tilde{R}'$. Тогда по основной теореме пара ортонормированных одинаково ориентированных реперов $\tilde{R}$, $\tilde{R}'$ задаст движение первого рода, переводящее $R \to R'$. Если дополнить плоский репер R' до пространственного левого ортонормированного репера $\tilde{R}'$, то по основной теореме пара реперов $\tilde{R}$, $\tilde{R}'$ задаст движение второго рода, переводящее репер $R \to R'$.

!). Пусть существуют два движения f, g, переводящие плоский репер R в плоский репер R'. Рассмотрим движение $g \circ f^{-1}$. Это движение переводит $g \circ f^{-1}(O') = g(O) = O'$, $g \circ f^{-1}(A') = g(A) = A'$, $g \circ f^{-1}(B') = g(B) = B'$, то есть имеет три инвариантные точки, не лежащие на одной прямой, то есть является либо тождественным преобразованием, либо зеркальной симметрией относительно плоскости $(O'A'B')$. В первом случае $g \circ f^{-1} = id$, то есть $g = f$. Во втором случае $g \circ f^{-1} = S_{(O'A'B')}$, то есть $g = S_{(O'A'B')} \circ f$. Так как зеркальная симметрия второго рода, то либо движение g – первого рода, тогда движение f имеет второй род, либо наоборот. □

Замечание. В доказательстве единственности движения в лемме о подвижности пространства мы не пользовались ортонормированностью реперов, то есть единственность верна в случае произвольных плоских аффинных реперов.

Теорема 4.5. (о композиции зеркальных симметрий)
Движение пространства E^3 представимо в виде композиции не более четырех зеркальных симметрий.

Доказательство. Пусть дано движение f пространства E^3. Рассмотрим плоский ортонормированный репер $R = (O, A, B)$ и его образ $R' = (O', A', B')$ при движении f, который тоже является

ортонормированным репером. Возможны случаи:
1) Репер R переходит в репер R' при зеркальной симметрии S_π относительно некоторой плоскости π. Тогда по лемме о подвижности пространства получаем, что либо $f = S_\pi$, либо $f = S_{(O'A'B')} \circ S_\pi$.
2) Общий случай. Пусть α – плоскость, относительно которой симметричны точки O и O' (если $O = O'$, то в качестве α возьмем любую плоскость, проходящую через точку O). Обозначим $A'' = S_\alpha(A)$, $B'' = S_\alpha(B)$. Так как движение сохраняет расстояния, $OA = O'A'$, $OA = O'A''$, то есть $O'A' = O'A''$. Пусть точки A', A'' различны. Тогда точка O' равноудалена от них и принадлежит плоскости β, относительно которой эти точки симметричны (то есть $A'' = S_\beta(A')$). Если точки A', A'' совпадают, то в качестве плоскости β возьмем любую плоскость, содержащую прямую $(O'A')$. Обозначим $B^* = S_\beta(B'')$. Пусть γ – плоскость относительно которой симметричны точки B' и B^* (если $B^* = B'$, то за γ возьмем плоскость $(O'A'B')$).
Докажем, что A', O' принадлежат плоскости γ. Действительно, используя сохранение расстояний при движении, получим цепочки равенств: $O'B' \overset{f}{=} OB \overset{S_\alpha}{=} O'B'' \overset{S_\beta}{=} O'B^*$, $A'B' \overset{f}{=} AB \overset{S_\alpha}{=} A''B'' \overset{S_\beta}{=} A'B^*$. Таким образом, мы получаем $S_\gamma(A') = A'$, $S_\gamma(O') = O'$, $S_\gamma(B^*) = B'$. Тогда движения f и $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ переводят репер R в репер R', то есть по лемме о подвижности пространства либо $f = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ (для движения второго рода), либо $f = S_{(O'A'B')} \circ S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ (для движения первого рода). □
Следствие. Композиция зеркальных симметрий относительно двух пересекающихся плоскостей есть поворот вокруг прямой их пересечения.

