ГЛАВА 1. Векторная алгебра.

§1.1. Направленные отрезки и векторы.

Рассмотрим евклидово пространство. Пусть прямые (AB) и (CD) параллельны. Тогда лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются *одинаково направленными* (соответственно *противоположно направленными*), если они лежат в одной полуплоскости (соответственно в разных полуплоскостях) с границей (AC). Если лучи $[AB)$ и $[CD)$ лежат на одной прямой, то они будут называться *одинаково направленными*, если один из них содержит другой, и *противоположно направленными* в противном случае. Будем обозначать одинаково направленные лучи $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$, а противоположно направленные обозначим $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$.

Множество всех лучей пространства, любые два из которых сонаправлены, называется *направлением.* Чтобы задать направление, достаточно указать один луч, принадлежащий этому направлению.

Отрезок AB называется *направленным*, если указаны его начало A и конец B. Направленные отрезки будем обозначать $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. *Длиной* направленного отрезка $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB, а *направлением* – направление луча $[AB)$.

Будем говорить, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ *одинаково направлены или сонаправлены*, если одинаково направлены лучи $[AB)$ и $[CD)$; и *противоположно направлены*, если противоположно направлены лучи $[AB)$ и $[CD)$.

Пример 1.1.

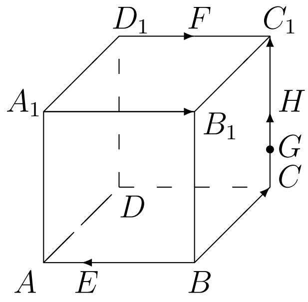


Рис.1.1

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (Рис.1.1). Сонаправленные направленные отрезки: $\overline{D_1F}$ и $\overline{A_1B_1}$; $\overline{CC_1}$ и $\overline{GH}$. Противоположно направленные направленные отрезки: $\overline{BE}$ и $\overline{A_1B_1}$; $\overline{D_1F}$ и $\overline{BE}$. Направленные отрезки, которые не являются ни сонаправленными, ни противоположно направленными: $\overline{BE}$ и $\overline{BC}$; $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{GH}$. ■

Две совпавшие точки будем называть *нулевым направленным отрезком* и обозначать $\overline{MM} = \bar{0}$. По определению будем считать длину нулевого направленного отрезка равной нулю. Направление нулевого направленного отрезка не определено.

Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *эквиполентными*, если они сонаправлены и имеют равные длины. Обозначение $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD}$.

Легко доказать, что отношение эквиполентности обладает следующими свойствами:
1^0. Направленный отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен самому себе (рефлексивность).
2^0. Если направленный отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{CD}$, то направленный отрезок $\overline{CD}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{AB}$ (симметричность).
3^0. Если направленный отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{CD}$ и направленный отрезок $\overline{CD}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{PQ}$, то направленный отрезок

$\overline{AB}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{PQ}$ (транзитивность).

Вектором называется множество всех направленных отрезков, любые два из которых эквиполентны. Каждый направленный отрезок этого множества называется *представителем* вектора. Будем обозначать векторы $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. *Длиной* (соответственно, *направлением*) вектора называется длина (соответственно, направление) любого его представителя. Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$.

Определение длины и направления вектора корректно. В самом деле, все направленные отрезки, принадлежащие одному вектору имеют равные длины и сонаправлены. Итак, каждый вектор однозначно характеризуется своими длиной и направлением.

Множество всех нулевых направленных отрезков называется *нуль-вектором* и обозначается $\vec{0}$. Длина нуль-вектора равна нулю, а направление не определено.

Будем обозначать множество всех векторов V^3.

Лемма 1.1. *Для любого ненулевого направленного отрезка $\overline{AB}$ и любой точки O существует единственная точка C, для которой направленные отрезки $\overline{OC}$ и $\overline{AB}$ эквиполентны.*

□ Рассмотрим два случая расположения точки O и прямой (AB).

