# ГЛАВА 1. Проективная геометрия

## §1.1. Проективное пространство

Пусть дано $(n+1)$-мерное векторное пространство $V$ (§ 6.1, часть I) и непустое множество $P$ произвольной природы. Говорят, что множество $P$ *наделено структурой $n$-мерного проективного пространства*, если задано отображение

$$\pi : V \setminus \{\vec{0}\} \to P,$$

ставящее в соответствие каждому ненулевому вектору из $V$ элемент из множества $P$ и удовлетворяющее двум условиям

(1) отображение $\pi$ является сюръективным;

(2) $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ тогда и только тогда, когда существует ненулевое вещественное число $\lambda$, такое что $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, то есть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Пара $(P, \pi)$ называется *проективным пространством размерности $n$, порожденным векторным пространством $V$*. Будем обозначать проективное пространство $(P, \pi)$ через $P$.

Условия, которым удовлетворяет отображение $\pi$, называются *аксиомами проективного пространства.* Элементы проективного пространства $P$ называются *точками* и обозначаются большими буквами латинского алфавита. Если для точки $X$, принадлежащей проективному пространству $P$, выполняется равенство $\pi(\vec{x}) = X$, для некоторого вектора $\vec{x}$, то говорят, что *вектор $\vec{x}$ порождает точку $X$*, а *точка $X$ порождена вектором $\vec{x}$.*

**Замечание 1.** Пусть точка $X$ проективного пространства $P$ порождается вектором $\vec{x}$. Тогда согласно второй аксиоме проективного пространства любой вектор $\vec{y}$, коллинеарный вектору $\vec{x}$, порождает ту же точку $X$. Если вектор $\vec{y}$ не коллинеарен вектору $\vec{x}$, то согласно второй аксиоме проективного пространства $\pi(\vec{y}) \neq \pi(\vec{x})$, то есть вектор $\vec{y}$ порождает точку, отличную от точки $X$. Итак, получаем, что каждая точка проективного пространства $P$ порождается всеми ненулевыми векторами векторного пространства $V$, коллинеарными вектору $\vec{x}$. Такие векторы, дополненные нуль-вектором, образуют одномерное векторное подпространство $L$ векторного пространства $V$. В связи с этим будем говорить, что *точка $X$ порождается одномерным векторным подпространством $L$*. Очевидно, что $L$ является линейной оболочкой $L(\vec{x})$ (§ 6.3, часть I) вектора $\vec{x}$.

Пусть $W$ – $(k+1)$-мерное векторное подпространство векторного пространства $V$, причем $k \geq 1$. Подмножество $\pi(W \setminus \{\vec{0}\})$ точек проективного пространства $P$ называется *$k$-мерным проективным подпространством* проективного пространства $P$ или *$k$-мерной проективной плоскостью* (короче, *$k$-плоскостью*) в $P$. При этом будем говорить, что векторное подпространство $W$ *порождает $k$-мерное проективное подпространство* $\pi(W \setminus \{\vec{0}\})$.

Пусть даны два векторных подпространства $W$ и $U$ векторного пространства $V$, размерности которых равны $k+1$ и $\ell+1$, соответственно. Допустим для определенности, что

$k < \ell$. Будем говорить, что $k$-плоскость $\pi(W \setminus \{\vec{0}\})$ *содержится* в $\ell$-плоскости $\pi(U \setminus \{\vec{0}\})$, если $W$ является подмножеством в $U$. Аналогичным образом будем говорить, что точка $X$ проективного пространства $P$ *принадлежит* $k$-плоскости $\pi(W \setminus \{\vec{0}\})$, если векторное подпространство $L$, порождающее эту точку, содержится в векторном подпространстве $W$.

**Замечание 2.** Если мы возьмем множество $P$, состоящее из конкретных объектов и зададим на нем конкретное отображение, удовлетворяющее аксиомам проективного пространства, то будем говорить, что построена *модель* проективного пространства.

**Пример 1.1.** Пусть $V$ – $(n+1)$-мерное векторное пространство. Рассмотрим множество $P$, состоящее из всевозможных одномерных векторных подпространств векторного пространства $V$. Зададим на этом множестве структуру проективного пространства. Пусть отображение $\pi : V \setminus \{\vec{0}\} \to P$ задается формулой

$$\pi(\vec{x}) = L(\vec{x}),$$

где $\vec{x}$ – произвольный элемент из $V \setminus \{\vec{0}\}$, $L(\vec{x})$ – линейная оболочка вектора $\vec{x}$. Как известно (§ 6.3, часть I), $L(\vec{x})$ является одномерным векторным подпространством в векторном пространстве $V$, а значит, отображение $\pi$ задано корректно.

Проверим, что для отображения $\pi$ выполняются обе аксиомы проективного пространства. Отображение $\pi$ сюръективно, так как в любом одномерном подпространстве $L$ существует хотя бы один ненулевой вектор $\vec{x}$. Он будет прообразом подпространства $L$ при отображении $\pi$.

Рассмотрим два ненулевых вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$ из векторного пространства $V$. При отображении $\pi$ им соответствуют их линейные оболочки $L(\vec{x})$ и $L(\vec{y})$. Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, то есть $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ для некоторого ненулевого вещественного числа $\lambda$, то по определению линейной оболочки получим, что $L(\vec{x}) = L(\vec{y})$. Значит, $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$. Обратно, пусть $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$, то есть $L(\vec{x}) = L(\vec{y})$. В частности, вектор $\vec{x}$ принадлежит линейной оболочке $L(\vec{y})$. Следовательно, по определению линейной оболочки (§ 6.3, часть I) существует вещественное число $\lambda$, такое что $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, то есть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Итак, для введенного отображения $\pi$ выполняются обе аксиомы проективного пространства, следовательно, множество одномерных подпространств $(n+1)$-мерного векторного пространства $V$ обладает структурой $n$-мерного проективного пространства.

Так как множество $P$ в данном случае состоит из конкретных объектов (одномерных подпространств), мы получили модель $n$-мерного проективного пространства (замечание 2). Она называется *канонической моделью проективного пространства* или *каноническим проективным пространством.*

В дальнейшем будут рассматриваться только четырехмерное векторное пространство $V$ и его трехмерные и двумерные векторные подпространства. Тогда соответствующее трехмерное проективное пространство $P$ будем называть просто *проективным пространством*, а двумерные и одномерные проективные подпространства в $P$ будем называть *проективными плоскостями* и *проективными прямыми*. Будем обозначать проективные плоскости малыми греческими буквами, а проективные прямые – малыми латинскими буквами.

## §1.2. Свойства проективного пространства и проективной плоскости

Проективная плоскость и проективное пространство обладают как рядом свойств, сходных со свойствами плоскости и пространства классической евклидовой геометрии, так и рядом свойств, отличных от их свойств. Проиллюстрируем это на конкретных примерах.

**Теорема 1.** *Через любые две различные точки $A$ и $B$ проективной плоскости $\sigma$ проходит единственная проективная прямая $d$.*

$\square$ Докажем сначала существование проективной прямой $d$. Обозначим трехмерное векторное подпространство, порождающее проективную плоскость $\sigma$ через $W$, а вектора, порождающие точки $A$ и $B$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$, соответственно. Так как точки $A$ и $B$ принадлежат проективной плоскости $\sigma$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат подпространству $W$. Рассмотрим линейную оболочку $U = L(\vec{a}, \vec{b})$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Так как эти векторы не коллинеарны (иначе точки $A$ и $B$ совпадали бы), их линейная оболочка $U$ является двумерным векторным подпространством. Это векторное подпространство порождает проективную прямую $\pi(U \setminus \{\vec{0}\})$, которую обозначим $d$. В силу того, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежали $W$, их линейная оболочка $L(\vec{a}, \vec{b})$ также содержится в $W$, следовательно, проективная прямая $d$ содержится в проективной плоскости $\sigma$. Так как вектор $\vec{a}$ принадлежит подпространству $U$, точка $A$ принадлежит проективной прямой $d$. Аналогично получаем, что точка $B$ принадлежит проективной прямой $d$. Итак, существование проективной прямой, удовлетворяющей требованиям теоремы, доказано.

Докажем единственность проективной прямой $d$. Допустим, что на проективной плоскости $\sigma$ существует еще одна проективная прямая $c$, проходящая через точки $A$ и $B$. Обозначим порождающее ее двумерное векторное подпространство через $\tilde{U}$. Так как точка $A$ принадлежит прямой $c$, вектор $\vec{a}$ принадлежит подпространству $\tilde{U}$. Аналогично вектор $\vec{b}$ принадлежит подпространству $\tilde{U}$. В силу того, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а векторное подпространство $\tilde{U}$ двумерно, пара $(\vec{a}, \vec{b})$ является базисом $\tilde{U}$. Тогда по теореме 3 (§ 6.3, часть I) получим, что $\tilde{U}$ совпадает с линейной оболочкой $L(\vec{a}, \vec{b})$, следовательно, совпадают проективные прямые $c$ и $d$. Полученное противоречие доказывает единственность проективной прямой, проходящей через точки $A$ и $B$. $\blacksquare$

**Замечание 1.** Из теоремы 1 следует корректность еще одного способа обозначения проективных прямых: если проективная прямая проходит через две различные точки $A$ и $B$, то ее обозначают $(AB)$.

**Теорема 2.** *Пусть даны три точки $A$, $B$, $C$ проективного пространства $P$, не лежащие на одной проективной прямой. Тогда существует единственная проективная плоскость $\sigma$, проходящая через эти точки.*

$\square$ Докажем сначала существование проективной плоскости $\sigma$, проходящей через точки $A$, $B$ и $C$. Обозначим через $V$ векторное пространство, порождающее проективное пространство $P$, а через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – векторы, порождающие точки $A$, $B$, $C$ соответственно.

Если предположить, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то есть принадлежат одному двумерному векторному подпространству $U$ из $V$, то $U$ породит проективную прямую, которой будут принадлежать точки $A$, $B$, $C$. Это противоречит условию предложения. Итак, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны. Тогда их линейная оболочка $W = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ будет трехмерным векторным подпространством в $V$. Оно порождает проективную плоскость, которую обозначим $\sigma$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ принадлежат линейной оболочке $W$, точки $A$, $B$, $C$ принадлежат проективной плоскости $\sigma$.

Докажем единственность проективной плоскости $\sigma$. Пусть существует еще одна проективная плоскость $\tilde{\sigma}$. Обозначим порождающее ее трехмерное векторное подпространство через $\tilde{W}$. Так как точки $A$, $B$, $C$ принадлежат проективной плоскости $\tilde{\sigma}$, не компланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ принадлежат трехмерному векторному подпространству $\tilde{W}$, а значит, являются его базисом. Тогда $\tilde{W}$ будет линейной оболочкой этих векторов, а значит, совпадет с векторным подпространством $W$. Следовательно, совпадут проективные плоскости $\sigma$ и $\tilde{\sigma}$, порождаемые этими векторными подпространствами. Это противоречие доказывает единственность проективной плоскости $\sigma$. $\blacksquare$

**Замечание 2.** Из теоремы 2 следует корректность еще одного способа обозначения проективных плоскостей: если проективная плоскость проходит через три различные точки $A$, $B$, $C$, не лежащие на одной проективной прямой, то ее обозначают $(ABC)$.

**Следствие 1.** *Пусть в проективном пространстве $P$ даны две проективные прямые, имеющие единственную общую точку. Тогда существует единственная проективная плоскость, содержащая эти прямые.*

Доказательство этого следствия оставляем читателю.

**Теорема 3.** *Если две различные точки $A$ и $B$ проективной прямой $d$ принадлежат проективной плоскости $\sigma$, то вся прямая $d$ содержится в проективной плоскости $\sigma$.*

$\square$ Обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторы, порождающие точки $A$ и $B$, через $U$ – двумерное векторное подпространство, порождающее проективную прямую $d$, через $W$ – трехмерное векторное подпространство, порождающее проективную плоскость $\sigma$. Так как точки $A$ и $B$ по условию принадлежат проективной прямой $d$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат векторному подпространству $U$. В силу того, что точки $A$ и $B$ различны, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а следовательно, будут образовывать базис двумерного векторного подпространства $U$.

Следовательно, $U$ можно рассматривать как линейную оболочку $L(\vec{a}, \vec{b})$ этих векторов. Кроме того, точки $A$ и $B$ принадлежат проективной плоскости $\sigma$, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат трехмерному векторному подпространству $W$. Так как $U = L(\vec{a}, \vec{b})$, то любой вектор из $U$ будет принадлежать $W$ по определению векторного подпространства (§ 6.3, часть I). Итак, получаем, что $U$ является подмножеством в $W$, а значит, проективная прямая $d$ содержится в проективной плоскости $\sigma$. ■

**Теорема 4.** *Любые две различные прямые $d_1$ и $d_2$ проективной плоскости $\sigma$ пересекаются, то есть имеют единственную общую точку.*

□ Обозначим через $U_1$ и $U_2$ двумерные векторные подпространства, порождающие проективные прямые $d_1$ и $d_2$ соответственно, а через $W$ – трехмерное векторное подпространство, порождающее плоскость $\sigma$. Векторные подпространства $U_1$ и $U_2$ различны, так как различны проективные прямые $d_1$ и $d_2$. Так как проективные прямые $d_1$ и $d_2$ содержатся в проективной плоскости $\sigma$, двумерные векторные подпространства $U_1$ и $U_2$ содержатся в трехмерном векторном подпространстве $W$. Два различных векторных подпространства в трехмерном векторном подпространстве всегда пересекаются по одномерному векторному подпространству. Обозначим его $L$. Оно порождает точку, которую обозначим $A$. Так как $L$ содержится и в $U_1$ и в $U_2$, точка $A$ принадлежит обеим проективным прямым $d_1$ и $d_2$.

Если предположить, что проективные прямые $d_1$ и $d_2$ имеют еще одну общую точку $B$, то в силу теоремы 1 эти прямые совпадут. Полученное противоречие с условием доказывает единственность общей точки проективных прямых $d_1$ и $d_2$. ■

## §1.3. Модели проективной прямой

Рассмотрим плоскость $\alpha$ из классической евклидовой геометрии. Будем называть ее *аффинной плоскостью*. Прямую из классической евклидовой геометрии будем называть *аффинной прямой*.

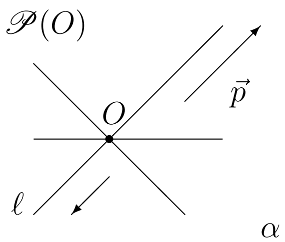



Рис.1.1

Множество всех прямых аффинной плоскости $\alpha$, проходящих через некоторую фиксированную точку $O$ этой плоскости, называется *пучком прямых с центром в точке $O$* и обозначается $\mathscr{P}(O)$ (Рис.1.1). Зададим на этом множестве структуру одномерного проективного пространства, то есть структуру проективной прямой. Обозначим через $U$ направляющее подпространство плоскости $\alpha$. Это двумерное векторное пространство. Рассмотрим отображение

$$\pi : U \setminus \{\vec{0}\} \to \mathscr{P}(O),$$

которое каждому ненулевому вектору $\vec{p}$ из $U$ ставит в соответствие прямую $\ell$ из пучка $\mathscr{P}(O)$, которая параллельна этому вектору. Так как у каждой прямой пучка $\mathscr{P}(O)$ есть направляющий вектор, отображение $\pi$ сюръективно, то есть выполняется первая аксиома проективного пространства (§ 1.1.). Кроме того, две прямые пучка $\mathscr{P}(O)$ совпадают тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны, то есть выполняется и вторая аксиома проективного пространства. Таким образом, отображение $\pi$ задает структуру одномерного проективного пространства в пучке прямых $\mathscr{P}(O)$, то есть пучок $\mathscr{P}(O)$ является проективной прямой. Также говорят, что пучок прямых аффинной плоскости является моделью проективной прямой. Заметим, что точкой такой проективной прямой является прямая пучка $\mathscr{P}(O)$.

Пучок прямых является не очень удобной для построений моделью проективной прямой. Рассмотрим более удобную модель проективной прямой.

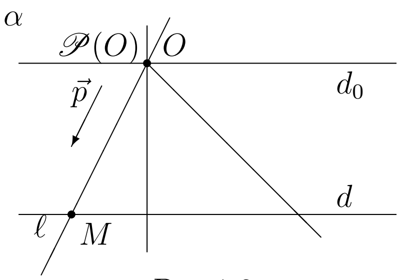


Рис.1.2

Пусть на аффинной плоскости $\alpha$ даны аффинная прямая $d$ и пучок прямых $\mathscr{P}(O)$ с центром в точке $O$, не лежащей на аффинной прямой $d$ (Рис.1.2). Попытаемся ввести структуру проективной прямой на аффинной прямой $d$ при помощи пучка $\mathscr{P}(O)$. Зададим отображение

$$\pi : U \setminus \{\vec{0}\} \to d,$$

где $U$ по-прежнему направляющее подпространство плоскости $\alpha$, следующим образом: каждому ненулевому вектору $\vec{p}$ из $U$ поставим в соответствие параллельную ему прямую $\ell$ пучка $\mathscr{P}(O)$ и обозначим через $M$ точку пересечения аффинных прямых $\ell$ и $d$. Тогда положим по определению $\pi(\vec{p}) = M$. Это отображение не задает структуру проективного пространства (§ 1.1.) на аффинной прямой $d$, так как отображение $\pi$ не может поставить в соответствие векторам, параллельным прямой $d_0$, ни одной точки прямой $d$. Возникает вопрос: сколько элементов не хватает на аффинной прямой $d$ для того, чтобы отображение $\pi$ смогло задать структуру проективной прямой? Образов нет у векторов, параллельных аффинной прямой $d_0$. Все они попарно коллинеарны, следовательно, по второй аксиоме проективного пространства (§ 1.1.) порождают одну и ту же точку. Значит, аффинную прямую нужно дополнить одним элементом, который будет ставиться в соответствие векторам, параллельным прямой $d_0$. Будем обозначать этот элемент большой буквой латинского алфавита со знаком бесконечности, например, $A_\infty$ или $B^\infty$ и называть *несобственной (или бесконечно удаленной) точкой.* Объединение точек аффинной прямой $d$ и несобственной точки называется *расширенной прямой* и обозначается $\bar{d}$. Точки расширенной прямой $\bar{d}$, которые принадлежат аффинной прямой $d$, называются *собственными точками* расширенной прямой $\bar{d}$. Тогда отображение

$$\pi : U \setminus \{\vec{0}\} \to \bar{d},$$

задает структуру проективной прямой на расширенной прямой $\bar{d}$ (обе аксиомы проективного пространства выполняются очевидным образом), то есть расширенная прямая является еще одной моделью проективной прямой. Эта модель удобнее, так как точками в ней являются точки аффинной прямой $d$ и добавленный элемент – несобственная точка. Подчеркнем, что с точки зрения проективной геометрии собственные и несобственная точки расширенной прямой равноправны.

### §1.4. Модели проективной плоскости

Рассмотрим пространство из классической евклидовой геометрии. Будем называть его *аффинным пространством*.

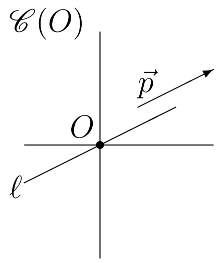



Рис.1.3

Множество всех прямых аффинного пространства, проходящих через фиксированную точку $O$, называется *связкой прямых с центром в точке* $O$ и обозначается $\mathscr{C}(O)$ (Рис.1.3). Зададим на этом множестве структуру двумерного проективного пространства, то есть проективной плоскости. Обозначим через $W$ геометрическое векторное пространство (§ 6.1, часть I). Оно трехмерно. Зададим отображение

$$\pi : W \setminus \{\vec{0}\} \to \mathscr{C}(O),$$

которое каждому ненулевому вектору $\vec{p}$ ставит в соответствие параллельную ему аффинную прямую $\ell$ связки $\mathscr{C}(O)$. Докажите самостоятельно, что такое отображение задает структуру проективной плоскости на множестве $\mathscr{C}(O)$. Таким образом, связка прямых аффинного пространства является моделью проективной плоскости. Точками в этой модели являются аффинные прямые связки $\mathscr{C}(O)$.

Выясним, как выглядят в такой модели проективные прямые. Рассмотрим двумерное векторное подпространство $U$ в векторном пространстве $W$. Напомним, что проективной прямой на проективной плоскости $\mathscr{C}(O)$ будет множество аффинных прямых $\pi(U \setminus \{\vec{0}\})$. Найдем это множество. Заметим, что существует единственная аффинная плоскость $\alpha$, проходящая через точку $O$ и имеющая $U$ своим направляющим подпространством. Пересечение плоскости $\alpha$ и связки $\mathscr{C}(O)$ – это пучок $\mathscr{P}(O)$ прямых с центром в точке $O$. По определению отображения $\pi$ образом векторов из $U$ является множество всех аффинных прямых пучка $\mathscr{P}(O)$, следовательно, проективной прямой в рассматриваемой модели будет пучок прямых с центром в той же точке $O$.

Так же как и в случае моделей проективной прямой, для проективной плоскости существует более удобная модель.

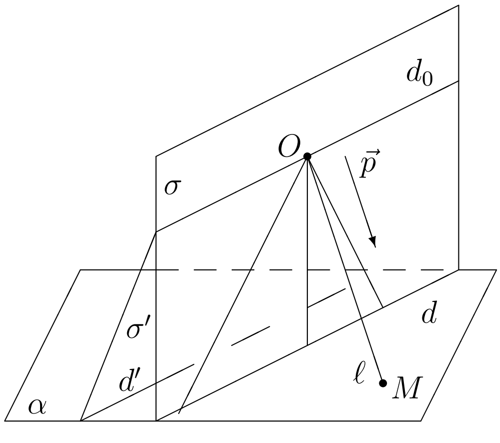



Рис.1.4

Пусть дана аффинная плоскость $\alpha$ и связка прямых $\mathscr{C}(O)$ с центром в точке $O$, не лежащей в плоскости $\alpha$ (Рис.1.4). Через $W$ обозначим геометрическое векторное пространство. По аналогии с расширенной прямой построим модель проективной плоскости, используя аффинную плоскость $\alpha$. Нам не хватит точек плоскости $\alpha$ для этой цели и придется добавлять к плоскости $\alpha$ дополнительные элементы. Выясним, сколько таких элементов нам потребуется.

Рассмотрим отображение

$$\pi : W \setminus \{\vec{0}\} \to \alpha,$$

которое каждому вектору $\vec{p}$ из $W \setminus \{\vec{0}\}$ ставит в соответствие точку пересечения прямой $\ell$ из связки $\mathscr{C}(O)$, параллельной вектору $\vec{p}$, и аффинной плоскости $\alpha$. При таком отображении $\pi$ для векторов, параллельных плоскости $\alpha$, нет образов, так как прямые, (например, $d_0$) параллельные плоскости $\alpha$, не имеют с ней общих точек. Это множество векторов (дополненное нуль-вектором) образует двумерное векторное подпространство $U$ в векторном пространстве $W$. Дополним аффинную плоскость $\alpha$ элементами, которые будем обозначать большими буквами латинского алфавита со знаком бесконечности, например, $A^{\infty}$ или $B_{\infty}$. Эти элементы называются *несобственными (или бесконечно удаленными) точками*. Множество, состоящее из точек аффинной плоскости $\alpha$ и несобственных точек называется *расширенной плоскостью* и обозначается $\bar{\alpha}$. Точки расширенной плоскости $\bar{\alpha}$, принадлежащие аффинной плоскости $\alpha$, называются *собственными точками* расширенной плоскости $\bar{\alpha}$.

Для того чтобы выполнялась вторая аксиома проективного пространства (§ 1.1.) всем векторам из $U$, любые два из которых коллинеарны, поставим в соответствие одну и ту же несобственную точку. Тогда отображение

$$\pi : W \setminus \{\vec{0}\} \to \bar{\alpha} \tag{1.1}$$

будет задавать структуру проективной плоскости на множестве $\bar{\alpha}$, то есть на расширенной плоскости. Аксиомы двумерного проективного пространства выполняются очевидным образом.

Выясним, как будут выглядеть проективные прямые на расширенной плоскости. Чтобы получить проективную прямую на проективной плоскости нужно взять образы при отображении (1.1) всевозможных двумерных подпространств векторного пространства $W$ (§ 1.1.). Каждому ненулевому вектору этого подпространства ставится в соответствие прямая из связки $\mathscr{C}(O)$, параллельная ему. Множество всех таких прямых образует пучок $\mathscr{P}(O)$ с центром в точке $O$. Обозначим аффинную плоскость, в которой лежит этот пучок, через $\sigma$. Для плоскости $\sigma$ возможны два случая.

Во-первых, аффинные плоскости $\alpha$ и $\sigma$ имеют общие точки. Множество этих точек образует аффинную прямую $d$. Пучок прямых $\mathscr{P}(O)$ плоскости $\sigma$ содержит единственную прямую, параллельную плоскости $\alpha$. Обозначим ее $d_0$. Векторам, параллельным прямой $d_0$, ставится в соответствие несобственная точка. Итак, образом $U$ (без нуль-вектора) при отображении $\pi$ будет расширенная прямая $\bar{d}$. При этом сужение отображения $\pi$ на подпространство $U$ (без нуль-вектора) совпадает с отображением, которое задает структуру проективной прямой на расширенной прямой $\bar{d}$ (§ 1.3.). Отметим, что несобственная точка расширенной прямой $\bar{d}$ ставится в соответствие векторам, параллельным аффинной прямой $d_0$. Этим же векторам ставится в соответствие несобственная точка расширенной плоскости $\bar{\alpha}$. Таким образом, множество несобственных точек, добавленных к аффинной плоскости при построении расширенной плоскости $\bar{\alpha}$, совпадает с множеством несобственных точек расширенных прямых, принадлежащих расширенной плоскости $\bar{\alpha}$.

Во-вторых, аффинные плоскости $\alpha$ и $\sigma$ не имеют общих точек. В этом случае образом двумерного векторного подпространства $U$ (без нуль-вектора) будет множество всех несобственных точек. По определению это проективная прямая (§ 1.1.). Она называется *несобственной (или бесконечно удаленной) прямой* и обозначается малой буквой латинского алфавита со знаком бесконечности, например, $a_\infty$ или $b^\infty$. Еще раз отметим, что несобственная прямая содержит все несобственные точки, добавленные к аффинной плоскости $\alpha$. Проективные прямые расширенной плоскости, отличные от несобственной прямой, называются *собственными прямыми* расширенной плоскости.

Наконец, выясним, какие несобственные точки добавляются двум параллельным аффинным прямым $d$ и $d'$ аффинной плоскости $\alpha$. Обозначим $U$ и $U'$ двумерные векторные подпространства в векторном пространстве $W$, которые порождают расширенные прямые $\bar{d}$ и $\bar{d}'$. Несобственную точку расширенной прямой $\bar{d}$ порождают ненулевые векторы, параллельные прямой $d_0$. Но несобственную точку расширенной прямой $\bar{d}'$ также порождают ненулевые векторы, параллельные прямой $d_0$. Таким образом, несобственные точки, добавленные к параллельным аффинным прямым совпадают, то есть это одна и та же точка.

**Замечание 1.** В дальнейшем, если не оговорено противное, рисунки мы будем делать на расширенной плоскости. Из проведенных выше рассуждений следуют правила построения на расширенной плоскости:

1. Через две различные собственные точки расширенной плоскости прямая проводится также, как в классической евклидовой геометрии.

2. Чтобы задать несобственную точку $B_\infty$ расширенной плоскости, нужно провести аффинную прямую $b$, к которой добавлена эта несобственная точка.

3. Чтобы провести прямую через собственную точку $A$ и несобственную точку $B_\infty$, нужно через точку $A$ провести аффинную прямую $c$ параллельно аффинной прямой $b$, которая задает точку $B_\infty$.

## §1.5. Теорема Дезарга

*Фигурой* в проективном пространстве $P$ будем называть любое множество, состоящее из точек, проективных прямых или проективных плоскостей проективного пространства.

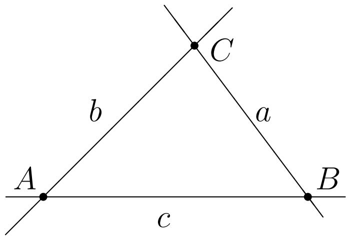



Рис.1.5

*Трехвершинником* $ABC$ в проективном пространстве $P$ называется фигура, состоящая из трех точек $A$, $B$, $C$, не лежащих на одной проективной прямой и трех проективных прямых $(AB)$, $(BC)$, $(AC)$, попарно соединяющих эти точки. Точки $A$, $B$, $C$ называются *вершинами*, а проективные прямые $(AB)$, $(BC)$, $(AC)$ называются *сторонами* трехвершинника $ABC$ (Рис.1.5). Стороны $(AB)$, $(BC)$, $(AC)$ также обозначаются $c$, $a$, $b$ соответственно.

Из теорем 2 и 3 (§ 1.2.) следует, что для любого трехвершинника существует проективная плоскость, содержащая его.

Если даны два трехвершинника $ABC$ и $A'B'C'$, будем называть *соответствующими* вершины $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, $C$ и $C'$. Аналогично, будем называть *соответствующими* стороны $a$ и $a'$, $b$ и $b'$, $c$ и $c'$.

**Теорема 1.** *(Дезарга). Пусть даны два трехвершинника $ABC$ и $A'B'C'$ такие, что ни одна из вершин или сторон одного из них не совпадает с соответствующим элементом другого. Тогда три проективные прямые $(AA')$, $(BB')$, $(CC')$ проходят через одну точку тогда и только тогда, когда точки пересечения проективных прямых $a$ и $a'$; $b$ и $b'$; $c$ и $c'$ лежат на одной проективной прямой.*

☐ Пусть три проективные прямые $(AA')$, $(BB')$, $(CC')$ проходят через одну точку $S$.

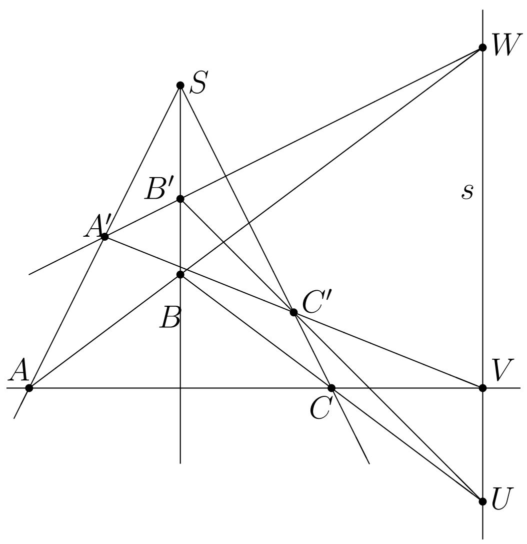



Рис.1.6

На Рис.1.6 изображен случай, когда данные трехвершинники лежат в одной проективной плоскости. При этом в качестве модели проективной плоскости использована расширенная плоскость. Отметим, что доказательство проводится в общем случае: трехвершинники расположены в проективном пространстве. Так как точки $A$, $A'$, $S$ лежат на одной проективной прямой, векторы $\vec{a}$, $\vec{a}'$, $\vec{s}$, соответственно их порождающие, принадлежат двумерному векторному подпространству, а значит, компланарны. В силу того, что точки $A$ и $A'$ различны, векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ не коллинеарны. Тогда существуют вещественные числа $\lambda$ и $\lambda'$ такие, что

$$\vec{s} = \lambda\vec{a} + \lambda'\vec{a}'.$$

Так как вектор $\vec{s}$ ненулевой, хотя бы одно из чисел $\lambda$ или $\lambda'$ отлично от нуля.

Из того, что точки $B$, $B'$, $S$ и $C$, $C'$, $S$ лежат на одной проективной прямой, получим еще два равенства:

$$\vec{s} = \mu\vec{b} + \mu'\vec{b}'; \quad \vec{s} = \nu\vec{c} + \nu'\vec{c}',$$

где $\mu, \mu'$ и $\nu, \nu'$ – некоторые вещественные числа, причем хотя бы одно число в каждой паре отлично от нуля; $\vec{b}$, $\vec{b}'$, $\vec{c}$, $\vec{c}'$ – векторы, порождающие точки $B$, $B'$, $C$, $C'$ соответственно. Вычтем попарно полученные равенства друг из друга и обозначим полученные векторы следующим образом:

$$\begin{aligned} &\lambda\vec{a} - \mu\vec{b} = \mu'\vec{b}' - \lambda'\vec{a}' = \vec{w};\\ &\mu\vec{b} - \nu\vec{c} = \nu'\vec{c}' - \mu'\vec{b}' = \vec{u};\\ &\lambda\vec{a} - \nu\vec{c} = \nu'\vec{c}' - \lambda'\vec{a}' = \vec{v}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Это ненулевые векторы. Так как в противном случае, среди векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ нашлась бы пара коллинеарных, то есть среди точек $A$, $B$, $C$ какие-либо две совпали бы. Это противоречит условию теоремы. Тогда векторы $\vec{w}$, $\vec{u}$ и $\vec{v}$ порождают точки, которые обозначим $W$, $U$, $V$ соответственно. Выясним, каким проективным прямым принадлежат эти точки. Из первого равенства (1.2) следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{w}$ компланарны, то есть принадлежат одному двумерному векторному подпространству. Оно порождает проективную прямую, на которой лежат точки $A$, $B$, $W$. Таким образом, точка $W$ принадлежит проективной прямой $(AB)$. Аналогично, точка $W$ принадлежит проективной прямой $(A'B')$. Итак, точка $W$ является точкой пересечения проективных прямых $(AB) = c$ и $(A'B') = c'$.

Аналогичным образом из двух оставшихся соотношений (1.2) получим, что точка $U$ является точкой пересечения проективных прямых $(BC) = a$ и $(B'C') = a'$, а точка $V$ является точкой пересечения проективных прямых $(AC) = b$ и $(A'C') = b'$.

Осталось доказать, что точки $W$, $U$ и $V$ лежат на одной проективной прямой. Действительно, если сложить первые два соотношения из (1.2) и вычесть из них третье, то получим

$$\vec{w} + \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}.$$

Это означает, что векторы $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ компланарны, следовательно, принадлежат одному двумерному векторному подпространству. Оно порождает проективную прямую, на которой лежат точки $W$, $U$, $V$.

Обратно, пусть точки пересечения проективных прямых $a = (BC)$ и $a' = (B'C')$; $b = (AC)$ и $b' = (A'C')$; $c = (AB)$ и $c' = (A'B')$ лежат на одной проективной прямой. Обозначим эти точки через $U$, $V$, $W$ соответственно, а порождающие их векторы через $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Так как точка $U$ принадлежит проективной прямой $(BC)$, то векторы $\vec{u}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, так как точки $B$ и $C$ различны. Тогда существуют вещественные числа $\alpha$ и $\beta$, такие что $\vec{u} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$. Аналогично, получим $\vec{u} = \alpha'\vec{b}' + \beta'\vec{c}'$. Проводя такие же рассуждения для точек $W$ и $V$, получим

$$\begin{aligned} &\vec{u} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} = \alpha'\vec{b}' + \beta'\vec{c}';\\ &\vec{v} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{c} = \gamma'\vec{a}' + \delta'\vec{c}';\\ &\vec{w} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \lambda'\vec{a}' + \mu'\vec{b}', \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\gamma, \delta, \gamma', \delta', \lambda, \mu, \lambda', \mu'$ – некоторые вещественные числа.

Равенства (1.3) запишем в следующем виде и обозначим полученные векторы через $\vec{s}_1$,

$\vec{s}_2$, $\vec{s}_3$:

$$\begin{aligned}
&\alpha\vec{b} - \alpha'\vec{b}' = \beta'\vec{c}' - \beta\vec{c} = \vec{s}_1;\\
&\gamma\vec{a} - \gamma'\vec{a}' = \delta'\vec{c}' - \delta\vec{c} = \vec{s}_2;\\
&\lambda\vec{a} - \lambda'\vec{a}' = \mu'\vec{b}' - \mu\vec{b} = \vec{s}_3.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\vec{s}_3$ ненулевые, так как иначе совпали бы соответствующие вершины трехвершинников $ABC$ и $A'B'C'$. Тогда эти векторы порождают точки, которые обозначим $S_1$, $S_2$, $S_3$. Если доказать, что эти три точки совпадают, то из равенств (1.4) следует, что полученная точка $S$ принадлежит прямым $(AA')$, $(BB')$, $(CC')$.

Докажем, что точки $S_1$, $S_2$, $S_3$ совпадают. Так как точки $U$, $V$, $W$ лежат на одной прямой, то векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ компланарны. Среди точек $U, V, W$ есть пара различных точек. Действительно, предположим, что эти точки попарно совпадают. Тогда из равенств (1.3) в силу линейной независимости векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ получим, что $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \lambda = \mu = 0$. Тогда $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$, что противоречит условию.

Пусть для определенности точки $V$ и $W$ различны. Тогда существуют вещественные числа $\xi$ и $\eta$, такие что

$$\vec{u} = \xi\vec{v} + \eta\vec{w}.$$

Из этого равенства с учетом (1.3) получим

$$\alpha\vec{b} + \beta\vec{c} = \xi(\gamma\vec{a} + \delta\vec{c}) + \eta(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}); \quad \alpha'\vec{b}' + \beta'\vec{c}' = \xi(\gamma'\vec{a}' + \delta'\vec{c}') + \eta(\lambda'\vec{a}' + \mu'\vec{b}'). \tag{1.5}$$

Так как тройки точек $A$, $B$, $C$ и $A'$, $B'$, $C'$ не лежат на одной прямой, тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ не компланарны, то есть линейно независимы. Тогда из (1.5) следует, что

$$\begin{aligned}
&\alpha = \eta\mu; \quad \beta = \xi\delta; \quad \xi\gamma + \eta\lambda = 0;\\
&\alpha' = \eta\mu'; \quad \beta' = \xi\delta'; \quad \xi\gamma' + \eta\lambda' = 0.
\end{aligned}$$

С учетом этих соотношений получим из (1.4):

$$\vec{s}_1 = \alpha\vec{b} - \alpha'\vec{b}' = \eta\mu\vec{b} - \eta\mu'\vec{b}' = \eta(\mu\vec{b} - \mu'\vec{b}') = -\eta\vec{s}_3,$$

то есть $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_3$ коллинеарны, а значит, порождают одну и ту же точку, то есть $S_1 = S_3$. Аналогично доказывается, что коллинеарны векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, то есть $S_1 = S_2$.

Итак, проективные прямые $(AA')$, $(BB')$ и $(CC')$ проходят через одну и ту же точку $S$. ■

**Замечание 1.** Теорема Дезарга остается верной, если у двух трехвершинников $ABC$ и $A'B'C'$ совпадает одна пара соответствующих вершин, а остальные соответствующие элементы не совпадают.

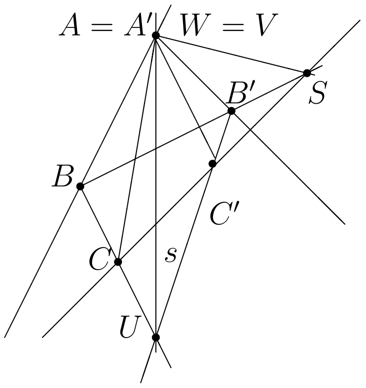


Рис.1.7

Действительно, проективные прямые $(BB')$ и $(CC')$ различны (иначе совпадут проективные прямые $(BC)$ и $(B'C')$, что противоречит предположению). Пусть прямые $(BB')$ и $(CC')$ пересекаются в точке $S$ (Рис.1.7). Тогда в качестве прямой, соединяющей точки $A$ и $A'$ возьмем прямую $(AS)$. Итак, мы предполагаем, что прямые, соединяющие соответствующие точки данных трехвершинников проходят через одну точку $S$. Покажем, что точки пересечения соответствующих сторон лежат на одной прямой. Обозначим точки пересечения также как при доказательстве теоремы Дезарга.
Тогда точки $W$ и $V$ совпадут, следовательно, точки $U$, $V$, $W$ лежат на одной прямой (так как через любые две точки можно провести проективную прямую).

Обратно, пусть точки пересечения соответствующих прямых двух трехвершинников лежат на одной прямой. Так как прямые $(BC)$ и $(B'C')$ различны и пересекаются в точке $U$, по следствию 1 § 1.2. эти прямые лежат в одной плоскости, следовательно, по теореме 4 § 1.2. пересекаются. Обозначим их точку пересечения через $S$. Тогда точки $A$ и $A'$ лежат на прямой $(AS)$, то есть прямые, соединяющие соответствующие вершины данных трехвершинников, проходят через одну точку $S$.

Если у двух трехвершинников совпадают две пары соответствующих вершин, например, $A = A'$ и $B = B'$, то совпадают проективные прямые $(AB)$ и $(A'B')$, а также совпадают проективные прямые $(AA')$ и $(BB')$. Тогда для них не определено понятие точки пересечения и теорема Дезарга теряет смысл. Аналогично теоремы Дезарга теряет смысл при совпадении хотя бы одной пары соответствующих сторон двух трехвершинников.

Точка $S$ называется *центром перспективы* трехвершинников $ABC$ и $A'B'C'$, а проективная прямая $s$ называется *осью перспективы.*

Теорема Дезарга может быть сформулирована в другом виде: два трехвершинника, у которых не совпадают соответствующие элементы, имеют центр перспективы тогда и только тогда, когда они имеют ось перспективы.