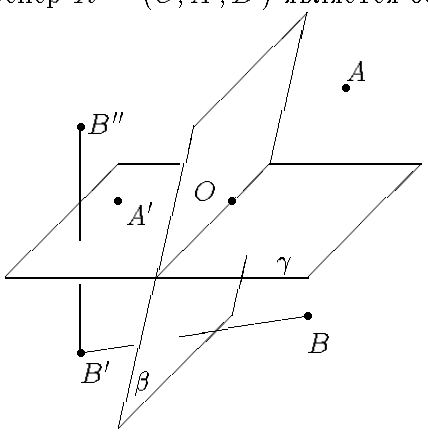
Доказательство. Обозначим $f = S_\beta \circ S_\alpha$. Это движение первого рода (как композиция двух движений второго рода). Все точки прямой $\ell = \alpha \cap \beta$ инвариантные. Допустим, что существует инвариантная точка K, не лежащая на прямой ℓ. Тогда плоскость, задаваемая точкой K и прямой ℓ, является плоскостью инвариантных точек, то есть f по признаку либо зеркальная симметрия, либо тождественное преобразование. Но зеркальная симметрия второго рода, следовательно, $f = id$. Тогда $S_\beta \circ S_\alpha = id$, то есть $S_\alpha = S_\beta$, то есть $\alpha = \beta$, что противоречит условию. Итак, множество всех инвариантных точек движения f есть прямая ℓ, то есть f – поворот вокруг оси ℓ (по признаку). □

Вопрос 4.1. Чему равен угол поворота?
Замечание. Задавать поворот вокруг оси удобнее как композицию зеркальных симметрий, так как последовательность плоскостей автоматически задает направление поворота.

§34. Классификация движений пространства E^3.

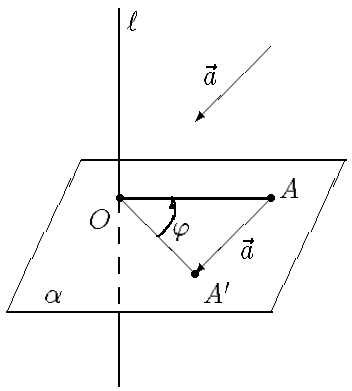
Теорема 4.6. Любое движение f первого рода пространства E^3, имеющее инвариантную точку, является поворотом вокруг прямой, проходящей через эту точку (Здесь для удобства мы рассматриваем тождественное преобразование как поворот на нулевой угол).

Доказательство. Пусть O – инвариантная точка движения f первого рода. Рассмотрим ортонормированный репер $R = (O, A, B)$. Обозначим $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Тогда ортонормированный репер $R' = (O, A', B')$ является образом репера R при движении f.



Тогда движение f и композиция зеркальных симметрий $S_\gamma \circ S_\beta$ одинаково переводит репер R в репер R'. Здесь β – плоскость, относительно которой симметричны точки A, A', γ – плоскость, относительно которой симметричны точки B' и $B'' = S_\beta(B)$. Так как $OA = OA'$, точка O лежит в плоскости β. Далее, имеем $OB' \overset{f}{=} OB \overset{S_\beta}{=} OB''$, то есть точка O равноудалена от точек B', B'', то есть принадлежит их плоскости симметрии γ. Итак, мы получили, что плоскости β и γ пересекаются по прямой, содержащей точку O. Так как $A'B' \overset{f}{=} AB \overset{S_\beta}{=} A'B''$, точка A' принадлежит плоскости симметрии точек B', B'', то есть плоскости γ. По лемме о подвижности пространства с учетом того, что f – движение первого рода, получим $f = S_\gamma \circ S_\beta$ □

Лемма 4.2. (о композиции параллельного переноса и поворота)
$T_{\vec{a}} \circ R^\varphi_\ell = R^\varphi_{\ell'}$, $\vec{a} \perp \ell$, $\ell' \| \ell$.
Доказательство.