1. Пусть $O \notin (AB)$. Докажем сначала, что точка C существует. Для этого нам нужно указать способ ее построения. Нам даны точки O, A, B.

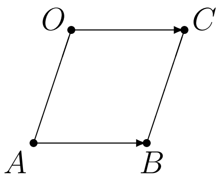


Рис.1.2

Проведем через точку O прямую, параллельную прямой (AB) (Рис.1.2), а через точку B – прямую параллельную прямой (AO). Эти прямые пересекутся в точке C. Убедимся, что она искомая. Для этого нужно доказать, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{OC}$ эквиполентны, то есть имеют равные длины и одинаковые направления. Действительно, так как $ABCO$ – параллелограмм, отрезки AB и OC равны и параллельны. Кроме того, лучи $[AB)$ и $[OC)$ лежат в одной полуплоскости с границей (AO). Тогда по определениям сонаправленных направленных отрезков и эквиполентных направленных отрезков получаем, что направленные отрезки $\overline{OC}$ и $\overline{AB}$ эквиполентны, а значит, точка C – искомая.

Докажем единственность точки C. Пусть существует еще одна точка D, такая что направленные отрезки $\overline{OD}$ и $\overline{AB}$ эквиполентны. Тогда из свойств симметричности и транзитивности отношения эквиполентности следует, что направленные отрезки $\overline{OD}$ и $\overline{OC}$ эквиполентны. В частности, из определения эквиполентных направленных отрезков следует, что направленные отрезки $\overline{OD}$ и $\overline{OC}$ сонаправлены, а значит, должны быть либо параллельны, либо лежать на одной прямой (по определению сонаправленных направленных отрезков). Так как они имеют общую точку O, то параллельными быть не могут, а значит, точки O, C, D лежат на одной прямой и точки C, D лежат по одну сторону от точки O. Кроме того, из определения эквиполентных направленных отрезков следует, что направленные отрезки $\overline{OD}$ и $\overline{OC}$ имеют равные длины, а значит, точки C и D совпадают.

2. Пусть $O \in (AB)$. Возьмем точку O_1, не принадлежащую прямой (AB). Для точки O_1 существует точка C_1, такая что направленные отрезки $\overline{O_1C_1}$ и $\overline{AB}$ эквиполентны (по доказанному в пункте 1). Для направленного отрезка $\overline{O_1C_1}$ и точки O (также по пункту 1) существует точка C, такая что направленные отрезки $\overline{O_1C_1}$ и $\overline{OC}$ эквиполентны. Тогда по свойствам отношения эквиполентности получим, что эквиполентны направленные отрезки $\overline{OC}$ и $\overline{AB}$. Единственность доказывается аналогично пункту 1. ■

Замечание 1.1. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$ и произвольный его представитель $\overline{AB}$. Будем говорить, что *представитель* $\overline{AB}$ *вектора* $\vec{a}$ *отложен от точки* A. Из доказанной леммы следует, что для задания вектора достаточно указать один его представитель в какой-нибудь точке пространства. Тогда в любой другой точке пространства мы сможем однозначно построить представитель данного вектора.

Два вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ называются *одинаково направленными или сонаправленными* (соответственно, *противоположно направленными*), если сонаправлены (соответственно, противоположно направлены) их представители. Обозначение $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ соответственно. Положим по определению, что нуль-вектор сонаправлен с любым вектором.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем называть *коллинеарными*, если они либо сонаправлены, либо противоположно направлены. Обозначение $\vec{a}||\vec{b}$. По определениям сонаправленности для векторов и направленных отрезков получим, что два ненулевых вектора являются коллинеарными тогда и только тогда, когда у них существуют параллельные представители.

Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ является представителем ненулевого вектора $\vec{a}$. Тогда направленный отрезок $\overline{BA}$ задает вектор, который мы будем называть *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначать $-\vec{a}$. Другими словами, вектор называется противоположным вектору $\vec{a}$, если он имеет такую же длину как и вектор $\vec{a}$ и противоположно направлен с ним. Если мы построим противоположный к противоположному вектору вектора $\vec{a}$, то получим сам вектор $\vec{a}$, то есть $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

По определению положим, что противоположным нуль-вектору будет нуль-вектор.