Два трехвершинника, имеющие центр перспективы (а следовательно и ось перспективы) называются *перспективными.*

### §1.6. Принцип двойственности на проективной плоскости

**1.** Пусть $(W, g)$ – $n$-мерное евклидово векторное пространство, где $g$ – симметрическая положительно определенная билинейная форма, называемая евклидовой структурой. (§ 6.11, часть I). Пусть $L$ – произвольное векторное подпространство в $W$. *Ортогональным дополнением* к $L$ в векторном пространстве $W$ называется множество векторов $\vec{p}$ из $W$, таких что $g(\vec{p}, \vec{a}) = 0$ для любого вектора $\vec{a}$ из $L$. Обозначение $L^\perp$.

Очевидно, что тривиальные векторные подпространства $W$ и $\{\vec{0}\}$ являются ортогональными дополнениями друг для друга в векторном пространстве $W$.

**Пример 1.2.** Пусть $W$ – трехмерное геометрическое векторное пространство. Пусть $U$ – двумерное векторное подпространство. Для него существует аффинная плоскость $\alpha$, для которой $U$ является направляющим подпространством. Рассмотрим аффинную прямую $\ell$, перпендикулярную плоскости $\alpha$. Тогда ортогональным дополнением к $U$ будет направляющее подпространство аффинной прямой $\ell$.

Из курса алгебры известна следующая лемма.

**Лемма 1.** *Пусть $L$ – $r$-мерное векторное подпространство в $n$-мерном векторном пространстве $W$, причем $L$ отлично от $W$ и $\{\vec{0}\}$; $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – ортонормированный базис (§ 6.11, часть I) и $L$ является линейной оболочкой первых $r$ векторов этого базиса. Тогда ортогональное дополнение $L^\perp$ является линейной оболочкой векторов $(\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n)$. В частности, ортогональное дополнение $r$-мерного векторного подпространства является $(n-r)$-мерным векторным подпространством в $W$.*

**Лемма 2.** *Пусть даны два векторных подпространства $L_1$ и $L_2$ в векторном пространстве $W$, такие что $L_1 \subset L_2$. Тогда $L_2^\perp \subset L_1^\perp$.*

□ Пусть $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ортонормированный базис $W$, такой что $L_1$ является линейной оболочкой $L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$, $L_2$ является линейной оболочкой $L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{r+k})$, $k \geq 1$. Тогда по лемме 1 получим $L_1^\perp$ является линейной оболочкой $L(\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n)$, а $L_2^\perp$ является линейной оболочкой $L(\vec{e}_{r+1+k}, \dots, \vec{e}_n)$. Следовательно, $L_2^\perp \subset L_1^\perp$ по определению линейной оболочки векторов. ■

**2.** Пусть дана проективная плоскость $\sigma$. Обозначим через $W$ трехмерное векторное пространство, порождающее эту плоскость, $\pi$ – отображение, задающее структуру проективной плоскости на $\sigma$. Фиксируем в пространстве $W$ произвольную евклидову структуру $g$.

Рассмотрим утверждение: точка $A$ принадлежит проективной прямой $d$. Это означает, что одномерное векторное подпространство $L$ содержится в двумерном векторном подпространстве $U$, где $L$ – векторное подпространство, порождающее точку $A$, $U$ – векторное подпространство, порождающее прямую $d$ (§ 1.1.). Согласно лемме 2 двумерное векторное подпространство $L^\perp$ будет содержать одномерное векторное подпространство $U^\perp$. Тогда $U^\perp$ порождает точку на проективной плоскости $\sigma$, которую обозначим $D$, а $L^\perp$ порождает проективную прямую $a$ на этой плоскости. Так как $U^\perp \subset L^\perp$ проективная прямая $a$ проходит через точку $D$.

Это обстоятельство позволяет сформулировать *принцип двойственности на проективной плоскости*: если на проективной плоскости справедливо предложение $\mathscr{A}$, в котором говорится о точках, прямых и их взаимной принадлежности, то справедливо и *двойственное предложение* $\mathscr{A}^*$, которое получается из предложения $\mathscr{A}$ заменой слов

$$\begin{array}{cccc}
\text{точка} & \text{прямая} & \text{лежит на} & \text{проходит через} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{прямая} & \text{точка} & \text{проходит через} & \text{лежит на}
\end{array}$$

**Пример 1.3.** Приведем пример предложения и двойственного ему предложения на проективной плоскости.

$\mathscr{A}$: Для любых двух точек $A$ и $B$ существует единственная проективная прямая $d$, проходящая через каждую из точек $A$ и $B$.

$\mathscr{A}^*$: Для любых двух прямых $a$ и $b$ существует единственная точка $D$, принадлежащая каждой из проективных прямых $a$ и $b$.

Благодаря принципу двойственности доказывать нужно только одно из утверждений: либо $\mathscr{A}$, либо $\mathscr{A}^*$.

**Пример 1.4.** Если на проективной плоскости дана какая-либо фигура, то с помощью принципа двойственности можно получить новую фигуру, которая называется *двойственной* для данной.

Приведем примеры двойственных фигур на проективной плоскости.

Рассмотрим трехвершинник $ABC$ (§ 1.5.). Так как он лежит в некоторой проективной плоскости, к нему можно применить принцип двойственности на проективной плоскости. Напомним, что трехвершинник $ABC$ – это фигура, состоящая из трех точек $A$, $B$, $C$, не лежащих на одной проективной прямой, и трех проективных прямых $a$, $b$, $c$, попарно проходящих через точки $A$, $B$, $C$. Применяя принцип двойственности, получим фигуру, состоящую из трех прямых $a$, $b$, $c$, не проходящих через одну точку, и трех точек $A$, $B$, $C$, попарно лежащих на проективных прямых $a$, $b$, $c$. Эта фигура также является трехвершинником.

Итак, фигура, двойственная трехвершиннику на проективной плоскости, является трехвершинником.

Рассмотрим фигуру на проективной плоскости, состоящую из всех точек,принадлежащих одной прямой. Применяя принцип двойственности, получим фигуру, состоящую из всех прямых проективной плоскости, проходящих через одну точку. Такая фигура называется *пучком проективных прямых.*

Итак, для множества всех точек проективной прямой двойственной фигурой является пучок проективных прямых.

**Замечание 1.** Рассуждения, аналогичные проведенным, позволяют получить принцип двойственности в проективном пространстве: если в проективном пространстве справедливо утверждение $\mathscr{A}$ о принадлежности точек, проективных прямых и проективных плоскостей, то справедливо и двойственное предложение $\mathscr{A}^*$, которое получается из $\mathscr{A}$ заменой слов

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{точка} & \text{плоскость} & \text{прямая} & \text{лежит на} & \text{проходит через} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{плоскость} & \text{точка} & \text{прямая} & \text{проходит через} & \text{лежит на}
\end{array}
$$

Приведем пример утверждения $\mathscr{A}$ и двойственного ему утверждения $\mathscr{A}^*$.

$\mathscr{A}$: Для любых трех точек, не лежащих на одной проективной прямой, существует единственная проективная плоскость, проходящая через эти точки.

$\mathscr{A}^*$: Для любых трех плоскостей, не проходящих через одну прямую, существует единственная точка, лежащая на этих плоскостях.

## §1.7. Координаты точек на проективной прямой

**1.** Пусть дана проективная прямая $d$. Обозначим через $U$ порождающее ее двумерное векторное пространство.

Введем на множестве базисов векторного пространства $U$ отношение *гомотетичности базисов*. Будем говорить, что два базиса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ пространства $U$ *гомотетичны*, если существует ненулевое вещественное число $\lambda$, такое что

$$\vec{b}_1 = \lambda\vec{a}_1; \quad \vec{b}_2 = \lambda\vec{a}_2. \tag{1.6}$$

Очевидно, что это отношение является отношением эквивалентности. Тогда множество базисов $U$ распадается на классы эквивалентности по этому отношению. Каждый такой класс называется *проективным репером* на проективной прямой $d$. Будем обозначать проективный репер через $R$ или $R(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, указывая один из базисов, принадлежащих этому реперу.

Пусть дана произвольная точка $M$ на проективной прямой $d$ и проективный репер $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Обозначим через $\vec{m}$ вектор из $U$, порождающий точку $M$. *Проективными координатами* (или, просто, *координатами*) точки $M$ в проективном репере $R$ называются координаты вектора $\vec{m}$ в базисе $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Иначе говоря, координатами точки $M$ в проективном репере $R$ называется упорядоченная пара чисел $(m_1, m_2)$, такая что

$$\vec{m} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2. \tag{1.7}$$

Будем обозначать координаты точки так: $M(m_1, m_2)$ или $M(m_1, m_2)_R$.

**Теорема 1.** *Координаты точки на проективной прямой относительно проективного репера определены с точностью до ненулевой константы. Другими словами, две упорядоченные пары чисел $(m_1, m_2)$ и $(n_1, n_2)$ будут координатами одной и той же точки $M$ в проективном репере тогда и только тогда, когда существует ненулевое вещественное число $\alpha$, такое что*

$$n_1 = \alpha m_1; \quad n_2 = \alpha m_2. \tag{1.8}$$

$\square$ Из определения проективных координат точки $M$ видно, что они зависят, во-первых, от выбора базиса из проективного репера $R$ и, во-вторых, от выбора вектора $\vec{m}$, порождающего точку $M$.

Выясним, как изменится пара чисел $(m_1, m_2)$, если выбрать другой вектор $\vec{n}$, порождающий точку $M$ и другой базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, принадлежащий проективному реперу $R$. Обозначим через $(n_1, n_2)$ упорядоченную пару чисел, такую что

$$\vec{n} = n_1\vec{b}_1 + n_2\vec{b}_2. \tag{1.9}$$

Так как векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ порождают одну точку $M$ по второй аксиоме проективного пространства (§ 1.1.) эти векторы коллинеарны, то есть существует ненулевое вещественное число $\lambda$, такое что

$$\vec{n} = \lambda\vec{m}. \tag{1.10}$$

Так как базисы $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ принадлежат одному проективному реперу, они гомотетичны, то есть существует ненулевое вещественное число $\mu$, такое что

$$\vec{b}_1 = \mu\vec{a}_1; \quad \vec{b}_2 = \mu\vec{a}_2. \tag{1.11}$$

Подставим равенства (1.10), (1.11) и (1.7) в равенство (1.9):

$$\lambda(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2) = n_1\mu\vec{a}_1 + n_2\mu\vec{a}_2.$$

В силу линейной независимости векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, получим

$$\lambda m_1 = \mu n_1; \quad \lambda m_2 = \mu n_2.$$

Так как число $\mu$ отлично от нуля, на него можно разделить оба равенства и обозначить $\frac{\lambda}{\mu} = \alpha$. Тогда получим (1.8).

Обратно, пусть относительно проективного репера $R$ заданы две упорядоченные пропорциональные ненулевые пары чисел $(m_1, m_2)$ и $(n_1, n_2)$. Нужно доказать, что они определяют одну и ту же точку $M$ проективной прямой $d$. Пусть пара чисел $(m_1, m_2)$ задана относительно базиса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ проективного репера $R$, а пара чисел $(n_1, n_2)$ задана относительно базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ того же репера $R$. Рассмотрим векторы

$$\vec{m} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2; \quad \vec{n} = n_1\vec{b}_1 + n_2\vec{b}_2. \tag{1.12}$$

Так как пары чисел $(m_1, m_2)$ и $(n_1, n_2)$ пропорциональны, то существует ненулевое число $\lambda$, такое что

$$n_1 = \lambda m_1; \quad n_2 = \lambda m_2. \tag{1.13}$$

Так как базисы $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ принадлежат одному проективному реперу, существует ненулевое вещественное число $\mu$, такое что

$$\vec{b}_1 = \mu\vec{a}_1; \quad \vec{b}_2 = \mu\vec{a}_2. \tag{1.14}$$

Тогда с учетом соотношений (1.12), (1.13) и (1.14) получим

$$\vec{n} = (\lambda m_1)(\mu\vec{a}_2) + (\lambda m_2)(\mu\vec{a}_2) = \lambda\mu(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2) = (\lambda\mu)\vec{m}.$$

Итак, векторы $\vec{n}$ и $\vec{m}$ коллинеарны, а значит, порождают одну и ту же точку. ■

**Замечание 1.** Пусть на проективной прямой $d$, порожденной двумерным векторным пространством $U$, дан проективный репер $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и дана упорядоченная пара вещественных чисел $(m_1, m_2)$, причем хотя бы одно из них отлично от нуля. Тогда на прямой $d$ существует единственная точка с координатами $(m_1, m_2)$ в репере $R$.

Действительно, рассмотрим вектор $\vec{m} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$. Он принадлежит пространству $U$, а значит, порождает некоторую точку $M$, принадлежащую прямой $d$. Эта точка имеет координаты $(m_1, m_2)$ в репере $R$ по определению проективных координат.

Если предположить, что существует еще одна точка $N$ с теми же координатами в проективном репере $R$, то по определению координат точки порождающий ее вектор $\vec{n}$ будет иметь вид

$$\vec{n} = m_1\vec{b}_1 + m_2\vec{b}_2, \tag{1.15}$$

где $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ – базис пространства $U$, принадлежащий реперу $R$. По определению проективного репера, базисы $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ и $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ гомотетичны, следовательно, существует ненулевое вещественное число $\lambda$, такое что $\vec{b}_1 = \lambda\vec{a}_1$, $\vec{b}_2 = \lambda\vec{a}_2$. Тогда из (1.15) получим, что

$$\vec{n} = \lambda(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2) = \lambda\vec{m},$$

то есть векторы $\vec{n}$ и $\vec{m}$ коллинеарны, а значит, порождают одну и ту же точку. Полученное противоречие доказывает единственность точки $M$.

**2.** Проективный репер $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ на проективной прямой $d$ также можно задать с помощью точек проективной прямой. Выясним, сколько точек на проективной прямой для этого нужно.

Чтобы задать проективный репер, нужно задать какой-либо базис, принадлежащий этому реперу. Каждый вектор этого базиса порождает точку проективной прямой. Обозначим через $A_1$ точку проективной прямой $d$, которую порождает вектор $\vec{a}_1$, а через $A_2$ – точку, которую порождает вектор $\vec{a}_2$. Так как векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, точки $A_1$ и $A_2$ различны. Пара точек $(A_1, A_2)$ не может однозначно задать репер $R$, так как эти точки, в частности, порождаются базисом $(\vec{a}_1, \frac{1}{2}\vec{a}_2)$, который не гомотетичен базису $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, а значит, не принадлежит реперу $R$. Поэтому возьмем еще одну точку $E$ на прямой $d$, отличную от точек $A_1$ и $A_2$. Тогда упорядоченная тройка точек $(A_1, A_2, E)$ однозначно определяет проективный репер $R$. Именно, верна следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть дана упорядоченная тройка попарно различных точек $(A_1, A_2, E)$ на проективной прямой $d$. Тогда существует единственный проективный репер $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, такой что $\pi(\vec{a}_\alpha) = A_\alpha$, $\alpha = 1, 2$; $\pi(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = E$, где $\pi : U \setminus \{\vec{0}\} \to d$ – отображение, задающее проективную структуру на множестве $d$.*

□ 1. Докажем существование проективного репера $R$.

Пусть дана упорядоченная тройка точек $(A_1, A_2, E)$. В силу сюръективности отображения $\pi$ (первая аксиома проективного пространства § 1.1.) существуют векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{e}$ такие что

$$\pi(\vec{a}_1) = A_1; \quad \pi(\vec{a}_2) = A_2; \quad \pi(\vec{e}) = E.$$

Так как точки $A_1$ и $A_2$ различны, векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, а значит, образуют базис двумерного векторного пространства $U$. Для вектора $\vec{e}$ возможны два случая:

1) Пусть $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{e}$. В этом случае будем говорить, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ *согласованы*. Тогда в качестве репера $R$ возьмем множество всех базисов из $U$, гомотетичных базису $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$.

2) Пусть $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \neq \vec{e}$, то есть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не согласованы. Из этих векторов нужно получить согласованную систему векторов, по-прежнему порождающую точки $A_1$ и $A_2$. Так как векторы $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ образуют базис векторного пространства $U$, то вектор $\vec{e}$, принадлежащий $U$, можно разложить по этому базису:

$$\vec{e} = \rho_1 \vec{a}_1 + \rho_2 \vec{a}_2.$$

Обозначим $\vec{b}_1 = \rho_1 \vec{a}_1$ и $\vec{b}_2 = \rho_2 \vec{a}_2$. Так как точки $A_1$, $A_2$ и $E$ попарно различны, вектор $\vec{e}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}_1$, ни вектору $\vec{a}_2$, а значит, вещественные числа $\rho_1$ и $\rho_2$ оба отличны от нуля. Тогда векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ согласованы и образуют базис пространства $U$. В этом случае в качестве проективного репера $R$ возьмем множество всех базисов гомотетичных базису $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

2. Докажем, что проективный репер $R$ однозначно определяется тройкой точек $(A_1, A_2, E)$.

Предположим, что кроме репера $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ существует еще один проективный репер $\tilde{R} = R(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$, удовлетворяющий условиям теоремы. Тогда

$$\pi(\vec{a}_1) = \pi(\vec{c}_1) = A_1; \quad \pi(\vec{a}_2) = \pi(\vec{c}_2) = A_2; \quad \pi(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \pi(\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = E. \tag{1.16}$$

Из соотношений (1.16) следует, что существуют ненулевые вещественные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\mu$, такие что

$$\vec{c}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1; \quad \vec{c}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2; \quad \vec{c}_1 + \vec{c}_2 = \mu(\vec{a}_1 + \vec{a}_2).$$

Подставим первые два равенства в третье и вынесем векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ за скобки:

$$(\lambda_1 - \mu)\vec{a}_1 + (\lambda_2 - \mu)\vec{a}_2 = \vec{0}.$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, получим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \mu,$$

то есть базисы $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ гомотетичны по определению, следовательно, принадлежат одному проективному реперу. Это противоречит предположению, а значит, точки $(A_1, A_2, E)$ определяют проективный репер однозначно. ■

В силу теоремы 2 упорядоченную тройку $R = (A_1, A_2, E)$ попарно различных точек проективной прямой также будем называть *проективным репером* этой прямой. Точки $A_1$ и $A_2$ называются *вершинами* репера $R$, а точка $E$ – *единичной точкой.*

**Пример 1.5.** Пусть на проективной прямой $d$ дан проективный репер $(A_1, A_2, E)$. Найдем координаты точек $A_1$, $A_2$ и $E$ в этом репере.

Согласно теореме 2 однозначно определен класс гомотетичных базисов $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, где вектор $\vec{a}_1$ порождает точку $A_1$, вектор $\vec{a}_2$ порождает точку $A_2$, а вектор $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ порождает точку $E$. Обозначим вектор $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ через $\vec{e}$. Тогда имеют место три очевидных равенства

$$\vec{a}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2; \quad \vec{a}_2 = 0 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2; \quad \vec{e} = 1 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2.$$

Из этих равенств по определению координат точек на проективной прямой получим, что в репере $R$ точки $A_1$, $A_2$ и $E$ имеют координаты

$$A_1(1, 0); \quad A_2(0, 1); \quad E(1, 1).$$

### §1.8. Координаты точек на проективной плоскости

**1.** Пусть дана проективная плоскость $\sigma$. Обозначим через $W$ порождающее ее трехмерное векторное пространство. Координаты точек на проективной плоскости определяются аналогично координатам точек на проективной прямой.

Будем говорить, что два базиса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ пространства $W$ *гомомотетичны*, если существует ненулевое вещественное число $\lambda$, такое что

$$\vec{b}_1 = \lambda\vec{a}_1; \quad \vec{b}_2 = \lambda\vec{a}_2; \quad \vec{b}_3 = \lambda\vec{a}_3. \tag{1.17}$$

Отношение гомотетичности на множестве всех базисов векторного пространства $W$ является отношением эквивалентности. Тогда множество базисов $W$ распадается на классы эквивалентности по этому отношению. Каждый класс называется *проективным репером* на проективной плоскости $\sigma$. Будем обозначать проективный репер через $R$ или $R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, указывая один из базисов, принадлежащих этому реперу.

Пусть даны произвольная точка $M$ на проективной плоскости $\sigma$ и проективный репер $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Обозначим через $\vec{m}$ вектор из $W$, порождающий точку $M$. *Проективными координатами* (или, просто, *координатами*) точки $M$ в проективном репере $R$ называются координаты вектора $\vec{m}$ в базисе $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Иначе говоря, координатами точки $M$ в проективном репере $R$ называется упорядоченная тройка чисел $(m_1, m_2, m_3)$, такая что

$$\vec{m} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3.$$

Будем обозначать координаты точки так: $M(m_1, m_2, m_3)$ или $M(m_1, m_2, m_3)_R$.

**Теорема 1.** *Координаты точки на проективной плоскости относительно проективного репера определены с точностью до ненулевой константы. Другими словами, две упорядоченные тройки чисел $(m_1, m_2, m_3)$ и $(n_1, n_2, n_3)$ будут координатами одной и той же* *точки $M$ в проективном репере $R$ тогда и только тогда, когда существует ненулевое вещественное число $\alpha$, такое что*

$$n_1 = \alpha m_1; \quad n_2 = \alpha m_2; \quad n_3 = \alpha m_3.$$

$\square$ Докажите самостоятельно аналогично теореме 1 § 1.7. $\blacksquare$

**2.** Проективный репер $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ на проективной плоскости также можно задать с помощью точек проективной плоскости.

**Теорема 2.** *Пусть дана упорядоченная четверка точек $(A_1, A_2, A_3, E)$ на проективной плоскости $\sigma$, причем никакие три из них не лежат на одной проективной прямой. Тогда существует единственный проективный репер $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, такой что $\pi(\vec{a}_\alpha) = A_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$; $\pi(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) = E$, где $\pi : W \setminus \{\vec{0}\} \to \sigma$ – отображение, задающее проективную структуру на множестве $\sigma$.*

В силу теоремы 2 упорядоченную четверку точек $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, никакие три из которых не лежат на одной проективной прямой, также будем называть *проективным репером* проективной плоскости. Точки $A_1$, $A_2$ и $A_3$ называются *вершинами* репера $R$, точка $E$ – *единичной точкой*, а проективные прямые $(A_1A_2)$, $(A_2A_3)$ и $(A_1A_3)$ – *координатными прямыми.*

$\square$ Докажите аналогично теореме 2 § 1.7. $\blacksquare$

**Пример 1.6.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ дан проективный репер $(A_1, A_2, A_3, E)$. Найдем координаты точек $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $E$ в этом репере.

Согласно теореме 2 однозначно определен класс гомотетичных базисов $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, где вектор $\vec{a}_1$ порождает точку $A_1$, вектор $\vec{a}_2$ порождает точку $A_2$, вектор $\vec{a}_3$ порождает точку $A_3$, а вектор $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ порождает точку $E$. Обозначим вектор $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ через $\vec{e}$. Тогда имеют место четыре очевидных равенства

$$\vec{a}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3; \quad \vec{a}_2 = 0 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3;$$
$$\vec{a}_3 = 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3; \quad \vec{e} = 1 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3.$$

Из этих равенств по определению координат точек на проективной плоскости получим, что в репере $R$ точки $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $E$ имеют координаты

$$A_1(1, 0, 0); \quad A_2(0, 1, 0); \quad A_3(0, 0, 1); \quad E(1, 1, 1).$$

**3.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Построим проективные реперы на координатных прямых $(A_1A_2)$, $(A_2A_3)$ и $(A_1A_3)$, связанные с репером $R$.

В обозначениях теоремы 2 имеем

$$\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3. \tag{1.18}$$

Это равенство запишем в виде

$$\vec{e} = \left(\frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2\right) + \left(\frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3\right) + \left(\frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_3\right)$$

и обозначим

$$\vec{e}_3 = \tfrac{1}{2}\vec{a}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{a}_2; \quad \vec{e}_1 = \tfrac{1}{2}\vec{a}_2 + \tfrac{1}{2}\vec{a}_3; \quad \vec{e}_2 = \tfrac{1}{2}\vec{a}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{a}_3. \tag{1.19}$$

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ порождают точки на проективной плоскости $\sigma$. Обозначим эти точки через $E_1$, $E_2$ и $E_3$ соответственно. Из первого равенства (1.19) следует, что векторы $\vec{e}_3$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно зависимы, а значит, точки $E_3$, $A_1$ и $A_2$, которые они порождают, лежат на одной проективной прямой. Аналогично, каждая из троек точек $E_1$, $A_2$, $A_3$ и $E_2$, $A_1$, $A_3$ лежит на одной проективной прямой. Обозначим

$$R_1 = (A_2, A_3, E_1); \quad R_2 = (A_1, A_3, E_2); \quad R_3 = (A_1, A_2, E_3). \tag{1.20}$$

Из равенств (1.19) следует, что все точки каждой из троек $R_1$, $R_2$, $R_3$ различны, а значит, они определяют проективные реперы на соответствующих координатных прямых.

**Пример 1.7.** Покажем, что точки $A_1$, $E_1$ и $E$ лежат на одной проективной прямой.

Равенство (1.18) можно записать в виде

$$\vec{e} = \vec{a}_1 + 2\left(\frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3\right)$$

или

$$\vec{e} = \vec{a}_1 + 2\vec{e}_1.$$

Откуда получаем, что векторы $\vec{e}$, $\vec{a}_1$, $\vec{e}_1$, порождающие соответственно точки $E$, $A_1$, $E_1$, линейно зависимы, а значит, порождаемые ими точки лежат на одной проективной прямой.

Аналогично доказывается, что на одной проективной прямой лежат тройки точек $A_2$, $E_2$, $E$ и $A_3$, $E_3$, $E$.

**Пример 1.8.** Пусть дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ на проективной плоскости $\sigma$ и проективные реперы $R_1$, $R_2$, $R_3$ (обозначения (1.20)) на его координатных прямых. Из (1.19) следует, что координаты точек $E_1$, $E_2$, $E_3$ в репере $R$ равны $E_1(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $E_2(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $E_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Так как координаты точек в проективном репере определены с точностью до константы, также координатами этих точек будут следующие тройки чисел

$$E_1(0, 1, 1); \quad E_2(1, 0, 1); \quad E_3(1, 1, 0).$$

Точки $E_1$, $E_2$, $E_3$ называются *проекциями точки $E$ из центров* $A_1$, $A_2$, $A_3$ соответственно.

**Теорема 3.** *Пусть на проективной плоскости $\sigma$ дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и точка $M$ с координатами $(m_1, m_2, m_3)$ в репере $R$. Точка $M$ лежит на координатной прямой $(A_1A_2)$ тогда и только тогда, когда $m_3 = 0$.*

□ Обозначим через $\vec{m}$ вектор, порождающий точку $M$. По определению координат точки на проективной плоскости имеем

$$\vec{m} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3, \tag{1.21}$$

где $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – согласованная система векторов, порождающая точки $A_1$, $A_2$, $A_3$ соответственно (теорема 2).

Пусть точка $M$ лежит на проективной прямой $(A_1A_2)$. Тогда векторы $\vec{m}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Так как векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, то вектор $\vec{m}$ должен раскладываться по векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Следовательно, $m_3 = 0$.

Обратно, пусть $m_3 = 0$. Тогда из (1.21) следует, что векторы $\vec{m}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны, а значит, порождаемые ими точки лежат на одной проективной прямой. ■

**Замечание 1.** Аналогично теореме 3 доказывается, что точка $M$ лежит на координатной прямой $(A_2A_3)$ тогда и только тогда, когда $m_1 = 0$ и точка $M$ лежит на координатной прямой $(A_1A_3)$ тогда и только тогда, когда $m_2 = 0$.

Пусть точка $M$ проективной плоскости $\sigma$ не лежит на координатных прямых, а значит, по теореме 3 и замечанию 1 все три ее координаты отличны от нуля. Равенство (1.21) запишем в виде

$$\vec{m} = \left(m_1(\frac{1}{2}\vec{a}_1) + m_2(\frac{1}{2}\vec{a}_2)\right) + \left(m_2(\frac{1}{2}\vec{a}_2) + m_3(\frac{1}{2}\vec{a}_3)\right) + \left(m_1(\frac{1}{2}\vec{a}_1) + m_3(\frac{1}{2}\vec{a}_3)\right)$$

и обозначим

$$\vec{m}_3 = m_1(\tfrac{1}{2}\vec{a}_1) + m_2(\tfrac{1}{2}\vec{a}_2); \quad \vec{m}_1 = m_2(\tfrac{1}{2}\vec{a}_2) + m_3(\tfrac{1}{2}\vec{a}_3); \quad \vec{m}_2 = m_1(\tfrac{1}{2}\vec{a}_1) + m_3(\tfrac{1}{2}\vec{a}_3). \tag{1.22}$$

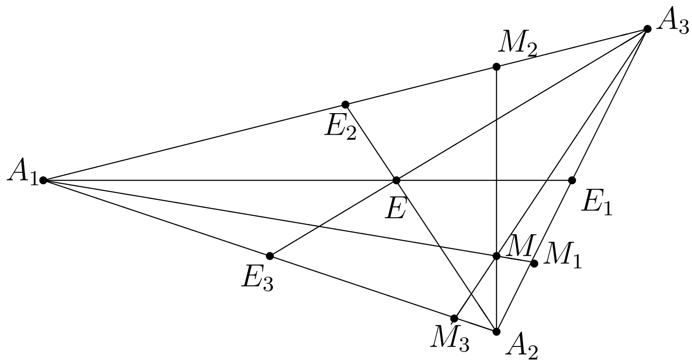



Рис.1.8

Обозначим через $M_1$, $M_2$, $M_3$ точки, которые соответственно порождаются векторами $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$, $\vec{m}_3$. Из (1.22) следует, что точка $M_3$ лежит на проективной прямой $(A_1A_2)$; точка $M_1$ – на проективной прямой $(A_2A_3)$, а точка $M_2$ – на проективной прямой $(A_1A_3)$ (Рис.1.8).

Запишем равенство (1.21) в виде

$$\vec{m} = 2\left(m_1(\frac{1}{2}\vec{a}_1) + m_2(\frac{1}{2}\vec{a}_2)\right) + m_3\vec{a}_3 = 2\vec{m}_3 + m_3\vec{a}_3.$$

Откуда получаем, что векторы $\vec{m}$, $\vec{m}_3$ и $\vec{a}_3$ компланарны, следовательно, точки $M$, $M_3$ и $A_3$ лежат на одной проективной прямой. Аналогичным образом доказывается, что точки $M$, $M_1$, $A_1$ и $M$, $M_2$, $A_2$ лежат на одной проективной прямой.

Точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ называются *проекциями точки $M$ из центров* $A_1$, $A_2$, $A_3$ соответственно.

Выясним, какие координаты имеют проекции точки $M$ в проективных реперах $R_1$, $R_2$, $R_3$ соответствующих координатных прямых. Рассмотрим точку $M_3$ (две остальные точки рассматриваются аналогично). Она принадлежит координатной прямой $(A_1A_2)$, на которой построен проективный репер $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$. Из первого равенства в (1.19) следует, что система векторов $(\frac{1}{2}\vec{a}_1, \frac{1}{2}\vec{a}_2)$ согласована (доказательство теоремы 2 § 1.7.), а значит, из первого равенства в (1.22) получим координаты $(m_1, m_3)$ точки $M_3$ в репере $R_3$. Итак, мы доказали следующую теорему

**Теорема 4.** *Пусть точка $M$ проективной плоскости $\sigma$ имеет координаты $(m_1, m_2, m_3)$ в проективном репере $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Тогда ее проекции из центров $A_1$, $A_2$, $A_3$ соответственно имеют координаты*

$$\begin{aligned} &M_1(m_2, m_3) \quad \textit{в репере} \quad R_1 = (A_2, A_3, E_1);\\ &M_2(m_1, m_3) \quad \textit{в репере} \quad R_2 = (A_1, A_3, E_2);\\ &M_3(m_1, m_2) \quad \textit{в репере} \quad R_3 = (A_1, A_2, E_3). \end{aligned}$$

## §1.9. Уравнения проективной прямой на проективной плоскости

Пусть на проективной плоскости $\sigma$ задан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Рассмотрим две различные точки $C(c_1, c_2, c_3)$ и $D(d_1, d_2, d_3)$ на плоскости $\sigma$. Обозначим через $\vec{c}$ вектор, порождающий точку $C$, а через $\vec{d}$ – вектор, порождающий точку $D$. Пусть проективный репер $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ задается базисом $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ (теорема 2 § 1.8.).

Получим уравнение проективной прямой $(CD)$ в репере $R$. Из доказательства предложения 1 § 1.2. следует, что прямая $(CD)$ порождена двумерным векторным подпространством $L(\vec{c}, \vec{d})$, то есть линейной оболочкой векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Пусть $M(x_1, x_2, x_3)_R$ – произвольная точка плоскости $\sigma$. Она принадлежит прямой $(CD)$ тогда и только тогда, когда порождающий ее вектор $\vec{m}$ компланарен векторам $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Так как векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не коллинеарны, компланарность векторов $\vec{m}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ равносильна следующему соотношению.

$$\vec{m} = \lambda\vec{c} + \mu\vec{d}, \tag{1.23}$$

где $\lambda$ и $\mu$ – некоторые вещественные числа, одновременно не равные нулю. По определению координат точки в проективном репере имеем

$$\vec{m}(x_1, x_2, x_3); \quad \vec{c}(c_1, c_2, c_3); \quad \vec{d}(d_1, d_2, d_3) \tag{1.24}$$

в базисе $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Тогда равенство (1.23) равносильно системе трех равенств для координат векторов $\vec{m}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda c_1 + \mu d_1;\\ x_2 = \lambda c_2 + \mu d_2;\\ x_3 = \lambda c_3 + \mu d_3, \end{cases} \tag{1.25}$$

где $\lambda$, $\mu$ – произвольные вещественные числа, не равные нулю одновременно. Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями* проективной прямой на проективной плоскости.

Если компланарность векторов $\vec{m}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ записать с помощью критерия компланарности (теорема 3 § 1.4, часть I), получим

$$\begin{vmatrix} x_1 & c_1 & d_1 \\ x_2 & c_2 & d_2 \\ x_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.26}$$

Так как точки $C$ и $D$ различны, а значит, их координаты не пропорциональны, то хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_3$, $\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a_1$, $\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_2$ не равен нулю. Тогда, раскрывая определитель в левой части (1.26) по первому столбцу, получим линейное однородное уравнение относительно координат точки $M$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \tag{1.27}$$

Это уравнение называется *общим уравнением проективной прямой* $(CD)$.

**Теорема 1.** *Множество всех точек проективной плоскости, координаты которых относительно проективного репера $R$ удовлетворяют линейному однородному уравнению, является проективной прямой.*

□ Пусть дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и относительно него задано линейное однородное уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \tag{1.28}$$

Зададим проективную прямую, для которой (1.28) будет являться общим уравнением. Так как это уравнение линейное, хотя бы один из коэффициентов $a_1$, $a_2$, $a_3$ отличен от нуля. Пусть $a_3 \neq 0$ (остальные два случая рассматриваются аналогично). Рассмотрим две точки $C(-a_3, 0, a_1)_R$ и $D(0, a_3, -a_2)_R$. Запишем общее уравнение прямой $(CD)$, используя (1.26):

$$\begin{vmatrix} x_1 & -a_3 & 0 \\ x_2 & 0 & a_3 \\ x_3 & a_1 & -a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим $-x_1(a_3a_1) - x_2(a_2a_3) - x_3(a_3)^2 = 0$. Так как $a_3 \neq 0$, разделим это уравнение на $a_3$. В результате получим уравнение (1.28). Следовательно, исходное множество точек и прямая $(CD)$ задаются одним и тем же уравнением, следовательно, совпадают. ■

Пусть относительно некоторого проективного репера $R$ проективная прямая $a$ задана общим уравнением (1.27). Тогда упорядоченная тройка чисел $(a_1, a_2, a_3)$ называется *координатами проективной прямой $a$ в проективном репере $R$*.

**Замечание 1.** Если уравнение (1.27) задает прямую $a$, то уравнения вида $(\lambda a_1)x_1 + (\lambda a_2)x_2 + (\lambda a_3)x_3 = 0$, где $\lambda$ – произвольное ненулевое вещественное число, также задает прямую $a$. Следовательно, числа $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ являются координатами прямой $a$. Таким образом, получаем, что координаты проективной прямой относительно репера $R$ определены с точностью до постоянного множителя.

**Пример 1.9.** Пусть на проективной плоскости дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Выведем общие уравнения координатных прямых. Согласно примеру 1.6 имеем $A_1(1,0,0)_R$, $A_2(0,1,0)_R$. Тогда по формуле (1.26) общее уравнение прямой $(A_1A_2)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 0.$$

Аналогично получаем, что общее уравнение координатной прямой $(A_2A_3)$ имеет вид:
$x_1 = 0$, а уравнение прямой $(A_1A_3)$: $x_2 = 0$.

**Теорема 2.** *Пусть на проективной плоскости задан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и три точки $A(a_1, a_2, a_3)_R$, $B(b_1, b_2, b_3)_R$, $C(c_1, c_2, c_3)_R$. Точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной проективной прямой тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

□ Из формулы (1.26) получим, что уравнение проективной прямой $(BC)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда точка $A$ принадлежит прямой $(BC)$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Откуда получаем требуемое равенство. ■

## §1.10. Формулы преобразования координат на проективной плоскости и проективной прямой

**1.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$, порожденной трехмерным векторным пространством $W$, даны два проективных репера $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $R' = R(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$. Обозначим

$$\vec{a}'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31}); \quad \vec{a}'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32}); \quad \vec{a}'_3(c_{13}, c_{23}, c_{33})$$

относительно базиса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

Пусть $M$ – произвольная точка плоскости $\sigma$. Обозначим координаты точки $M$ относительно репера $R$ через $(x_1, x_2, x_3)$, а относительно репера $R'$ – через $(x'_1, x'_2, x'_3)$. Наша задача: найти соотношение между координатами точки $M$ в реперах $R$ и $R'$.

Так как точка $M$ имеет координаты $(x_1, x_2, x_3)$ в репере $R$, существует порождающий ее вектор $\vec{m}$, который имеет координаты $(x_1, x_2, x_3)$ в базисе $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Аналогично, существует вектор $\vec{m}'$, порождающий точку $M$, который имеет координаты $(x'_1, x'_2, x'_3)$ в базисе $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$. Так как векторы $\vec{m}$ и $\vec{m}'$ порождают одну и ту же точку, существует ненулевое вещественное число $\rho$, такое что $\vec{m}' = \rho\vec{m}$. Тогда числа $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$ будут координатами вектора $\vec{m}'$ в базисе $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Таким образом, исходная задача может быть сформулирована в виде: найти соотношения между координатами вектора $\vec{m}'$ в базисах $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$. Согласно формулам перехода от одного базиса к другому (§ 6.2, часть I) получим

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{13}x'_3 \\ \rho x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{23}x'_3 \\ \rho x_3 &= c_{31}x'_1 + c_{32}x'_2 + c_{33}x'_3 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Заметим, что так как координаты точки на проективной плоскости определены с точностью до ненулевого постоянного множителя, то тройки чисел $(\lambda x'_1, \lambda x'_2, \lambda x'_3)$ также должны удовлетворять формулам (1.29). Если задать реперы $R$ и $R'$ другими базисами $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ и $(\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3)$ соответственно, то то матрица $(\tilde{c}_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$, составленная из координат векторов $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, отличается от матрицы $(c_{ij})$ на ненулевое вещественное число $\lambda$, так как базисы, принадлежащие одному проективному реперу гомотетичны. А значит, число $\rho$ должно быть произвольным ненулевым вещественным числом.

Будем называть формулы (1.29) *формулами перехода от репера $R$ к реперу $R'$* или *формулами преобразования координат при переходе от репера $R$ к реперу $R'$*.

**Замечание 1.** Выясним, как записать формулы перехода от репера $R$ к реперу $R'$, если они заданы точками, то есть $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$. Пусть известны координаты точек

$$A'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31}); \quad A'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32}); \quad A'_3(c_{13}, c_{23}, c_{33}); \quad E'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

в репере $R$. По определению координат это означает, что существуют векторы $\vec{a}'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\vec{a}'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32})$, $\vec{a}'_3(c_{13}, c_{23}, c_{33})$, $\vec{e}'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, порождающие эти точки, с координатами в базисе, задающем репер $R$. Возможны два случая:

1) векторы $\vec{a}'_1$, $\vec{a}'_2$, $\vec{a}'_3$ согласованы, то есть

$$\vec{a}'_1 + \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3 = \vec{e}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_{11} + c_{12} + c_{13} = \varepsilon_1; \\ c_{21} + c_{22} + c_{23} = \varepsilon_2; \\ c_{31} + c_{32} + c_{33} = \varepsilon_3. \end{cases}$$

Тогда, подставляя числа $c_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ в равенства (1.29), получим формулы перехода от репера $R$ к реперу $R'$.