Обозначим $f = T_{\vec{a}} \circ R^{\varphi}_{\ell}$. Проведем произвольную плоскость $\alpha \perp \ell$. Обозначим $O = \ell \cap \alpha$. Построим в плоскости α равнобедренный треугольник AOA' такой, что $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) = \varphi$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$. Тогда $T_{\vec{a}} \circ R^{\varphi}_{\ell}(A') = T_{\vec{a}}(A) = A'$, то есть A' является инвариантной точкой движения первого рода f. По предыдущей теореме f является поворотом вокруг оси ℓ', проходящей через эту точку. Так плоскость $\alpha \perp \ell$ мы выбирали произвольно и для каждой такой плоскости мы получим равные треугольники AOA', то $\ell' \perp \alpha$, то есть $\ell' || \ell$. $\square$

Вопрос 4.2. Докажите, что угол поворота у получившегося движения равен φ.

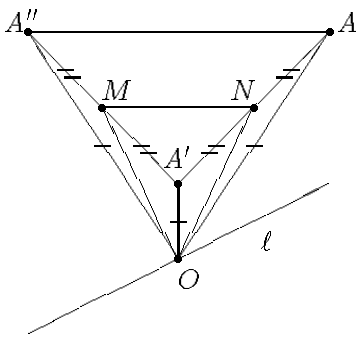
Теорема 4.7. (о винтовом движении)
Любое движение первого рода пространства E^3 есть винторое, которое, в частности, может быть параллельным переносом или поворотом вокруг оси.

Доказательство. Пусть дано произвольное движение первого рода $f : E^3 \to E^3$. Рассмотрим произвольную точку $A \in E^3$. Обозначим $A' = f(A)$, $\vec{a} = \overrightarrow{A'A}$. Тогда A' – инвариантная точка движения первого рода $g = f \circ T_{\vec{a}}$. Действительно, $g(A') = f \circ T_{\vec{a}}(A') = f(A) = A'$. Следовательно, по доказанному выше $g = R^{\varphi}_{\ell}$, $A' \in \ell$. Тогда $f = g \circ T_{-\vec{a}} = R^{\varphi}_{\ell} \circ T_{-\vec{a}}$. Разложим вектор $-\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} || \ell$, $\vec{c} \perp \ell$. Тогда $f = R^{\varphi}_{\ell} \circ T_{-\vec{a}} = R^{\varphi}_{\ell} \circ T_{\vec{c}} \circ T_{\vec{b}} = R^{\varphi}_{\ell'} \circ T_{\vec{b}}$, $\vec{b} || \ell || \ell'$, то есть f – винтовое движение. $\square$

Теорема 4.8. Любое движение второго рода пространства E^3, имеющее хотя бы одну инвариантную точку, является зеркальным поворотом, который может быть, в частности, зеркальной или центральной симметрией.

Доказательство. Пусть дано движение второго рода f, O – его инвариантая точка. Тогда движение f может иметь либо плоскость инвариантных точек, либо единственную инвариантную точку (если движение имеет прямую инвариантных точек, то по доказанному это поворот вокруг оси – движение первого рода, если инвариантными являются все точки пространства, то это тождественное преобразование – тоже движение первого рода).

Вопрос 4.3. А почему не может быть две, три, четыре и т.д. инвариантные точки? А может ли быть множество инвариантных точек движения являться множеством внутренних точек некоторого равностороннего треугольника?
1) Если движение f имеет плоскость неподвижных точек, то по признаку это зеркальная симметрия.
2) Пусть f имеет единственную неподвижную точку O.
а) Если для любой точки $A \neq O$ имеем $A' = f(A)$ принадлежит прямой (OA) и $OA = OA'$, то f – центральная симметрия.
б) Пусть существует точка $A \neq O$, такая, что $A' = f(A) \notin (OA)$.