2) векторы $\vec{a}'_1$, $\vec{a}'_2$, $\vec{a}'_3$ не согласованы, то есть $\vec{a}'_1 + \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3 \neq \vec{e}'$. Так как система векторов $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$ является базисом пространства $W$, вектор $\vec{e}'$, также принадлежащий $W$, можно

разложить по этому базису:

$$\vec{e}' = k_1\vec{a}'_1 + k_2\vec{a}'_2 + k_3\vec{a}'_3, \tag{1.30}$$

где $k_1, k_2, k_3$ – некоторые вещественные числа. Так как никакие три точки проективного репера не лежат на одной проективной прямой (теорема 2 1.8.), вектор $\vec{e}'$ не компланарен ни с одной парой векторов системы $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$, а значит, все три числа $k_1, k_2, k_3$ отличны от нуля. Чтобы найти эти числа, нужно от векторного равенства (1.30) перейти к равенствам для координат этих векторов (теорема 1 и следствие 1 § 6.2, часть I):

$$\begin{cases} k_1c_{11} + k_2c_{12} + k_3c_{13} = \varepsilon_1 \\ k_1c_{21} + k_2c_{22} + k_3c_{23} = \varepsilon_2 \\ k_1c_{31} + k_2c_{32} + k_3c_{33} = \varepsilon_3. \end{cases} \tag{1.31}$$

Это система из трех линейных уравнений, определитель матрицы которой отличен от нуля (векторы $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ линейно независимы) и свободные члены одновременно не равны нулю. Как известно из курса алгебры такая система уравнений имеет единственное ненулевое решение $(k_1, k_2, k_3)$. Тогда система векторов

$$\vec{b}_1 = k_1\vec{a}'_1; \quad \vec{b}_2 = k_2\vec{a}'_2; \quad \vec{b}_3 = k_3\vec{a}'_3$$

будет, во-первых, являться базисом пространства $W$, во-вторых, будет порождать точки $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$ соответственно и, в-третьих, будет согласована, то есть принадлежит реперу $R'$. Следовательно, чтобы получить формулы перехода от репера $R$ к реперу $R'$, нужно подставить координаты векторов

$$\vec{b}_1(k_1c_{11}, k_2c_{21}, k_3c_{31}); \quad \vec{b}_2(k_1c_{12}, k_2c_{22}, k_3c_{32}); \quad \vec{b}_3(k_1c_{13}, k_2c_{23}, k_3c_{33});$$

в соотношения (1.29) вместо координат векторов $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$.

**Пример 1.10.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ даны точки $A, A', B, B', S, E$, такие что точки $A, A', S$ лежат на одной прямой, точки $B, B', S$ лежат на другой прямой, а точка $E$ не лежит на одной прямой ни с какой парой из точек $A, A', B, B', S$.

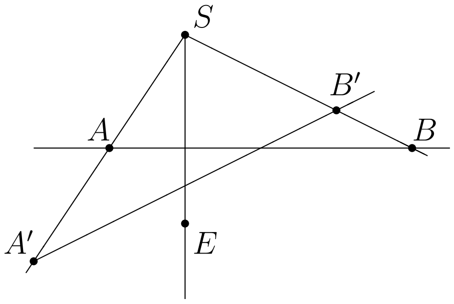



Рис.1.9

Найдем формулы перехода от репера $R = (A, B, S, E)$ к реперу $R' = (A', B', S, E)$ (Рис.1.9). Для этого нужны координаты вершин $A'$, $B'$, $S$ и единичной точки $E$ репера $R'$ в репере $R$. Так как точки $S$ и $E$ являются третьей вершиной и единичной точкой соответственно репера $R$, их координаты равны

$$S(0, 0, 1)_R; \quad E(1, 1, 1)_R$$

(пример 1.6). Чтобы определить координаты точки $A'$, заметим, что она лежит на координатной прямой $(AS)$ репера $R$. Согласно замечанию 1 § 1.8., вторая координата этой точки равна нулю, а две остальные координаты не равны нулю, так как эта точка не лежит на двух оставшихся координатных прямых репера $R$. Тогда координаты точки $A'$ в репере $R$ имеют вид: $A'(1,0,a)$, где $a$ – некоторое ненулевое вещественное число. Аналогично, координаты точки $B'$ в репере $R$ обозначим $B'(0,1,b)$, где $b$ – некоторое ненулевое вещественное число.

Рассмотрим векторы $\vec{a}'(1,0,a)$, $\vec{b}'(0,1,b)$, $\vec{\sigma}(0,0,1)$, $\vec{e}(1,1,1)$, порождающие точки $A'$, $B'$, $S$, $E$ соответственно и выясним, являются ли векторы $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{s}$ согласованными. Согласно замечанию 1 нужно проверить, что $\vec{a}'+\vec{b}'+\vec{s}=\vec{e}$, то есть

$$\begin{aligned} 1+0+0&=1\\ 0+1+0&=1\\ a+b+1&=1. \end{aligned}$$

Третье равенство показывает, что система векторов, вообще говоря, не согласована. Чтобы получить согласованную систему векторов нужно решить систему уравнений (формулы (1.31))

$$\begin{cases} k_1\cdot 1+k_2\cdot 0+k_3\cdot 0=1\\ k_1\cdot 0+k_2\cdot 1+k_3\cdot 0=1\\ k_1\cdot a+k_2\cdot b+k_3\cdot 1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=1\\ k_2=1\\ k_3=1-a-b. \end{cases}$$

Тогда система векторов

$$\vec{b}_1=k_1\vec{a}';\quad \vec{b}_1=k_2\vec{b}';\quad \vec{b}_3=k_3\vec{s}$$

с координатами

$$\vec{b}_1(1,0,a);\quad \vec{b}_2(0,1,b);\quad \vec{b}_3(0,0,1-a-b)$$

будет согласована и формулы перехода от репера $R$ к реперу $R'$ согласно (1.29) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \rho x_1&=x'_1\\ \rho x_2&=x'_2\\ \rho x_3&=ax'_1+bx'_2+(1-a-b)x'_3 \end{aligned}\tag{1.32}$$

**2.** Пусть на проективной прямой $d$, порождаемой двумерным векторным пространством $U$, даны два проективных репера $R=R(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ и $R'=R(\vec{a}'_1,\vec{a}'_2)$. Рассмотрим произвольную точку $M$ на прямой $d$ и обозначим ее координаты относительно репера $R$ через $(x_1,x_2)$, а относительно репера $R'$ – через $(x'_1,x'_2)$. Аналогично случаю проективной плоскости можно доказать (докажите самостоятельно), что формулы, связывающие координаты точки $M$ в реперах $R$ и $R'$ имеют вид

$$\begin{aligned} \rho x_1&=c_{11}x'_1+c_{12}x'_2\\ \rho x_2&=c_{21}x'_1+c_{22}x'_2, \end{aligned}\tag{1.33}$$

где $\rho$ – произвольное ненулевое вещественное число, $(c_{11},c_{21})$ и $(c_{12},c_{22})$ – координаты векторов $\vec{a}'_1$ и $\vec{a}'_2$ соответственно в базисе $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ пространства $U$.

Если реперы $R=(A_1,A_2,E)$ и $R'=(A'_1,A'_2,E')$ заданы точками, то имеет место замечание аналогичное замечанию 1. Сформулируйте его самостоятельно.

## §1.11. Сложное отношение четырех точек проективной прямой. Построение точек по координатам на расширенной плоскости

**1.** Пусть на проективной прямой $d$ даны три различные точки $A$, $B$, $C$ и точка $D$, отличная от точки $A$. Рассмотрим проективный репер $R_0 = (A, B, C)$ и обозначим координаты точки $D$ относительно этого репера через $(d_1, d_2)$. Число $\frac{d_1}{d_2}$ называется *сложным (двойным) отношением точек* $A, B, C, D$ и обозначается $(AB, CD)$.

**Теорема 1.** *Пусть даны три различные точки $A, B, C$ на проективной прямой $d$ и произвольное вещественное число $\lambda$. Тогда существует единственная точка $D$ на прямой $d$, такая что $(AB, CD) = \lambda$.*

☐ Рассмотрим точку $D$ с координатами $(\lambda, 1)$ в репере $R_0 = (A, B, C)$. Такая точка существует в силу замечания 1 § 1.7. Очевидно, что $(AB, CD) = \lambda$.

Допустим, что существует еще одна точка $D'$, такая что $(AB, CD') = \lambda$. Обозначим координаты этой точки в репере $R_0$ через $(d'_1, d'_2)$. Тогда по определению сложного отношения четырех точек получим

$$\frac{d'_1}{d'_2} = \lambda = \frac{\lambda}{1},$$

то есть пары чисел $(d'_1, d'_2)$ и $(\lambda, 1)$ пропорциональны, следовательно, являются координатами одной и той же точки. Итак, точка $D$ совпадает с точкой $D'$, следовательно, $D$ единственна. ■

Получим формулу для вычисления сложного отношения четырех точек прямой через их координаты в произвольном репере.

**Теорема 2.** *Пусть на проективной прямой $d$ даны три различные точки $A$, $B$, $C$ и точка $D$, отличная от точки $A$. Обозначим их координаты относительно проективного репера $R = (A_1, A_2, E)$ этой прямой через $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$. Тогда*

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}. \tag{1.34}$$

☐ Обозначим координаты точки $D$ в репере $R_0 = (A, B, C)$ через $(d_1^0, d_2^0)$. Тогда по определению сложного отношения четырех точек проективной прямой имеем

$$(AB, CD) = \frac{d_1^0}{d_2^0}. \tag{1.35}$$

Чтобы получить формулу (1.34), нужно выразить координаты $(d_1^0, d_2^0)$ точки $D$ в репере $R_0$ через координаты $(d_1, d_2)$ этой точки в репере $R$ и подставить их в (1.35). Для этого нужны формулы перехода от репера $R$ к реперу $R_0$ (§ 1.10.).

Рассмотрим векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$, $\vec{c}(c_1, c_2)$, порождающие соответственно точки $A$, $B$, $C$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вообще говоря, не согласованы. Чтобы получить согласованную пару векторов нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 k_1 + b_1 k_2 = c_1 \\ a_2 k_1 + b_2 k_2 = c_2 \end{cases}$$

с неизвестными $k_1$ и $k_2$. Как известно из алгебры,

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{1.36}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Тогда формулы перехода от репера $R$ к реперу $R_0$ имеют вид (формулы (1.33))

$$\rho x_1 = k_1 a_1 x_1' + k_2 b_1 x_2'$$
$$\rho x_2 = k_1 a_2 x_1' + k_2 b_2 x_2'.$$

Подставим координаты точки $D$ в полученные формулы:

$$\rho d_1 = k_1 a_1 d_1^0 + k_2 b_1 d_2^0$$
$$\rho d_2 = k_1 a_2 d_1^0 + k_2 b_2 d_2^0.$$

Найдем $d_1^0$ и $d_2^0$ из полученных уравнений:

$$d_1^0 = \frac{\begin{vmatrix} \rho d_1 & k_2 b_1 \\ \rho d_2 & k_2 b_2 \end{vmatrix}}{k_1 k_2 \Delta}; \quad d_2^0 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 a_1 & \rho d_1 \\ k_1 a_2 & \rho d_2 \end{vmatrix}}{k_1 k_2 \Delta}.$$

Подставляя выражения для $d_1^0$ и $d_2^0$ в (1.35) с учетом (1.36), получим (1.34). ■

**Теорема 3.** *Для сложного отношения четырех точек проективной прямой имеем*

$1^0$. $(AB, CD) = (CD, AB)$;

$2^0$. *Если* $(AB, CD) \neq 0$, *то* $(AB, CD) = \frac{1}{(BA, CD)}$, $(AB, CD) = \frac{1}{(AB, DC)}$;

$3^0$. $(AB, CC) = 1$, $(AB, CB) = 0$;

$4^0$. $(AB, CD) + (AC, BD) = 1$.

□ Свойство $3^0$ легко доказать, используя определение сложного отношения четырех точек. Остальные свойства доказываются с использованием формулы (1.34). Докажем свойство $4^0$. Остальные свойства докажите самостоятельно.

Рассмотрим репер $R_0 = (A, B, C)$ и обозначим координаты точки $D$ в нем через $(d_1, d_2)$. Так как $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, получим по формуле (1.34)

$$(AC, BD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{d_2 - d_1}{d_2}. \tag{1.37}$$

По определению сложного отношения четырех точек имеем $(AB, CD) = \frac{d_1}{d_2}$. Тогда с учетом (1.37) получим $4^0$. ■

**Замечание 1.** Будем говорить, что пара точек $A$ и $B$ *разделяет* пару точек $C$ и $D$, если $(AB, CD) < 0$. Это определение корректно, так как из теоремы 3 следует, что если для точек $A$, $B$, $C$, $D$ имеет место неравенство $(AB, CD) < 0$, то для них верны также неравенства $(BA, CD) < 0$, $(AB, DC) < 0$, $(CD, AB) < 0$.

**2.** Пусть на расширенной плоскости $\bar{\sigma}$ дана расширенная прямая $\bar{d}$. Рассмотрим проективный репер $R = (A_1, A_2, E)$ на прямой $\bar{d}$ и поставим задачу: построить точку $M$ прямой $\bar{d}$, если известны координаты $(x_1, x_2)$ точки $M$ в репере $R$.

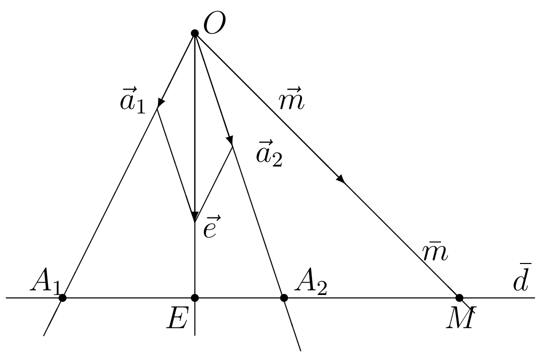



Рис.1.10

Возьмем произвольную точку $O$ (Рис.1.10), не принадлежащую прямой $\bar{d}$, и рассмотрим пучок аффинных прямых с центром в точке $O$. Для построения точки $M$ нужно задать какой-либо базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, принадлежащий реперу $R$ (определение проективного репера § 1.7. и теорема 2 § 1.7.). Возьмем произвольный вектор $\vec{e}$, параллельный аффинной прямой $(OE)$, и отложим его представитель от точки $O$.

Построим на представителе вектора $\vec{e}$ как на диагонали параллелограмм со сторонами, принадлежащими аффинным прямым $(OA_1)$ и $(OA_2)$. Стороны этого параллелограмма задают представителей искомых векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. По определению координат точки в проективном репере (§ 1.7.) вектор

$$\vec{m} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$$

порождает точку $M$. Строим вектор $\vec{m}$ и проводим расширенную прямую $\bar{m}$ через точку $O$ параллельно вектору $\vec{m}$. Тогда расширенные прямые $\bar{m}$ и $\bar{d}$ пересекутся в искомой точке $M$. Заметим, что если аффинные прямые $m$ и $d$ пересекаются, то точка $M$ является собственной точкой прямой $\bar{d}$, а если параллельны, то точка $M$ является несобственной точкой прямой $\bar{d}$.

Докажем корректность приведенного построения, а именно, что точка $M$ получается одна и та же, если, во-первых, выбирать различные векторы $\vec{e}$ и, во-вторых, выбирать различные точки $O$.

Пусть $\vec{e}'$ – другой вектор, порождающий точку $E$. Тогда соответствующий ему базис $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2)$ будет гомотетичен базису $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, то есть

$$\vec{a}'_1 = \lambda\vec{a}_1; \quad \vec{a}'_2 = \lambda\vec{a}_2,$$

где $\lambda$ – некоторое ненулевое вещественное число (докажите самостоятельно, используя условия согласованности для $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2$). Тогда вектор

$$\vec{m}' = x_1\vec{a}'_1 + x_2\vec{a}'_2 = \lambda(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2) = \lambda\vec{m}$$

будет коллинеарен вектору $\vec{m}$, а значит, будет определять ту же точку $M$, что и вектор $\vec{m}$. Таким образом, точка $M$ не зависит от выбора вектора $\vec{e}$.

Пусть $O'$ – точка плоскости $\sigma$, не лежащая на прямой $\bar{d}$ и отличная от точки $O$.

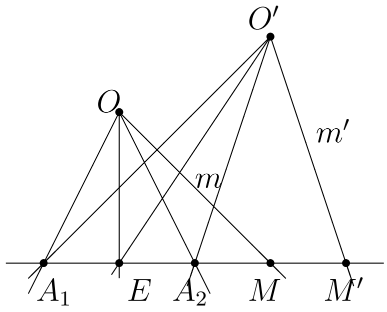



Рис.1.11

Допустим, что проводя описанные выше построения для точки $O'$ мы получили точку $M'$, отличную от точки $M$ (Рис.1.11). Так как координаты точки $M'$ в репере $R$ равны $(x_1, x_2)$, то сложное отношение $(A_1A_2, EM') = \frac{x_1}{x_2}$. Но сложное отношение $(A_1A_2, EM) = \frac{x_1}{x_2}$, то есть $(A_1A_2, EM') = (A_1A_2, EM)$. Тогда по теореме 1 точки $M$ и $M'$ совпадают. Таким образом, построение точки $M$ не зависит от выбора точки $O'$.

**3.** Пусть на расширенной плоскости $\bar{\sigma}$ дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и известны координаты $(x_1, x_2, x_3)$ точки $M$ в этом репере. Поставим задачу: построить точку $M$ по ее координатам в репере $R$.

Рассмотрим проекции $M_1, M_2, M_3$ точки $M$ из центров $A_1, A_2, A_3$. Тогда согласно теореме 4 § 1.8. известны их координаты в проективный реперах $R_1, R_2, R_3$ координатных прямых репера $R$. Используя пункт 2., построим две из точек $M_1, M_2, M_3$, например, $M_1$ и $M_2$. Тогда точка $M$ будет точкой пересечения расширенных прямых $(A_1M_1)$ и $(A_2M_2)$.

## §1.12. Сложное отношение четырех прямых пучка

**1.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ даны две проективные прямые $d$, $d'$ и пучок проективных прямых $\mathscr{P}(O)$ с центром в точке $O$, не лежащей на прямых $d$ и $d'$.

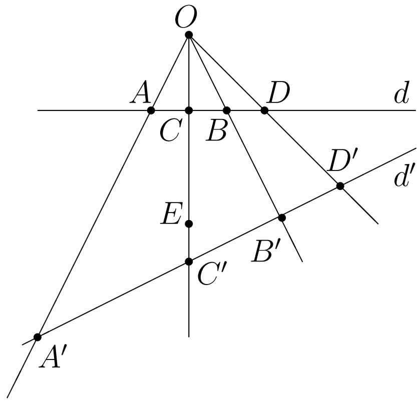



Рис.1.12

Обозначим точки пересечения прямых пучка $\mathscr{P}(O)$ с прямыми $d$ и $d'$ как показано на Рис.1.12.

**Теорема 1.** *Во введенных обозначениях* $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.

☐ Пусть $E$ – точка на проективной прямой $(CC')$, отличная от точек $C$, $C'$, $O$. Рассмотрим два проективных репера $R = (A, B, O, E)$ и $R' = (A', B', O, E)$ на плоскости $\sigma$. Обозначим координаты точки $D$ в репере $R'$ через $(x'_1, x'_2, x'_3)$, а координаты точки $D'$ в репере $R'$ –

через $(y'_1, y'_2, 0)$. Здесь воспользовались тем, что точка $D'$ лежит на первой координатной прямой репера $R'$, а значит, в силу теоремы 3 § 1.8. ее третья координата равна нулю.

Запишем условие принадлежности точки $D$ проективной прямой $(OD')$ в репере $R'$, используя параметрические уравнения прямой (формулы (1.25) § 1.9.):

$$\begin{aligned} x'_1 &= \mu \cdot 0 + \lambda \cdot y'_1 \\ x'_2 &= \mu \cdot 0 + \lambda y'_2 \\ x'_3 &= \mu \cdot 1 + \lambda \cdot 0, \end{aligned}$$

где $\lambda, \mu$ – некоторые ненулевые вещественные числа. Из первых двух уравнений получим

$$\frac{x'_1}{x'_2} = \frac{y'_1}{y'_2}. \tag{1.38}$$

Согласно теореме 4 § 1.8. координаты точки $D'$ в репере $(A', B', C')$ проективной прямой $d'$ равны $(y'_1, y'_2)$, а значит сложное отношение четырех точек

$$(A'B', C'D') = \frac{y'_1}{y'_2}. \tag{1.39}$$

Чтобы вычислить сложное отношение четырех точек $(AB, CD)$ нам потребуются координаты точки $D$ в репере $(A, B, C)$ проективной прямой $d$. Для этого сначала воспользуемся формулами перехода от репера $R$ к реперу $R'$ (формулы (1.32)) и получим, что $D(x'_1, x'_2, ax'_1 + bx'_2 + (1-a-b)x'_3)_R$. Тогда по теореме 4 § 1.8. получим, что $D(x'_1, x'_2)$ в репере $(A, B, C)$, следовательно сложное отношение $(AB, CD) = \frac{x'_1}{x'_2}$. Сравнивая это выражение с (1.38) и (1.39), имеем $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. ■

Доказанная теорема дает возможность применять формулу (1.34), когда координаты точек $A, B, C, D$ заданы относительно проективного репера проективной плоскости.

**Пример 1.11.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ дана проективная прямая $d = (AB)$ и проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Обозначим координаты точек $A$ и $B$ относительно этого репера $(a_1, a_2, a_3)$ и $(b_1, b_2, b_3)$ соответственно. Тогда параметрические уравнения прямой $d$ имеют вид ((1.25) § 1.9.)

$$x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1; \quad x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2; \quad x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3. \tag{1.40}$$

Пусть $C$ и $D$ – произвольные точки прямой $d$, такие что существует сложное отношение $(AB, CD)$. Обозначим через $\lambda_C$, $\mu_C$ и $\lambda_D$, $\mu_D$ значения параметров, соответствующих точкам $C$ и $D$. Покажем, что

$$(AB, CD) = \frac{\mu_C \lambda_D}{\mu_D \lambda_C}.$$

Действительно, из (1.40) следует, что точка $C$ имеет координаты $(\lambda_C a_1 + \mu_C b_1, \lambda_C a_2 + \mu_C b_2, \lambda_C a_3 + \mu_C b_3)$, а точка $D$ – координаты $(\lambda_D a_1 + \mu_D b_1, \lambda_D a_2 + \mu_D b_2, \lambda_D a_3 + \mu_D b_3)$.

Чтобы применить формулу (1.34), нужно спроектировать точки $A, B, C, D$ из какой-либо вершины репера $R$ на координатную прямую. Например, спроектируем точки из вершины $A_3$ репера $R$ на координатную прямую $(A_1A_2)$. Согласно теореме 4 § 1.8. получаем

$$A_3(a_1,a_2)_{R_3};\quad B_3(b_1,b_2)_{R_3};\quad C_3(\lambda_C a_1+\mu_C b_1,\lambda_C a_2+\mu_C b_2)_{R_3};\quad D_3(\lambda_D a_1+\mu_D b_1,\lambda_D a_2+\mu_D b_2)_{R_3}.$$

Так как по теореме 1 $(AB,CD)=(A_3B_3,C_3D_3)$, согласно формуле получаем (1.34)

$$(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & \lambda_C a_1+\mu_C b_1 \\ a_2 & \lambda_C a_2+\mu_C b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & \lambda_D a_1+\mu_D b_1 \\ a_2 & \lambda_D a_2+\mu_D b_2\end{vmatrix}}\cdot\frac{\begin{vmatrix} b_1 & \lambda_D a_1+\mu_D b_1 \\ b_2 & \lambda_D a_2+\mu_D b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & \lambda_C a_1+\lambda_C b_1 \\ b_2 & \lambda_C a_2+\lambda_C b_2\end{vmatrix}}=\frac{\mu_C\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}{\mu_D\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\cdot\frac{\lambda_D\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2\end{vmatrix}}{\lambda_C\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2\end{vmatrix}}=\frac{\mu_C}{\mu_D}\frac{\lambda_D}{\lambda_C}.$$

Если определитель $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2\end{vmatrix}$ равен нулю, то спроектируем точки $A,B,C,D$ из другой вершины репера $R$, для которой соответствующий определитель не равен нулю, и проведем аналогичные вычисления. Такая вершина существует, так как точки $A$ и $B$ различны, следовательно, их координаты не пропорциональны.

**2.** Пусть на проективной плоскости дан пучок проективных прямых $\mathscr{P}(O)$. Рассмотрим четыре проективные прямые $a$, $b$, $c$, $d$ этого пучка, причем первые три прямые различны, а четвертая прямая отлична от прямой $a$. Пусть проективная прямая $d$, не проходящая через точку $O$, пересекает прямые $a$, $b$, $c$, $d$ соответственно в точках $A$, $B$, $C$, $D$. Тогда *сложным отношением четырех проективных прямых* $a$, $b$, $c$, $d$ пучка $\mathscr{P}(O)$ называется сложное отношение четырех точек $(AB,CD)$. В силу теоремы 1 это определение корректно, то есть не зависит от выбора прямой $d$.

Из теоремы 3 § 1.11. и определения сложного отношения четырех прямых пучка получим свойства сложного отношения четырех прямых пучка.

**Теорема 2.** *Для сложного отношения четырех прямых $a,b,c,d$ пучка $\mathscr{P}(O)$ имеем*

$1^0$. $(ab,cd)=(cd,ab)$;

$2^0$. *Если* $(ab,cd)\neq 0$, *то* $(ab,cd)=\frac{1}{(ba,cd)}$, $(ab,cd)=\frac{1}{(ab,dc)}$;

$3^0$. $(ab,cc)=1$, $(ab,cb)=0$;

$4^0$. $(ab,cd)+(ac,bd)=1$.

## §1.13. Проективные отображения проективных прямых

**1.** Пусть даны две проективные прямые $d$ и $d'$ на проективной плоскости $\sigma$. *Проективным отображением* прямой $d$ на прямую $d'$ называется биективное отображение сохраняющее сложное отношение любой четверки точек прямой $d$. Если прямые $d$ и $d'$ совпадают, то проективное отображение называется *проективным преобразованием* прямой $d$. Легко видеть, что тождественное преобразование прямой является проективным преобразованием.

**Замечание 1.** Из определения проективного отображения следует, что композиция проективных отображений и отображение, обратное проективному, также являются проективными.

Очевидно, что в силу биективности любое проективное отображение прямой на прямую переводит проективный репер в проективный репер. Более того, верна следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть на проективных прямых $d$ и $d'$ даны соответственно проективные реперы $R = (A_1, A_2, E)$ и $R' = (A_1', A_2', E')$. Тогда существует единственное проективное отображение, переводящее репер $R$ в репер $R'$. При этом каждой точке $M$ с координатами $(x_1, x_2)$ прямой $d$ в репере $R$ ставится в соответствие точка $M'$ прямой $d'$ с теми же координатами $(x_1, x_2)$, но в репере $R'$.*

□ Зададим отображение $f : d \to d'$ следующим образом: каждой точке $M$ прямой $d$ с координатами $(x_1, x_2)$ в репере $R$ ставим в соответствие точку $M'$ прямой $d'$ с теми же координатами в репере $R'$. Такая точка существует и определена однозначно в силу замечания 1 § 1.7.. Очевидно, что построенное отображение будет биекцией.

Докажем, что биекция $f$ сохраняет сложное отношение четырех точек прямой. Пусть $A, B, C, D$ – произвольные точки прямой $d$, для которых определено сложное отношение. Обозначим их координаты в репере $R$ следующим образом: $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$. Тогда их образы $A', B', C', D'$ при отображении $f$ будут иметь те же координаты в репере $R'$. Вычисляя сложные отношения $(AB, CD)$ и $(A'B', C'D')$ по формуле (1.34) § 1.11. получим, что $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. Итак, мы построили требуемое проективное отображение.

Докажем, что $f$ переводит репер $R$ в репер $R'$. Так как точка $A_1$ имеет координаты $(1, 0)$ в репере $R$, то ее образом при отображении $f$ будет точка с координатами $(1, 0)$ в репере $R'$, то есть точка $A_1'$. Аналогично получаем, что при отображении $f$ точка $A_2$ перейдет в точку $A_2'$, а точка $E$ – в точку $E'$.

Наконец, покажем единственность отображения $f$. Пусть существует еще одно проективное отображение $g$, переводящее репер $R$ в репер $R'$. Допустим, что для некоторой точки $M$ прямой $d$ имеем $f(M) = M'$, $g(M) = M''$, причем $M' \neq M''$. Так как $f$ и $g$ проективные отображения, имеем

$$(A_1A_2, EM) = (A_1'A_2', E'M'); \quad (A_1A_2, EM) = (A_1'A_2', E'M'').$$

Тогда $(A_1'A_2', E'M') = (A_1'A_2', E'M'')$ и по теореме 1 § 1.11. получим, что $M' = M''$. Полученное противоречие доказывает единственность проективного отображения $f$. ■

**Следствие 1.** *Пусть даны два проективных отображения $f : d \to d'$ и $g : d \to d'$, такие что*

$$f(A) = g(A) = A'; \quad f(B) = g(B) = B'; \quad f(C) = g(C) = C',$$

*где $A, B, C$ – некоторые попарно различные точки прямой $d$, а $A', B', C'$ – их образы. Тогда эти отображения совпадают.*

□ По теореме 2 § 1.7. две упорядоченные тройки точек $R = (A, B, C)$ и $R' = (A', B', C')$ определяют проективные реперы. Тогда по теореме 1 отображения $f$ и $g$ совпадают. ■

**2.** Приведем пример проективного отображения.

**Пример 1.12.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ даны две различные проективные прямые $d$ и $d'$.

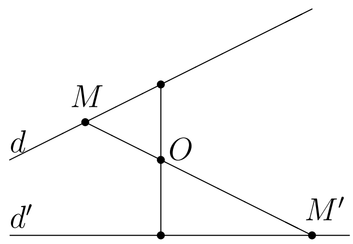



Рис.1.13

Рассмотрим произвольную точку $O$ (Рис.1.13), не принадлежащую этим прямым. Тогда любой точке $M$ прямой $d$ поставим в соответствие точку $M'$ пересечения прямых $d'$ и $(OM)$. Очевидно, что это соответствие биективно, а согласно теореме 1 § 1.12. оно будет сохранять сложное отношение четырех точек, то есть будет проективным. Это проективное отображение называется *перспективным отображением прямой на прямую.* Другими словами, отображение проективной прямой $d$ на проективную прямую $d'$ называется *перспективным*, если прямые, соединяющие соответствующие точки этого отображения проходят через одну точку. Точка $O$ называется *центром перспективы.* Будем говорить, что точка $M$ *спроектирована* из точки $O$ на прямую $d'$.

**Замечание 2.** Из определения перспективного отображения следует, что оно имеет обратное отображение, которое является перспективным с тем же центром перспективы.

Докажем критерий перспективного отображения прямой на прямую.

**Теорема 2.** *Пусть $f : d \to d'$ – проективное отображение прямой $d$ на прямую $d'$. Отображение $f$ является перспективным отображением тогда и только тогда, когда точка $D = d \cap d'$ инвариантна относительно отображения $f$.*

□ Пусть $f$ – перспективное отображение проективной прямой $d$ на проективную прямую $d'$.

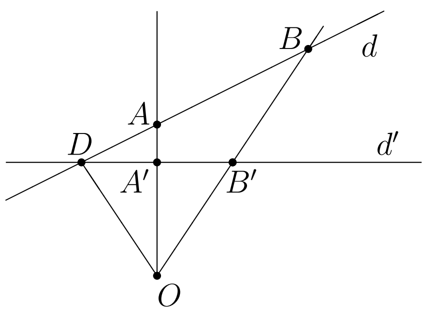



Рис.1.14

Тогда $f(D) = D$ по определению перспективного отображения (Рис.1.14).
Обратно, пусть $f$ – проективное отображение проективной прямой $d$ на проективную прямую $d'$, которое переводит точку $D$ в точку $D$. Возьмем на прямой $d$ две различные точки $A$, $B$, отличные от $D$, и обозначим их образы при отображении $f$ через $A'$ и $B'$ соответственно. Тогда согласно теореме 1 отображение $f$ однозначно задается парой соответствующих проективных реперов $R = (A, B, D)$ и $R' = (A', B', D)$.

Обозначим $O = (AA') \cap (BB')$ и рассмотрим перспективное отображение $g : d \to d'$ с центром перспективы $O$. Тогда $g$ переводит репер $R$ в репер $R'$, а значит, по следствию 1 совпадает с отображением $f$. Таким образом, $f$ является перспективным. ■

Следующая теорема показывает, что перспективные отображения являются основным примером проективных отображений проективных прямых.

**Теорема 3.** *Любое проективное отображение проективной прямой $d$ на проективную прямую $d'$, отличную от $d$, можно представить в виде композиции не более двух перспективных отображений.*

$\square$ Пусть дано проективное отображение $f : d \to d'$ проективной прямой $d$ на проективную прямую $d'$. Если оно перспективное, то утверждение теоремы выполнено. Предположим, что $f$ не является перспективным.

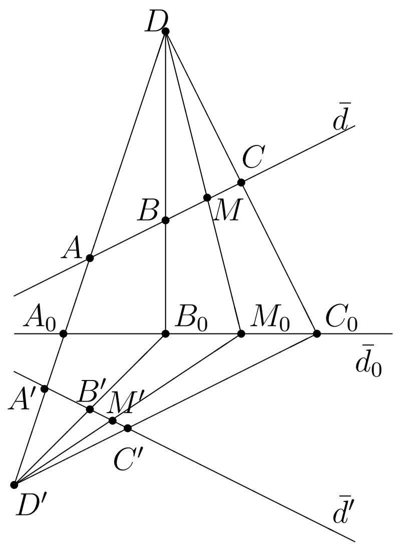



Рис.1.15

Рассмотрим проективный репер $R = (A, B, C)$ прямой $d$ и проективный репер $R' = (A', B', C')$ прямой $d'$, где точки $A', B', C'$ являются соответственно образами точек $A, B, C$ при проективном отображении $f$. Тогда в силу теоремы 1 отображение $f$ задается так: каждой точке $M$ с координатами $(x_1, x_2)$ в репере $R$ ставится в соответствие точка $M'$ с теми же координатами в репере $R'$.

Так как прямые $d$ и $d'$ различны, хотя бы одна из пар соответствующих точек реперов $R$ и $R'$ различна. Пусть $A \neq A'$. Тогда проведем проективную прямую $(AA')$ и выберем на ней произвольно две различные точки $D$ и $D'$ (отличные от точек $A$ и $A'$). Построим точки

$$B_0 = (DB) \cap (D'B'); \quad C_0 = (DC) \cap (D'C').$$

Они существуют в силу предложения 4 § 1.2. Обозначим $d_0 = (B_0C_0)$ и $A_0 = (DD') \cap d_0$. Тогда определим два проективных отображения: $g_1 : d \to d_0$ переводит репер $R$ в репер $R_0 = (A_0, B_0, C_0)$ и $g_2 : d_0 \to d'$ переводит репер $R_0$ в репер $R'$ (теорема 1 § 1.13.). В силу следствия 1 отображения $g_1$ и $g_2$ являются перспективными с центрами перспективы $D$ и $D'$ соответственно. Композиция $g_2 \circ g_1$ переводит репер $R$ в репер $R'$, а значит, совпадает с проективным отображением $f$. $\blacksquare$

Теорема 3 дает алгоритм построения образов (и прообразов) точек при проективных отображениях на расширенной плоскости. Пусть на расширенной плоскости даны две расширенные прямые $\bar{d}$ и $\bar{d}'$ (Рис.1.15). Проективное отображение $f : \bar{d} \to \bar{d}'$ однозначно задается, если указать три пары соответствующих точек

$$A \to A'; \quad B \to B'; \quad C \to C'$$

при этом отображении. Чтобы найти образ произвольной точки $M$ прямой $\bar{d}$, нужно:

1) на прямой, соединяющей пару соответствующих точек, например, на прямой $(AA')$, взять две произвольные точки $D$ и $D'$, отличные от $A$ и $A'$;

2) построить прямую $\bar{d}_0 = (B_0C_0)$, где $B_0 = (DB) \cap (D'B')$ и $C_0 = (DC) \cap (D'C')$;

3) построить точку $M_0 = (DM) \cap \bar{d}_0$;

4) построить точку $M' = (D'M_0) \cap \bar{d}'$.

Точка $M'$ будет искомой.

Сформулируйте самостоятельно алгоритм построения прообраза произвольной точки $M'$ прямой $\bar{d}'$ при проективном отображении $f$.

**3.** Рассмотрим проективные преобразования $f : d \to d$ проективной прямой $d$.

**Теорема 4.** *Любое проективное преобразование проективной прямой может быть представлено в виде композиции не более трех перспективных отображений.*

□ Пусть дано проективное преобразование $f : d \to d$.

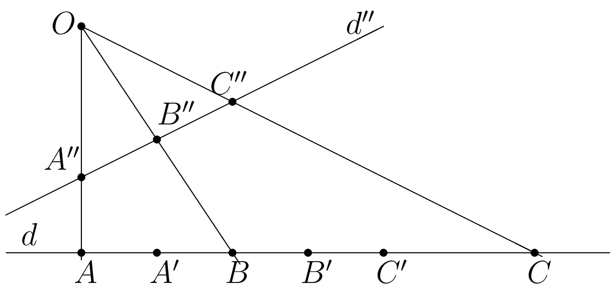



Рис.1.16

Согласно теореме 1 преобразование $f$ может быть задано парой соответствующих реперов $R = (A, B, C)$ и $R' = (A', B', C')$, где $A, B, C$ – произвольные попарно различные точки прямой $d$, а $A', B', C'$ – соответственно их образы. Возьмем произвольную проективную прямую $d''$, отличную от $d$ и точку $O$, не лежащую на прямых $d$ и $d''$.

Рассмотрим перспективное отображение $g_1 : d \to d''$ с центром перспективы $O$. Обозначим

$$A'' = g_1(A); \quad B'' = g_1(B); \quad C'' = g_1(C).$$

Тогда отображение $f \circ g_1^{-1} : d'' \to d$ является проективным отображением проективных прямых (замечание 1 и замечание 2). По теореме 3 отображение $f \circ g_1^{-1}$ либо является перспективным отображением $g_2$ (если проективные прямые $(A'A'')$, $(B'B'')$, $(C'C'')$ пересекаются в одной точке), а значит, $f = g_2 \circ g_1$, либо представимо в виде композиции двух перспективных отображений $g_3 \circ g_2$. Тогда $f \circ g_1^{-1} = g_3 \circ g_2$, то есть $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$, значит, представимо в виде композиции трех перспективных отображений. ■

Пусть на расширенной плоскости задано проективное преобразование $f : \bar{d} \to \bar{d}$ расширенной прямой $\bar{d}$ с помощью пары соответствующих реперов $R = (A, B, C)$ и $R' = (A', B', C')$, то есть $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Сформулируйте самостоятельно алгоритм построения образа произвольной точки $M$ прямой $\bar{d}$ при преобразовании $f$.

## §1.14. Проективные отображения пучка на пучок

Пусть на проективной плоскости $\sigma$ даны два пучка проективных прямых $\mathscr{P}(O)$ и $\mathscr{P}(O')$. *Проективным отображением* пучка $\mathscr{P}(O)$ на пучок $\mathscr{P}(O')$ называется биективное отображение, ставящее в соответствие каждой прямой пучка $\mathscr{P}(O)$ прямую пучка $\mathscr{P}(O')$ и сохраняющее сложное отношение любой четверки прямых пучка $\mathscr{P}(O)$. Если точки $O$

и $O'$ совпадают, что проективное отображение называется *проективным преобразованием пучка* $\mathscr{P}(O)$. Легко видеть, что тождественное преобразование пучка $\mathscr{P}(O)$ является проективным преобразованием.

**Замечание 1.** Из определения проективного отображения пучка на пучок следует, что композиция проективных отображений и отображение обратное проективному также являются проективными.

Из теоремы 1 и следствию 1 § 1.13. по принципу двойственности на плоскости следует

**Теорема 1.** *Пусть даны три различные прямые* $a, b, c$ *пучка* $\mathscr{P}(O)$ *и три различные прямые* $a', b', c'$ *пучка* $\mathscr{P}(O')$. *Тогда существует единственное проективное отображение* $f : \mathscr{P}(O) \to \mathscr{P}(O')$, *такое что*

$$f(a) = a'; \quad f(b) = b'; \quad f(c) = c'.$$

**Пример 1.13.** Приведем пример проективного отображения пучка на пучок. Пусть на проективной плоскости даны два различных пучка $\mathscr{P}(O)$ и $\mathscr{P}(O')$.

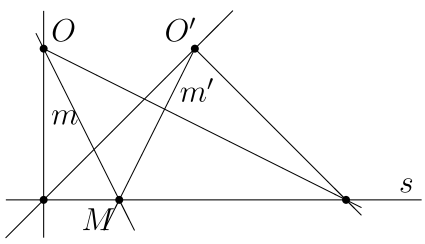



Рис.1.17

Рассмотрим проективную прямую $s$, не принадлежащую пучкам $\mathscr{P}(O)$ и $\mathscr{P}(O')$. Тогда любой прямой $m$ пучка $\mathscr{P}(O)$ поставим в соответствие прямую $m'$ пучка $\mathscr{P}(O')$, которая проходит через точку $M$ пересечения прямых $s$ и $(OM)$. Очевидно, что такое отображение является проективным (§ 1.12.). Оно называется *перспективным отображением пучка на пучок.* Другими словами, отображение пучка $\mathscr{P}(O)$ на пучок $\mathscr{P}(O')$ называется *перспективным отображением пучка на пучок*, если точки пересечения соответствующих прямых этого отображения лежат на одной прямой.
Прямая $s$ называется *осью перспективы.*

Заметим, что пучок проективных прямых является двойственной фигурой для проективной прямой, рассматриваемой как множество точек (пример 1.4). Тогда легко видеть, что определение перспективного отображения пучка на пучок получается по принципу двойственности из определения перспективного отображения прямой на прямую.

Применяя принцип двойственности, из критерия перспективного отображения прямой на прямую (теорема 2 § 1.13.) получаем критерий перспективного отображения пучка на пучок.