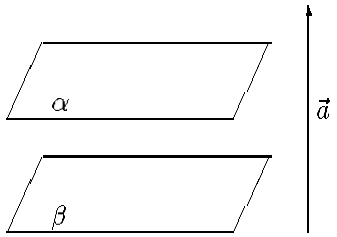
Обозначим $A'' = f(A') \neq A$ (иначе середина отрезка $[AA']$ будет инвариантной точкой, что противоречит единственности инвариантной точки O). Пусть M – середина отрезка $[A'A'']$, N – середина отрезка $[AA']$. Проведем через точку O прямую ℓ, перпендикулярную плоскости (MON) и рассмотрим композицию отображений $S_{(MON)} \circ R^{\varphi}_{\ell}$, где $\varphi = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$. Докажем, что такая композиция переводит плоский репер $R = (O, A, A')$ в репер $R' = (O, A', A'')$.

Действительно, $O \to O$, так как является инвариантной точкой как поворота, так и зеркальной симметрии. Чтобы доказать, что $A \to A'$, обозначим $\tilde{A} = R^{\varphi}_{\ell}(A)$, $\tilde{A}' = R^{\varphi}_{\ell}(A')$. Точки $\tilde{A}$, A' и $\tilde{A}'$, A'' равноудалены от плоскости (MNO) и, следовательно, при симметрии относительно этой плоскости переходят друг в друга.

Очевидно, что $f : R \to R'$. Тогда по лемме о подвижности пространства, учитывая, что f – движение второго рода, получим $f = S_{(MON)} \circ R^{\varphi}_{\ell}$. $\square$

Лемма 4.3. (о композиции переноса и зеркальной симметрии)
$S_\alpha \circ T_{\vec{a}} = S_\beta$, $\vec{a} \perp \alpha$, $\beta \| \alpha$.

Доказательство.



Построим плоскость $\beta = T_{-\frac{\vec{a}}{2}}(\alpha)$. Тогда β – плоскость инвариантных точек движения $S_\alpha \circ T_{\vec{a}}$ (проверьте!) и $\beta \| \alpha$. По признаку зеркальной симметрии получим $S_\alpha \circ T_{\vec{a}} = S_\beta$. □

Вопрос 4.4. Чему равна композиция $T_{\vec{a}} \circ S_\alpha$, $\vec{a} \perp \alpha$?

Вопрос 4.5. Определите вид композиции $T_{\vec{a}} \circ S_\alpha$, $\forall \vec{a}$, $\forall \alpha$.

Теорема 4.9. (о скользящем отражении)
Любое движение пространства второго рода, не имеющее инвариантных точек, является скользящим отражением.

Доказательство. Пусть f – движение второго рода, не имеющее инвариантных точек. Возьмем произвольную точку A. Обозначим $A' = f(A)$, $\vec{b} = \overrightarrow{A'A}$, $g = f \circ T_{\vec{b}}$. Имеем $g(A') = f(A) = A'$, то есть A' – инвариантная точка движения g и, следовательно, по доказанному выше g является зеркальным поворотом, $g = R^\varphi_\ell \circ S_\alpha$, $\ell \perp \alpha$. Тогда $R^\varphi_\ell \circ S_\alpha = f \circ T_{\vec{b}}$ или $f = R^\varphi_\ell \circ S_\alpha \circ T_{-\vec{b}}$. Разложим вектор $-\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, где $\vec{b}_1 \| \alpha$, $\vec{b}_2 \perp \alpha$. Тогда $f = R^\varphi_\ell \circ \underbrace{S_\alpha \circ T_{\vec{b}_2}}_{S_\beta} \circ T_{\vec{b}_1} = R^\varphi_\ell \circ S_\beta \circ T_{\vec{b}_1}$. Итак,