**Теорема 2.** *Пусть* $f : \mathscr{P}(O) \to \mathscr{P}(O')$ *– проективное отображение пучка* $\mathscr{P}(O)$ *на пучок* $\mathscr{P}(O')$. *Отображение* $f$ *является перспективным тогда и только тогда, когда проективная прямая* $(OO')$, *соединяющая центры пучков, инвариантна относительно отображения* $f$.

Следующая теорема получается по принципу двойственности из теоремы 3 § 1.13..

**Теорема 3.** *Любое проективное отображение пучка $\mathscr{P}(O)$ на пучок $\mathscr{P}(O')$, отличный от пучка $\mathscr{P}(O)$, можно представить в виде композиции не более двух перспективных отображений.*

Применяя принцип двойственности, получим алгоритм построения образов (прообразов) прямых при проективных отображениях пучка на пучок.

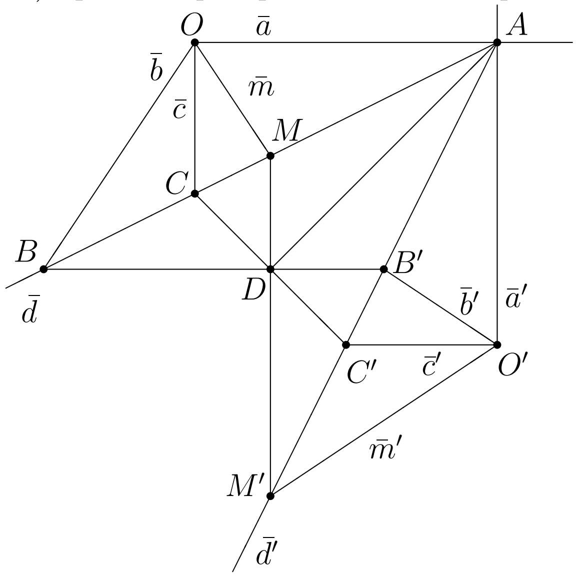



Рис.1.18

Пусть на расширенной плоскости даны два пучка $\mathscr{P}(O)$ и $\mathscr{P}(O')$ (Рис.1.18). Проективное отображение $f : \mathscr{P}(O) \to \mathscr{P}(O')$ однозначно задается, если указать три пары соответствующих прямых

$$\bar{a} \to \bar{a}'; \quad \bar{b} \to \bar{b}'; \quad \bar{c} \to \bar{c}'$$

при этом отображении. Чтобы найти образ произвольной прямой $\bar{m}$, принадлежащей пучку $\mathscr{P}(O)$, нужно

1) через точку пересечения $A$ двух различных соответствующих прямых, например, $\bar{a}$ и $\bar{a}'$, провести две произвольные прямые $\bar{d}$ и $\bar{d}'$, отличные от прямых $\bar{a}$ и $\bar{a}'$;

2) построить точку $D = (BB') \cap (CC')$, где $B = \bar{b} \cap \bar{d}$, $B' = \bar{b}' \cap \bar{d}'$, $C = \bar{c} \cap \bar{d}$, $C' = \bar{c}' \cap \bar{d}'$;

3) построить прямую $(DM)$, где $M = \bar{m} \cap \bar{d}$;

4) построить прямую $\bar{m}' = (O'M')$, где $M' = (DM) \cap \bar{d}'$.

Прямая $\bar{m}'$ будет искомой.

**Замечание 2.** Из алгоритма построения образа прямой при отображении $f : \mathscr{P}(O) \to \mathscr{P}(O')$ видно, что оно разложено в композицию $g_2 \circ g_1$ двух перспективных отображений $g_1 : \mathscr{P}(O) \to \mathscr{P}(D)$ с осью перспективы $\bar{d}$ и $g_2 : \mathscr{P}(D) \to \mathscr{P}(O')$ с осью перспективы $\bar{d}'$.

Сформулируйте самостоятельно алгоритм построения прообраза произвольной прямой $\bar{m}'$ пучка $\mathscr{P}(O')$ при проективном отображении $f$.

### §1.15. Проективные преобразования проективной плоскости

Пусть дана проективная плоскость $\sigma$. Биективное отображение проективной плоскости $\sigma$ на себя называется *проективным преобразованием* этой плоскости, если точкам любой проективной прямой соответствуют точки также лежащие на одной проективной прямой и при этом сохраняется сложное отношение четырех точек.

**Теорема 1.** *Проективное преобразование переводит проективную прямую в проективную прямую.*

□ Пусть дано проективное преобразование $f$ проективной плоскости $\sigma$ и произвольная проективная прямая $d$ в этой плоскости. Рассмотрим три произвольные различные точки $A, B, C$, принадлежащие прямой $d$. Обозначим их образы при преобразовании $f$ через $A', B', C'$ соответственно. В силу определения проективного преобразования плоскости эти точки лежат на одной проективной прямой, которую мы обозначим $d'$. Докажем, что прямая $d'$ является образом прямой $d$ при преобразовании $f$.

Пусть $M$ – произвольная точка прямой $d$, отличная от точек $A, B, C$. Тогда ее образ $M'$ при преобразовании $f$ принадлежит прямой $d'$ по определению проективного преобразования. Обратно, пусть $M'$ – произвольная точка прямой $d'$. Обозначим $(A'B', C'M') = \lambda$. Тогда по теореме 1 § 1.11. существует точка $M$ на прямой $d$, для которой $(AB, CM) = \lambda$. В силу теоремы 1 § 1.11. и определения проективного преобразования точка $M$ перейдет в точку $M'$ при преобразовании $f$. Итак, прямая $d$ переходит в прямую $d'$ при преобразовании $f$. ■

**Теорема 2.** *Проективное преобразование переводит три точки, не лежащие на одной проективной прямой в три точки также не лежащие на одной проективной прямой.*

□ Пусть существует проективное преобразование $f$, которое точки $A, B, C$ плоскости $\sigma$, не лежащие на одной прямой, переводит в три точки $A', B', C'$, лежащие на одной прямой. Рассмотрим произвольную точку $M$ плоскости $\sigma$, отличную от точек $A, B, C$, и докажем, что ее образ $M'$ лежит на проективной прямой $(A'B')$ (Рис.1.19). Обозначим через $N$ точку пересечения проективных прямых $(AB)$ и $(CM)$. Так как проективное преобразование переводит прямую в прямую, образ $N'$ точки $N$ лежит на прямой $(A'B')$. Аналогично точка $M'$ лежит на одной прямой с точками $N'$ и $C'$, то есть лежит на прямой $(A'B')$.

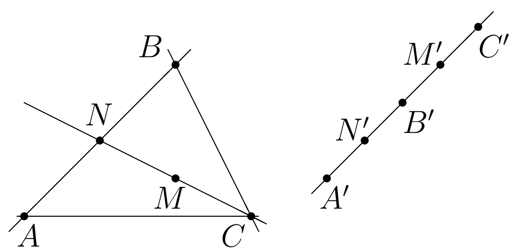


Рис.1.19

Итак, любая точка $M$ проективной плоскости отображается в точку $M'$ прямой $(A'B')$.

Фиксируем точку $M$, не лежащую на прямых $(AB)$, $(AC)$, $(CB)$. По доказанному ее образ $M'$ при отображении $f$ лежит на прямой $(A'B')$. Обозначим сложное отношение $(A'B', N'M') = \lambda$, где $N'$ – образ точки $N$ при отображении $f$. Тогда в силу теоремы 1 § 1.11. существует точка $\tilde{M}$ на прямой $(AB)$, такая что $(AB, N\tilde{M}) = \lambda$. Для ее образа $\tilde{M}'$ при преобразовании $f$ будет выполняться равенство $(A'B', N'\tilde{M}') = \lambda$. Тогда $(A'B', N'M') = (A'B', N'\tilde{M}')$ и в силу теоремы 1 § 1.11. $M'$ и $\tilde{M}'$ совпадают. В результате получаем противоречие с биективностью преобразования $f$. ■

**Следствие 1.** *Любое проективное преобразование проективной плоскости переводит проективный репер в проективный репер.*

□ Предположим, что существует проективное преобразование $f$, такое что образом проективного репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ являются четыре точки $A'_1, A'_2, A'_3, E'$, не образующие проективный репер. Согласно теореме 2 § 1.8. это означает, что какие-то три из точек $A'_1, A'_2, A'_3, E'$ лежат на одной проективной прямой. Но это противоречит теореме 2. ■

Аналогично случаю проективного отображения проективной прямой на проективную прямую, проективное преобразование плоскости можно задать парой проективных реперов. Для этого потребуется лемма.

**Лемма 1.** *Пусть проективное преобразование $f$ плоскости $\sigma$ переводит проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ в проективный репер $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$. Тогда преобразование $f$ переводит проективные реперы $R_1$, $R_2$, $R_3$ координатных прямых репера $R$ (обозначения (1.20) соответственно в проективные реперы $R'_1$, $R'_2$, $R'_3$ координатных прямых репера $R'$.*

□ Докажем, что репер $R_1$ переходит в репер $R'_1$. Остальные случаи доказываются аналогично. По условию имеем $f(A_1) = A'_1$, $f(A_2) = A'_2$, $f(A_3) = A'_3$, $f(E) = E'$. Так как проективное преобразование прямые переводит в прямые, $f((A_1E)) = (A'_1E')$, $f((A_2A_3)) = (A'_2A'_3)$. Тогда

$$f(E_1) = f((A_1E) \cap (A_2A_3)) = f((A_1E)) \cap f((A_2A_3)) = (A'_1E') \cap (A'_2A'_3) = E'_1.$$

Таким образом, $f(R_1) = R'_1$. ■

**Теорема 3.** *Пусть даны два проективных репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ на проективной плоскости $\sigma$. Тогда существует единственное проективное преобразование плоскости, переводящее репер $R$ в репер $R'$. При этом каждой точке $M$ плоскости $\sigma$ с координатами $(x_1, x_2, x_3)$ в репере $R$ ставится в соответствие точка $M'$ с теми же координатами в репере $R'$.*

□ Построим отображение $f$ плоскости $\sigma$ на себя следующим образом: каждой точке $M$ плоскости $\sigma$ с координатами $(x_1, x_2, x_3)$ в репере $R$ поставим в соответствие точку $M'$ с теми же координатами в репере $R'$. Из задания отображения $f$ следует, что оно является преобразованием плоскости. Нужно доказать, что преобразование $f$ является проективным.

Пусть даны четыре произвольные точки $A, B, C, D$, лежащие на одной проективной прямой. Обозначим ее $d$. Тогда координаты этих точек, определенные относительно репера $R$, удовлетворяют уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Так как образы $A', B', C', D'$ этих точек прямой $d$ имеют те же координаты относительно репера $R'$, то их координаты удовлетворяют тому же самому уравнению, но записанному относительно репера $R'$. Согласно теореме 1 § 1.9. это уравнение задает некоторую проективную прямую $d'$ на плоскости $\sigma$. Тогда точки $A', B', C', D'$ будут принадлежать одной прямой, а именно, прямой $d'$.

Рассмотрим четыре произвольные точки $A, B, C, D$ плоскости $\sigma$, для которых определено сложное отношение, и их образы $A', B', C', D'$. Пусть $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$ в репере $R$. Тогда $A'(a_1, a_2, a_3)$, $B'(b_1, b_2, b_3)$, $C'(c_1, c_2, c_3)$, $D'(d_1, d_2, d_3)$ в репере $R'$. Чтобы вычислить сложные отношения $(AB, CD)$ и $(A'B', C'D')$, нужно спроектировать точки $A, B, C, D$ из точки $A_3$ репера $R$ на координатную прямую $(A_1A_2)$ (если прямая $(AB)$ совпадает с прямой $(A_1A_2)$, то точки $A, B, C, D$ совпадают со своими проекциями), а точки $A', B', C', D'$ нужно спроектировать из точки $A'_3$ репера $R'$ на координатную прямую $(A'_1A'_2)$. Обозначим полученные точки $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ и $\tilde{A}', \tilde{B}', \tilde{C}', \tilde{D}'$ соответственно. Согласно теореме 4 § 1.8. получим

$$\begin{array}{lllll} \tilde{A}(a_1, a_2); & \tilde{B}(b_1, b_2); & \tilde{C}(c_1, c_2); & \tilde{D}(d_1, d_2) & \text{в репере} \quad R_3 = (A_1, A_2, E_3); \\ \tilde{A}'(a_1, a_2); & \tilde{B}'(b_1, b_2); & \tilde{C}'(c_1, c_2); & \tilde{D}'(d_1, d_2) & \text{в репере} \quad R'_3 = (A'_1, A'_2, E'_3); \end{array}$$

Тогда по теореме 1 § 1.14. и теореме 2 § 1.11. получим

$$(AB, CD) = (\tilde{A}\tilde{B}, \tilde{C}\tilde{D}) = (\tilde{A}'\tilde{B}', \tilde{C}'\tilde{D}') = (A'B', C'D').$$

Итак, преобразование $f$ сохраняет сложное отношение четырех точек, следовательно является проективным.

Докажем единственность преобразования $f$. Пусть существует еще одно проективное преобразование $g$ плоскости $\sigma$, которое переводит репер $R$ в репер $R'$. Тогда согласно лемме 1 имеем

$$f(E_1) = g(E_1) = E'_1; \quad f(E_2) = g(E_2) = E'_2; \quad f(E_3) = g(E_3) = E'_3,$$

где $E_1 = (A_1E) \cap (A_2A_3)$, $E_2 = (A_2E) \cap (A_1A_3)$, $E_3 = (A_3E) \cap (A_1A_2)$ и аналогичные обозначения для точек $E'_1$, $E'_2$, $E'_3$.

По следствию 1 § 1.13. из этого получим, что для любой точки $M$, лежащей на одной из координатных прямых репера $R$, ее образы при отображениях $f$ и $g$ совпадают, то есть $f(M) = g(M)$.

Рассмотрим произвольную точку $M$ плоскости $\sigma$, не лежащую ни на одной из координатных прямых. Проведем через нее проективную прямую, пересекающую координатные прямые репера $R$ в различных точках $X, Y, Z$. Так как точки $X, Y, Z$ лежат на координатных прямых репера $R$, для них имеем

$$f(X) = g(X); \quad f(Y) = g(Y); \quad f(Z) = g(Z).$$

Наконец, применяя следствие 1 § 1.13. для прямой $(XY)$, получим $f(M) = g(M)$ для любой точки $M$ плоскости $\sigma$. Итак, $f = g$, что противоречит предположению, следовательно, $f$ единственно. ■

**Замечание 1.** Пусть дана пара проективных реперов $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $R' = R(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$. Согласно теореме 3 эта пара реперов однозначно определяет проективное преобразование $f$ плоскости $\sigma$, ставя в соответствие точке $M$ с координатами $(x_1, x_2, x_3)$ в репере $R$ точку $M'$ с теми же координатами в репере $R'$. Возникает вопрос: если взять другой репер $\tilde{R} = R(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ и его образ $\tilde{R}' = R(\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3)$, то верно ли, что проективное преобразование $f$ точке $M$ с координатами $(y_1, y_2, y_3)$ в репере $\tilde{R}$ ставит в соответствие точку $M'$ с теми же координатами в репере $\tilde{R}'$. Другими словами, верно ли, что задание проективного преобразования не зависит от выбора пары соответствующих реперов. Покажем, что это верно.

Пусть реперы $\tilde{R}$ и $\tilde{R}'$ задаются точками $\tilde{R} = (B_1, B_2, B_3, E)$ и $\tilde{R}' = (B'_1, B'_2, B'_3, E')$. Обозначим координаты точек $B_1, B_2, B_3$ в репере $R$ следующим образом:

$$B_1(b_1^1, b_1^2, b_1^3); \quad B_2(b_2^1, b_2^2, b_2^3); \quad B_3(b_3^1, b_3^2, b_3^3).$$

Тогда по теореме 3 точки $B'_1$, $B'_2$, $B'_3$ имеют те же координаты в репере $R'$. По определению координат точек в проективном репере (§ 1.8.) это означает, что

$$\begin{array}{ll} \vec{b}_1 = b_1^1\vec{a}_1 + b_1^2\vec{a}_2 + b_1^3\vec{a}_3 & \vec{b}'_1 = b_1^1\vec{a}'_1 + b_1^2\vec{a}'_2 + b_1^3\vec{a}'_3 \\ \vec{b}_2 = b_2^1\vec{a}_1 + b_2^2\vec{a}_2 + b_2^3\vec{a}_3 \ ; & \vec{b}'_2 = b_2^1\vec{a}'_1 + b_2^2\vec{a}'_2 + b_2^3\vec{a}'_3 \\ \vec{b}_3 = b_3^1\vec{a}_1 + b_3^2\vec{a}_2 + b_3^3\vec{a}_3 & \vec{b}'_3 = b_3^1\vec{a}'_1 + b_3^2\vec{a}'_2 + b_3^3\vec{a}'_3 \end{array}$$

Выражая из этих равенств векторы $\vec{a}_\alpha$ и $\vec{a}'_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ получим

$$\begin{array}{ll} \vec{a}_1 = \tilde{b}_1^1\vec{b}_1 + \tilde{b}_1^2\vec{b}_2 + \tilde{b}_1^3\vec{b}_3 & \vec{a}'_1 = \tilde{b}_1^1\vec{b}'_1 + \tilde{b}_1^2\vec{b}'_2 + \tilde{b}_1^3\vec{b}'_3 \\ \vec{a}_2 = \tilde{b}_2^1\vec{b}_1 + \tilde{b}_2^2\vec{b}_2 + \tilde{b}_2^3\vec{b}_3 \ ; & \vec{a}'_2 = \tilde{b}_2^1\vec{b}'_1 + \tilde{b}_2^2\vec{b}'_2 + \tilde{b}_2^3\vec{b}'_3 \ , \\ \vec{a}_3 = \tilde{b}_3^1\vec{b}_1 + \tilde{b}_3^2\vec{b}_2 + \tilde{b}_3^3\vec{b}_3 & \vec{a}'_3 = \tilde{b}_3^1\vec{b}'_1 + \tilde{b}_3^2\vec{b}'_2 + \tilde{b}_3^3\vec{b}'_3 \end{array} \tag{1.41}$$

где $(\tilde{b}_\alpha^\beta)$ – матрица обратная для матрицы $(b_\alpha^\beta)$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Пусть $M$ – произвольная точка плоскости $\sigma$ и ее образ $M'$. Так как точки $M$ и $M'$ имеют одинаковые координаты $(x_1, x_2, x_3)$ в реперах $R$ и $R'$ соответственно, то порождающие их векторы $\vec{m}$ и $\vec{m}'$ раскладываются по базисам $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$ следующим образом:

$$\vec{m} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3; \quad \vec{m}' = x_1\vec{a}'_1 + x_2\vec{a}'_2 + x_3\vec{a}'_3.$$

Подставим в эти равенства соотношения (1.41):

$$\begin{aligned} \vec{m} &= (x_1\tilde{b}_1^1 + x_2\tilde{b}_2^1 + x_3\tilde{b}_3^1)\vec{b}_1 + (x_1\tilde{b}_1^2 + x_2\tilde{b}_2^2 + x_3\tilde{b}_3^2)\vec{b}_2 + (x_1\tilde{b}_1^3 + x_2\tilde{b}_2^3 + x_3\tilde{b}_3^3)\vec{b}_3; \\ \vec{m}' &= (x_1\tilde{b}_1^1 + x_2\tilde{b}_2^1 + x_3\tilde{b}_3^1)\vec{b}'_1 + (x_1\tilde{b}_1^2 + x_2\tilde{b}_2^2 + x_3\tilde{b}_3^2)\vec{b}'_2 + (x_1\tilde{b}_1^3 + x_2\tilde{b}_2^3 + x_3\tilde{b}_3^3)\vec{b}'_3 \end{aligned}$$

По определению координат точки в проективном репере получаем, что координаты точек $M$ и $M'$ соответственно в реперах $\tilde{R}$ и $\tilde{R}'$ одинаковые.

Итак, мы показали, что задание проективного преобразования не зависит от выбора пары соответствующих реперов.

## §1.16. Формулы проективных преобразований

**1.** Пусть дано проективное преобразование $f$ проективной плоскости $\sigma$. Фиксируем проективный репер $R$. Обозначим через $R'$ образ репера $R$ при преобразовании $f$. Тогда согласно теореме 3 § 1.15. преобразование $f$ ставит в соответствие точке $M$ с координатами $(x_1, x_2, x_3)$ в репере $R$ точку $M'$ с теми же координатами в репере $R'$. Обозначим координаты точки $M'$ относительно репера $R$ через $(x'_1, x'_2, x'_3)$.

Зададим реперы $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $R' = R(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$ с помощью базисов и обозначим координаты векторов базиса $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)$ относительно базиса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ следующим образом

$$\vec{a}'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31}); \quad \vec{a}'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32}); \quad \vec{a}'_3(c_{13}, c_{23}, c_{33}).$$

Используем формулы перехода (1.29) от репера $R$ к реперу $R'$ для точки $M'$:

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x'_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Так как координаты точки $M'$ в репере $R'$ равны координатам точки $M$ в репере $R$, полученные формулы дают соотношения между координатами точки $M$ в репере $R$ и координатами точки $M'$ в том же репере $R$. Они называются *формулами проективного преобразования* $f$ в репере $R$. Матрица $(c_{ij})$ называется *матрицей проективного преобразования.*

Заметим, что так как числа $c_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ являются координатами векторов базиса, определитель матрицы $(c_{ij})$ отличен от нуля.

Верно и обратное утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть на проективной плоскости $\sigma$ фиксирован проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и пусть задано отображение $f$ плоскости $\sigma$ на себя, ставящее каждой точке $M$ плоскости $\sigma$ с координатами $(x_1, x_2, x_3)$ точку $M'$ с координатами $(x'_1, x'_2, x'_3)$, вычисленными по формулам*

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x'_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned} \tag{1.43}$$

*где определитель матрицы $(c_{ij})$ отличен от нуля и $\rho$ – произвольное вещественное число отличное от нуля. Тогда отображение $f$ является проективным.*

□ Так как определитель матрицы $(c_{ij})$ отличен от нуля, формулы (1.43) задают биективное отображение.

Обозначим через $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, $E'$ образы точек $A_1$, $A_2$, $A_3$, $E$ при отображении $f$. Найдем их координаты в репере $R$, используя (1.43):

$$A'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31}); \quad A'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32}); \quad A'_3(c_{13}, c_{23}, c_{33}); \quad E'(c_{11} + c_{12} + c_{13}, c_{21} + c_{22} + c_{23}, c_{31} + c_{32} + c_{33}). \tag{1.44}$$

Так как точки $A_1$, $A_2$, $A_3$ не лежат на одной прямой, векторы $\vec{a}'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\vec{a}'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32})$, $\vec{a}'_3(c_{13}, c_{23}, c_{33})$ являются линейно независимыми. Из (1.44) следует, что эти векторы согласованы, следовательно, задают репер $R'$. Согласно теореме 3 § 1.15. пара реперов $R$ и $R'$ однозначно задает некоторое проективное преобразование плоскости. Его формулы имеют вид (1.42). Эти формулы совпадают с формулами (1.43), а значит, это проективное преобразование совпадает с преобразованием $f$. Итак, показано, что $f$ является проективным преобразованием. ■

**Пример 1.14.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ задано проективное преобразование $f$, имеющее инвариантную проективную прямую $d$. Фиксируем на плоскости $\sigma$ проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, такой что его вершины $A_1$ и $A_2$ лежат на прямой $d$. Выясним, какой вид будут иметь формулы преобразования $f$ в репере $R$.

Так как при преобразовании $f$ любая точка $M$, принадлежащая прямой $d$, имеет координаты $(x_1, x_2, 0)$ и переходит в точку $M'$, также принадлежащую прямой $d$, а значит, имеющую координаты $(x'_1, x'_2, 0)$, из третьего равенства (1.42) получим $0 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2$. Так как это равенство верно для любых $x_1$ и $x_2$, то $c_{31} = c_{32} = 0$. Итак, формулы проективного преобразования $f$ с инвариантной прямой $d$ в репере $R$ имеют вид

$$\begin{aligned}\rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3\\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3\\ \rho x'_3 &= c_{33}x_3.\end{aligned}$$

**2.** Пусть дана проективная прямая $d$ и на ней фиксирован проективный репер $R = (A_1, A_2, E)$. Пусть $f$ – проективное преобразование прямой $d$. Аналогично предыдущему пункту можно вывести *формулы проективного преобразования* $f$ прямой $d$ (проведите рассуждения самостоятельно):

$$\begin{aligned}\rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2\\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2,\end{aligned} \tag{1.45}$$

где $(c_{ij})$, $i, j = 1, 2$ – матрица с определителем, отличным от нуля.

Аналогично теореме 1 можно доказать, что любые формулы вида (1.45), для которых матрица $(c_{ij})$ имеет ненулевой определитель, задают проективное преобразование прямой. Проведите рассуждения самостоятельно.

**Пример 1.15.** Пусть проективное преобразование $f$ проективной плоскости $\sigma$ имеет инвариантную проективную прямую $d$. Тогда сужение преобразования $f$ на прямую $d$ будет проективным преобразованием прямой $d$. Обозначим его $g$.

Пусть на плоскости $\sigma$ выбран проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ так, чтобы его вершины $A_1$ и $A_2$ лежали на прямой $d$, и преобразование $f$ в этом репере задается формулами (1.42). Выясним, какими формулами задается преобразование $g$ прямой $d$ в репере $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$ (обозначения (1.20)).

Рассмотрим произвольную точку $M$ прямой $d$ и ее образ – точку $M'$. В репере $R$ они имеют координаты $(x_1, x_2, 0)$ и $(x'_1, x'_2, 0)$ соответственно, а в репере $R_3$ – координаты $(x_1, x_2)$ и $(x'_1, x'_2)$. Тогда из формул (1.42), используя координаты точек в репере $R$, получим соотношения для координат точек $M$ и $M'$ в репере $R_3$:

$$\rho x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$$
$$\rho x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2.$$

## §1.17. Гомологии

Рассмотрим пример проективного преобразования проективной плоскости $\sigma$. Пусть на плоскости $\sigma$ даны два проективных репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$, для которых трехвершинники $A_1A_2A_3$ и $A'_1A'_2A'_3$ имеют несовпадающие соответствующие элементы, пусть они перспективны (§ 1.5.) и проективная прямая $(EE')$ проходит через их центр перспективы. Согласно теореме 3 § 1.15. пара реперов $R$ и $R'$ однозначно задает проективное преобразование плоскости $\sigma$. Будем называть это преобразование *гомологией* проективной плоскости $\sigma$. По теореме Дезарга (теорема 1 § 1.5.) два перспективных трехвершинника имеют центр и ось перспективы. Центр перспективы трехвершинников $A_1A_2A_3$ и $A'_1A'_2A'_3$ будем называть *центром гомологии*, а их ось – *осью гомологии*. Если центр гомологии принадлежит оси гомологии, то такая гомология называется *параболической*. В противном случае гомология называется *гиперболической*.

Из определения гомологии следует, что она отлична от тождественного преобразования.

**Замечание 1.** Часто гомологию определяют как нетождественное проективное преобразование проективной плоскости, которое имеет по крайней мере три инвариантные точки, лежащие на одной проективной прямой. Эквивалентность обоих определений гомологии доказана в задаче 1.31.

**Теорема 1.** *Все точки оси $s$ и центр $S$ гомологии $f$ являются инвариантными относительно гомологии $f$.*

□ Обозначим точки пересечения соответствующих сторон трехвершинников $A_1A_2A_3$ и $A'_1A'_2A'_3$ через $U, V, W$ соответственно. Это точки оси $s$ гомологии. Аналогично лемме 1 § 1.15. доказывается, что точки $U, V, W$ являются инвариантными, следовательно, $f(s) = s$. Тогда сужение гомологии $f$ на ось $s$ будет проективным преобразованием этой прямой. Так как это преобразование имеет три инвариантные точки, согласно следствию 1 § 1.13. сужение $f$ на $s$ является тождественным преобразованием. Итак, любая точка оси $s$ гомологии $f$ является инвариантной.

Если центр гомологии принадлежит оси гомологии, то он является инвариантной точкой по доказанному.

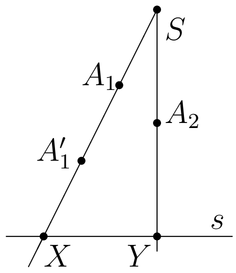



Рис.1.20

Предположим, что центр $S$ не принадлежит оси $s$ гомологии $f$ (Рис.1.20). Проведем прямые $(A_1S)$, $(A_2S)$ и обозначим точки пересечения этих прямых с осью $s$ через $X$ и $Y$ соответственно. По определению гомологии гомология $f$ переводит точку $A_1$ в точку $A_1'$, которая принадлежит прямой $(A_1S)$. По доказанному $f(X) = X$. Таким образом, $f((A_1S)) = (A_1S)$. Аналогично получаем, что $f((A_2S)) = (A_2S)$. Тогда

$$f(S) = f((A_1S) \cap (A_2S)) = f((A_1S)) \cap f((A_2S)) = (A_1S) \cap (A_2S) = S.$$

Итак, доказано, что центр гомологии $S$ является инвариантной точкой. ■

**Следствие 1.** *Соответствующие прямые гомологии пересекаются на оси гомологии.*

□ Пусть дана гомология $f$, проективная прямая $a$ и ее образ $a' = f(a)$. Обозначим через $X$ точку пересечения прямой $a$ и оси гомологии $s$. Так как точка $X$ принадлежит прямой $a$, ее образ должен принадлежать прямой $a'$. По теореме 1 точка $X$ инвариантна, то есть совпадает со своим образом. Следовательно, точка $X$ принадлежит прямой $a'$. Итак, прямые $a$, $a'$ и $s$ пересекаются в одной точке $X$. ■

**Теорема 2.** *Любая прямая, соединяющая различные соответствующие точки гомологии, является инвариантной прямой.*

□ Пусть $A$ – точка проективной плоскости $\sigma$, которая не совпадает со своим образом $A'$. Тогда согласно теореме 1 точки $A$ и $A'$ не лежат на оси гомологии $s$. Обозначим через $X$ точку пересечения прямых $s$ и $(AA')$. Это инвариантная точка. Тогда

$$f((AA')) = f((AX)) = (A'X) = (AA').$$

Итак, прямая $(AA')$ инвариантна. ■

**Следствие 2.** *Проективные прямые, соединяющие различные соответствующие точки гомологии, проходят через центр гомологии.*

□ Пусть дана гомология $f$ и прямая $(AA')$, которая не проходит через центр гомологии $S$. Обозначим точку пересечения прямой $(SA)$ с осью $s$ через $X$. Тогда прямая $(SX)$ инвариантна, так как инвариантны точки $S$ и $X$ (теорема 1). Согласно теореме 2 прямая $(AA')$ инвариантна. Тогда

$$f(A) = f((AA') \cap (SX)) = f((AA')) \cap f((SX)) = (AA') \cap (SX) = A,$$

то есть $A = A'$, что противоречит условию. ■

**Следствие 3.** *Проективные прямые, проходящие через центр гомологии инвариантны.*

□ Непосредственно следует из теоремы 2 и следствия 2. ■

**Теорема 3.** *Гомология $f$ не имеет инвариантных точек кроме центра $S$ и точек оси $s$ гомологии.*

□ Предположим, что гомология $f$ имеет инвариантную точку $A$, отличную от $S$ и точек оси $s$.

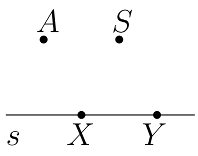


Рис.1.21

Пусть гомология $f$ гиперболическая, то есть центр $S$ не принадлежит оси $s$ (Рис.1.21). Возьмем на оси $s$ точки $X$ и $Y$ так, чтобы никакие три из четверки точек $S, A, X, Y$ не лежали бы на одной прямой. Тогда четверка точек $(S, A, X, Y)$ является проективным репером, который обозначим $R$. Так как точки $S, A, X, Y$ инвариантны (теорема 1), гомология $f$ переводит репер $R$ в себя. С другой стороны, тождественное преобразование также переводит репер $R$ в репер $R'$.
Тогда по теореме 3 § 1.15. гомология $f$ является тождественным преобразованием, что противоречит ее определению. Итак, гиперболическая гомология не имеет инвариантных точек кроме точек оси $s$ и центра $S$.

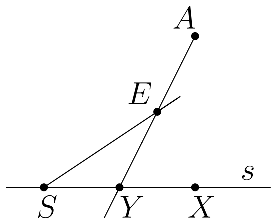


Рис.1.22

Пусть гомология $f$ параболическая, то есть центр $S$ принадлежит оси $s$ (Рис.1.22). Возьмем на оси $s$ точки $X$ и $Y$, отличные от точки $S$. На прямой $(AY)$ возьмем точку $E$, отличную от точек $A$ и $Y$. Покажем, что точка $E$ будет инвариантной. Так как прямая $(SE)$ проходит через центр гомологии, она будет инвариантной (следствие 3).
Так как точки $A$ и $Y$ инвариантны, прямая $(AY)$ будет инвариантной. Тогда будет инвариантной точка $E = (SE) \cap (AY)$. Таким образом, получаем репер $R = (S, A, X, E)$, который инвариантен относительно гомологии $f$. Аналогично случаю гиперболической гомологии получаем противоречие с определением гомологии. ■

**Теорема 4.** *Гомология $f$ однозначно определяется центром $S$, осью $s$ и парой соответствующих точек $E$ и $E'$.*

□ Построим два перспективных трехвершинника $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ следующим образом.

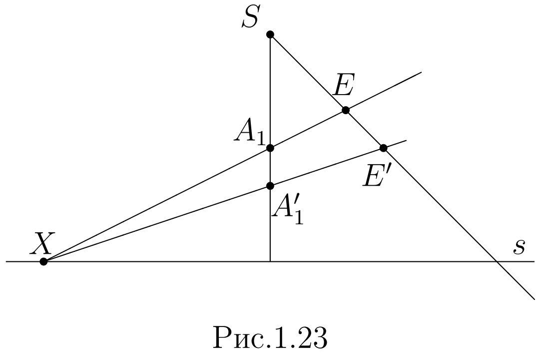


Рис.1.23

Возьмем произвольную точку $A_1$, не лежащую на проективных прямых $(EE')$, $s$ и построим ее образ $A_1'$ (Рис.1.23). Для этого заметим, во-первых, что согласно следствию 2 точки $S$, $A_1$ и $A_1'$ лежат на одной прямой. Во-вторых, прямые $(A_1E)$ при гомологии $f$ переходит в прямую $(A_1'E')$, следовательно, точка их пересечения $X$ должна лежать на оси $s$ (следствие 1). Из этого следует, что точка $A_1'$ определяется как точка пересечения прямых $(SA_1)$ и $(XE')$.

Аналогично произвольно выбирая точки $A_2$ и $A_3$ (так чтобы четверка $(A_1, A_2, A_3, E)$ образовывала проективный репер), строим их образы $A_2'$ и $A_3'$. Тогда пара проективных реперов $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$ согласно теореме 3 § 1.15. однозначно определяет проективное преобразование. Оно является гомологией, так как трехвершинники $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ перспективны. Очевидно, что ее центром и осью будут точка $S$ и прямая $s$ соответственно.

Наконец, заметим, что определенная таким образом гомология не зависит от выбора репера $R$ в силу замечания 1 § 1.15. ■

## §1.18. Гармонические четверки точек. Полный четырехвершинник

Четверка точек $A, B, C, D$ проективной прямой называется *гармонической*, если их сложное отношение $(AB, CD)$ равно $-1$. Говорят также, что точки $C$ и $D$ *гармонически сопряжены* относительно точек $A$ и $B$. Также говорят, что пары точек $A, B$ и $C, D$ *гармонически разделяют одна другую*. Точка $D$ называется *четвертой гармонической точкой* для точек $A, B, C$.

**Замечание 1.** Из теоремы 3 § 1.11. следует, что для гармонической четверки точек справедливы равенства

$$(AB, CD) = (BA, CD) = (AB, DC) = (DC, AB) = -1.$$

Откуда следует, что порядок точек в парах $A, B$ и $C, D$ не важен. Также не важен порядок следования самих пар.

Четверка прямых $a, b, c, d$ пучка $\mathscr{P}(O)$ называется *гармонической*, если их сложное отношение $(ab, cd)$ равно $-1$.

Пусть даны четыре точки $A, B, C, D$ общего положения на проективной плоскости $\sigma$ (то есть никакие три из них не лежат на одной проективной прямой). Фигура, образованная точками $A, B, C, D$ и проективными прямыми, попарно соединяющими эти точки, называется *полным четырехвершинником.*

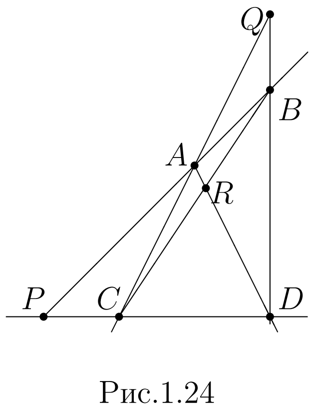



Рис.1.24

Точки $A, B, C, D$ называются *вершинами* полного четырехвершинника (Рис.1.24). Проективные прямые $(AB)$ и $(CD)$; $(AC)$ и $(BD)$; $(AD)$ и $(BC)$ называются *противоположными сторонами.* Точки $P, Q, R$, в которых пересекаются противоположные стороны, называются *диагональными точками.* Проективные прямые $(PQ)$, $(QR)$, $(PR)$, которые попарно соединяют диагональные точки, называются *диагоналями полного четырехвершинника.*

**Теорема 1.** *Полный четырехвершинник обладает следующими свойствами:*

1) *На каждой диагонали имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат диагональные точки, а другой парой – точки пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку;*

*2) На каждой стороне имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат вершины, а другая пара образована диагональной точкой и точкой пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки;*

*3) Через каждую диагональную точку проходит гармоническая четверка прямых, в которой одной парой служат противоположные стороны, а другой – диагонали.*

□ Пусть дан полный четырехвершинник $ABCD$.

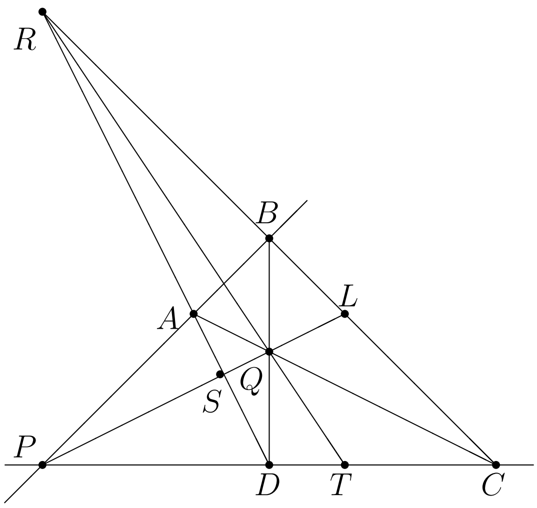



Рис.1.25

Спроектируем точки (Рис.1.25)

$$\begin{array}{ccccc} & \text{на}\,(BC)\,\text{из}\,D & & \text{на}\,(PQ)\,\text{из}\,A & \\ P & \longrightarrow & C & \longrightarrow & Q \\ Q & \longrightarrow & B & \longrightarrow & P \\ S & \longrightarrow & R & \longrightarrow & S \\ L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L \end{array}$$

(пример 1.12 § 1.13.). Так как перспективное отображение является проективным, согласно определению проективного отображения и свойству сложного отношения четырех точек (свойство $2^0$ теорема 3 § 1.11.) получим

$$(PQ, SL) = (QP, SL) = \frac{1}{(PQ, SL)}.$$

Возможны два случая:
1) $(PQ, SL) = 1$. Тогда точки $S$ и $L$ совпадают, а значит, совпадают прямые $(AD)$ и $(BC)$. Это противоречит определению полного четырехвершинника.
2) $(PQ, SL) = -1$, что и требовалось доказать в п. 1). При проектировании точек также получаем $(PQ, SL) = (CB, RL)$, то есть $(CB, RL) = -1$, что и требовалось доказать в п.2).

Наконец, рассмотрим проективные прямые $(PL)$, $(RT)$, $(AC)$ и $(BD)$. Пересечем их проективной прямой $(BC)$. Тогда по определению сложного отношения четырех прямых пучка (§ 1.12.) получим

$$((PL)(RT), (AC)(BD)) = (LR, CB) = \frac{1}{(CB, RL)} = -1,$$

что и требовалось доказать в п.3). ■

## §1.19. Примеры преобразований проективной прямой. Инволюция

**1.** Понятие проективного преобразования проективной прямой было введено в § 1.13.. Рассмотрим некоторые примеры проективных преобразований прямой.

Из следствия 1 § 1.13. следует, что нетождественное проективное преобразование проективной прямой может иметь не более двух инвариантных точек. В связи с этим нетождественное проективное преобразование прямой называют *эллиптическим*, если оно не имеет инвариантных точек, *параболическим*, если оно имеет одну инвариантную точку и *гиперболическим*, если оно имеет две инвариантные точки.

**2.** Примеры эллиптических и гиперболических проективных преобразований прямой дает так называемая *инволюция*, то есть нетождественное проективное преобразование $f$ проективной прямой, такое что $f \circ f = id$, где $id$ обозначает тождественное преобразование.

**Замечание 1.** Если преобразование $f$ является инволюцией, то для любой точки $M$ прямой $d$ и ее образа $M' = f(M)$ имеем $f(M') = M$.

В самом деле, $f(M') = f(f(M)) = id(M) = M$.

**Теорема 1.** *(критерий инволюции) Пусть $f$ – проективное преобразование проективной прямой $d$. Преобразование $f$ является инволюцией тогда и только тогда, когда существует точка $A$ на прямой $d$, такая что*

$$f(A) = B \neq A; \quad f(B) = A.$$

*Другими словами, проективное преобразование является инволюцией тогда и только тогда, когда оно меняет местами какие-либо две точки прямой $d$.*

$\square$ Пусть проективное преобразование $f$ является инволюцией, то есть для любой точки $M$ прямой $d$ имеем $f(f(M)) = M$. Так как $f$ отлично от тождественного преобразования, существует точка $A$, такая что $f(A)$ отлична от $A$. Обозначим $B = f(A)$. Тогда

$$f(B) = f(f(A)) = A,$$

то есть пара точек $A, B$ является искомой.

Обратно, пусть дано проективное преобразование $f$ прямой $d$ и существует пара точек $A, B$ на прямой $d$, такая что $f(A) = B$, $f(B) = A$. Рассмотрим произвольную точку $M$ прямой $d$, отличную от точек $A$ и $B$, и обозначим $M' = f(M)$, $M'' = f(M')$. Чтобы $f$ было инволюцией, нужно доказать, что $M'' = M$.

Так как $f$ является проективным преобразованием, оно сохраняет сложное отношение четырех точек прямой, следовательно, $(AB, MM') = (BA, M'M'')$. По свойству $2^0$ сложного отношения четырех точек (теорема 3 § 1.11.) получим $(AB, M'M) = (AB, M'M'')$. Откуда в силу теоремы 1 § 1.11. имеем $M = M''$. $\blacksquare$

Следующая теорема показывает, что инволюции существуют.

**Теорема 2.** *Если на проективной прямой $d$ заданы четыре различные точки $A, B, C, D$, то существует единственная инволюция $f$, такая что $f(A) = B$ и $f(C) = D$.*

$\square$ Рассмотрим пару проективных реперов $R = (A, B, C)$ и $R' = (B, A, D)$ прямой $d$. Тогда по теореме 1 § 1.13. существует проективное преобразование $f$, переводящее репер

$R$ в репер $R'$. Так как при этом точка $A$ переходит в точку $B$, а точка $B$ – в точку $A$, преобразование $f$ является инволюцией по теореме 1.

Если предположить, что существует еще одна инволюция $g$, переводящая точку $A$ в точку $B$, а точку $C$ в точку $D$, то $g(B) = g(g(A)) = A$. Следовательно, инволюция $g$ переводит репер $R$ в репер $R'$, а значит, совпадает с $f$ по теореме 1 § 1.13.. Итак, инволюция $f$ единственна. ■

Следующая теорема показывает, что инволюция не может быть параболическим проективным преобразованием.

**Теорема 3.** *Инволюция либо не имеет ни одной инвариантной точки (то есть является эллиптическим проективным преобразованием), либо имеет две инвариантные точки (то есть является гиперболическим проективным преобразованием).*

□ Покажем, что если инволюция имеет одну инвариантную точку, то она имеет еще одну инвариантную точку. Пусть $A$ – инвариантная точка инволюции $f$. Рассмотрим произвольную точку $M$ и ее образ $M' = f(M)$. Существует точка $B$, такая что $(MM', AB) = -1$. Тогда точка $B$ отлична от точки $A$, так как в противном случае сложное отношение $(MM', AB) = 1)$.

Обозначим $f(B) = B'$. Покажем, что точка $B$ является второй инвариантной точкой инволюции $f$, то есть $B = B'$. Так как инволюция является проективным преобразованием, она сохраняет сложное отношение четырех точек, следовательно, $-1 = (MM', AB) = (M'M, AB')$. По свойству $2^0$ сложного отношения четырех точек (теорема 3 § 1.11.) имеем $(MM', AB') = \frac{1}{(M'M, AB')} = -1$. Таким образом, $(MM', AB) = (MM', AB')$. Откуда в силу теоремы 1 § 1.11. имеем $B = B'$. ■

**Следствие 1.** *Пусть $f$ – гиперболическая инволюция с инвариантными точками $A$ и $B$. Тогда для любой точки $M$ и ее образа $M' = f(M)$ имеем $(AB, MM') = -1$.*

**Пример 1.16.** Пусть на проективной прямой $d$ даны четыре различные точки $A, B, C, D$. Согласно теореме 2 эти точки однозначно определяют некоторую инволюцию $f$ парой реперов $R = (A, B, C)$ и $R' = (B, A, D)$. Выясним, как по взаимному расположению этих точек узнать, будет инволюция эллиптической или гиперболической.

Пусть $X$ – произвольная точка прямой $d$, отличная от точек $A$ и $B$. Обозначим ее образ через $X'$. Пусть репер $R$ задается базисом $(\vec{a}, \vec{b})$, то есть $R = R(\vec{a}, \vec{b})$, а репер $R' = R(\mu\vec{b}, \lambda\vec{a})$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ порождают точки $A$, $B$ соответственно, а вещественные числа $\lambda$ и $\mu$ находятся из условия

$$\mu\vec{b} + \lambda\vec{a} = \vec{d}, \tag{1.46}$$

$\vec{d}$ порождает точку $D$ (теорема 2 § 1.7.). Если точка $X$ имеет координаты $(x_1, x_2)$ в репере $R$, то точка $X'$ имеет те же координаты в репере $R'$. Так как точка $X$ отлична от точек $A$ и $B$, числа $x_1$ и $x_2$ оба отличны от нуля. По определению координат точки на проективной прямой (§ 1.7.) имеем

$$\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b}; \quad \vec{x}' = x_1(\mu\vec{b}) + x_2(\lambda\vec{a}), \tag{1.47}$$

где $\vec{x}$, $\vec{x}'$ порождают точки $X$, $X'$ соответственно. Точка $X$ будет инвариантной тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ будут коллинеарны, то есть $\vec{x}' = \nu\vec{x}$ для некоторого ненулевого вещественного числа $\nu$. В силу (1.47) это равносильно соотношению

$$(\nu x_1 - \lambda x_2)\vec{a} + (\nu x_2 - \mu x_1)\vec{b} = \vec{0}.$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получим, что последнее равенство равносильно системе

$$\begin{cases} \nu x_1 = \lambda x_2 \\ \nu x_2 = \mu x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu x_1 = \lambda x_2 \\ \nu^2 = \lambda\mu. \end{cases}$$

Последняя система имеет решение тогда и только тогда, когда числа $\lambda$ и $\mu$ имеют один и тот же знак.

Из (1.46) следует, что пара чисел $(\lambda, \mu)$ является координатами точки $D$ в репере $R$. По определению сложного отношения четырех точек (§ 1.11.) имеем $\frac{\lambda}{\mu} = (AB, CD)$. Таким образом, доказано, что существует инвариантная точка $X$ инволюции $f$ тогда и только тогда, когда $(AB, CD) > 0$.

Итак, получаем, что $f$ будет гиперболической инволюцией тогда и только тогда, когда $(AB, CD) > 0$ и $f$ будет эллиптической инволюцией тогда и только тогда, когда $(AB, CD) < 0$.

**3.** Приведем пример параболического проективного преобразования проективной прямой. Для этого рассмотрим на проективной плоскости параболическую гомологию $f$ с центром $S$ и осью $s$. Пусть $d$ – проективная прямая, проходящая через точку $S$. Согласно следствию 3 § 1.17. прямая $d$ будет инвариантной. Тогда сужение $g$ гомологии $f$ на эту прямую будет задавать на ней некоторое проективное преобразование. Точка $S$ будет его инвариантной точкой (теорема 1 § 1.17.). Согласно теореме 3 § 1.17. гомология $f$ не имеет других инвариантных точек на прямой $d$, а значит, преобразование $g$ имеет единственную инвариантную точку. Итак, проективное преобразование $g$ прямой $d$ является параболическим.

## §1.20. Линии второго порядка на проективной плоскости

**1.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ зафиксирован репер $R$. Множество $\gamma$ всех точек проективной плоскости, координаты которых относительно репера $R$ удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + a_{33}(x_3)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \tag{1.48}$$

где $a_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ – некоторые вещественные числа, не равные нулю одновременно, называется *линией второго порядка* или *кривой второго порядка.*

Используя формулы (1.29) перехода от репера $R$ к другому реперу $R'$ аналогично доказанному в главе II части I, нетрудно показать, что определение линии второго порядка на проективной плоскости не зависит от выбора репера $R$. Другими словами, если зафиксировать другой проективный репер $\tilde{R}$, то множество точек $\gamma$ будет также будет задаваться уравнением вида

$$\tilde{a}_{11}(y_1)^2 + \tilde{a}_{22}(y_2)^2 + \tilde{a}_{33}(y_3)^2 + 2\tilde{a}_{12}y_1y_2 + 2\tilde{a}_{13}y_1y_3 + 2\tilde{a}_{23}y_2y_3 = 0, \tag{1.49}$$

где $\tilde{a}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ – некоторые вещественные числа, не равные нулю одновременно.

Выясним возможное взаимное расположение прямой и линии второго порядка.

**Теорема 1.** *Пусть на проективной плоскости даны линия второго порядка $\gamma$ и проективная прямая $d$. Тогда возможны три случая расположения прямой $d$ и линии $\gamma$:*

1) *прямая $d$ не имеет с линией $\gamma$ ни одной общей точки;*

2) *прямая $d$ пересекает линию $\gamma$ в двух совпавших или двух различных точках;*

3) *прямая $d$ целиком содержится в линии $\gamma$. При этом $\gamma$ распадается на пару прямых, одна из которых есть прямая $d$.*

□ Пусть относительно некоторого проективного репера $R$ линия $\gamma$ задана уравнением (1.48), а прямая $d$ параметрическими уравнениями (формулы (1.25))

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3, \end{aligned} \tag{1.50}$$

где $A(a_1, a_2, a_3)_R$, $B(b_1, b_2, b_3)_R$ – некоторые фиксированные точки прямой $d$. Параметры $\lambda$, $\mu$, задающие координаты общих точек линии $\gamma$ и прямой $d$, являются решениями системы уравнений (1.48) и (1.50). Заметим, что пропорциональные пары $(\lambda, \mu)$ задают одну и ту же точку проективной плоскости.

Подставим уравнения (1.50) в (1.48):

$$P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2 = 0, \tag{1.51}$$

где

$$P = a_{11}a_1^2 + a_{22}a_2^2 + a_{33}a_3^2 + 2a_{12}a_1a_2 + 2a_{13}a_1a_3 + 2a_{23}a_2a_3; \tag{1.52}$$

$$Q = a_{11}a_1b_1 + a_{22}a_2b_2 + a_{33}a_3b_3 + a_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + a_{13}(a_1b_3 + a_3b_1) + a_{23}(a_2b_3 + a_3b_2);$$

$$R = a_{11}b_1^2 + a_{22}b_2^2 + a_{33}b_3^2 + 2a_{12}b_1b_2 + 2a_{13}b_1b_3 + 2a_{23}b_2b_3;$$

Будем называть это уравнение *характеристическим.* Пусть в уравнении (1.51) $P \neq 0$. Тогда $\mu \neq 0$. Действительно, если предположить противное, то из (1.51) следует, что и

$\lambda = 0$, что противоречит уравнениям (1.50). Тогда разделим обе части уравнения (1.51) на $\mu^2$. В результате получим квадратное уравнение

$$P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2Q\frac{\lambda}{\mu} + R = 0. \tag{1.53}$$

Это уравнение имеет либо два вещественных корня (различных или совпавших), либо не имеет вещественных корней. Таким образом, получаем, что в случае $P \neq 0$ прямая $d$ и линия $\gamma$ либо не имеют общих точек, либо пересекаются в двух точках (различных или совпавших).

Пусть в уравнении (1.51) $P = 0$. Тогда уравнение (1.51) принимает вид

$$\mu(2Q\lambda + R\mu) = 0. \tag{1.54}$$

Если оба числа $Q$ и $R$ отличны от нуля, то уравнение (1.54) имеет два различных вещественных корня ($\mu = 0$, $\lambda$ – произвольное вещественное число и $\lambda = -R$, $\mu = 2Q$), а значит, прямая $d$ пересекает линию $\gamma$ в двух различных точках. Если $Q = 0$, $R \neq 0$, то получается две совпавшие точки. Если $Q \neq 0$, $R = 0$, то получаются две различные точки. Если $Q = R = 0$, то уравнению (1.54) удовлетворяет любая пара значений $\lambda$ и $\mu$, а значит, прямая $d$ содержится в линии $\gamma$.

Осталось показать, что в последнем случае линия $\gamma$ распадается на пару прямых. Выберем проективный репер $R_0$ так, чтобы его первые две вершины были точками $A$ и $B$, которые задают прямую $d$. В таком репере точки $A$ и $B$ имеют координаты $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, а прямая $d$ задается уравнением $x^3 = 0$ (пример 1.9). Тогда каждая точка $M$ прямой $d$ имеет координаты вида $M(x_1, x_2, 0)$. Так как все точки прямой $d$ лежат на линии $\gamma$, равенство

$$a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

должно выполняться для любых $x_1, x_2$. Откуда получаем $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$. Таким образом, уравнение линии $\gamma$ в репере $R_0$ принимает вид

$$a_{33}(x_3)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3(a_{33}x_3 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2) = 0. \tag{1.55}$$

Откуда видно, что линия $\gamma$ распадается на прямую с уравнением $x_3 = 0$ (это прямая $d$) и множество точек, задаваемое уравнением $a_{33}x_3 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 = 0$. Так как по определению линии второго порядка хотя бы одно из чисел $a_{33}, a_{13}, a_{23}$ отлично от нуля, последнее уравнение задает прямую. ■

**2.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$, порожденной трехмерным векторным пространством $W$, линия второго порядка $\gamma$ относительно проективного репера $R = R(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ задана уравнением (1.48). Левая часть этого уравнения является выражением для некоторой квадратичной формы (§ 6.6, часть I) в базисе $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

является матрицей этой квадратичной формы относительно базиса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Как известно из курса алгебры, ранг матрицы $A$ не зависит от выбора базиса. Будем называть ранг матрицы $A$ *рангом линии второго порядка* $\gamma$.

Из курса алгебры также известно, что в пространстве $W$ существует базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид. Обозначим проективный репер, задаваемый этим базисом через $R_0$. Тогда в репере $R_0$ линия $\gamma$ будет иметь уравнение

$$b_{11}(x_1)^2 + b_{22}(x_2)^2 + b_{33}(x_3)^2 = 0, \tag{1.56}$$

где $b_{ii}$, $i = 1, 2, 3$ либо 0, либо 1, либо -1, причем хотя бы один из коэффициентов $b_{ii}$ отличен от нуля. Для уравнения (1.56) возможны следующие случаи:

$$\begin{gathered}
(\gamma_1): \ (x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0 \qquad (1.57)\\
(\gamma_2): \ (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0\\
(\gamma_3): \ (x_1)^2 + (x_2)^2 = 0\\
(\gamma_4): \ (x_1)^2 - (x_2)^2 = 0\\
(\gamma_5): \ (x_1)^2 = 0.
\end{gathered}$$

Остальные возможные случаи для коэффициентов $b_{ii}$ сводятся к перечисленным пяти случаям, если умножить обе части уравнения на -1, либо поменять местами первые три точки репера $R_0$ (при этом изменятся номера у переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$).

Линии, задаваемые уравнениями $(\gamma_4)$ и $(\gamma_5)$, являются парами проективных прямых (пересекающихся и совпадающих соответственно). Линия, задаваемая уравнением $(\gamma_2)$, является пустым множеством, так как этому уравнению удовлетворяет только одна тройка чисел $(0, 0, 0)$. Точки с такими координатами на проективной плоскости нет. Линия, задаваемая уравнением $(\gamma_3)$, состоит из одной точки (точнее из двух совпавших точек) с координатами $(0, 0, \lambda)$. Таким образом, линии, задаваемые уравнениями $(\gamma_2)$ – $(\gamma_5)$, не представляют интереса для дальнейшего изучения. Единственная линия, представляющая интерес для изучения, задается уравнением $(\gamma_1)$. Будем называть такую линию *овальной*. Понятие овальной линии не зависит от выбора проективного репера, так как ее можно охарактеризовать как линию второго порядка ранга 3, отличную от пустого множества.

**Замечание 1.** Трехвершинник $A_1A_2A_3$ проективного репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, в котором овальная линия $\gamma$ имеет уравнение вида $(\gamma_1)$, называется *автополярным трехвершинником первого рода* относительно этой линии.

## §1.21. Кривые второго порядка на расширенной плоскости

Выясним, как выглядят линии второго порядка на расширенной плоскости $\bar{\sigma}$.

**1.** Рассмотрим на расширенной прямой $\bar{d}$ проективный репер $R = (A_1^\infty, A_2, E)$ и

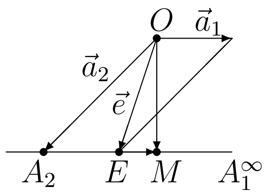



Рис.1.26

аффинную систему координат $I = (A_2, \overrightarrow{A_2E})$ на аффинной прямой $d$. Заметим, что единственная несобственная точка $A_1^\infty$ прямой $\bar{d}$ имеет в репере $R$ координаты $(1, 0)$. Так как координаты точки проективной прямой определены с точностью до постоянного множителя (§ 1.7.), собственные точки $M$ прямой $\bar{d}$ имеют координаты $M(x_1, x_2)$ в репере $R$, где $x_2$ отлично от нуля.

Обозначим координату точки $M$ относительно системы координат $I$ через $x$. Найдем соотношение между координатами $(x_1, x_2)$ этой точки в репере $R$ и ее аффинной координатой $x$.

Построим базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, принадлежащий реперу $R$, взяв в качестве вектора $\vec{e}$ вектор $\overrightarrow{OE}$ (§ 1.11.). Тогда $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_2E}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$ (Рис.1.26). По определению координат точки в проективном репере (§ 1.7.) имеем $\vec{m} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$, где $\vec{m}$ – вектор, порождающий точку $M$. Так как $\overrightarrow{OM}$ также порождает точку $M$, векторы $\vec{m}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, следовательно, существует ненулевое вещественное число $\lambda$, такое что

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{m} = \lambda x_1\vec{a}_1 + \lambda x_2\vec{a}_2. \tag{1.58}$$

С другой стороны, по определению координаты точки в аффинной системе координат имеем

$$\overrightarrow{A_2M} = x\overrightarrow{A_2E} = x\vec{a}_1.$$

По правилу треугольника получим

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}_2 + \overrightarrow{A_2M} = \vec{a}_2 + x\vec{a}_1. \tag{1.59}$$

Сравнивая равенства (1.58) и (1.59), получим

$$\lambda x_1\vec{a}_1 + \lambda x_2\vec{a}_2 = a_2 + x\vec{a}_1,$$

откуда в силу линейной независимости векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ имеем $\lambda x_1 = x$, $\lambda x_2 = 1$. Так как $x_2$ отлично от нуля из этого следует, что

$$x = \frac{x_1}{x_2}.$$

Теперь рассмотрим проективный репер $R = (A_1^\infty, A_2^\infty, A_3, E)$ на расширенной плоскости $\bar{\sigma}$ и

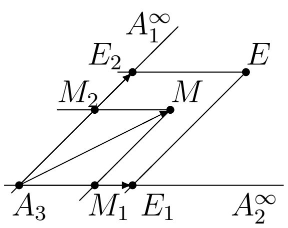



Рис.1.27

аффинную систему координат $I = (A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$ на аффинной плоскости $\sigma$ (Рис.1.27). Заметим, что все несобственные точки расширенной плоскости $\bar{\sigma}$ лежат на несобственной прямой $(A_1^\infty A_2^\infty)$. Ее уравнение в репере $R$ имеет вид $x_3 = 0$ (пример 1.9). Значит, несобственные точки плоскости $\bar{\sigma}$ имеют координаты вида $(x_1, x_2, 0)$. Тогда собственные точки имеют координаты вида $(x_1, x_2, x_3)$, где $x_3$ отлично от нуля.

Обозначим координаты собственной точки $M$ плоскости $\bar{\sigma}$ через $(x_1, x_2, x_3)$ относительно репера $R$ и $M(x, y)$ относительно аффинной системы координат $I$. Согласно теореме 4 § 1.8. точка $M_1$ имеет координаты $(x_2, x_3)$ относительно репера $R_1 = (A_2^\infty, A_3, E_1)$ координатной прямой $(A_2^\infty A_3)$. Согласно определению координат точки относительно аффинной системы координат получим, что точка $M_1$ имеет координату $y$ в аффинной системе координат $(A_3, \overrightarrow{A_3E_1})$. Тогда по доказанному имеем $y = \frac{x_2}{x_3}$. Аналогично для точки $M_2$ получим $x = \frac{x_1}{x_3}$. Итак,

$$x = \tfrac{x_1}{x_3}; \quad y = \tfrac{x_2}{x_3}. \tag{1.60}$$

**2.** Пусть на расширенной плоскости $\bar{\sigma}$ дан проективный репер $R = (A_1^\infty, A_2^\infty, A_3, E)$ и линия второго порядка $\gamma$ относительно этого репера задана уравнением (1.48).

Рассмотрим произвольную собственную точку $M(x_1, x_2, x_3)$, принадлежащую линии $\gamma$. Обозначим ее координаты относительно аффинной системы координат $I = (A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$ через $(x, y)$. Тогда, подставляя (1.60) в уравнение (1.48) и умножая на $x_3$, получим

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0. \tag{1.61}$$

Если числа $a_{11}, a_{22}, a_{12}$ одновременно не равны нулю, то это уравнение задает на аффинной плоскости $\sigma$ кривую второго порядка (§ 4.5, часть I). Если эти числа одновременно обращаются в нуль, то по определению линии второго порядка на проективной плоскости числа $a_{33}, a_{13}, a_{23}$ не равны нулю одновременно. Здесь возможны два случая: во-первых, одновременно не равны нулю числа $a_{13}$ и $a_{23}$, то есть уравнение (1.61) задает прямую на аффинной плоскости $\sigma$ (исходная линия $\gamma$ распадается на прямую $(A_1^\infty A_2^\infty)$ и прямую, заданную уравнением (1.61)), во-вторых, $a_{13} = a_{23} = 0$ и $a_{33} \neq 0$, то есть уравнение (1.61) задает пустое множество на аффинной плоскости $\sigma$ (исходная линия $\gamma$ при этом является парой совпавших прямых $(A_1^\infty A_2^\infty)$).

Если линия $\gamma$ расширенной плоскости является овальной (то есть не распадается на пару расширенных прямых, не является пустым множеством и не является одной точкой), то множество ее точек, являющихся собственными точками расширенной плоскости $\bar{\sigma}$, будет множеством точек либо эллипса, либо гиперболы, либо параболы.

Учитывая полученный результат, будем в дальнейшем на рисунках, иллюстрирующих утверждения о овальной линии на проективной плоскости, изображать эллипс.

## §1.22. Касательная к линии второго порядка

Проективная прямая $d$ называется *касательной* к овальной линии $\gamma$, если она пересекает линию $\gamma$ в двух совпавших точках. Эта точка (две совпавшие) называется *точкой касания.*

Фиксируем проективный репер $R$. Пусть $d$ – касательная к линии $\gamma$ в точке $B(b_1, b_2, b_3)$, принадлежащей линии $\gamma$, и $\gamma$ задается уравнением (1.48). Выведем уравнение касательной $d$. Пусть $M(x_1, x_2, x_3)$ – произвольная фиксированная точка прямой $d$. Тогда параметрические уравнения прямой $d$ имеют вид

$$y_1 = \lambda x_1 + \mu b_1$$
$$y_2 = \lambda x_2 + \mu b_2$$
$$y_3 = \lambda x_3 + \mu b_3$$

Так как точка $B$ принадлежит линии $\gamma$, $R = 0$ (обозначения доказательства теоремы 1 § 1.20., где вместо точки $A(a_1, a_2, a_3)$ взята точка $M(x_1, x_2, x_3)$). Так как $M$ отлична от $B$ и по предположению прямая $d$ и линия $\gamma$ имеют общими только пару совпавших точек, $P \neq 0$. В этом случае из доказательства теоремы 1 § 1.20. получим, что прямая $d$ пересекает линию $\gamma$ в двух совпавших точках тогда и только тогда, когда $Q^2 - PR = 0$, то есть $Q = 0$. Согласно обозначениям (1.52) получим, что точка $M(x_1, x_2, x_3)$, отличная от точки $B$ принадлежит касательной $d$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$(a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3)x_1 + (a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3)x_2 + (a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3)x_3 = 0. \quad (1.62)$$

Заметим, что координаты точки $B(b_1, b_2, b_3)$ удовлетворяют уравнению (1.62). Итак, уравнение (1.62) является уравнением касательной $d$ к линии $\gamma$ в точке $B$.

Выясним, в каждой ли точке овальной линии $\gamma$ существует касательная. Заметим, что касательная $d$ в точке $B$, принадлежащей $\gamma$, существует тогда и только тогда, когда уравнение (1.62) является линейным однородным уравнением, то есть хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Предположим, что все коэффициенты в уравнении (1.62) равны нулю, то есть

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 = 0 \\ a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 = 0 \\ a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система линейных уравнений, причем она должна иметь ненулевые решения $(b_1, b_2, b_3)$. Тогда ее матрица должна иметь ранг меньше 3, что противоречит определению овальной линии (§ 1.20.). Следовательно, в каждой точке овальной линии существует касательная, причем она задается уравнением (1.62), а значит, касательная единственна.

## §1.23. Полюс и поляра. Поляритет

**1.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и относительно него овальная линия $\gamma$ имеет уравнение (1.48). Обобщим понятие касательной к овальной линии.

Пусть на плоскости $\sigma$ дана произвольная точка $A$ с координатами $(a_1, a_2, a_3)$ относительно репера $R$. Множество точек $M(x_1, x_2, x_3)$ плоскости $\sigma$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3)x_1 + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3)x_2 + (a_{13}a_1 + a_{23}a_2 + a_{33}a_3)x_3 = 0, \quad (1.63)$$

назовем *полярой* точки $A$ относительно линии $\gamma$. Согласно результатам § 1.22. это множество является проективной прямой. Обозначим ее $a$. Точка $A$ называется *полюсом* прямой $a$ относительно линии $\gamma$.

**Теорема 1.** *Пусть дана овальная линия $\gamma$. Точка $A$ принадлежит своей поляре $a$ тогда и только тогда, когда прямая $a$ является касательной к $\gamma$ в точке $A$.*

□ Пусть точка $A$ принадлежит своей поляре $a$. Тогда координаты $(a_1, a_2, a_3)$ точки $A$ удовлетворяют уравнению (1.63). Откуда получаем, что координаты точки $A$ удовлетворяют уравнению (1.48) линии $\gamma$, то есть точка $A$ принадлежит линии $\gamma$. Таким образом, линия $\gamma$ и прямая $a$ имеют хотя бы одну общую точку. Так как линия $\gamma$ овальная (следовательно, не распадается на пару прямых), согласно теореме 1 § 1.20. $\gamma$ и $a$ имеют две общие точки $A$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. Допустим, что точки $A$ и $B$ различны. Тогда прямая $a$ может быть задана этими точками с помощью параметрических уравнений (1.50). Так как точка $B$ принадлежит прямой $a$, из уравнения (1.63) следует, что в характеристическом уравнении (1.51) $Q = 0$. Аналогично из того, что точки $A$ и $B$ принадлежат линии $\gamma$, получаем, что $R = 0$ и $P = 0$. Тогда линия $\gamma$ распадается на пару прямых (доказательство теоремы 1 § 1.20.). Полученное противоречие доказывает, что точки $A$ и $B$ совпадают, а значит, прямая $a$ является касательной к $\gamma$ в точке $A$ по определению касательной.

Обратно, пусть прямая $a$ является касательной к линии $\gamma$ в точке $A$. Тогда прямая $a$ имеет уравнение (1.62), которое совпадает с уравнением (1.63), следовательно, прямая $a$ является полярой точки $A$ по определению поляры. ■

**Теорема 2.** *Пусть дана овальная линия $\gamma$, точка $A$, не принадлежащая ей и проективная прямая $a$ – поляра точки $A$. Пусть $d$ – произвольная проективная прямая, проходящая через точку $A$ и пересекающая линию $\gamma$ в двух различных точках $M_1$ и $M_2$. Точка $B$ прямой $d$ принадлежит поляре $a$ точки $A$ тогда и только тогда, когда $(M_1M_2, AB) = -1$.*

□ На прямой $d$ существует точка $B$, такая что $(M_1M_2, AB) = -1$.

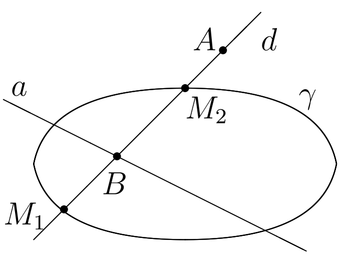



Рис.1.28

Точка $B$ отлична от точки $A$ и не лежит на линии $\gamma$ (Рис.1.28). Действительно, если бы точка $B$ совпадала с точкой $A$, то $(M_1M_2, AB) = 1$. Если бы точка $B$ принадлежала линии $\gamma$, то $B$ совпадала бы либо с точкой $M_1$, либо с точкой $M_2$. В первом случае сложное отношение $(M_1M_2, AB)$ не определено, а во втором – равно нулю. Фиксируем произвольный репер $R$ и зададим прямую $d$ параметрическими уравнениями как в доказательстве теоремы 1 § 1.20., используя точки $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ этой прямой.

Тогда в характеристическом уравнении (1.51) коэффициенты $P$ и $R$ отличны от нуля (а значит, и корни $\lambda$ и $\mu$ характеристического уравнения оба отличны от нуля) и характеристическое уравнение может быть записано в виде (1.53).

Обозначим значения параметров $\lambda$ и $\mu$, соответствующие точкам $M_1$ и $M_2$, через $\lambda_1, \mu_1$ и $\lambda_2, \mu_2$ соответственно. Тогда отношения $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ и $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ будут корнями характеристического уравнения (1.53). Согласно примеру 1.11 имеем $(M_1M_2, AB) = \frac{\mu_1\lambda_2}{\mu_2\lambda_1} = -1$, следовательно,

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0. \tag{1.64}$$

Так как отношения $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ и $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ суть корни характеристического уравнения, по теореме Виета получим $Q = 0$. Согласно обозначениям (1.52) из этого равенства получим, что координаты точки $B$ удовлетворяют уравнению поляры (1.63) точки $A$. Таким образом, четвертая гармоническая к точкам $A, M_1, M_2$ лежит на поляре точки $A$.

Обратно, обозначим через $B$ точку пересечения поляры $a$ точки $A$ и прямой $d$. Так как точка $B$ принадлежит поляре $a$, то ее координаты удовлетворяют уравнению поляры (1.63). Согласно (1.63) это означает, что $Q = 0$ в характеристическом уравнении, а значит, выполняется равенство (1.64). Откуда получаем, что $(M_1M_2, AB) = \frac{\mu_1\lambda_2}{\mu_2\lambda_1} = -1$, то есть точка $B$ является четвертой гармонической к точкам $A, M_1, M_2$. ■

**Замечание 1.** Теорема 2 показывает, что поляра точки $A$, не принадлежащей овальной линии $\gamma$, является прямой, содержащей четвертые гармонические точки к точке $A$ и точкам пересечения прямой, проходящей через точку $A$, и линии $\gamma$.

Теорема 1 показывает, что поляра точки $A$, принадлежащей линии $\gamma$, является касательной к линии $\gamma$. Итак, получаем, что понятие поляры точки, которое было введено с использованием проективного репера, от его выбора не зависит, а значит, определение поляры корректно.

**2.** Пусть на проективной плоскости $\sigma$ фиксирована овальная линия $\gamma$. Обозначим $\Pi^*$ множество всех проективных прямых плоскости $\sigma$. Определим отображение

$$p : \sigma \to \Pi^*$$

следующим образом: каждой точке плоскости $\sigma$ поставим в соответствие ее поляру относительно линии $\gamma$. Отображение $p$ называется *поляритетом.*

**Теорема 3.** *Поляритет $p$ является биекцией.*

□ Докажем, что отображение $p$ инъективно. Фиксируем проективный репер $R$ и рассмотрим две различные точки $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. Тогда соответствующие им поляры будут задаваться уравнениями

$$\begin{aligned} a:\ &(a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3)x_1 + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3)x_2 + (a_{13}a_1 + a_{23}a_2 + a_{33}a_3)x_3 = 0, \\ b:\ &(a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3)x_1 + (a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3)x_2 + (a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3)x_3 = 0. \end{aligned}$$

Предположим, что прямые $a$ и $b$ совпадают. Тогда существует ненулевое вещественное число $\lambda$, такое что

$$\begin{cases} a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 = \lambda(a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3) \\ a_{12}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3 = \lambda(a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3) \\ a_{13}a_1 + a_{23}a_2 + a_{33}a_3 = \lambda(a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}(a_1 - \lambda b_1) + a_{12}(a_2 - \lambda b_2) + a_{13}(a_3 - \lambda b_3) = 0 \\ a_{12}(a_1 - \lambda b_1) + a_{22}(a_2 - \lambda b_2) + a_{23}(a_3 - \lambda b_3) = 0 \\ a_{13}(a_1 - \lambda b_1) + a_{23}(a_2 - \lambda b_2) + a_{33}(a_3 - \lambda b_3) = 0. \end{cases}$$

Так как линия $\gamma$ овальная, с учетом пункта 2. § 1.20. получим, что эта система уравнений имеет единственное нулевое решение $a_1 - \lambda b_1 = 0$, $a_2 - \lambda b_2 = 0$, $a_3 - \lambda b_3 = 0$, то есть

$$a_1 = \lambda b_1; \quad a_2 = \lambda b_2; \quad a_3 = \lambda b_3,$$

то есть точки $A$ и $B$ совпадают. Полученное противоречие доказывает инъективность отображения $p$.

Докажем сюръективность $p$. Пусть $a$ – произвольная проективная прямая плоскости $\sigma$. Тогда относительно репера $R$ она задается линейным однородным уравнением

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \tag{1.65}$$

Чтобы прямая $a$ была полярой некоторой точки $A(a_1, a_2, a_3)$, ее уравнение (1.65) умножением на некоторое ненулевое вещественное число $\lambda$ должно приводится к виду (1.63), то есть

$$\begin{cases} a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 = \lambda u_1 \\ a_{12}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3 = \lambda u_2 \\ a_{13}a_1 + a_{23}a_2 + a_{33}a_3 = \lambda u_3. \end{cases}$$

Это линейная система неоднородных уравнений. Для каждого фиксированного ненулевого вещественного числа $\lambda$ она имеет единственное ненулевое решение, так как линия $\gamma$ имеет ранг 3. Ее решение – это координаты точки $A$, являющейся полюсом прямой $a$.

Итак, отображение $p$ инъективно и сюръективно, а значит, биективно. ■

**Теорема 4.** *(о взаимности поляритета) Пусть даны две точки $A$ и $B$ на проективной плоскости $\sigma$ и соответствующие им поляры $a$ и $b$ относительно овальной линии $\gamma$. Точка $A$ принадлежит прямой $b$ тогда и только тогда, когда точка $B$ принадлежит прямой $a$.*

□ Фиксируем на плоскости $\sigma$ проективный репер $R$. Обозначим координаты точек $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$. С учетом определения поляры (1.63) условие принадлежности точки $A$ прямой $b$ запишется в виде

$$(a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3)a_1 + (a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3)a_2 + (a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3)a_3 = 0.$$

Перегруппировав слагаемые в этом равенстве, получим

$$(a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}b_3)b_1 + (a_{12}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3)b_2 + (a_{13}a_1 + a_{23}a_2 + a_{33}a_3)b_3 = 0.$$

Это равенство означает, что точка $B$ принадлежит прямой $a$. ■

**Следствие 1.** *Пусть даны овальная линия $\gamma$ на проективной плоскости и точка $A$, такая что ее поляра $a$ пересекает линию $\gamma$ в двух различных точках $T_1$ и $T_2$. Тогда проективные прямые $(AT_1)$ и $(AT_2)$ будут касательными к линии $\gamma$ в точках $T_1$ и $T_2$ соответственно.*

□ Докажем, что прямая $(AT_1)$ является касательной. Для второй прямой доказательство аналогично.

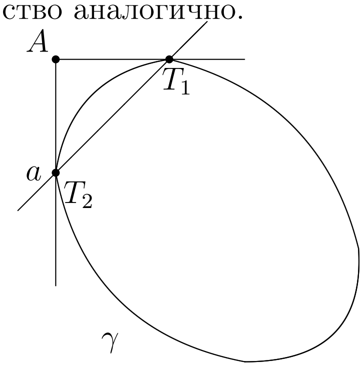



Рис.1.29

Рассмотрим точку $T_1$ (Рис.1.29). Так как она принадлежит поляре $a$ точки $A$, то точка $A$ принадлежит поляре точки $T_1$ (теорема 4 о взаимности поляритета). Так как точка $T_1$ принадлежит линии $\gamma$, ее поляра является касательной к $\gamma$ в этой точке (теорема 1). Таким образом, полярой точки $T_1$ является касательная $(AT_1)$ к $\gamma$ в точке $T_1$.

■

Следствие 1 показывает, что построение касательной (если она существует), проходящей через точку, не лежащую на овальной линии, сводится к построению поляры этой точки.

**Теорема 5.** *Пусть полный четырехвершинник вписан в овальную линию, то есть вершины этого четырехвершинника лежат на этой линии. Тогда каждая его диагональная точка является полюсом диагонали, проходящей через две другие диагональные точки.*

□ Пусть дана овальная линия $\gamma$.

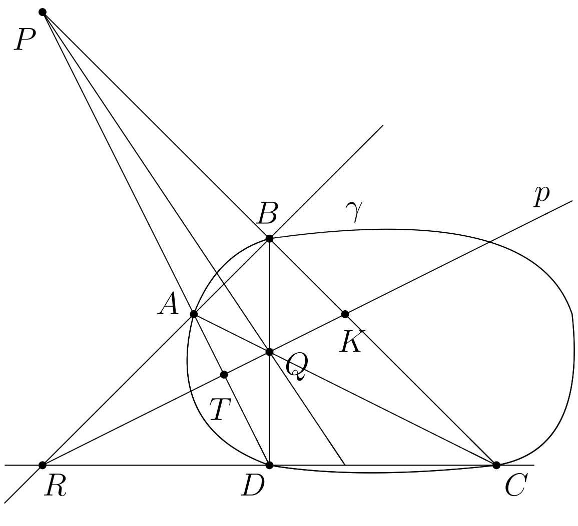



Рис.1.30

Рассмотрим полный четырехвершинник $ABCD$, вписанный в линию $\gamma$ (Рис.1.30). По теореме 1 § 1.18. имеем

$$(AD, PT) = -1; \quad (BC, KP) = -1,$$

то есть точки $T$ и $K$ принадлежат поляре $p$ точки $P$ (теорема 2), а значит, прямая $p$ является полярой точки $P$. ■

Из доказанной теоремы получаем алгоритм построения поляры точки $P$, не принадлежащей, овальной линии $\gamma$.

1) Провести через точку $P$ две прямые, пересекающие линию $\gamma$ в точках $A$, $B$, $C$, $D$.

2) Найти точки пересечения прямых $(AB)$, $(CD)$ и $(AC)$, $(BD)$. Это точки $Q$ и $R$.

3) Прямая $(QR)$ является искомой.

**3.** Пусть на проективной плоскости дана овальная линия $\gamma$. Будем говорить, что точка $A$ проективной плоскости, не принадлежащая линии $\gamma$, является *внешней точкой* относительно $\gamma$, если ее поляра $a$ пересекает $\gamma$ в двух различных точках. В противном случае точка $A$ называется *внутренней точкой* линии $\gamma$.