$$f = R^\varphi_\ell \circ S_\beta \circ T_{\vec{b}_1} \tag{1}$$

Докажем, что в этом равенстве $R^\varphi_\ell = id$.
Предположим, что $R^\varphi_\ell \neq id$. Имеем $\ell \perp \alpha$, $\alpha \| \beta$, следовательно, поворот R^φ_ℓ и зеркальная симметрия S_β коммутируют, то есть $R^\varphi_\ell \circ S_\beta = S_\beta \circ R^\varphi_\ell$. Применим это равенство к (1): $f = S_\beta \circ R^\varphi_\ell \circ T_{\vec{b}_1}$. Рассмотрим движение $R^\varphi_\ell \circ T_{\vec{b}_1}$, $\vec{b}_1 \| \alpha$, $\alpha \perp \ell$, то есть $\vec{b}_1 \perp \ell$. По лемме о композиции поворота и параллельного переноса получим, что $R^\varphi_\ell \circ T_{\vec{b}_1}$ – поворот вокруг некоторой оси $\ell' \| \ell$. Тогда $f = S_\beta \circ R^\psi_{\ell'}$ – зеркальный поворот, а он имеет инвариантную точку. Мы пришли к противоречию, то есть $R^\varphi_\ell = id$ и $f = S_\beta \circ T_{\vec{b}_1}$, $\vec{b}_1 \| \beta$ – скользящее отражение. □

Итак, мы получили классификацию движений пространства: любое движение пространства первого рода является винтовым движением, в частности, поворотом или параллельным переносом, любое движение второго рода является либо зеркальным поворотом, в частности, центральной симметрией, либо скользящим отражением.

§35. Преобразование подобия пространства E^3.

Определение 4.8. Преобразование f пространства E^3 называется *преобразованием подобия*, если существует положительное число k такое, что для любых точек $A, B \in E^3$ и их образов $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ $A'B' = kAB$. Число k называется *коэффициентом подобия*.

Множество всех подобий образует группу (доказательство дословно переносится из плоского случая). Очевидно, что при $k = 1$ подобие является движением.

Важным примером подобия, отличного от движения является гомотетия.

Определение 4.9. Пусть в пространстве E^3 фиксирована точка M_0 и фиксировано ненулевое число m. Тогда преобразование $H^m_{M_0}$ пространства, ставящее в соответствие каждой точке $M \neq M_0$ точку M' такую, что

$$\overrightarrow{M_0M'} = m\overrightarrow{M_0M}$$

а точке $M_0 \to M_0$, называется *гомотетией* пространства E^3. Число m называется *коэффициентом гомотетии*, точка M_0 – *центром гомотетии*.

Предложение 4.7. Гомотетия является подобием с коэффициентом $|m|$.

Доказательство. Пусть M, N – произвольные точки пространства, $M' = H^m_{M_0}(M)$, $N' = H^m_{M_0}(N)$ – их образы при данной гомотетии. Тогда по определению гомотетии имеем $\overrightarrow{M_0M'} = m\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0N'} = m\overrightarrow{M_0N}$. Вычислим $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M_0} + \overrightarrow{M_0N'} = -m\overrightarrow{M_0M} + m\overrightarrow{M_0N} = m\overrightarrow{MN}$. Итак,

$$\forall M, N \in \sigma\, \overrightarrow{M'N'} = m\overrightarrow{MN} \tag{2}$$

В частности, из (2) следует, что $|\overrightarrow{M'N'}| = |m||\overrightarrow{MN}|$, то есть $M'N' = |m|MN$. По определению получаем, что $H^m_{M_0}$ – подобие с коэффициентом $|m|$. □

Следствие. $\forall M, N \in E^3$

1) $\overrightarrow{M'N'} = m\overrightarrow{MN}$;

2) $(M'N')||(MN)$.

Пусть $R = (M_0, A, B, C)$ – ортонормированный репер. Тогда, расписывая определение гомотетии в координатах, получим формулы гомотетии "в удобном" репере:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = my \\ z' = mz \end{cases}$$

Используя эти формулы, аналогично плоскому случаю легко доказать (докажите самостоятельно), что гомотетия переводит плоскость в плоскость; плоскость, проходящую через центр гомотетии в себя; плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость; сохраняет простое отношение трех точек, то есть переводит отрезок в отрезок, луч в луч, полуплоскость в полуплоскость, угол в равный угол, репер в репер.