Пусть фиксирован проективный репер $R$, относительно которого овальная линия $\gamma$ имеет уравнение

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0. \tag{1.66}$$

**Теорема 6.** *Точка $A(a_1, a_2, a_3)$ является внешней относительно овальной линии $\gamma$ тогда и только тогда, когда*

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 - (a_3)^2 > 0. \tag{1.67}$$

☐ Пусть овальная линия $\gamma$ задана уравнением (1.66). Тогда уравнение поляры $a$ точки $A$ имеет вид (формула (1.63))

$$a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 = 0. \tag{1.68}$$

Хотя бы один из коэффициентов этого уравнения отличен от нуля. Пусть это $a_1$. Тогда прямую $a$ можно задать двумя точками с координатами $(a_2, -a_1, 0)$ и $(a_3, 0, a_1)$ и характеристическое уравнение (доказательство теоремы 1 § 1.20.) будет иметь коэффициенты.

$$P = (a_1)^2 + (a_2)^2; \quad Q = a_2a_3; \quad R = (a_3)^2 - (a_1)^2. \tag{1.69}$$

Так как $P \neq 0$, овальная линия $\gamma$ и поляра $a$ будут иметь две различные общие точки тогда и только тогда, когда $Q^2 - PR > 0$, то есть с учетом (1.69) получим $(a_1)^2((a_1)^2 + (a_2)^2 - (a_3)^2) > 0$. В силу того, что $a_1 \neq 0$, это неравенство равносильно (1.67). ■

**Следствие 2.** *Точка $A(a_1, a_2, a_3)$ является внутренней точкой относительно овальной линии $\gamma$ тогда и только тогда, когда*

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 - (a_3)^2 < 0. \tag{1.70}$$

☐ Так как точка $A$ не принадлежит линии $\gamma$, $(a_1)^2 + (a_2)^2 - (a_3)^2 \neq 0$. Если предположить, что $(a_1)^2 + (a_2)^2 - (a_3)^2 > 0$, то по теореме 6 эта точка будет внешней относительно $\gamma$, что противоречит условию. Итак, точка $A$ внутренняя тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (1.70). ■

**Следствие 3.** *Если $A$ – внутренняя точка овальной линии $\gamma$, то все точки ее поляры $a$ являются внешними относительно линии $\gamma$.*

$\square$ Пусть $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ – проективный репер, относительно которого овальная линия $\gamma$ имеет уравнение (1.66). Обозначим координаты точки $A$ относительно репера $R$ через $(a_1, a_2, a_3)$. Так как точка $A$ внутренняя точка линии $\gamma$, для ее координат согласно следствию 1.70 справедливо неравенство

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 < (a_3)^2. \tag{1.71}$$

Обозначим поляру точки $A$ через $a$. Тогда уравнение прямой $a$ в репере $R$ имеет вид (1.68). Из этого уравнения следует, что точки с координатами $(0, a_3, a_2)$ и $(a_3, 0, a_1)$ принадлежат прямой $a$. Тогда параметрические уравнения прямой $a$ примут вид

$$x_1 = \mu a_3; \quad x_2 = \lambda a_3; \quad x_3 = \lambda a_2 + \mu a_1. \tag{1.72}$$

Оценим выражение $(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2$ для произвольной точки $X(x_1, x_2, x_3)$, принадлежащей прямой $a$. Так как координаты точки $X$ имеют вид (1.72) и имеет место неравенство (1.71), получим

$$(x_1)^2+(x_2)^2-(x_3)^2 = (a_3)^2\mu^2+(a_3)^2\lambda^2-(a_2\lambda+a_1\mu)^2 > ((a_1)^2+(a_2)^2)(\lambda^2+\mu^2)-(a_2\lambda+a_1\mu)^2 =$$
$$= (a_1\lambda - a_2\mu)^2 \geq 0$$

Итак, получаем, что

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 > 0$$

для любой точки $X$, принадлежащей поляре $a$ внутренней точки $A$, то есть все точки прямой $a$ являются внешними относительно $\gamma$ согласно теореме 6. $\blacksquare$

**Следствие 4.** *Если проективная прямая $\ell$ проходит через внутреннюю точку $A$ овальной линии $\gamma$, то она пересекает линию $\gamma$ в двух точках.*

$\square$ Пусть $a$ – поляра точки $A$. Тогда по теореме 4 о взаимности поляритета полюс $L$ прямой $\ell$ принадлежит прямой $a$. Так как точка $A$ – внутренняя, согласно следствию 3 точка $L$ будет внешней относительно линии $\gamma$. Тогда по определению внешней точки получим, что $\ell$ пересекает линию $\gamma$ в двух различных точках. $\blacksquare$

## §1.24. Овальная линия

**1.** Докажем теоремы, которые дают способ построения точек овальной линии на проективной плоскости, а значит, и точек эллипса, гиперболы и параболы на аффинной плоскости.

**Теорема 1.** *(Штейнера) Пусть на проективной плоскости даны два пучка $\mathscr{P}(O_1)$ и $\mathscr{P}(O_2)$ с различными центрами $O_1$ и $O_2$ и задано проективное, но не перспективное* *отображение $f : \mathscr{P}(O_1) \to \mathscr{P}(O_2)$. Тогда множество точек $\gamma$ пересечения соответствующих прямых этих пучков является овальной линией, проходящей через точки $O_1$ и $O_2$.*

□ Обозначим прямую $(O_1O_2)$ через $m$.

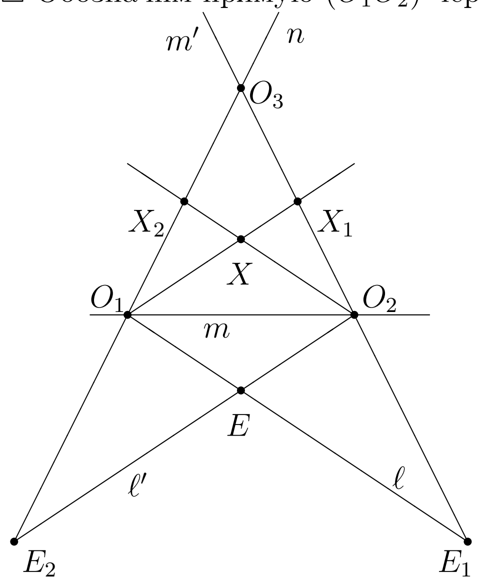


Рис.1.31

Пусть образом прямой $m$ при отображении $f$ будет прямая $m'$, а прообразом – прямая $n$ (Рис.1.31). Обозначим через $O_3$ точку пересечения прямых $m'$ и $n$. Так как отображение $f$ не является перспективным, прямые $m$, $n$, $m'$ попарно различны (теорема 2 § 1.14.) и точки $O_1$, $O_2$, $O_3$ не лежат на одной прямой.

Пусть $\ell$ – произвольная прямая пучка $\mathscr{P}(O_1)$, отличная от прямых $m$ и $n$. Обозначим ее образ при отображении $f$ через $\ell'$. Тогда $R = (O_1, O_2, O_3, E)$, где $E = \ell \cap \ell'$ является проективным репером. Запишем уравнение множества точек $\gamma$ относительно этого репера.

Пусть $X(x_1, x_2, x_3)$ – произвольная точка плоскости, не лежащая на сторонах трехвершинника $O_1O_2O_3$ и не совпадающая с точкой $E$. Обозначим проекции точек $X$ и $E$ из вершин $O_1$, $O_2$ репера $R$ через $X_1$, $X_2$ и $E_1$, $E_2$ соответственно. Тогда имеем $X_1(x_2, x_3)$ в репере $R_1 = (O_2, O_3, E_1)$ и $X_2(x_1, x_3)$ в репере $R_2 = (O_1, O_3, E_2)$ (теорема 4 § 1.8.).

По определению сложного отношения четырех прямых пучка (§ 1.12.) и определению сложного отношения четырех точек (§ 1.11.) получим

$$(mn, \ell(O_1X)) = (O_2O_3, E_1X_1) = \tfrac{x_2}{x_3}; \quad (m'm, \ell'(O_2X)) = (O_3O_1, E_2X_2) = \tfrac{x_3}{x_1}.$$

Так как при проективном отображении пучка на пучок сложное отношение четырех прямых пучка сохраняется, имеем $(mn, \ell(O_1X)) = (m'm, \ell'(O_2X))$, то есть $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1}$ или

$$x_1x_2 - (x_3)^2 = 0. \tag{1.73}$$

Если точка $X$ не принадлежит множеству $\gamma$, то $(mn, \ell(O_1X)) \neq (m'm, \ell'(O_2X))$, то есть $\frac{x_2}{x_3} \neq \frac{x_3}{x_1}$ и координаты точки $X$ не удовлетворяют уравнению (1.73).

Если точка $X$ лежит на сторонах трехвершинника $O_1O_2O_3$, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1.73) тогда и только тогда, когда она является одной из точек $O_1$ или $O_2$, которые принадлежат множеству $\gamma$.

Итак, уравнение (1.73) задает множество точек $\gamma$. Левая часть этого уравнения представляет квадратичную форму ранга 3, и, кроме того, это уравнение имеет вещественные решения, следовательно, оно задает овальную линию. ■

**Следствие 1.** *Образ прямой $(O_1O_2)$ при отображении $f$ является касательной к овальной линии $\gamma$ в точке $O_2$, а прообраз этой прямой является касательной к $\gamma$ в точке $O_1$.*

$\square$ Из доказательства теоремы 1 получаем, что образом прямой $(O_1O_2) = m$ является координатная прямая $m' = (O_2O_3)$. Ее уравнение в репере $R$ имеет вид $x_1 = 0$. С другой стороны, уравнение касательной к линии $\gamma$ в точке $O_2(0, 1, 0)$ (формула (1.62)) имеет такой же вид $x_1 = 0$. Таким образом, прямая $m'$ является касательной к линии $\gamma$ в точке $O_2$. Аналогично доказывается, что прямая $n$ является касательной к линии $\gamma$ в точке $O_1$. $\blacksquare$

**Теорема 2.** *(обратная теорема Штейнера) Пусть дана овальная линия $\gamma$ и на ней даны две произвольные различные точки $O_1$ и $O_2$. Тогда отображение $f : \mathscr{P}(O_1) \to \mathscr{P}(O_2)$, заданное по правилу: каждой прямой $(O_1M)$ пучка $\mathscr{P}(O_1)$ ставится в соответствие прямая $(O_2M)$ пучка $\mathscr{P}(O_2)$, где $M$ – произвольная точка линии $\gamma$, отличная от точек $O_1$ и $O_2$; касательной в точке $O_1$ к линии $\gamma$ ставится в соответствие прямая $(O_2O_1)$, а прямой $(O_1O_2)$ ставится в соответствие касательная в точке $O_2$ к линии $\gamma$, является проективным, но не перспективным.*

$\square$ Проведем в точках $O_1$ и $O_2$ касательные к линии $\gamma$ и обозначим их точку пересечения $O_3$.

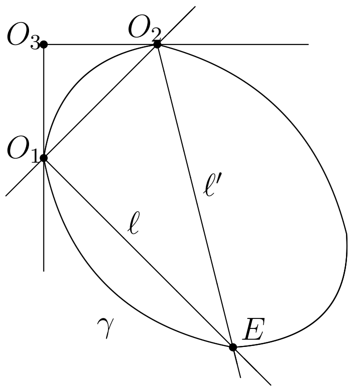


Рис.1.32

Пусть $E$ – произвольная точка линии $\gamma$, отличная от точек $O_1$ и $O_2$ (Рис.1.32). Тогда четверка $R = (O_1, O_2, O_3, E)$ образует проективный репер. Выясним, как будет выглядеть уравнение (1.48) линии $\gamma$ в репере $R$.

С одной стороны, прямая $(O_1O_3)$ как касательная к линии $\gamma$ в точке $O_1(1, 0, 0)$ имеет уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$ (уравнение (1.62)). С другой стороны, прямая $(O_1O_3)$ как координатная прямая имеет уравнение $x_2 = 0$ (пример 1.9). Сравнивая полученные уравнения, видим, что $a_{11} = 0$ и $a_{13} = 0$.

Рассуждая аналогично для касательной $(O_2O_3)$, получим $a_{22} = a_{23} = 0$. Таким образом, уравнение (1.48) принимает вид $a_{33}(x_3)^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$. Так как точка $E(1, 1, 1)$ принадлежит линии $\gamma$, ее координаты удовлетворяют уравнению $\gamma$, то есть $a_{33} + 2a_{12} = 0$. Откуда окончательно получаем, что в репере $R$ овальная линия $\gamma$ задается уравнением

$$x_1x_2 - (x_3)^2 = 0. \tag{1.74}$$

Рассмотрим проективное отображение $f' : \mathscr{P}(O_1) \to \mathscr{P}(O_2)$, при котором прямые $(O_1O_2)$, $(O_1O_3)$, $(O_1E)$ переходят соответственно в прямые $(O_2O_3)$, $(O_1O_2)$, $(O_2E)$. По теореме 1 прямые, соответствующие в отображении $f'$, пересекаются на линии, которая в репере $R$ задается уравнением (1.73), которое совпадает с уравнением (1.74), то есть пересекаются на линии $\gamma$. Таким образом, отображения $f$ и $f'$ совпадают.

Отображение $f'$ не является перспективным, так как точки $O_1, O_2, E$ пересечения соответствующих прямых принадлежат овальной линии $\gamma$, а значит, не лежат на одной прямой. Следовательно, отображение $f$, совпадающее с отображением $f'$, также не будет проективным. ■

**Замечание 1.** Трехвершинник $O_1O_2O_3$ проективного репера $R = (O_1, O_2, O_3, E)$ из теоремы 2 называется *автополярным трехвершинником второго рода* относительно овальной линии $\gamma$.

**Следствие 2.** *Если на проективной плоскости даны пять точек $M_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, 5$ общего положения, то есть никакие три из них не лежат на одной проективной прямой, то существует единственная овальная линия $\gamma$, проходящая через данные точки.*

□ Докажем сначала существование овальной линии $\gamma$. Рассмотрим проективное отображение $f : \mathscr{P}(M_1) \to \mathscr{P}(M_2)$, которое переводит прямые $(M_1M_3)$, $(M_1M_4)$, $(M_1M_5)$ в прямые $(M_2M_3)$, $(M_2M_4)$, $(M_2M_5)$ соответственно (оно существует согласно теореме 1 § 1.14.). Это отображение не является перспективным, так как точки $M_3$, $M_4$, $M_5$ пересечения соответствующих прямых не лежат на одной прямой. Тогда по теореме 1 это отображение задает овальную линию $\gamma$, проходящую через все пять точек.

Докажем единственность линии $\gamma$. Пусть существует еще одна овальная линия $\tilde{\gamma}$, проходящая через точки $M_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, 5$. По теореме 2 существует проективное отображение $\varphi : \mathscr{P}(M_1) \to \mathscr{P}(M_2)$, ставящее в соответствие прямым $(M_1M_3)$, $(M_1M_4)$, $(M_1M_5)$ прямые $(M_2M_3)$, $(M_2M_4)$, $(M_2M_5)$. Тогда отображения $f$ и $\varphi$ совпадают по теореме 1 § 1.14., следовательно, совпадают линии $\gamma$ и $\tilde{\gamma}$. ■

Аналогично доказываются следующие утверждения (докажите самостоятельно).

**Следствие 3.** *Если на проективной плоскости даны четыре точки общего положения $A, B, C, D$ и проективная прямая $a$, содержащая точку $A$ и не проходящая через точки $B, C, D$, то существует единственная овальная линия $\gamma$, проходящая через точки $B, C, D$ и касающаяся прямой $a$ в точке $A$.*

**Следствие 4.** *Если на проективной плоскости даны три точки общего положения $A, B, C$ и две прямые $a$, $b$, проходящие через точки $A$ и $B$ соответственно и не проходящие через остальные две точки, то существует единственная овальная линия $\gamma$, проходящая через точки $A, B, C$ и имеющая прямые $a$ и $b$ касательными в точках $A$ и $B$ соответственно.*

**2.** Как было доказано выше, пять точек общего положения однозначно определяют овальную линию, следовательно, такую линию нельзя провести через любые шесть точек общего положения. Докажем необходимое условие для того, чтобы данные шесть точек лежали на одной овальной линии.

Пусть на проективной плоскости дана упорядоченная шестерка точек общего положения $M_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, 6$.

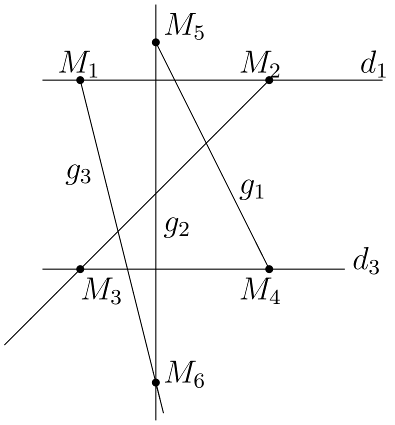



Рис.1.33

Обозначим (Рис.1.33)

$$d_1 = (M_1M_2); \quad d_2 = (M_2M_3); \quad d_3 = (M_3M_4);$$
$$g_1 = (M_4M_5); \quad g_2 = (M_5M_6); \quad g_3 = (M_6M_1).$$

Фигура, образованная шестеркой точек $M_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, 6$ и шестью прямыми $d_1, d_2, d_3, g_1, g_2, g_3$, называется *шестивершинником*. Точки $M_\alpha$ называются *вершинами*, прямые $d_1, d_2, d_3, g_1, g_2, g_3$ называются *сторонами*, пары прямых $d_i, g_i$, $i = 1, 2, 3$ называются *противоположными сторонами* шестивершинника.

**Замечание 2.** Если переставить в каком-либо другом порядке данные шесть точек шестивершинника, то получим, вообще говоря, новый шестивершинник. Например, шестивершинники $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ и $M_2M_1M_3M_4M_5M_6$ различные шестивершинники, так как у второго шестивершинника есть сторона $(M_1M_3)$, которой нет у первого шестивершинника.

**Теорема 3.** *(Паскаля) Точки пересечения противоположных сторон любого шестивершинника, вписанного в овальную линию, лежат на одной проективной прямой. Эта прямая называется прямой Паскаля.*

☐ Пусть шестивершинник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ вписан в овальную линию $\gamma$.

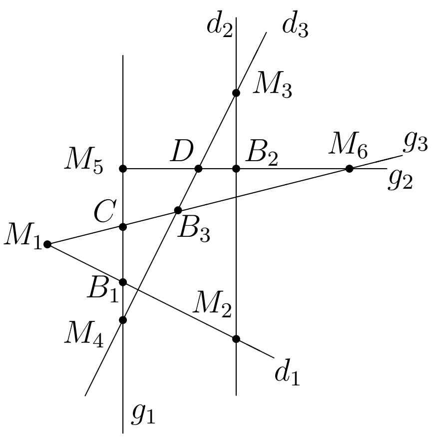



Рис.1.34

Обозначим точки как показано на Рис.1.34. По теореме 2 существует проективное отображение $f : \mathscr{P}(M_1) \to \mathscr{P}(M_3)$, такое что образами прямых $(M_1M_2) = d_1$, $(M_1M_4)$, $(M_1M_6) = g_3$, $(M_1M_5)$ будут соответственно прямые $(M_2M_3) = d_2$, $(M_3M_4) = d_3$, $M_3M_6$, $(M_3M_5)$.

Рассмотрим прямые $g_1$ и $g_2$. На этих прямых отображение $f$ индуцирует отображение $\varphi : g_1 \to g_2$ следующим образом: каждой точке $M$ прямой $g_1$ ставится в соответствие точка $M'$ прямой $g_2$, такая что прямые $(M_1M)$ и $(M_3M')$ соответствуют друг другу при отображении $f$. Из определения сложного отношения четырех прямых пучка (§ 1.12.) следует, что отображение $g$ будет проективным.

Тогда отображение $\varphi$ переводит

$$M_4 = g_1 \cap (M_1M_4) \to g_2 \cap (M_3M_4) = D; \quad C = g_1 \cap (M_1M_6) \to g_2 \cap (M_3M_6) = M_6;$$
$$B_1 = g_1 \cap (M_1M_2) \to g_2 \cap (M_2M_3) = B_2.$$

Точка $M_5$, являющаяся точкой пересечения прямых $g_1$ и $g_2$, будет инвариантной точкой проективного отображения, а значит, $\varphi$ будет перспективным отображением (теорема 2 § 1.13.). Обозначим центр перспективы через $B_3$. Так как через него проходят все прямые, соединяющие соответствующие точки перспективного отображения $\varphi$, получим

$$B_3 = (M_4D) \cap (CM_6) \cap (B_1B_2).$$

В частности, точка $B_3$ принадлежит прямой $(B_1B_2)$. Итак, точки $B_1$, $B_2$, $B_3$ пересечения противоположных сторон шестивершинника лежат на одной прямой. ■

**Теорема 4.** *(обратная теорема Паскаля) Пусть дан шестивершинник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. Тогда если три точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой, то все шесть вершин лежат на одной овальной линии.*

□ Пусть шестивершинник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ удовлетворяет условию теоремы: его противоположные стороны пересекаются в точках

$$B_1 = (M_1M_2) \cap (M_4M_6); \quad B_2 = (M_2M_3) \cap (M_5M_6); \quad B_3 = (M_3M_4) \cap (M_6M_1)$$

и точки $B_1, B_2, B_3$ лежат на одной проективной прямой (Рис.1.34). Тогда

$$B_3 = (B_1B_2) \cap (M_1M_6); \quad M_3 = (M_2M_3) \cap (B_3M_4).$$

Рассмотрим пять точек $M_1$, $M_2$, $M_4$, $M_5$, $M_6$.

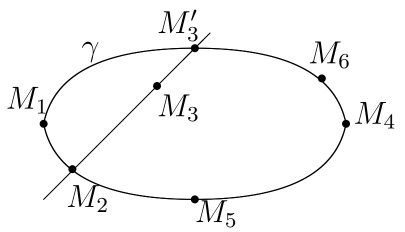


Рис.1.35

Так как это точки общего положения, по следствию 2, через эти точки проходит овальная линия $\gamma$. Допустим, что точка $M_3$ не лежит на линии $\gamma$. Обозначим вторую точку пересечения линии $\gamma$ и прямой $(M_2M_3)$ через $M_3'$ (Рис.1.35). Тогда в овальную линию $\gamma$ вписан шестивершинник $M_1M_2M_3'M_4M_5M_6$ и для него выполняется теорема 3, то есть точки

$$(M_1M_2) \cap (M_4M_5) = B_1; \quad (M_2M_3') \cap (M_5M_6) = (M_2M_3) \cap (M_5M_6) = B_2;$$
$$(M_3'M_4) \cap (M_6M_1) = B_3'$$

лежат на одной прямой. Покажем, что точка $B_3'$ совпадает с точкой $B_3$. Действительно, $B_3' = (B_1B_2) \cap (M_6M_1) = B_3$. Следовательно, $M_3' = (M_2M_3) \cap (B_3M_4) = M_3$, то есть точка $M_3$ принадлежит линии $\gamma$. ■

## §1.25. Модель аффинной плоскости в проективной геометрии

**1.** Пусть $\sigma$ – проективная плоскость, $W$ – трехмерное векторное пространство, порождающее плоскость $\sigma$. Фиксируем на плоскости $\sigma$ проективную прямую, обозначим ее $d_0$ и обозначим двумерное векторное подпространство в $W$, порождающее прямую $d_0$, через $V$. Выберем на плоскости $\sigma$ проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ так, чтобы точки $A_1$ и $A_2$ лежали на прямой $d_0$.

**Теорема 1.** *На множестве точек* $\mathscr{A}$ *плоскости* $\alpha$ *без точек прямой* $d_0$ *существует структура аффинной плоскости.*

□ Напомним общее определение аффинного пространства (§6.7, часть I). Говорят, что непустое множество $\mathscr{A}$ произвольной природы наделено *структурой $n$-мерного аффинного пространства*, а само множество $\mathscr{A}$ называют *$n$-мерным аффинным пространством*, если задано отображение

$$\phi : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to V,$$

где $V$ – $n$-мерное векторное пространство. При этом отображение $\phi$ удовлетворяет двум условиям (называемым *аксиомами аффинного пространства*):

1) для любого элемента $A$ из $\mathscr{A}$ и любого вектора $\vec{p}$ из $V$ существует единственный элемент $B$ из $\mathscr{A}$, такой что $\phi(A, B) = \vec{p}$. При этом вводят обозначение $\phi(A, B) = \overrightarrow{AB}$.

2) для любых элементов $A, B, C$ из $\mathscr{A}$ выполняется равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Элементы аффинного пространства $\mathscr{A}$ называют *точками*. Если векторное пространство $V$ двумерно, то аффинное пространство называют *аффинной плоскостью.*

Чтобы доказать, что на множестве $\mathscr{A}$, указанном в теореме, существует структура аффинной плоскости, сначала нужно выбрать двумерное векторное пространство. В качестве такого пространства возьмем двумерное векторное пространство $V$, порождающее прямую $d_0$.

Для построения отображения $\phi$ заметим, что все точки прямой $d_0$ (и только они) имеют третьей координатой нуль в репере $R$, так как прямая $d_0$ совпадает с координатной прямой $(A_1A_2)$, задаваемой уравнением $x_3 = 0$. Из этого следует, что векторы, порождающие точки прямой $d_0$ имеют в базисах, принадлежащих реперу $R$, координаты вида $(x_1, x_2, 0)$.

Точки плоскости $\sigma$, не лежащие на прямой $d_0$, имеют в репере $R$ третью координату, отличную от нуля. Тогда для каждой такой точки $M$ существует единственный набор координат вида $(m_1, m_2, 1)$. Следовательно, при фиксированном базисе репера $R$ существует единственный вектор пространства $W$, порождающий точку $M$ и имеющий координаты $(m_1, m_2, 1)$ в этом базисе. В дальнейших рассуждениях будем использовать только вектора такого вида.

Зададим отображение $\phi : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to V$ следующим образом: для произвольных точек $M, N$ из $\mathscr{A}$ рассмотрим векторы $\vec{m}(m_1, m_2, 1)$ и $\vec{n}(n_1, n_2, 1)$, порождающие соответственно эти точки. Тогда положим по определению

$$\phi(M, N) = \vec{n} - \vec{m}. \tag{1.75}$$

Будем обозначать $\phi(M, N)$ через $\overrightarrow{MN}$. Это определение корректно, так как вектор $\vec{n} - \vec{m}$ имеет координаты $(n_1 - m_1, n_2 - m_2, 0)$, то есть принадлежит пространству $V$.

Покажем, что для отображения $\phi$ выполняются обе аксиомы аффинного пространства.

Пусть $M$ – произвольная точка из $\mathscr{A}$, $\vec{p}(p_1, p_2, 0)$ – произвольный вектор из $V$. Тогда точка $M$ порождается вектором $\vec{m}(m_1, m_2, 1)$. Пусть $\vec{n} = \vec{p}+\vec{m}$. Вектор $\vec{n}$ имеет координаты $(m_1+p_1, m_2+p_2, 1)$, следовательно, порождает точку $N$, которая принадлежит множеству $\mathscr{A}$. При этом $\phi(M, N) = \vec{m} + \vec{p} - \vec{m} = \vec{p}$, то есть точка $N$, такая что $\phi(M, N) = \vec{p}$.

Докажем, что точка $N$ единственна. Предположим, что существует еще одна точка $\tilde{N}(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, 1)$, такая что $\phi(M, \tilde{N}) = \vec{p}$. Тогда $\tilde{n}_1 - m_1 = p_1$, $\tilde{n}_2 - m_2 = p_2$, то есть $\tilde{n}_1 = m_1 + p_1 = n_1$, $\tilde{n}_2 = m_2 + p_2 = n_2$, то есть точка $\tilde{N}$ совпадает с точкой $N$. Таким образом, первая аксиома аффинного пространства выполняется.

Проверим выполнение второй аксиомы аффинного пространства. Пусть $M, N, L$ – произвольные точки множества $\mathscr{A}$. Тогда

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NL} = \vec{n} - \vec{m} + \vec{\ell} - \vec{n} = \overrightarrow{ML}.$$

Итак, обе аксиомы аффинного пространства выполняются, следовательно, множество $\mathscr{A} = \sigma \setminus d_0$ обладает структурой двумерного аффинного пространства, то есть структурой аффинной плоскости. Будем называть множество $\mathscr{A}$ *проективной моделью аффинной плоскости* (или, просто, *моделью аффинной плоскости*). ■

Чтобы из модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$ получить расширенную плоскость $\bar{\mathscr{A}}$, к множеству $\mathscr{A}$ нужно добавить прямую $d_0$, которая будет играть роль несобственной прямой. В связи с этим будем называть прямую $d_0$ *несобственной (или бесконечно удаленной) прямой*. Точки прямой $d_0$ будем называть *несобственными (или бесконечно удаленными) точками*.

**2.** Рассмотрим произвольное проективное преобразование $f$ проективной плоскости $\sigma$, которое переводит прямую $d_0$ в себя. Очевидно, что множество таких преобразования образует группу. Обозначим ее $H_0$. Фиксируем проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, у которого вершины $A_1$ и $A_2$ лежат на прямой $d_0$ и запишем формулы преобразований $f$ из группы $H_0$ в репере $R$. Согласно примеру 1.14 они имеют вид

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x'_3 &= c_{33}x_3. \end{aligned} \tag{1.76}$$

Так как определитель матрицы $(c_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ отличен от нуля, получим, что $c_{33}$ отлично от нуля.

Так как прямая $d_0$ является несобственной прямой для модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$, то с репером $R$ связана аффинная система координат $I = (A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$ (§ 1.21.). При этом точка $M$, не принадлежащая прямой $d_0$, с координатами $(x_1, x_2, 1)$ в репере $R$ имеет координаты $(x_1, x_2)$ в аффинной системе координат $I$. С учетом этого рассмотрим формулы (1.76) для точек $M$, принадлежащих модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$. Для таких точек третьи координаты равны 1, следовательно, из третьего равенства (1.76) получим

$\rho = c_{33}$. Подставим $\rho$ в первые два равенства и разделим на $c_{33}$:

$$\begin{array}{l} x'_1 = \frac{c_{11}}{c_{33}}x_1 + \frac{c_{12}}{c_{33}}x_2 + \frac{c_{13}}{c_{33}} \\ x'_2 = \frac{c_{21}}{c_{33}}x_1 + \frac{c_{22}}{c_{33}}x_2 + \frac{c_{23}}{c_{33}}. \end{array} \qquad (1.77)$$

Как мы отмечали выше, пары чисел $(x_1, x_2)$ и $(x'_1, x'_2)$ являются координатами точек $M$ и $M'$ соответственно относительно аффинной системы координат $I$. При этом так как определитель матрицы $(c_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ отличен от нуля, определитель матрицы $\left(\frac{c_{ab}}{c_{33}}\right)$, $a, b = 1, 2$ также отличен от нуля. Тогда формулы (1.77) являются формулами аффинного преобразования в модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$. Будем говорить при этом, что проективное преобразование плоскости $\alpha$ *моделирует* аффинное преобразование модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$. Итак, доказана

**Теорема 2.** *Аффинные преобразования модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$ моделируются проективными преобразованиями проективной плоскости $\sigma$, переводящими проективную прямую $d_0$ в себя.* □

**3.** Введем понятия аффинной прямой и простого отношения трех точек на модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$.

Напомним, что аффинная прямая (то есть 1-плоскость) на аффинной плоскости $\mathscr{A}$ вводится следующим образом (§6.8, часть I). Фиксируется одномерное подпространство $L$ в векторном пространстве $V$, определяющем аффинное пространство $\mathscr{A}$. Тогда на множестве точек $\mathscr{A}$ вводится отношение эквивалентности $\Delta$: две точки $A$ и $B$ из $\mathscr{A}$ находятся в отношении $\Delta$, если вектор $\overrightarrow{AB}$ принадлежит подпространству $L$. Классы эквивалентности фактормножества $\mathscr{A}/\Delta$ называются аффинными прямыми. Из этого определения следует, что для задания аффинной прямой $a$ нужно знать точку $A$ этой прямой и направляющее подпространство $L$. Тогда множеством точек прямой $a$ будет множество всех точек аффинной плоскости, находящихся в отношении $\Delta$ с точкой $A$. Будем обозначать аффинную прямую,задаваемую точкой $A$ и направляющим подпространством $L$ через $[A, L]$.

**Теорема 3.** *Пусть $d$ – произвольная проективная прямая проективной плоскости $\sigma$, отличная от прямой $d_0$. Тогда аффинными прямыми на модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$ будут множества точек, являющихся пересечениями $d$ и $\mathscr{A}$ и только они. Другими словами, аффинной прямой будет множество точек проективной прямой $d$ без точки пересечения $d$ и $d_0$.*

□ Пусть на модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$ зафиксирована произвольная точка $A$ и в векторном пространстве $V$ зафиксировано одномерное векторное подпространство $L$. Тогда $L$ порождает некоторую точку $A_0$ на прямой $d_0$. Обозначим через $d$ проективную прямую $(AA_0)$ и покажем, что множество ее точек без точки $A_0$ совпадает с множеством точек аффинной прямой $[A, L]$, задаваемой точкой $A$ и направляющим подпространством $L$.

Пусть $B$ – произвольная точка прямой $d$, отличная от точек $A$ и $A_0$. Обозначим через $\vec{a}(a_1, a_2, 1)$ вектор, порождающий точку $A$, а через $\vec{b}(b_1, b_2, 1)$ – вектор, порождающий точку $B$. Тогда, с одной стороны, вектор $(\vec{b} - \vec{a})(b_1 - a_1, b_2 - a_2, 0)$ принадлежит пространству $V$, а значит, порождаемая им точка принадлежит прямой $d_0$. С другой стороны, эта точка лежит на прямой $d$, так как порождающий ее вектор является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Так как единственная общая точка прямых $d_0$ и $d$ – это точка $A_0$, вектор $(\vec{b}-\vec{a})$ порождает точку $A_0$, следовательно, принадлежит пространству $L$. Итак, получаем, что $\phi(A, B) = \vec{b} - \vec{a}$ принадлежит $L$, то есть точка $B$ принадлежит прямой $[A, L]$.

Если точка $C$ модели $\mathscr{A}$ не принадлежит прямой $d$, то проективная прямая $(AC)$ пересекает прямую $d_0$ в точке $D_0$, отличной от точки $A_0$. Рассуждая аналогично, получим, что вектор $(\vec{b} - \vec{a})$ порождает точку $D_0$. Так как она отлична от точки $A_0$, этот вектор не принадлежит подпространству $L$, следовательно, точка $C$ не принадлежит прямой $[A, L]$. ■

Будем говорить, что проективная прямая $d$ (без точки пересечения с проективной прямой $d_0$) является *моделью* аффинной прямой $[A, L]$. Также будем говорить, что проективная прямая *моделирует* аффинную прямую $[A, L]$. Будем также обозначать аффинную прямую, которую моделирует проективная прямая $a$, через $\tilde{a}$.

**Замечание 1.** Чтобы перейти от аффинной прямой $[A, L]$ к расширенной прямой, нужно добавить точку пересечения проективный прямых $d$ и $d_0$, где $d$ – проективная прямая, моделирующая аффинную прямую $[A, L]$.

**Теорема 4.** *Параллельные аффинные прямые в $\mathscr{A}$ моделируются проективными прямыми, пересекающимися на прямой $d_0$.*

□ Пусть на модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$ даны две параллельные аффинные прямые $[A, L]$ и $[B, L]$ и пусть они моделируются проективными прямыми $d_1$ и $d_2$. Обозначим точку пересечения прямых $d_1$ и $d_2$ через $C$. Точка $C$ всегда существует в силу предложения 4 § 1.2.. Если точка $C$ принадлежит модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$, то эта точка будет точкой пересечения прямых $[A, L]$ и $[B, L]$, что противоречит их параллельности. Значит, точка $C$ принадлежит прямой $d_0$. ■

Напомним, что *простым отношением трех точек $A, B, C$ аффинной прямой* называется вещественное число $\lambda$, отличное от $-1$, такое что

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}.$$

Обозначение $(AB, C) = \lambda$.

**Теорема 5.** *Пусть $M, N, Q$ – произвольные различные точки аффинной прямой $[A, L]$. Тогда*

$$(MN, Q) = -(MN, QP_0),$$

*где $P_0$ – точка пересечения проективных прямых $(MN)$ и $d_0$, а $(MN, QP_0)$ – сложное отношение четырех точек проективной прямой.*

□ Обозначим через $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{q}$ векторы порождающие точки $M, N, Q$ соответственно. Обозначим через $\lambda$ простое отношение $(MN, Q)$. Тогда по определению простого отношения трех точек и определению отображения $\phi$ получим $\vec{q} - \vec{m} = \lambda(\vec{n} - \vec{q})$ или

$$\vec{q} = \frac{1}{\lambda + 1}\vec{m} + \frac{\lambda}{1 + \lambda}\vec{n}.$$

Это равенство означает, что базис $(\frac{1}{\lambda+1}\vec{m}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{n})$ принадлежит проективному реперу $R = (M, N, Q)$ (теорема 2 § 1.7.).

С другой стороны, из доказательства теоремы 3 следует, что $\vec{p_0} = \vec{n} - \vec{m}$ порождает точку $P_0$. Последнее равенство можно записать в виде

$$\vec{p_0} = -(1 + \lambda)\frac{1}{\lambda + 1}\vec{m} + \frac{1 + \lambda}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{1 + \lambda}\vec{n}.$$

Откуда по определению координат точки в проективном репере (§ 1.7.) получаем, что $P_0(-(1 + \lambda), \frac{1+\lambda}{\lambda})$ в репере $R = (M, N, Q)$. Тогда по определению сложного отношения четырех точек (§ 1.11.) получим, что $(MN, QP_0) = -\lambda$. ■

Напомним, что точка $Q$ называется *лежащей между точками $M$ и $N$*, если $(MN, Q) > 0$.

С помощью простого отношения трех точек вводятся понятия отрезка и луча.

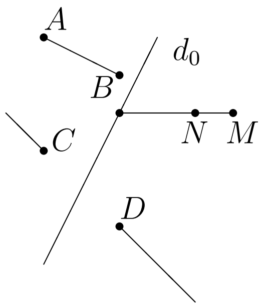



Рис.1.36

На Рис.1.36 изображены отрезки $AB$ и $CD$, а также луч $MN$.

**Следствие 1.** *Во введенных обозначениях верны следующие утверждения.*

1. *Точка $Q$ лежит между точками $M$ и $N$ тогда и только тогда, когда $(MN, QP_0) < 0$.*

2. *Точка $Q$ является серединой отрезка $MN$ тогда и только тогда, когда $(MN, QP_0) = -1$.*

С помощью понятия отрезка обычным образом вводится понятие многоугольника, в частности, понятия треугольника, четырехугольника, параллелограмма и трапеции.

**Пример 1.17.** В качестве примера, показывающего преимущество построенной модели аффинной плоскости, рассмотрим следующее утверждение: диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

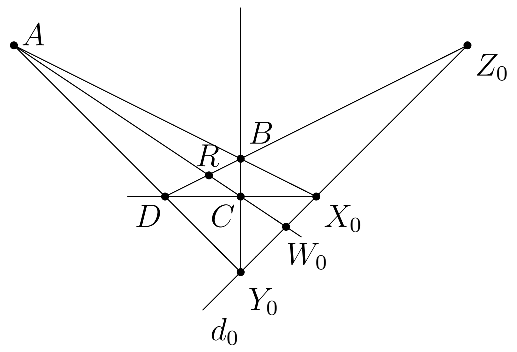


Рис.1.37

В качестве модели проективной плоскости, используя которую будем строить аффинную плоскость, возьмем расширенную плоскость. На ней выберем прямую $d_0$ (Рис.1.37). Заметим, что при этом несобственные точки, которые добавлялись при построении расширенной плоскости становятся точками модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$, а несобственными точками будут точки прямой $d_0$. Изобразим параллелограмм $ABCD$. На проективной плоскости точки $A, B, C, D$ и проективные прямые попарно соединяющие их образуют полный четырехвершинник.
Проективные прямые $(AC)$ и $(BD)$ являются противоположными сторонами четырехвершинника $ABCD$ и пересекаются в диагональной точке $R$. Двумя другими диагональными точками являются точки $X_0$ и $Y_0$. Так как диагональные точки полного четырехвершинника не лежат на одной прямой (задача 1.33), точка $R$ не принадлежит прямой $d_0$, следовательно, является точкой модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$. Кроме того, по теореме 1 § 1.18. имеем $(AC, RW_0) = -1$ и $(BD, RZ_0) = -1$. Тогда по следствию 1 точка $R$ является серединой отрезков $AC$ и $BD$. Откуда получаем, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

**4.** Выясним, какой фигурой проективной плоскости моделируются эллипс, гипербола и парабола аффинной плоскости. Для этого выберем проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, у которого первые две точки $A_1$ и $A_2$ лежат на фиксированной проективной прямой $d_0$. Так как прямая $d_0$ является несобственной прямой для модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$, то с репером $R$ связана аффинная система координат $I = (A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$ (§ 1.21.). При этом точка $M$, не принадлежащая прямой $d_0$, с координатами $(m_1, m_2, 1)$ в репере $R$ имеет координаты $(m_1, m_2)$ в аффинной системе координат $I$.

Рассмотрим на проективной плоскости овальную линию $\gamma$, которая относительно проективного репера $R$ задана уравнением

$$a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + a_{33}(x_3)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 = 0. \tag{1.78}$$

Тогда множество точек $\tilde{\gamma}$, состоящее из точек овальной линии $\gamma$, принадлежащих модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$, относительно аффинной системы координат $I$ будет задаваться уравнением

$$a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + a_{33} + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2 + 2a_{13}x_1 = 0.$$

Это уравнение задает линию второго порядка на модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$. Так как овальная линия – это линия, отличная от пустого множества, множества, состоящего из одной точки, и множества, распадающегося на пару прямых, линия второго порядка $\tilde{\gamma}$ также будет отлична от пустого множества, точки и пары прямых, а значит, будет либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой (§ 4.11, часть I).

Выясним, при каком взаимном расположении линии $\gamma$ и прямой $d_0$ получается эллипс, гипербола или парабола. Чтобы найти количество общих точек $\gamma$ и $d_0$ нужно записать систему из уравнений этих множеств в репере $R$. Уравнение линия $\gamma$ имеет вид (1.78), а уравнение прямой $d_0$ имеет вид $x_3 = 0$, так как $d_0$ совпадает с координатной прямой $(A_1A_2)$. Имеем

$$\begin{cases} a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы является квадратным уравнением относительно неизвестной $\frac{x_1}{x_2}$, так как в противном случае линия $\gamma$ распадется на две прямые. Для этого уравнения возможны следующие случаи:

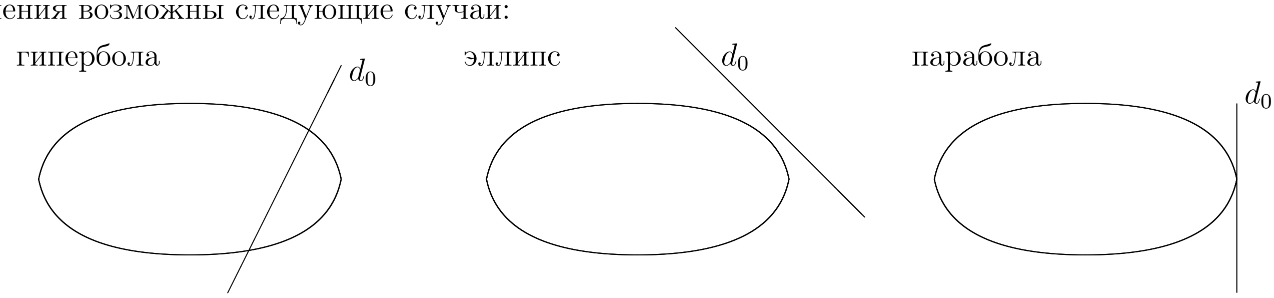



Рис.1.38

1) дискриминант $D = (a_{12})^2 - a_{11}a_{22}$ меньше нуля, то есть общих точек прямая $d_0$ и линия $\gamma$ не имеют (Рис.1.38). С другой стороны, дискриминант $D$ с точностью до знака совпадает с определителем $\delta = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$ (§ 4.6, часть I) линии второго порядка $\tilde{\gamma}$. Следовательно, в этом случае $\delta$ больше нуля и линия $\tilde{\gamma}$ является линией эллиптического типа. Так как она отлична от пустого множества и множества, состоящего из одной точки, $\tilde{\gamma}$ является эллипсом.

2) дискриминант $D = (a_{12})^2 - a_{11}a_{22}$ больше нуля, то есть $d_0$ и $\gamma$ имеют две различные общие точки. Рассуждая аналогично пункту 1), получим, что $\tilde{\gamma}$ является гиперболой.

3) дискриминант $D = (a_{12})^2 - a_{11}a_{22}$ равен нулю, то есть $d_0$ и $\gamma$ имеют две совпавшие общие точки. Тогда $\tilde{\gamma}$ является параболой.

Напомним, что центром эллипса (гиперболы) называется его центр симметрии. Выясним, чем моделируется центр эллипса (гиперболы) в построенной модели $\mathscr{A}$.

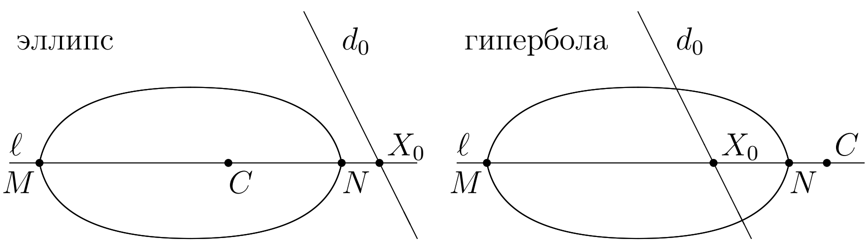



Рис.1.39

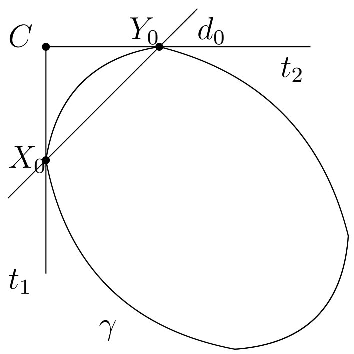
Пусть $C$ – центр эллипса $\tilde{\gamma}$ (Рис.1.39). Для гиперболы рассуждения аналогичны (проведите самостоятельно). Проведем через точку $C$ произвольную прямую $\ell$, пересекающую овальную линию $\gamma$ в двух точках $M$ и $N$. Так как $C$ – середина отрезка $MN$ (по определению центра), имеем $(MN, CX_0) = -1$ (следствие 1), то есть точка $C$ является четвертой гармонической к точкам $M, N, X_0$. Следовательно, точка $C$ лежит на полярах точек $X_0$, принадлежащих прямой $d_0$ (теорема 2 § 1.23.). По теореме о взаимности поляритета (теорема 4) точка $C$ будет полюсом прямой $d_0$. Итак, доказана

**Теорема 6.** *Центр эллипса (гиперболы) на $\mathscr{A}$ моделируется полюсом фиксированной проективной прямой $d_0$.*

**Пример 1.18.** Так как для каждой проективной прямой существует единственный полюс (теорема 3 § 1.23.) из теоремы 6 получаем, что эллипс и гипербола имеют единственный центр.

**Теорема 7.** *Пусть на модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$ дана гипербола $\tilde{\gamma}$ и ее центр $C$. Тогда асимптоты гиперболы $\tilde{\gamma}$ будут моделироваться касательными к овальной линии $\gamma$, проходящими через точку $C$.*

☐ Пусть $t_1$ и $t_2$ – проективные прямые, проходящие через точку $C$ и являющиеся касательными к овальной линии $\gamma$.




Каждая из прямых $t_1$ и $t_2$ пересекает линию $\gamma$ в двух совпавших точках $X_0$ и $Y_0$ соответственно (Рис.1.39). Так как точка $X_0$ принадлежит прямой $d_0$, а любая проективная прямая пересекает овальную линию $\gamma$ не более чем в двух точках, любая проективная прямая, проходящая через точку $X_0$, пересекает множество точек $\tilde{\gamma}$ не более, чем в одной точке. Следовательно, аффинная прямая, моделируемая этой проективной прямой имеет асимптотическое направление относительно гиперболы $\tilde{\gamma}$ (§ 4.6, часть I). Тогда аффинная прямая, моделируемая прямой $t_1$, имеет асимптотическое направление и не пересекает гиперболу $\tilde{\gamma}$, то есть является асимптотой по определению. Аналогично рассуждая, получаем, что проективная прямая $t_2$ моделирует вторую асимптоту гиперболы. ■

Напомним, что диаметром линии второго порядка называется прямая, содержащая середины хорд, параллельных некоторому фиксированному вектору неасимптотического направления (§ 4.9, часть I).

**Теорема 8.** *Диаметры эллипса (гиперболы, параболы) моделируются полярами точек проективной прямой $d_0$, отличными от прямой $d_0$.*

☐ Проведем доказательство в случае эллипса (для гиперболы и параболы доказательство аналогично).

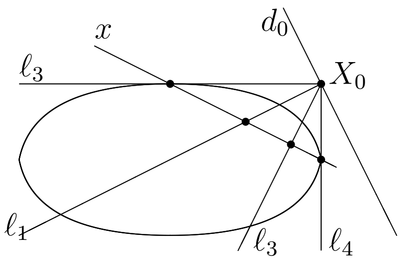



Рис.1.40

Пусть $X_0$ – произвольная точка прямой $d_0$ (Рис.1.40). Рассмотрим пучок проективных прямых $\ell$ с центром в точке $X_0$. Они моделируют пучок параллельных аффинных прямых, образующих при пересечении с эллипсом $\tilde{\gamma}$ хорды. Серединами этих хорд являются четвертые гармонические точки к двум точкам пересечения $\gamma$ с проективными прямыми $\ell$ и точке $X_0$. Согласно теореме 2 § 1.23. четвертые гармонические точки лежат на поляре $x$ точки $X_0$. Таким образом, диаметры эллипса будут моделироваться полярами точек, принадлежащих прямой $d_0$ и только ими. ■

## §1.26. Модель евклидовой плоскости в проективной геометрии

**1.** Пусть $\mathscr{A}$ – аффинное пространство, $V$ – соответствующее ему векторное пространство. Напомним (§ 6.12, часть I), что аффинное пространство $\mathscr{A}$ называется *евклидовым*, если в векторном пространстве $V$ фиксирована евклидова структура $g$, то есть положительно определенная симметрическая билинейная форма.

Рассмотрим модель аффинной плоскости $\mathscr{A}$, построенную в § 1.25. Напомним, что $\mathscr{A}$ – это множество точек проективной плоскости $\sigma$ без точек фиксированной проективной прямой $d_0$. Векторным пространством $V$, задающим структуру проективной плоскости на множестве $\mathscr{A}$, является двумерное векторное пространство, порождающее прямую $d_0$. Кроме того, на $\mathscr{A}$ фиксирован проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$, у которого вершины $A_1$ и $A_2$ лежат на прямой $d_0$. Репер $R$ задает на модели аффинной плоскости $\mathscr{A}$ аффинную систему координат $I = (A_3, \overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$. Отметим, что упорядоченная пара векторов $b = (\overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})$ является базисом пространства $V$.

Зададим в векторном пространстве $V$ отображение $g : V \times V \to \mathbb{R}$ по формуле

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2, \tag{1.79}$$

где $(x_1, x_2)$ и $(y_1, y_2)$ – это соответственно координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ относительно базиса $b$. Легко видеть (проведите доказательство самостоятельно), что отображение $g$ является положительно определенной симметрической билинейной формой, а значит, задает евклидову структуру в векторном пространстве $V$. Следовательно, модель аффинной плоскости $\mathscr{A}$ становится моделью евклидовой плоскости. Будем обозначать модель евклидовой плоскости через $\mathscr{E}$.

Вычислим длины векторов базиса $b$ и угол между ними. Так как относительно базиса $b$ координаты векторов $\overrightarrow{A_3E_2}$ и $\overrightarrow{A_3E_1}$) равны соответственно (1,0) и (0,1), получим (формула

(1.79) и § 6.12, часть I)

$$|\overrightarrow{A_3E_2}| = \sqrt{1^2+0^2} = 1; \quad |\overrightarrow{A_3E_1}| = \sqrt{0^2+1^2} = 1;$$
$$\cos\angle(\overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1}) = \frac{g(\overrightarrow{A_3E_2}, \overrightarrow{A_3E_1})}{|\overrightarrow{A_3E_2}||\overrightarrow{A_3E_1}|} = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1}{1\cdot 1} = 0$$

Таким образом, векторы базиса $b$ ортогональны, а их длины равны 1, то есть базис $b$ является ортонормированным. Тогда соответствующая аффинная система координат $I$ является прямоугольной декартовой системой координат.

Будем называть проективный репер $R$, который определяет прямоугольную декартову систему координат $I$, *декартовым репером.*

Заметим, что евклидова структура $g$, а значит, и модель евклидова пространства, от выбора репера $R$. Другими словами, если фиксировать другой репер $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$, для которого точки $A'_1$ и $A'_2$ лежат на прямой $d_0$, и задать евклидову структуру $g'$ по формуле (1.79), то, вообще говоря, система координат $I$, определяемая репером $R$, не будет прямоугольной декартовой относительно евклидовой структуры $g'$.

**2.** Чтобы иметь возможность на модели евклидовой плоскости работать с такими понятиями как перпендикулярность и равенство отрезков, дополним ее так называемыми *мнимыми точками.*

Пусть на проективной плоскости $\sigma$ дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Тогда каждой точке $M$ плоскости $\sigma$ ставится в соответствие множество ненулевых упорядоченных троек вещественных чисел, любые две из которых отличаются на ненулевой постоянный вещественный множитель, то есть каждой точке ставится в соответствие множество ее координат в репере $R$. Это соответствие биективно, следовательно, точку $M$ проективной плоскости можно отождествить с множеством ее координат. Другими словами, точкой проективной плоскости, на которой фиксирован репер $R$, можно считать множество упорядоченных ненулевых троек вещественных чисел, любые две из которых отличаются на постоянный ненулевой вещественный множитель. Этот факт позволяет расширить проективную плоскость (с фиксированным проективным репером $R$) и построить так называемую *комплексификацию проективной плоскости*, которую будем обозначать $\sigma^{\mathbb{C}}$. Будем называть *точкой комплексификации проективной плоскости* множество ненулевых упорядоченных троек комплексных чисел, любые две из которых отличаются на постоянный комплексный множитель. Тройки чисел, принадлежащие точке комплексификации проективной плоскости, будем называть *координатами* этой точки в проективном репере $R$. Точку комплексификации проективной плоскости будем называть *вещественной*, если она содержит вещественные тройки чисел и *мнимой* в противном случае. Из определения следует, что вещественные точки комплексификации проективной плоскости можно отождествить с точками проективной плоскости $\sigma$. Две точки комплексификации проективной плоскости будем называть *комплексно-сопряженными*, если их соответствующие координаты являются комплексно-сопряженными числами.

Договоримся рассматривать только проективные реперы, состоящие из точек плоскости $\sigma$. Тогда формулами перехода от одного такого репера к другому будут формулы (1.29), где $\rho$ является произвольным ненулевым комплексным числом, а коэффициенты $c_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ являются вещественными числами, для которых определитель матрицы $(c_{ij})$ отличен от нуля.

Понятия вещественной и мнимой точки комплексификации проективной плоскости не зависят от выбора репера $R$ проективной плоскости $\sigma$, так как в формулах перехода (1.29) от одного проективного репера к другому все коэффициенты являются вещественными числами.

Пусть на проективной плоскости $\sigma$ дана проективная прямая $d$. Тогда относительно репера $R$ она задается уравнением

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \tag{1.80}$$

где $u_1, u_2, u_3$ – некоторые вещественные числа, одновременно не равные нулю. *Комплексификацией прямой* $d$ будем называть множество точек плоскости $\sigma^{\mathbb{C}}$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1.80). Будем обозначать комплексификацию прямой $d$ через $d^{\mathbb{C}}$.

Распространим понятие сложного отношения четырех точек прямой на комплексификацию проективной плоскости. *Назовем сложным отношением четырех точек* $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$ *комплексификации проективной прямой* комплексное число $(AB, CD)$, которое вычисляется по формуле

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}. \tag{1.81}$$

Очевидно, что для вещественных точек введенное понятие сложного отношения четырех точек совпадает с понятием сложного отношения четырех точек, введенным в § 1.11.

Пусть на проективной плоскости $\sigma$ дано проективное преобразование $f$. Относительно репера $R$ оно задается формулами (1.42). Тогда для каждой точки $M$ плоскости $\sigma^{\mathbb{C}}$ с координатами $(x_1, x_2, x_3)$ в репере $R$ поставим в соответствие точку $M'$ с координатами $(x'_1, x'_2, x'_3)$, которые вычислим по формулам (1.42), где $\rho$ будет произвольным комплексным числом. Обозначим полученное преобразование $f^{\mathbb{C}}$. Назовем преобразование $f^{\mathbb{C}}$ *комплексификацией проективного преобразованием* $f$, а формулы (1.42) – *формулами, задающими преобразование* $f^{\mathbb{C}}$ плоскости $\sigma^{\mathbb{C}}$. Так как коэффициенты в формулах (1.42) являются вещественными числами, преобразование $f^{\mathbb{C}}$ переводит вещественные точки в вещественные, а мнимые в мнимые. Более того, так как преобразования $f$ и $f^{\mathbb{C}}$ задаются одними и теми же формулами (точнее, отличаются только коэффициентом $\rho$), сужение $f^{\mathbb{C}}$ на множество вещественных точек плоскости $\sigma^{\mathbb{C}}$ (в формулах преобразования $f^{\mathbb{C}}$ коэффициент $\rho$ берется вещественным) совпадает с преобразованием $f$.

Аналогично случаю проективной прямой вводится понятие комплексификации линии второго порядка плоскости $\sigma^{\mathbb{C}}$. Пусть линия второго порядка $\gamma$ (в частности, овальная линия) задается в репере $R$ уравнением

$$a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + a_{33}(x_3)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \tag{1.82}$$

где коэффициенты $a_{ij},\ i,j = 1,2,3$ не равны нулю одновременно. Назовем *комплексификацией линии* $\gamma$ множество точек плоскости $\sigma^{\mathbb{C}}$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1.82). Будем обозначать комлексификацию линии $\gamma$ через $\gamma^{\mathbb{C}}$.

**3.** Пусть $\sigma$ – проективная плоскость с фиксированной прямой $d_0$. Рассмотрим модель евклидовой плоскости $\mathscr{E}$, построенную с помощью декартова репера $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. С помощью репера $R$ построим комплексификацию $\sigma^{\mathbb{C}}$ проективной плоскости $\sigma$. Обозначим через $d_0^{\mathbb{C}}$ комплексификацию прямой $d_0$. Обозначим $\mathscr{E}^{\mathbb{C}}$ множество точек плоскости $\sigma^{\mathbb{C}}$ без точек прямой $d_0^{\mathbb{C}}$. Очевидно, что множество вещественных точек $\mathscr{E}^{\mathbb{C}}$ совпадает с множеством точек $\mathscr{E}$.

Рассмотрим две комплексно-сопряженные точки $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$ на плоскости $\sigma^{\mathbb{C}}$, обозначим их $I_1$ и $I_2$ соответственно и назовем *циклическими точками.* Так как в репере $R$ прямая $d_0^{\mathbb{C}}$ имеет уравнение $x_3 = 0$, точки $I_1$ и $I_2$ принадлежат прямой $d_0^{\mathbb{C}}$.

Рассмотрим комплексификации $f^{\mathbb{C}}$ проективных преобразований, для которых фигура, состоящая из циклических точек $I_1$ и $I_2$, является инвариантной. Очевидно, что множество таких преобразований образует группу. Обозначим ее $H_I$. Так как из определения комплексификации проективной прямой следует, что пара различных точек однозначно определяет ее, получаем, что прямая $d_0^{\mathbb{C}}$ инвариантна относительно преобразований $f^{\mathbb{C}}$. Сужение преобразований $f^{\mathbb{C}}$ на плоскость $\sigma$ переводят прямую $d_0$ в себя, а значит, принадлежат группе $H_0$ (§ 1.25.). Поставим в соответствие каждому преобразованию $f^{\mathbb{C}}$, переводящему фигуру $\{I_1\} \cup \{I_2\}$ в себя, его сужение $f$ на проективную плоскость $\sigma$. Так как оба преобразования задаются одними и теми же формулами (отличие только в коэффициенте $\rho$), получаем, что, во-первых, заданное соответствие будет биекцией и, во-вторых, что $(f \circ g)^{\mathbb{C}} = f^{\mathbb{C}} \circ g^{\mathbb{C}}$, $(f^{-1})^{\mathbb{C}} = (f^{\mathbb{C}})^{-1}$. Это означает, что группа $H_I$ изоморфна подгруппе группы $H_0$, состоящей из сужений преобразований $f^{\mathbb{C}}$, принадлежащих $H_I$, на плоскость $\sigma$.

Запишем формулы преобразований $f^{\mathbb{C}}$ из группы $H_I$ относительно декартова репера. Так как сужение преобразования $f^{\mathbb{C}}$ принадлежит группе $H_0$, то оно задается формулами (1.76). Тогда само преобразование $f^{\mathbb{C}}$ будет задаваться теми же формулами, но с комплексным коэффициентом $\rho$. Так как преобразования $f^{\mathbb{C}}$ должны переводить фигуру, состоящую из циклических точек в себя, на коэффициенты в формулах накладываются дополнительные условия, которые нужно найти. Так как фигура, состоящая из циклических точек $I_1$ и $I_2$, инвариантна относительно преобразований $f^{\mathbb{C}}$, возможны два случая:

1) $f^{\mathbb{C}}(I_1) = I_1$, $f^{\mathbb{C}}(I_2) = I_2$. Подставляя координаты циклических точек в формулы (1.76), получим

$$\begin{cases} \rho \cdot 1 = c_{11} \cdot 1 + c_{12} \cdot i \\ \rho \cdot i = c_{21} \cdot 1 + c_{22} \cdot i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{11} = c_{22} = Re\,\rho \\ c_{12} = -c_{21} = Im\,\rho \end{cases}$$

Подставляя координаты второй циклической точки в формулы $f^{\mathbb{C}}$, получим аналогичные условия на коэффициенты.

2) $f^{\mathbb{C}}(I_1) = I_2$, $f^{\mathbb{C}}(I_2) = I_1$. Аналогично пункту 1) получим, что

$$c_{11} = -c_{22}; \quad c_{12} = -c_{21}$$

Итак, с учетом полученных соотношений формулы (1.76) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= ax_1 - \varepsilon bx_2 + c_{13}x_3 \\ \rho x_2' &= bx_1 + \varepsilon ax_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x_3' &= c_{33}x_3, \end{aligned} \tag{1.83}$$

где $a = c_{11}$, $b = c_{21}$, $\varepsilon = \pm 1$, причем $\varepsilon = 1$ соответствует случаю 1), а $\varepsilon = -1$ соответствует случаю 2). На множестве точек $\mathscr{E}^{\mathbb{C}}$ $x_3'$ и $x_3$ отличны от нуля, следовательно, можно почленно поделить первые два уравнения из (1.83) на третье уравнение. Напомним, что $\frac{x_1'}{x_3'} = x'$, $\frac{x_2'}{x_3'} = y'$, $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$ – это координаты точек из множества $\mathscr{E}^{\mathbb{C}}$ относительно аффинной системы координат $I$ (§ 1.25.). В данном случае в качестве таких систем координат рассматриваются прямоугольные декартовы системы координат. Тогда получим

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\varphi - \varepsilon y\sin\varphi) + x_0 \\ y' &= k(x\sin\varphi - \varepsilon y\cos\varphi) + y_0, \end{aligned} \tag{1.84}$$

где введены обозначения $k\cos\varphi = \frac{a}{c_{33}}$, $k\sin\varphi = \frac{b}{c_{33}}$, $-\pi < \varphi \le \pi$, $k > 0$, $x_0 = \frac{c_{13}}{c_{33}}$, $y_0 = \frac{c_{23}}{c_{33}}$.

Формулы (1.84), которые задают сужение преобразования $f^{\mathbb{C}}$ на множество $\mathscr{E}$, совпадают с формулами преобразования подобия (§ 5.6, часть I). Следовательно, группа $H_I$ изоморфна группе подобий обычной евклидовой плоскости. Таким образом, доказана

**Теорема 1.** *Преобразования подобия на модели евклидовой плоскости $\mathscr{E}$ моделируются проективными преобразованиями $f^{\mathbb{C}}$, переводящими фигуру из двух циклических точек в себя. При этом подобия первого рода моделируются преобразованиями $f^{\mathbb{C}}$, которые переводят каждую циклическую точку в себя, а подобия второго рода моделируются преобразованиями $f^{\mathbb{C}}$, меняющими местами циклические точки.* □

**Пример 1.19.** Рассмотрим подмножество $H_T$ в группе $H_I$, преобразования $f^{\mathbb{C}}$ которого относительно декартовых реперов $R$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= ax_1 + c_{13}x_3 \\ \rho x_2' &= ax_2 + c_{23}x_3 \\ \rho x_3' &= ax_3, \end{aligned} \tag{1.85}$$

где $a$ – некоторое вещественное число, отличное от нуля, $c_{13}$, $c_{23}$ – произвольные вещественные числа. Рассмотрим сужение преобразования $f^{\mathbb{C}}$ на множество точек $\mathscr{E}$. Разделим первые два уравнения (1.85) на третье и обозначим $\frac{c_{13}}{a} = x_0$, $\frac{c_{23}}{a} = y_0$. Тогда

$$x' = x + x_0$$
$$y' = y + y_0.$$

Эти формулы являются формулами параллельного переноса на евклидовой плоскости, а значит, преобразование $f^{\mathbb{C}}$ моделирует параллельный перенос на множестве точек $\mathscr{E}$. Если рассмотреть сужение $f^{\mathbb{C}}$ на множество $\mathscr{E}$, то оно будет задаваться такими же формулами (с вещественными коэффициентами $\rho$). Поэтому будем говорить, что преобразование $f^{\mathbb{C}}$, задаваемое формулами (1.85), *моделирует параллельный перенос на комплексификации* $\mathscr{E}^{\mathbb{C}}$.

**4.** Пусть дана комплексификация $\sigma^{\mathbb{C}}$ проективной плоскости и прямая $d_0^{\mathbb{C}}$ на ней с фиксированными циклическими точками $I_1$ и $I_2$. Поставим в соответствие каждой вещественной точке $M$ прямой $d_0^{\mathbb{C}}$ точку $M'$, такую что $(I_1I_2, MM') = -1$.

**Лемма 1.** *Во введенных обозначениях для каждой точки $M$ точка $M'$ определена однозначно и является вещественной точкой.*

□ Обозначим координаты точек $M$ и $M'$ относительно репера $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$, порожденного декартовым репером $R$, через $M(x_1, x_2)$ и $M'(x_1', x_2')$. Так как точка $M$ вещественная, числа $x_1, x_2$ можно выбрать вещественными. Нужно доказать, что пара чисел $(x_1', x_2')$ определена однозначно с точностью до постоянного комплексного множителя и среди полученных пар чисел есть пара вещественных чисел.

По определению сложного отношения четырех точек (1.81) имеем

$$(I_1I_2, MM') = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ i & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1' \\ -i & x_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1' \\ i & x_2' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ -i & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{(x_2 - ix_1)(x_2' + ix_1')}{(x_2' - ix_1')(x_2 + ix_1)} = -1.$$

Так как $x_1$, $x_2$ одновременно не обращаются в нуль и $x_1'$, $x_2'$ также не обращаются в нуль одновременно, получим

$$(x_2 - ix_1)(x_2' + ix_1') = -(x_2' - ix_1')(x_2 + ix_1) \quad \Leftrightarrow \quad x_1x_1' + x_2x_2' = 0.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= x_2 \\ \rho x_2' &= -x_1 \end{aligned} \tag{1.86}$$

Из равенств (1.86) следует, что числа $x_1'$ и $x_2'$ можно выбрать вещественными (например, положив $\rho = 1$) и они определены однозначно с точностью до постоянного множителя, следовательно, точка $M'$ однозначно определена и является вещественной. ■

Итак, на прямой $d_0^{\mathbb{C}}$ определено преобразование, которое обозначим $g^{\mathbb{C}}$, причем соотношения (1.86) будут формулами этого преобразования. Покажем, что сужение этого преобразования на множество вещественных точек прямой $d_0^{\mathbb{C}}$ (которое совпадает с множеством точек прямой $d_0$) будет проективным. Рассмотрим соответствующее преобразование $g$ прямой $d_0$. Оно будет задаваться теми же формулами (1.86), в которых коэффициент $\rho$ является вещественным числом. Так как эти формулы имеют вид (1.45), то согласно результатам § 1.45 преобразование $g$ будем проективным.

Из формул (1.86) следует, что преобразование $g$ является инволюцией. Действительно, образом точки $A(1,0)$ является точка $B(0,-1)$, а образом точки $B(0,-1)$ является точка с координатами $(-1,0)$, которая совпадает с точкой $A$. Тогда $g$ является инволюцией по теореме 1 § 1.19..

**Лемма 2.** *Инволюция $g$ прямой $d_0$, заданная формулами (1.86), является эллиптической инволюцией (§ 1.19.).*

□ Найдем инвариантные точки инволюции $g$, используя формулы (1.86).

$$\begin{cases} \rho x_1 = x_2 \\ \rho x_2 = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\rho^2)x_2 = 0 \\ \rho x_1 = x_2 \end{cases}.$$

Так как для преобразования $g$ коэффициент $\rho$ является вещественным числом, последняя система не имеет ненулевых решений $(x_1, x_2)$, следовательно, инволюция не имеет инвариантных точек, то есть является эллиптической инволюцией по определению. ■

**Теорема 2.** *На модели евклидовой плоскости $\mathscr{E}$ перпендикулярные прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ моделируются проективными прямыми плоскости $\sigma$, проходящими через соответствующие точки инволюции $g$.*

□ Пусть на модели евклидовой плоскости $\mathscr{E}$ прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ относительно прямоугольной декартовой системы координат $I$ задаются уравнениями

$$\tilde{a}: \ a_1x + a_2y + a_3 = 0; \quad \tilde{b}: \ b_1x + b_2y + b_3 = 0.$$

Тогда моделирующие их проективные прямые $a$ и $b$ относительно декартова репера $R$ будут задаваться уравнениями

$$a: \ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0; \quad b: \ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0.$$

Решая систему уравнений, состоящую из уравнения прямой $a$ и уравнения прямой $d_0$, получим, что точка $A$ пересечения прямых $a$ и $d_0$ имеет координаты $A(a_2, -a_1)$ в репере $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$ прямой $d_0$. Аналогично получаем, что точка $B$ пересечения прямых $b$ и $d_0$ в репере $R_3$ имеет координаты $B(b_2, -b_1)$. Так как прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ перпендикулярны, для коэффициентов их уравнений имеем

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \rho a_1 = b_2 \\ \rho a_2 = -b_1 \end{cases},$$

где $\rho$ – произвольное вещественное число. Сравнивая эти равенства с формулами (1.86), получим, что точки $A$ и $B$ соответствуют друг другу в инволюции $g$ тогда и только тогда, когда прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ перпендикулярны. ■

С помощью понятия перпендикулярности прямых можно ввести понятия прямоугольного треугольника, прямоугольника (параллелограмм с прямым углом между соседними сторонами), квадрата (прямоугольник с перпендикулярными диагоналями), ромба (параллелограмм с перпендикулярными диагоналями, не являющийся прямоугольником) на модели евклидовой плоскости $\mathscr{E}$.

**5.** Выясним, какой фигурой на комплексификации $\sigma^{\mathbb{C}}$ моделируется окружность на модели $\mathscr{E}$.

**Теорема 3.** *Окружность модели евклидовой плоскости $\mathscr{E}$ моделируется комплексификацией $\gamma^{\mathbb{C}}$ овальной линии $\gamma$, проходящей через циклические точки.*

□ Пусть относительно декартова репера $R$ проективной плоскости $\sigma$ овальная линия $\gamma$ задана уравнением (1.82). Напомним, что этим же уравнением задается и комплексификация $\gamma^{\mathbb{C}}$, где переменные $x_1, x_2, x_3$ принимают комплексные значения. Потребуем, чтобы этому уравнению удовлетворяли координаты циклических точек $I_1(1, i, 0)$ и $I_2(1, -i, 0)$. Так как коэффициенты $a_{ij}$ в уравнении (1.82) являются вещественными числами, получим

$$\begin{cases} a_{11} - a_{22} + 2a_{12}i = 0 \\ a_{11} - a_{22} - 2a_{12}i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (1.82) примет вид

$$a(x_1)^2 + a(x_2)^2 + a_{33}(x_3)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0,$$

где $a = a_{11} = a_{22}$ – вещественное число, отличное от нуля, так как ранг овальной линии равен 3 (§ 1.20.). Следовательно, множество $\tilde{\gamma}$ точек линии $\gamma$, принадлежащих модели евклидовой плоскости $\mathscr{E}$ в прямоугольной декартовой системе координат $I$ задается уравнением

$$ax^2 + ay^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Так как множество $\tilde{\gamma}$ содержит более одной вещественные точки, согласно результатам § 2.4 (часть I) это уравнение задает окружность.

Обратно, пусть на модели евклидовой плоскости $\mathscr{E}$ дана окружность $\tilde{\gamma}$. Относительно прямоугольной декартовой системы координат $I$ она задается уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

где $a$, $b$ – произвольные вещественные числа, а $r$ – положительное вещественное число. Тогда относительно декартова репера $R$ множество точек $\gamma$, моделирующее окружность, будет иметь уравнение

$$(x_1)^2 - 2ax_1x_3 + a^2(x_3)^2 + (x_2)^2 - 2bx_2x_3 + b^2(x_3)^2 - r^2(x_3)^3 = 0. \tag{1.87}$$

Это уравнение линии второго порядка на проективной плоскости $\sigma$, а также уравнение ее комплексификации $\gamma^{\mathbb{C}}$ на плоскости $\sigma^{\mathbb{C}}$. Так как окружность $\tilde{\gamma}$ имела более одной вещественной точки, линия $\gamma^{\mathbb{C}}$ имеет более одной вещественной точки. Покажем, что матрица линии $\gamma$ (§ 1.20.) имеет определитель отличный от нуля. Действительно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ -a & -b & (a^2+b^2-r^2) \end{vmatrix} = (a^2+b^2-r^2-b^2)-a^2 = r^2 \neq 0.$$

Таким образом, ранг линии $\gamma$ равен 3, следовательно, она является овальной линией (§ 1.20.).

Наконец, легко видеть, что координаты циклических точек $I_1(1,i,0)$ и $I_2(1,-i,0)$ удовлетворяют уравнению (1.87), то есть линия $\gamma^{\mathbb{C}}$ проходит через циклические точки. ■

Так как окружность является частным случаем эллипса, центр окружности будет моделироваться полюсом прямой $d_0$ (теорема 6 § 1.25.). Тогда радиусы окружности будут моделироваться отрезками, соединяющими полюс прямой $d_0$ с точками овальной линии, моделирующей окружность. Будем называть овальную линию, моделирующую окружность, *окружностью* $\gamma$ *на* $\mathscr{E}$, а отрезки, моделирующие радиусы, *радиусами окружности* $\gamma$.

**6.** Введем понятия равенства углов и отрезков на модели евклидовой плоскости $\mathscr{E}$. На обычной евклидовой плоскости два угла являются равными тогда и только тогда, когда существует преобразование подобия, переводящее один угол в другой. Так как группа преобразований подобия изоморфна группе $H_I$ (теорема 1), то на $\mathscr{E}$ два угла будут равны тогда и только тогда, когда существует преобразование из группы $H_I$, переводящее один угол в другой.

Аналогичным образом ввести понятие равенства отрезков не удастся, так как не построена модель движения (то есть не выяснено, какими преобразованиями комплексификации $\sigma^{\mathbb{C}}$ проективной плоскости моделируются движения). Поэтому мы введем понятие равенства отрезков на $\mathscr{E}$ по-другому. Заметим, что два отрезка обычной евклидовой плоскости являются равными тогда и только тогда, когда они являются радиусами окружностей, совмещаемых параллельным переносом. Поэтому два отрезка модели евклидовой плоскости $\mathscr{E}$ будут равны тогда и только тогда, когда они являются радиусами окружностей на $\mathscr{E}$, которые совмещаются параллельным переносом (1.85).

## Задачи к главе I.

1.1. Доказать, что через любые две различные точки проективного пространства проходит единственная проективная прямая.

1.2. Доказать, что проективное пространство $P$ содержит бесконечно много точек.

1.3. Доказать, что любые две различные проективные плоскости в проективном пространстве пересекаются по проективной прямой.

1.4. Доказать, что любая проективная плоскость и любая, не лежащая в ней проективная прямая имеют единственную общую точку.

1.5. Доказать, что три различные проективные плоскости проективного пространства имеют по крайней мере одну общую точку. Доказать, что множество общих точек этих плоскостей есть либо проективная прямая, либо единственная точка.

1.6. Если три проективные прямые проективного пространства попарно пересекаются и не лежат в одной проективной плоскости, то они пересекаются в одной точке. Доказать.

1.7. Пусть дана связка аффинных прямых с центром в точке $O$ как модель проективной плоскости. Изобразить рисунок, иллюстрирующий следующие утверждения: а) через две различные точки проективной плоскости проходит единственная проективная прямая; б) любые две различные проективные прямые проективной плоскости пересекаются.

1.8. Изобразить на расширенной плоскости два перспективных трехвершинника $A^{\infty}BC$ и $A'B'C'_{\infty}$.

1.9. На расширенной плоскости изобразить два перспективных трехвершинника, имеющих а) несобственный центр перспективы и несобственную ось перспективы; б) несобственный центр перспективы и собственную ось перспективы.

1.10. На расширенной плоскости построить два перспективных трехвершинника, для которых центр перспективы принадлежит оси перспективы. Рассмотреть три случая: а) ось несобственная прямая и центр несобственные точка; б) ось собственная прямая, центр несобственная точка; в) ось и центр собственные.

1.11. На аффинной плоскости $\alpha$ даны две параллельные (аффинные) прямые $a$ и $b$ и точка $C$, не принадлежащая им. Построить аффинную прямую $\ell$, проходящую через точку $C$ параллельно прямой $a$ (следовательно, и прямой $b$), используя только линейку.
*Решение.*
Рассмотрим расширенную плоскость $\bar{\alpha}$ (§ 1.4.).

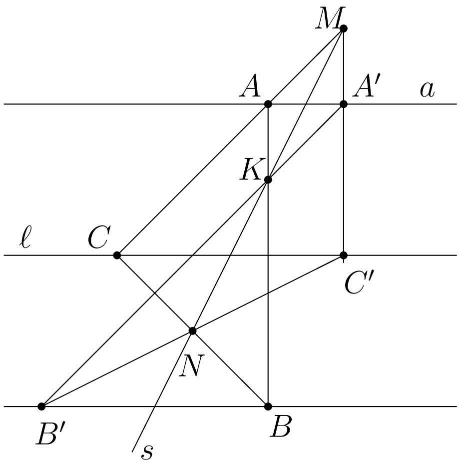



Рис.1.41

Построим два перспективных трехвершинника $ABC$ и $A'B'C'$ так, чтобы точки $A$, $A'$ принадлежали прямой $a$, а точки $B$, $B'$ принадлежали прямой $b$ (Рис.1.41). Тогда центр перспективы этих трехвершинников будет несобственной точкой $S^{\infty}$, следовательно, их третьи вершины $C$ и $C'$ окажутся на прямой $\ell$, проходящей через точку $S^{\infty}$ (по теореме Дезарга § 1.5.). Таким образом, прямая $\ell$ будет параллельна прямой $a$.

Начнем построение с оси перспективы трехвершинников. Проведем произвольным образом прямую $s$. На этой прямой выберем произвольную точку $M$. Она будет точкой пересечения прямых $(AC)$ и $(A'C')$. Значит, прямая $(CM)$ пересекает прямую $a$ в точке $A$. Точку $A'$, отличную от $A$, выбираем произвольно на прямой $a$. Точку $B$ выбираем произвольно на прямой $b$ так, чтобы она не лежала на прямой $(AC)$. Тогда обозначим через $K$ точку пересечения прямых $(AB)$ и $s$. Эта точка должна быть точкой пересечения прямых $(AB)$ и $(A'B')$, следовательно, точка $B'$ получается как точка пересечения прямых $(A'K)$ и $b$. Проведем прямую $(CB)$. Она пересечет ось перспективы $s$ в точке $N$, через которую должна пройти прямая $(B'C')$, то есть точка $C'$ есть точка пересечения прямых $(B'N)$ и $(MA')$. Итак, прямая $(CC')$ есть искомая прямая $\ell$.

1.12. На чертеже ограниченных размеров (в аффинной плоскости $\alpha$) заданы точка $A$ и пара прямых $p$ и $q$, которые пересекаются за пределами чертежа (в недоступной точке $S$). Используя теорему Дезарга, построить доступную часть прямой $(AS)$.

*Решение.*

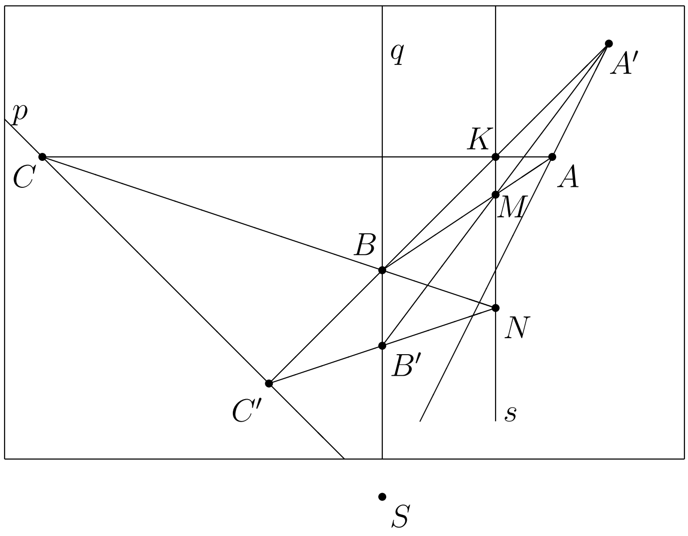



Рис.1.42

Рассмотрим расширенную плоскость $\bar{\alpha}$ (Рис.1.42). Построим два перспективных трехвершинника $ABC$ и $A'B'C'$ так, чтобы недоступная точка $S$ была их центром перспективы, точки $C$ и $C'$ лежали на прямой $p$, а точки $B$ и $B'$ лежали на прямой $q$. Тогда прямая $(AA')$ будет искомой прямой $\ell$.

Чтобы два трехвершинника были перспективны, они должны иметь ось перспективы. Проведем произвольную прямую $s$. Она будет осью перспективы. Точка $A$ уже дана. Возьмем произвольно точку $B$ на прямой $q$, точки $C$ и $C'$ на прямой $p$ (точки $A$, $B$, $C$ не должны лежать на одной прямой). Обозначим

$$K = (AC) \cap s, \quad M = (AB) \cap q, \quad N = (BC) \cap s.$$

Тогда $B' = (C'N) \cap s$ и $A' = (B'M) \cap (C'K)$.

1.13. На чертеже ограниченных размеров даны две пары прямых $p$, $q$, пересекающихся в недоступной точке $A$, и пара прямых $u$, $v$, пересекающихся в недоступной точке $B$. Построить доступную часть прямой $(AB)$.

1.14. В четырехугольник $ABCD$ вписана трапеция $MNPQ$, стороны $MN$ и $PQ$ которой параллельны его диагонали $AC$. Используя теорему Дезарга, доказать, что не параллельные стороны трапеции пересекаются на прямой, содержащей другую диагональ.

1.15. Показать, что доказательство теоремы Дезарга на проективной плоскости можно провести с помощью принципа двойственности, а в проективном пространстве – нет.

1.16. Есть ли среди утверждений задач 1.1, 1.3 – 1.6 двойственные? В случае отсутствия двойственного утверждения сформулировать его.

*Ответ.* Двойственные утверждения: 1.1 и 1.3.

Двойственное утверждение для 1.4: Через любую точку проективного пространства и любую проективной прямую этого пространства, не проходящую через данную точку, проходит единственная плоскость.