Напомним, что на полоскости гомотетия всегда была первого рода, а в пространстве мы имеем другое утверждение.

Теорема 4.10. Гомотетия является преобразованием первого рода, если $m > 0$; гомотетия ялвяется преобразованием второго рода, если $m < 0$.

Доказательство. Пусть дана гомотетия H. Рассмотрим произвольный репер $R = (A, B, C, D)$ и его образ $R' = (A', B', C', D')$. По доказанному выше имеем $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = m\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'D'} = m\overrightarrow{AD}$. Тогда определитель матрицы перехода от репера R к реперу R' имеет вид $R|R' = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3$. Если $m > 0$, то $R|R' > 0$ и гомотетия является преобразованием первого рода. Если $m < 0$, то $R|R' < 0$ и гомотетия является преобразованием второго рода. □

Теорема 4.11. Любое преобразование подобия f^k пространства можно представить в виде композиции гомотетии с тем же коэффициентом и произвольным центром и движения.

Доказательство. Рассмотрим преобразование $f^k \circ (H^k_O)^{-1}$. Это композиция двух подобий с коэффициентами k и $\frac{1}{k}$, то есть подобие с коэффициентом 1, то есть движение. Обозначим его g. Имеем

$$g = f^k \circ (H^k_O)^{-1}$$

Умножим обе части этого равенства справа на H^k_O. Тогда получим, что $f^k = g \circ H^k_O$, то есть искомое разложение. □

В отличие от плоскости, в пространстве существуют гомотетии двух родов и, следовательно, в разложении подобия $f^k = g \circ H^{\pm k}_O$ в композицию гомотетии и движения, гомотитию можно взять того же рода, что и подобие. Тогда движение будет всегда получаться первого рода. Мы помним, что движениями первого рода являются переносы, повороты и винтовые движения. Но композиция гомотетии и переноса есть гомотетия с другим центром (докажите!), то есть все подобия пространства сводятся к композиции гомотетии и поворота

$$f^k = R^\alpha \circ H^{\pm k}_O$$

При этом ось поворота зависит от выбора точки O.

Лемма 4.4. Подобие, отличное от движения, не может иметь более одной инвариантной точки.

Доказательство. Пусть подобие f имеет две инвариантные точки A, B, то есть $A = f(A)$, $B = f(B)$. По определению подобия имеем $AB = kAB$, то есть $k = 1$. Подобие f является движением. □

Лемма 4.5. Подобие, не являющееся движением, всегда имеет единственную инвариантную точку, которая называется *центром подобия.*

Доказательство. Разложим данное подобие f в композицию движения и поворота $f^k = R^\alpha \circ H_O^{\pm k}$. Если центр гомотетии $O \in \ell$, то O – инвариантная точка и по предыдущей лемме других инвариантных точек нет. Если $O \notin \ell$, то через точку O проведем плоскость π перпендикулярно прямой ℓ. Она является инвариантной плоскостью подобия f^k. Тогда на этой плоскости индуцируется подобие $\hat{f}^k$, отличное от движения. Это подобие имеет инвариантную точку Q. Эта точка и будет инвариантной точкой подобия f^k. □

Получим классификацию подобий пространства E^3.