Двойственное утверждение для 1.5: Любые три различные точки проективного пространства лежат в одной плоскости. При этом они либо принадлежат одной проективной прямой, либо существует единственная проективная плоскость, проходящая через них.

Двойственное утверждение для 1.6: Если три проективные прямые проективного пространства попарно пересекаются и не проходят через одну точку, то они лежат в одной плоскости.

1.17. Пусть на проективной плоскости даны две различные проективные прямые $m$ и $n$. $A_1$, $A_3$, $A_5$ – различные точки прямой $m$, а $A_2$, $A_4$, $A_6$ – различные точки прямой $n$. Доказать, что точки $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$ и $R = (A_3A_4) \cap (A_1A_6)$ лежат на одной проективной прямой (теорема Паскаля-Паппа).
*Решение.*

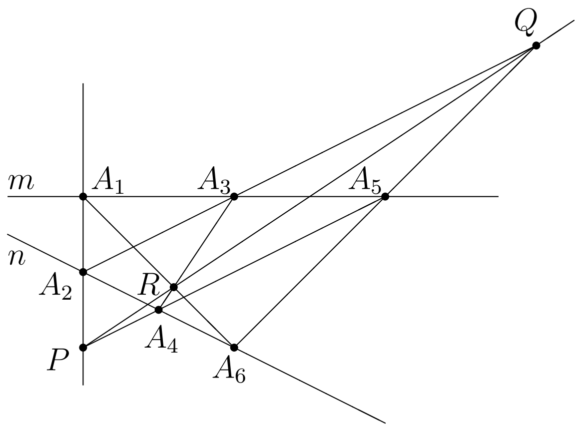



Рис.1.43

Введем проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ (Рис.1.43). Тогда $A_1(1,0,0)_R$, $A_2(0,1,0)_R$, $A_3(0,0,1)_R$, $A_4(1,1,1)_R$ (пример 1.6.) Зададим координаты для точек $A_5$ и $A_6$. Заметим, что точка $A_5$ принадлежит координатной прямой $(A_1A_3)$, следовательно, ее вторая координата равна нулю (замечание 1 § 1.8.). Но эта точка, не лежит на координатных прямых $(A_1A_2)$ и $(A_2A_3)$,
следовательно, ее первая и третья координаты отличны от нуля. Так как координаты точек на проективной плоскости определены с точностью до постоянного множителя, можно считать, что $A_5(1,0,a)_R$, где $a$ – некоторое ненулевое вещественное число.

Для того чтобы ввести координаты точки $A_6$, заметим, что она лежит на прямой $(A_2A_4)$. Уравнение этой прямой (формула (1.26))

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_3 = 0.$$

Откуда получаем, что первая и третья координаты точки $A_6$ равны. Так как точка $A_6$ не принадлежит ни одной из координатных прямых, все ее координаты отличны от нуля. Тогда $A_6(1,b,1)_R$, где $b$ – некоторое ненулевое вещественное число.

Вычислим координаты точек $P$, $Q$, $R$. Так как точка $P$ является точкой пересечения прямых $(A_1A_2)$ и $(A_4A_5)$, ее координаты должны удовлетворять уравнениям обеих прямых. Согласно примеру 1.9 общее уравнение прямой $(A_1A_2)$ имеет вид $x_3 = 0$. Используя формулу (1.26), получим для прямой $(A_4A_5)$ уравнение $ax_1-(a-1)x_2-x_3 =$

0. Тогда координаты точки $P$ являются решением системы

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ ax_1 - (a-1)x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ ax_1 = (a-1)x_2. \end{cases}$$

Таким образом, $P(a-1, a, 0)$.

Рассуждая аналогично, получим $Q(0, b, 1-a)_R$, $R(b, b, 1)_R$. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & b \\ a & b & b \\ 0 & 1-a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)b - (a-1)ab + (a-1)^2 b = 0.$$

Согласно теореме 2 § 1.9. получаем, что точки $P$, $Q$, $R$ лежат на одной проективной прямой.

1.18. Трехвершинники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ расположены в проективной плоскости так, что проективные прямые $(AA_1)$, $(BB_1)$ и $(CC_1)$ пересекаются в точке $O_1$, а проективные прямые $(AB_1)$, $(BC_1)$ и $(CA_1)$ – в точке $O_2$. Доказать, что проективные прямые $(AC_1)$, $(BA_1)$ и $(CB_1)$ также пересекаются в одной точке $O_3$ (теорема о дважды перспективных трехвершинниках).

1.19. В проективном репере $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ проективная прямая имеет уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Записать уравнение этой прямой в репере $R' = (E_1, E_2, E_3, E)$.

*Ответ:* $(a_2 + a_3)x_1 + (a_1 + a_3)x_2 + (a_1 + a_2)x_3 = 0$.

1.20. Пусть на проективной плоскости дан трехвершинник $A_1A_2A_3$ и проективная прямая $\ell$, не проходящая через его вершины. Доказать, что точку $E$ всегда можно выбрать так, чтобы прямая $\ell$ задавалась уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ в проективном репере $R = (A_1, A_2, A_3, E)$.

1.21. Пусть на расширенной прямой даны четыре различные собственные точки $A, B, C, D$ и несобственная точка $P^\infty$. Доказать, что

$$(AB, CD) = \tfrac{(AB,C)}{(AB,D)}; \quad (AB, CP^\infty) = -(AB, C),$$

где $(AB, C)$ обозначает простое отношение трех точек аффинной прямой.

*Указание.* Используйте формулу (1.34).

1.22. Пусть на проективной прямой даны различные точки $A$, $B$, $C$, $D$, $M$. Доказать, что $(AB, CM)(AB, MD) = (AB, CD)$.

*Указание.* Используйте формулу (1.34).

1.23. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Построить точку $M(-2, 1, -1)_R$.

*Решение.*

Изобразим точки репера $R$ и точки $E_1, E_2, E_3$. Рассмотрим проекции точки $M$ из центров $A_1, A_2, A_3$ и определим их координаты в соответствующих реперах координатных прямых (теорема 4 § 1.8.:

$$M_1(1,-1)_{R_1};\quad M_2(-2,-1)_{R_2};\quad M_3(-2,1)_{R_3}.$$

Выберем из них две точки, которые легче строить, например, $M_1$ и $M_3$.

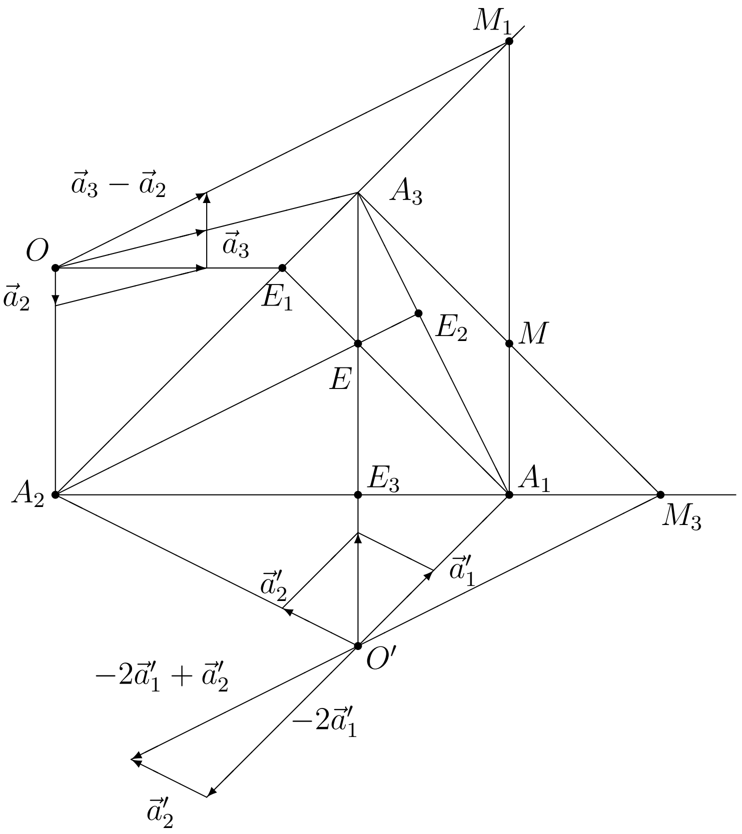


Рис.1.44

1) Рассмотрим расширенную прямую $(A_2A_3)$ (Рис.1.44) и построим на ней точку $M_1(1,-1)$. Возьмем точку $O$, не принадлежащую этой прямой и построим базис $(\vec{a}_2, \vec{a}_3)$, порождающий репер $R_1 = (A_2, A_3, E_1)$ (пункт 2. § 1.11.). Так как координаты точки определены с точностью до постоянного множителя, возьмем у точки $M_1$ координаты $(-1, 1)$. Тогда рисунок получится более компактным. Строим вектор $-1 \cdot \vec{a}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3$ и проводим через точку $O$ прямую, параллельную этому вектору. Она пересечет прямую $(A_2A_3)$ в точке $M_1$.

2) Построение точки $M_3(-2,1)_{R_3}$ на прямой $(A_1A_2)$ проводится аналогичным образом. Возьмем произвольную точку, которую обозначим $O'$ и построим базис $(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2)$, порождающий репер $R_3$. Тогда точкой $M_3$ будет точка пересечения прямой $(A_1A_2)$ и прямой, проходящей через точку $O'$ параллельно вектору $-2\cdot\vec{a}'_1 + \vec{a}'_2$.

3) Искомая точка $M = (A_1M_1) \cap (A_3M_3)$.

1.24. На расширенной плоскости дан проективный репер $R = (A_1^\infty, A_2, A_3, E^\infty)$. Написать общее уравнение и построить прямую, проходящую через точки $M(-2,1,-1)_R$ и $N(1,2,-1)_R$.

*Решение.*

Подставим координаты точек $M$ и $N$ в уравнение ((1.26) § 1.9.:

$$\begin{vmatrix} x_1 & -2 & 1 \\ x_2 & 1 & 2 \\ x_3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0.$$

Чтобы построить прямую $(MN)$, можно построить точки $M$ и $N$, а можно найти на этой прямой точки, которые строить проще. Это точки пересечения прямой $(MN)$ с координатными прямыми репера $R$.

Найдем координаты точек пересечения прямой $(MN)$ и координатных прямых. Воспользуемся примером 1.9. Тогда координаты точки пересечения прямых $(MN)$ и $(A_1A_2)$ являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Откуда координаты точки пересечения $(MN)$ и $(A_1A_2)$ суть $(3, 1, 0)$. Обозначим эту точку $X$.

Аналогично находим, что координаты точки пересечения $(MN)$ с $(A_1A_3)$ – $(5, 0, 1)$. Обозначим эту точку $Y$.

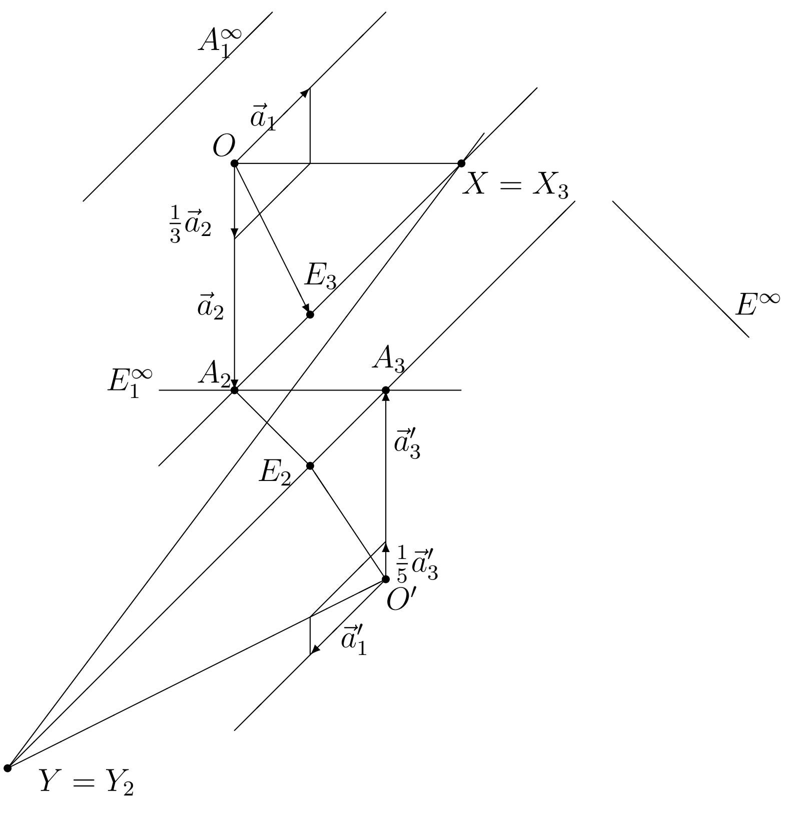



Рис.1.45

Заметим, что согласно теореме 3 § 1.8. точка $X$ лежит на координатной прямой $(A_1A_2)$ и совпадает со своей проекцией $X_3(3, 1)_{R_3}$. Аналогично точка $Y$ совпадает со своей проекцией $Y_2(5, 1)_{R_2}$ на координатную прямую $(A_1A_3)$. Строим точки $X, Y$ аналогично задаче 1.23. Чтобы рисунок располагался компактнее, у точки $X$ в качестве координат возьмем числа $(1, \frac{1}{3})$, а у точки $Y$ – числа $(1, \frac{1}{5})$. Отметим, что при изображении проективного репера мы воспользовались замечанием 1 § 1.4..

Соединяя точки $X$ и $Y$, получим искомую прямую (Рис.1.45).

1.25. Показать, что проективное преобразование $f : \mathscr{P}(O) \to \mathscr{P}(O)$ пучка $\mathscr{P}(O)$ может быть представлено в виде композиции не более трех перспективных отображений пучка в пучок.

*Указание.* Примените принцип двойственности к теореме 4 § 1.13..

1.26. На расширенной плоскости параболическая гомология задана центром $S$, осью $\bar{s}$ и парой соответствующих точек $A$ и $A'$. На данной расширенной прямой $\bar{p}$ найти точку $X$, образ $X' = f(X)$ которой лежит на данной расширенной прямой $\bar{q}$, отличной от расширенной прямой $\bar{p}' = f(\bar{p})$.

*Решение.*

Так как образ $X' = f(X)$ точки $X'$ лежит на образе $\bar{p}' = f(\bar{p})$ прямой $\bar{p}$ и на прямой $\bar{q}$, точка $X'$ будет точкой пересечения прямых $\bar{p}'$ и $\bar{q}$. Тогда точку $X$ можно найти как прообраз точки $X'$.

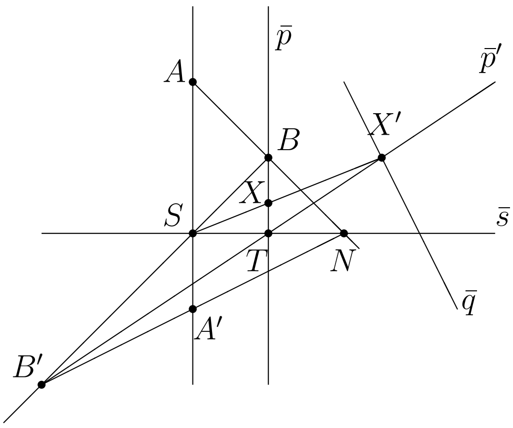



Рис.1.46

Заметим, что точка пересечения $T$ прямых $\bar{p}$ и $\bar{s}$ является инвариантной точкой гомологии $f$, так как лежит на оси гомологии (Рис.1.46). Чтобы найти образ прямой $\bar{p}$ при гомологии $f$, нужно найти образ какой-либо точки прямой $\bar{p}$, отличной от точки $T$. Возьмем точку $B$ на прямой $\bar{p}$. Ее образ – точка $B'$ – будет лежать, во-первых, на прямой $(SB)$ и, во-вторых, на прямой $(A'N)$, где точка $N$ – точка пересечения прямой $(AB)$ и оси гомологии $\bar{s}$ (следствие 1 и следствие 2 § 1.17.).

Далее, находим точку пересечения прямых $\bar{p}'$ и $\bar{q}$. Это точка $X'$. Чтобы построить точку $X$, заметим, что она лежит на прямой $\bar{p}$ и на прямой $(SX')$, а значит, является их точкой пересечения.

1.27. На расширенной плоскости гиперболическая гомология $f$ задана центром $S$, парой соответствующих точек $A$, $A'$ и парой соответствующих расширенных прямых $\bar{a}$ и $\bar{a}'$. Построить образ и прообраз данной точки $M$ при данной гомологии.

*Указание.* Через точку $S$ проведите произвольную прямую, отличную от прямой $(AA')$ и рассмотрите точки пересечения этой прямой с прямыми $\bar{a}$ и $\bar{a}'$.

1.28. На расширенной плоскости даны расширенная прямая $\bar{a}$ и точка $S$, не принадлежащая ей. Построить прямую $s$ так, чтобы при параболической гомологии с центром $S$ и осью $s$, прямая $\bar{a}$ была образом несобственной прямой. Найти образ произвольной точки $M$ при этой гомологии.

*Указание.* Проведите через точку $S$ произвольную прямую $s$ и предположите, что она является осью гомологии. При каком взаимном расположении прямых $s$ и $\bar{a}$ будет выполнено требование задачи?

1.29. На расширенной плоскости дана гиперболическая гомология $f$ с собственным центром $S$, несобственной осью $s^\infty$ и парой соответствующих точек $A$ и $A'$. Доказать, что сужение $f$ на аффинную плоскость является гомотетией с центром в точке $S$.

*Указание.* Так как ось гомологии является прямой инвариантных точек, сужение гомологии $f$ на аффинную плоскость определено корректно. Рассмотрите произвольную точку $M$, постройте ее образ и используйте определение гомотетии.

1.30. На расширенной плоскости дана параболическая гомология $f$ с несобственным центром $S^\infty$ и несобственной осью $s^\infty$. Доказать, что сужение $f$ на аффинную плоскость будет параллельным переносом.

1.31. Доказать, что нетождественное проективное преобразование $f$ проективной плоскости $\sigma$ является гомологией тогда и только тогда, когда оно имеет хотя бы три инвариантные точки, не лежащие на одной прямой.

*Решение.* Пусть проективное преобразование $f$ является гомологией. Тогда согласно теореме 1 § 1.17. все точки оси гомологии $f$ являются инвариантными, а значит, существует по крайней мере три инвариантные точки, лежащие на одной прямой.

Обратно, пусть $f$ – нетождественное проективное преобразование плоскости $\sigma$, имеющее хотя бы три инвариантные точки, лежащие на одной проективной прямой. Обозначим эту прямую через $s$.

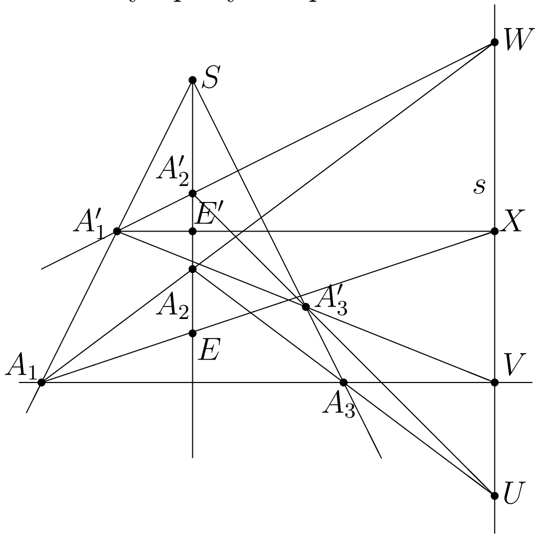



Рис.1.47

В силу теоремы 1 § 1.15. прямая $s$ является инвариантной прямой преобразования $f$ (Рис.1.47). В силу следствия 1 § 1.13. сужение преобразования $f$ на прямую $s$ будет тождественным преобразованием. Следовательно, все точки прямой $s$ будут инвариантными точками преобразования $f$. Выберем на прямой $s$ три точки $W$, $V$ и $U$ так, чтобы существовали неинвариантные прямые преобразования $f$, проходящие через них. Пусть $A_1$ и $A_2$ – точки плоскости $\sigma$, такие что они прямая $(A_1A_2)$ проходит через точку $W$ и ее образ – прямая $(A_1'A_2')$ – не совпадает с прямой $(A_1A_2)$.

Обозначим

$$A_3 = (A_1V) \cap (A_2U); \quad A_3' = (A_1'V) \cap (A_2'U).$$

Докажите самостоятельно, что $A_3' = f(A_3)$. Согласно теореме Дезарга (теорема 1 § 1.5.) трехвершинники $A_1A_2A_3$ и $A_1'A_2'A_3'$ имеют центр перспективы, который мы обозначим через $S$.

Пусть $E$ – точка на проективной прямой $(SA_2)$, отличная от точек $S$, $A_2$, $A_2'$. Обозначим ее образ при отображении $f$ через $E'$, а точку пересечения прямой $(A_1E)$ с прямой

$s$ – через $X$. Так как прямая $(A_1X)$ при преобразовании $f$ переходит в прямую $(A_1'X)$, точка $E'$ принадлежит прямой $(A_1'X)$. С другой стороны, трехвершинники $A_1EA_3$ и $A_1'E'A_3'$ перспективны (имеют ось перспективы $s$), следовательно, прямая $(EE')$ проходит через точку пересечения прямых $(A_1A_1')$ и $(A_3A_3')$, то есть через точку $S$.

Итак, проективное преобразование $f$ может быть задано парой проективных реперов $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ и $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$, которые удовлетворяют определению гомологии, то есть $f$ является гомологией.

1.32. Доказать, что любая инвариантная прямая гомологии является осью гомологии или проходит через центр гомологии.

1.33. Доказать, что диагональные точки полного четырехвершинника не лежат на одной проективной прямой.

*Указание.* Пусть дан полный четырехвершинник $ABCD$. Рассмотрите проективный репер $R = (A, B, C, D)$ и вычислите координаты диагональных точек $P, Q, R$.

1.34. На расширенной плоскости дана расширенная прямая $\bar{d}$ и три различные точки $P, Q, M$ на ней. Построить точку $X$, такую что $(PQ, MX) = -1$.

*Решение.*

Рассмотрим два способа решения данной задачи. Первый способ допускает использование циркуля и линейки при построении точки $X$.

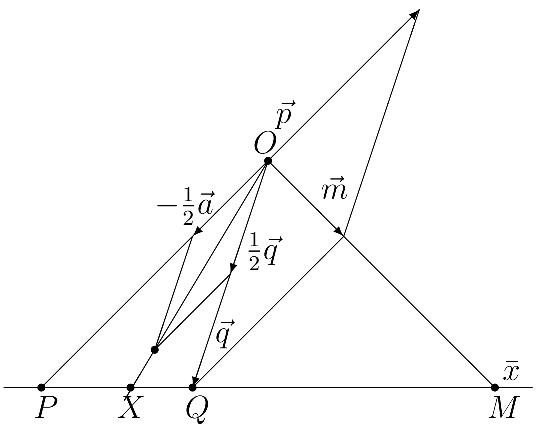



Рис.1.48

Рассмотрим проективный репер $R = (P, Q, M)$ (Рис.1.48) и обозначим координаты точки $X(x_1, x_2)$ в этом репере. По определению сложного отношения четырех точек (§ 1.11.) имеем

$$\frac{x_1}{x_2} = -1,$$

то есть $x_1 = -x_2$. Так как координаты точек в проективном репере определены с точностью до постоянного множителя, в качестве координат точки $X$ можно взять числа $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Строим точку $X$ по ее координатам в репере $R$ (пункт 2. § 1.11.).

Рассмотрим второй способ решения задачи. Он позволяет построить точку $X$, используя только линейку.

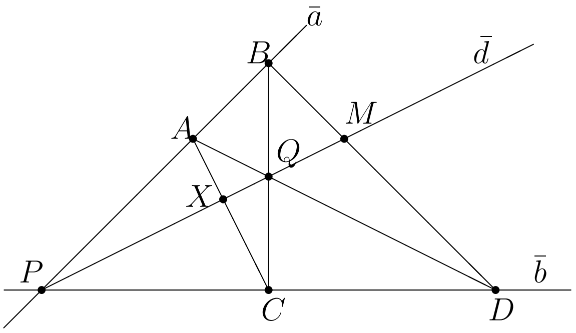


Рис.1.49

Достроим данные точки до полного четырехвершинника (Рис.1.49), считая точки $P$ и $Q$ его диагональными точками, а точку $M$ – точкой пересечения одной из сторон, проходящей через третью диагональную точку, с расширенной прямой $(PQ)$. Для этого проведем через точку $P$ две произвольные прямые $\bar{a}$ и $\bar{b}$. На прямой $\bar{a}$ возьмем произвольную точку $A$.

Тогда

$$(AQ) \cap \bar{b} = D; \quad (DM) \cap \bar{a} = B; \quad (BQ) \cap \bar{b} = C; \quad (AC) \cap \bar{d} = X.$$

Точка $X$ является искомой согласно теореме 1 § 1.18.. Итак, искомая точка $X$ построена с использованием только одной линейки.

1.35. На аффинной плоскости дан отрезок $KQ$, его середина $K$ и точка $P$, не принадлежащая прямой $KQ$. Провести прямую $\ell$, параллельную прямой $PQ$, используя только линейку.

1.36. Доказать, что любая проективная прямая проективной плоскости, не содержащая ни одной вершины полного четырехвершинника, пересекает его противоположные стороны в соответствующих точках инволюции.

*Решение.*

Рассмотрим полный четырехвершинник $ABCD$.

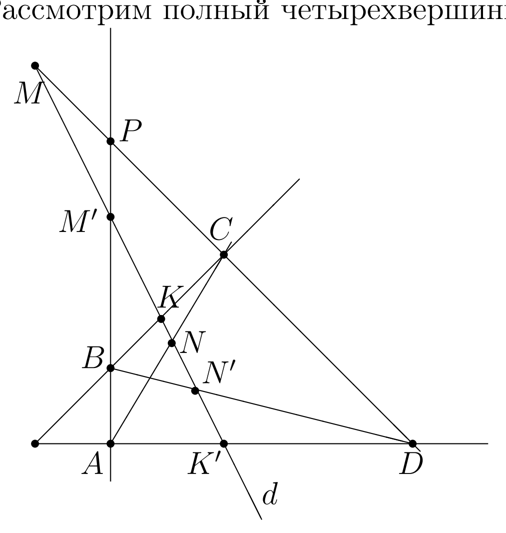


Рис.1.50

Пусть дана проективная прямая $d$ и стороны четырехвершинника $ABCD$ пересекают ее в точках $M$, $M'$, $N$, $N'$, $K$, $K'$ как показано на Рис.1.50. Зададим проективное преобразование $f$ прямой $d$ парой реперов $R = (M, N, K)$ и $R' = (M', N', K')$. Докажем, что $f$ является инволюцией. Спроектируем точки $A$, $B$, $P$, $M'$ из точки $C$ на прямую $d$, а затем спроектируем эти же точки из точки $D$ на прямую $d$. Так как при проектировании сохраняется сложное отношение четырех точек, получим

$$(AB, PM') = (NK, MM'); \quad (AB, PM') = (K'N', MM').$$

Из этого следует, что $(NK, MM') = (N'K', M'M)$. Предположим, что преобразование $f$ переводит точку $M'$ в некоторую точку $M''$. Так как $f$ сохраняет сложное отношение четырех точек, получим $(NK, MM') = (N'K', M'M'')$. Тогда $(N'K', M'M'') =$

$(N'K', M'M)$ и точки $M$ и $M''$ совпадают в силу теоремы 1 § 1.11.. Таким образом, преобразование $f$ является инволюцией согласно теореме 1 § 1.19..

1.37. На расширенной плоскости дана овальная линия $\gamma$ и расширенная прямая $\bar{d}$. Построить полюс прямой $d$ относительно линии $\gamma$.

*Указание.* Воспользуйтесь теоремой о взаимности поляритета.

1.38. Пусть на проективной плоскости дана овальная линия $\gamma$. Доказать, что любое проективное преобразование, переводящее линию $\gamma$ в себя, переводит любой автополярный трехвершинник второго рода линии $\gamma$ в автополярный трехвершинник второго рода линии $\gamma$.

1.39. На аффинной плоскости дан эллипс $\tilde{\gamma}$ (гипербола, парабола) и точка $A$, не принадлежащая ему. Построить касательные к эллипсу (гиперболе, параболе) $\tilde{\gamma}$, проходящие через точку $A$.

1.40. На аффинной плоскости дан эллипс $\gamma$ (гипербола, парабола) и точка $A$, принадлежащая ему. Построить касательную к эллипсу $\tilde{\gamma}$ (гиперболе, параболе) в точке $A$. *Решение.* Пусть дан эллипс $\gamma$ на аффинной плоскости. Перейдем к расширенной плоскости. На ней множество точек $\gamma$ является овальной линией. Нужно провести касательную к этой овальной линии в точке $A$.

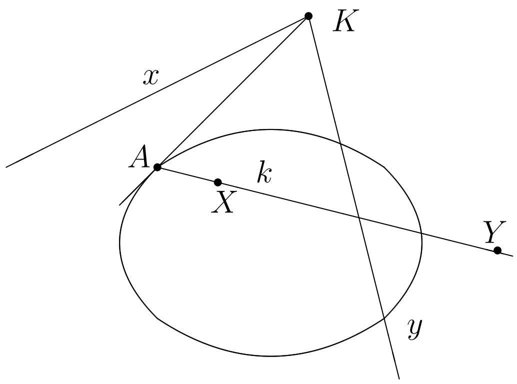


Рис.1.51

Через точку $A$ проведем произвольную прямую $k$ (Рис.1.51). Обозначим через $K$ полюс прямой $k$. По теореме 4 § 1.23. о взаимности поляритета точка $A$ принадлежит прямой $k$ тогда и только тогда, когда точка $K$ принадлежит поляре $a$ точки $A$, то есть касательной к $\gamma$ в точке $A$. Тогда касательная $a$ в точке $A$ совпадает с прямой $(AK)$. Чтобы построить полюс прямой $k$ опять воспользуемся теоремой 4 § 1.23. о взаимности поляритета. Возьмем на прямой $k$ две произвольные точки $X$ и $Y$ и построим их поляры $x$ и $y$.

Тогда точкой $K$ будет точка пересечения прямых $x$ и $y$.

1.41. Найти уравнение касательной, проведенной из точки $A(3, -2, 2)$ к овальной линии $\gamma$, заданной уравнением $3(x_1)^2 + (x_2)^2 - 5(x_3)^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.
*Решение.*

Подставляя координаты точки $A$ в уравнение линии $\gamma$, убеждаемся, что она не принадлежит линии $\gamma$. Обозначим точку касания $T(p_1, p_2, p_3)$. Тогда уравнение касательной $t$ к линии $\gamma$ будет иметь вид (формула (1.62):

$$t : (3p_1 + p_2 + p_3)x_1 + (p_1 + p_2 - 2p_3)x_2 + (p_1 - 2p_2 - 5p_3)x_3 = 0.$$

Так как точка $A(3,-2,2)$ принадлежит прямой $t$, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой $t$. С другой стороны, координаты точки $T$ удовлетворяют уравнению линии $\gamma$. Тогда координаты точки $T$ являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} 3p_1 - p_2 - p_3 = 0 \\ 3(p_1)^2 + (p_2)^2 - 5(p_3)^2 + 2p_1p_2 + 2p_1p_3 - 4p_2p_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, имеем

$$\begin{cases} p_2 = 3p_1 - p_3 \\ p_1(p_1 - p_3) = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем две точки касания $T_1(0,1,-1)$ и $T_2(1,3,0)$. Подставляя эти координаты этих точек в уравнение касательной $t$, получаем уравнения двух касательных к $\gamma$, проходящих через точку $A$:

$$t_1 : x_2 + x_3 = 0; \quad t_2 : 6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0.$$

Ответ: $x_2 + x_3 = 0$, $6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$.

1.42. На расширенной плоскости дана овальная линия. Построить автополярный трехвершинник первого рода (§ 1.20.).

1.43. Пусть овальная линия $\gamma$ относительно проективного репера $R$ имеет уравнение $x_1x_2 - (x_3)^2 = 0$. Доказать, что точка $A(a_1,a_2,a_3)_R$, не принадлежащая овальной линии $\gamma$, является внешней точкой $\gamma$ тогда и только тогда, когда $(a_3)^2 - a_1a_2 > 0$. Доказать, что точка $A(a_1,a_2,a_3)_R$, не принадлежащая овальной линии $\gamma$, является внутренней точкой $\gamma$ тогда и только тогда, когда $(a_3)^2 - a_1a_2 < 0$.

1.44. На аффинной плоскости даны асимптоты гиперболы и ее точка. Используя теорему Штейнера, построить касательную к гиперболе в данной точке и несколько точек гиперболы.

*Решение.*

Пусть дана точка $C$ гиперболы $\tilde{\gamma}$ пара ее асимптот $a$ и $b$. Так как асимптоты гиперболы пересекаются в ее центре $O$, точка $D$, симметричная точке $C$ относительно точки $O$, также принадлежит гиперболе $\tilde{\gamma}$.

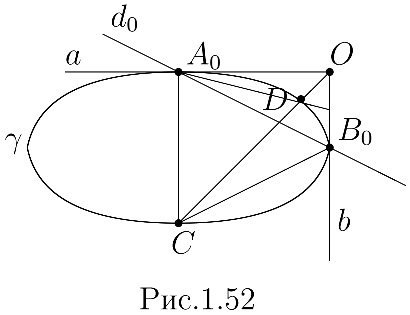


Рис.1.52

Рассмотрим модель аффинной плоскости (Рис.1.52). Гипербола $\tilde{\gamma}$ моделируется овальной линией $\gamma$, которая пересекает фиксированную прямую $d_0$ в двух точках $A_0$ и $B_0$. Асимптоты гиперболы моделируются касательными к линии $\gamma$ в точках $A_0$ и $B_0$ соответственно.

Зададим проективное отображение пучков $f : \mathscr{P}(A_0) \to \mathscr{P}(C)$ тремя парами соответствующих прямых

$$a \to (CA_0); \quad d_0 \to (CB_0); \quad (A_0D) \to (CD).$$

Тогда касательной в точке $C$ является образ прямой $(A_0C)$ при отображении $f$ (следствие 1 § 1.24.).

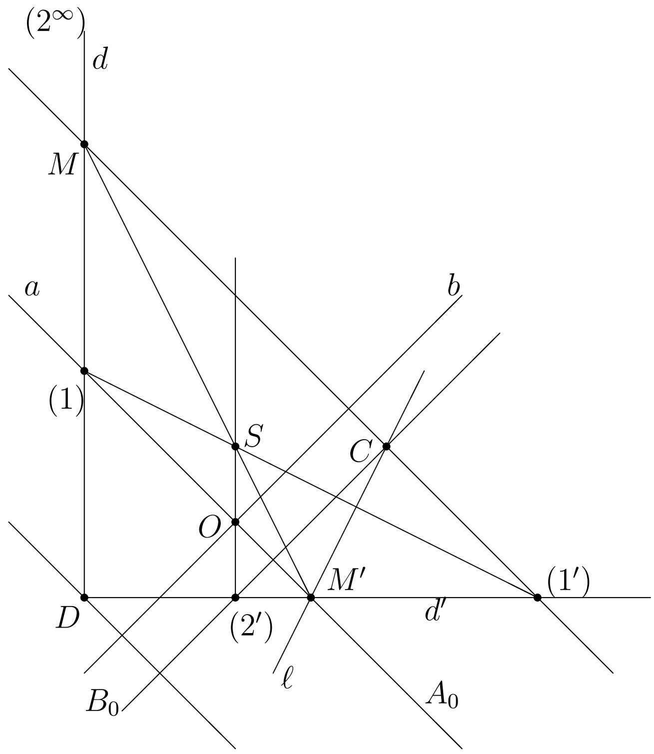



Рис.1.53

Так как гипербола $\tilde{\gamma}$ дана на аффинной плоскости, в качестве прямой $d_0$ здесь будет несобственная прямая, добавляемая к аффинной плоскости при построении расширенной плоскости. Проведем построение на такой расширенной плоскости (Рис.1.53). Сначала строим на прямой $(OC)$ точку $D$, такую что $OD = OC$. Далее воспользуемся алгоритмом построения образа прямой при проективном отображении пучка на пучок (§ 1.14., для построения прямых, проходящих через несобственную точку воспользуемся алгоритмом описанном в замечании 1 § 1.4.). Через точку $D$ пересечения соответствующих прямых $(A_0D)$ и $(CD)$ проведем две произвольные вспомогательные прямые $d$ и $d'$.

Тогда

$$d \cap a = (1); \quad d \cap d_0 = (2^\infty); \quad d' \cap (CA_0) = (1'); \quad d' \cap (CB_0) = (2')$$

и центр $S$ вспомогательного пучка находится так

$$S = ((1)(1')) \cap ((2^\infty)(2')).$$

Строим образ прямой $(A_0C)$:

$$M = (A_0C) \cap d; \quad (SM) \cap d' = M'; \quad (CM') = \ell.$$

Итак, прямая $\ell$ будет искомой касательной в точке $C$.

Чтобы построить точки гиперболы, нужно взять произвольную прямую $m$ из пучка $\mathscr{P}(A_0)$, найти ее образ $m'$ и построить точку пересечения $M$ прямых $m$ и $m'$. Это будет искомая точка гиперболы.

1.45. Используя модель аффинной плоскости, доказать, что парабола не имеет центра.

1.46. Используя модель аффинной плоскости, доказать, что парабола имеет единственное асимптотическое направление и не имеет асимптот.

1.47. Используя модель аффинной плоскости доказать, что парабола не имеет параллельных касательных.

1.48. Используя модель аффинной плоскости доказать, что все диаметры эллипса (диаметры и асимптоты гиперболы) образуют пучок прямых с центром в центре эллипса (гиперболы).

1.49. Используя модель аффинной плоскости доказать, что все диаметры параболы образуют пучок параллельных прямых асимптотического направления.

1.50. Выяснить, какими проективными прямыми моделируются сопряженные диаметры эллипса и гиперболы.

1.51. Доказать, что на комплексификации проективной плоскости (§ 1.26.) существует бесконечно много декартовых реперов.

*Указания.* Запишите формулы преобразования координат на проективной плоскости и найдите условия на коэффициенты в этих формулах, при которых они являются формулами перехода от декартова репера к декартову.

1.52. На модели евклидовой плоскости даны прямая $\tilde{a}$ и точка $A$, не принадлежащая этой прямой. Построить прямую $\tilde{b}$, проходящую через точку $A$ перпендикулярно прямой $\tilde{a}$.

*Решение.*

В качестве проективной плоскости $\sigma$ возьмем расширенную плоскость. Фиксируем на ней произвольную прямую $d_0$.

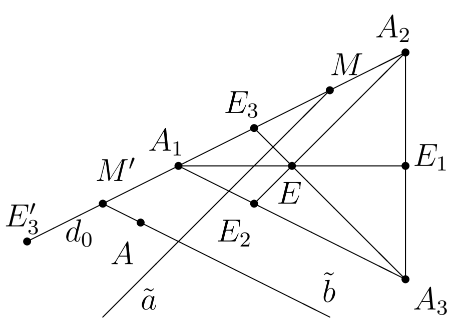


Рис.1.54

Чтобы построить комплексификацию $\sigma^{\mathbb{C}}$ проективной плоскости, нужно фиксировать репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ (Рис.1.54), где точки $A_1$ и $A_2$ принадлежат прямой $d_0$. Это декартов репер. Далее, зададим эллиптическую инволюцию $g$ на прямой $d_0$. Так как циклические точки являются мнимыми, изобразить их на рисунке невозможно.

Поэтому воспользуемся формулами этой инволюции в репере $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$ (формулы (1.86)) и найдем три пары соответствующих точек. Так как в репере $R_3$ точки $A_1$ и $A_2$ имеют координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно, то они соответствуют друг другу в инволюции $g$. Образом точки $E_3$ будет точка $E_3'(1,-1)$. Строим точку $E_3'$, используя алгоритм пункта 2. § 1.11.. Таким образом, инволюция $g$ задается тремя парами соответствующих точек

$$A_1 \to A_2; \quad A_2 \to A_1; \quad E_3 \to E_3'.$$

Обозначим через $M$ точку пересечения проективной прямой $a$, моделирующей данную прямую $\tilde{a}$, и прямой $d_0$. Чтобы построить проективную прямую $b$, моделирующую искомую прямую $\tilde{b}$, нужно построить ее несобственную точку $M'$. Согласно теореме 2 § 1.26. точка $M'$ будет соответствовать точке $M$ в инволюции $g$. Так как инволюция является частным случаем преобразования проективной прямой, строим точку $M'$, используя теорему 4 § 1.13. Тогда проективная прямая $(AM')$ моделирует искомую прямую $\tilde{b}$.

1.53. На модели евклидовой плоскости дан декартов репер $R = (A_1, A_2, A_3, E)$. Доказать, что четырехугольник $A_3E_1EE_2$ будет квадратом.

*Указание.* Покажите, что точки $E_3', E_1, E_2$ (задача 1.52) лежат на одной прямой.

1.54. Изобразить на модели евклидовой плоскости прямоугольный треугольник, прямоугольник, квадрат, ромб.

1.55. На модели евклидовой плоскости даны две точки, моделирующие центр и одну из точек окружности. Построить несколько точек этой окружности.

*Указание.* Постройте диаметрально противоположную точку для данной точки окружности, используя то, что центр является серединой диаметра. Далее, постройте несколько точек окружности, используя то, что угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, является прямым.