Теорема 4.12. Любое подобие пространства, отличное от движения и гомотетии, является композицией гомотетии и поворота вокруг оси, содержащей центр гомотетии, которая называется *гомотетическим поворотом.*

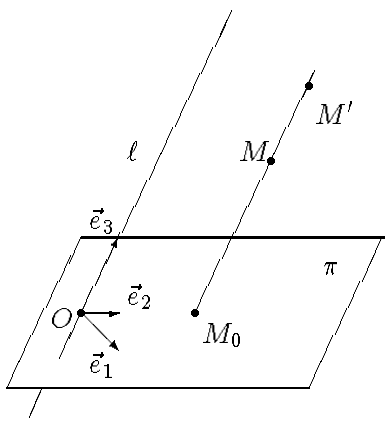
Доказательство. Пусть дано подобие f, отличное от движения и гомотетии. Тогда по лемме оно имеет центр подобия Q. Возьмем центр подобия в качестве центра гомотетии в разложении подобия $f^k = R_\ell^\alpha \circ H_Q^{\pm k}$. Так как Q являтся инвариантной точкой и гомотетии и подобия, то она будет инвариантной точкой и поворота, следовательно, будет лежать на его оси, то есть $Q \in \ell$. □

§36. Аффинные преобразования пространства E^3.

Определение 4.10. Аффинным преобразованием пространства E^3 называется преобразование, которое любые три точки, лежащие на одной прямой, переводит в три точки, лежащие на одной прямой и при этом сохраняет простое отношение трех точек.

Из свойств дижений и подобий следует, что они являются частными случаями аффинных преобразований. Приведем пример аффинного преобразования, отличного от названных.

Пример. Фиксируем плоскость π, прямую $\ell \nparallel \pi$ и ненулевое число λ. Поставим в соответствие каждой точке плоскоти π ее саму, а каждой точке $M \neq \pi$ такую точку M', что $\overrightarrow{M_0M'} = \lambda\overrightarrow{M_0M}$, где $MM' \| \ell$, $M_0 = (MM') \cap \pi$. Такое преобразование пространства называется *косым сжатием* к плоскости π. Говорят, что прямая ℓ задает *направление сжатия*, а число λ называется *коэффициентом сжатия.* Если прямая $\ell \perp \pi$, то косое сжатие называется *сжатием.*



Возьмем аффинный репер $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ как показано на рисунке (векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ параллельны плоскости π). Обозначим координаты точек $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$. Тогда $M_0(x, y, 0)$ и из векторного равенства $\overrightarrow{M_0M'} = \lambda\overrightarrow{M_0M}$ получим

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \lambda z \end{cases}$$

Из этих формул легко видеть, что построенное отображение является биекцией, то есть преобразованием. Докажем, что это преобразование аффинное.

Рассмотрим три произвольные точки $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, принадлежащие одной прямой, то есть векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны, то есть их координаты пропорциональны: $\frac{b_1-a_1}{c_1-b_1} = \frac{b_2-a_2}{c_2-b_2} = \frac{b_3-a_3}{c_3-b_3}$. Рассмотрим образы этих точек $A'(a_1, a_2, \lambda a_3)$, $B'(b_1, b_2, \lambda b_3)$, $C'(c_1, c_2, \lambda c_3)$. Проверим пропорциональность координат векторов $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$: $\frac{b_1-a_1}{c_1-b_1} = \frac{b_2-a_2}{c_2-b_2} = \frac{\lambda(b_3-a_3)}{\lambda(c_3-b_3)}$. Координаты пропорциональны, то есть точки A', B', C' лежат на одной прямой и при этом сохраняется простое отношение трех точек (AC, B). Таким образом, мы доказали, что косое сжатие является аффинным преобразованием.

Аналогично плоскому случаю, любое аффинное преобразование пространства можно задать парой аффинных реперов. А именно,

Теорема 4.13. (основная)

Пусть даны аффинные реперы R и R'. Тогда существует единственное аффинное преобразование f пространства, переводящее репер R в репер R'. При этом $\forall M(x, y, z)_R \to M'(x, y, z)_{R'}$. (докажите самостоятельно по аналогии с плоским случаем)

Используя основную теорему легко доказать свойства аффинных преобразований:
1^0. Аффинное преобразование переводит плоскость в плоскость, параллельные плоскости в паралелльные плоскости.
2^0. Аффинное преобразование f переводит полупространство с границей σ в полупространство с границей $f(\sigma)$.
3^0. Так как по определению аффинное преобразование f сохраняет простое отношение трех точек, то f переводит отрезок в отрезок, луч в луч, полуплоскость в полуплоскость, угол в угол (не сохраняет величину угла).
4^0. Аффинное преобразование переводит аффинный репер в аффинный репер.

Теорема 4.14. Множество всех аффинных преобразований пространства E^3 образует группу. Она обозначается A^3.

Доказательство. Достаточно доказать, что множество всех аффинных преобразований является подгруппой группы всех преобразований пространства. Пусть даны два аффинных преобразования. Тогда их композиция, то есть последовательное выполнение переводит любые три точки, лежащие на одной прямой в три точки также лежащие на одной прямой, при этом сохраняется их простое отношение. Рассмотрим аффинное преобразование f. Допустим, что обратное ему преобразование f^{-1} переводит три точки A', B', C', лежащие на одной прямой в три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Дополним их точкой D до аффинного репера. Тогда получаем, что аффинное преобразование f переводит аффинный репер (A, B, C, D) в четыре точки A', B', C', D', лежащие в одной плоскости, что противоречит свойствам аффинных преобразований. □

Примерами подгрупп группы аффинных преобразований пространства служат группа D^3 движений пространства, группа P^3 подобий, группа аффинных преобразований первого рода.

Рассмотрим множество аффинных преобразований, которые переводят некоторую фиксированную точку O пространства E^3 в себя. Такие преобразования называются *центро-аффинными преобразованиями*. Это множество также образует подгруппу группы аффинных преобразований.

Определение 4.11. Пусть G – группа преобразований пространства E^3. Две фигуры F_1, F_2 из E^3 называются *G-эквивалентными*, если существует преобразование $f \in G$ такое, что $f(F_1) = F_2$.

Например, согласно основной теореме любые два тетраэдра являются A^3-эквивалентными, любые два куба – P^3-эквивалентными, а любые два отрезка равной длины – D^3-эквивалентными.

Для конкретной группы преобразований термин "G-эквивалентность" заменяется другими терминами. Например, для $G = D^3$ – словом "равны" или "конгруэнтны", для $G = P^3$ – словом "подобны", для $G = A^3$ – "аффинно эквивалентны".

Пусть F – некоторая фигура пространства E^3. Те свойства этой фигуры, которые сохраняются при любом преобразовании $f \in G$, называются *инвариантными свойствами* фигуры F относительно группы G.
Например, для группы аффинных преобразований A^3: инвариантными свойствами являются свойства фигуры быть точкой, прямой, плоскостью, линией (поверхностью) второго порядка. Для группы подобий P^3: свойство быть параллелограммом, величина угла (основной инвариант). Для группы движений основное инвариантное свойство – длина отрезка.

В этом подходе под геометрией понимается наука, изучающая такие свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях некоторой группы G. Такой взгляд на геометрию (или, как говорят, групповой подход к геометрии) был впервые сформулирован Феликсом Клейном в его работе "Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований" ("Эрлангенская программа"), изданной в 1872 году.

Среди различных геометрий, которые выделяются при таком подходе, наиболее распространенными являются аффинная геометрия, то есть геометрия группы A^3 и евклидова геометрия – геометрия группы P^3 (иногда D^3). Примерами объектов аффинной геометрии являются точки, прямые, плоскости, треугольники, параболы и т.д. Примером теоремы аффинной геометрии является, например, теорема о точке пересечения медиан треугольника. Примерами объектов евклидовой геометрии служат прямоугольные треугольники, квадраты, сферы и т.д. Примером теоремы служит теорема Пифагора.
Замечание. Относительно группы P^3 все окружности (также как и правильные треугольники, квадраты) "одинаковы", то есть P^3-эквивалентны. А в случае группы D^3 окружности различных радиусов уже "различаются", то есть не являются D^3-эквивалентными.

К настоящему времени разработаны многие геометрические теории, которые не укладываются в схему Эрлангенской программы Ф.Клейна.