Будем говорить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *равны* и писать $\vec{a} = \vec{b}$, если они имеют равные длины и одинаковые направления, то есть эти вектора совпадают как множества направленных отрезков.

§1.2. Сложение и вычитание векторов.

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем произвольную точку A и отложим от нее представитель $\overline{AB}$ вектора $\vec{a}$. От точки B отложим представитель $\overline{BC}$ вектора $\vec{b}$. Направленный отрезок $\overline{AC}$ будет представителем некоторого вектора $\vec{c}$, который называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Докажем корректность определения, то есть его независимость от выбора точки A. Нам нужно доказать,

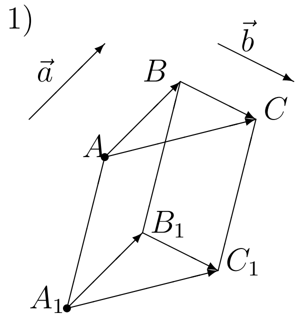


Рис.1.3

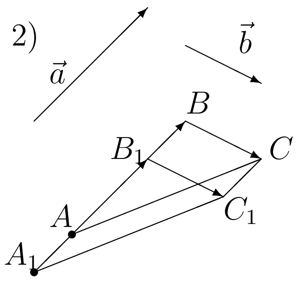


Рис.1.4

что если мы возьмем другую точку A_1 и проведем аналогичные построения, то мы получим представитель $\overline{A_1C_1}$ того же вектора $\vec{c}$. Мы проведем доказательство для случая $A_1 \notin (AB)$ (Рис.1.3), второй случай рассмотрите самостоятельно, используя Рис.1.4.

Так как направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ эквиполентны, четырехугольник ABB_1A_1 является параллелограммом, следовательно, его стороны AA_1 и BB_1 параллельны и равны. Аналогично из эквиполентности направленных отрезков $\overline{BC}$ и $\overline{B_1C_1}$ получаем, что BCC_1B_1 – параллелограмм и его стороны BB_1 и CC_1 параллельны и равны. Тогда параллельны и равны отрезки AC и A_1C_1, следовательно, ACC_1A_1 – параллелограмм (по признаку), а значит, направленные отрезки $\overline{AC}$ и $\overline{A_1C_1}$ эквиполентны, то есть принадлежат одному и тому же вектору $\vec{c}$.

Запишем определение суммы векторов в других обозначениях.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{2.1}$$

В таком виде определение суммы векторов называется *правилом треугольника*. Оно верно для любых точек A, B, C.

Пусть в (2.1) совпадают точки A и C, то есть $A = C$. Тогда (2.1) примет вид $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ или в других обозначениях $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Аналогично, полагая сначала $A = B$, а затем $B = C$, получаем еще два тождества. Итак,

$$1)\, \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}; \quad 2)\, \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}; \quad 3)\, \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}; \tag{2.2}$$

Докажем другие свойства операции сложения векторов.

Теорема 1 § 1.2. *Для любых векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

$\square$

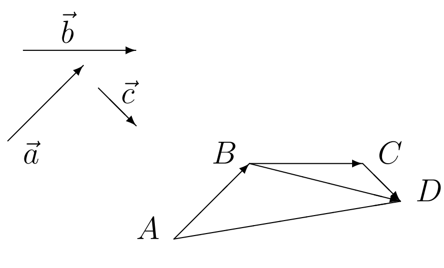


Рис.1.5

Возьмем произвольную точку A (Рис.1.5) и отложим от нее представитель $\overline{AB}$ вектора $\vec{a}$. От точки B отложим представитель $\overline{BC}$ вектора $\vec{b}$. От точки C отложим представитель $\overline{CD}$ вектора $\vec{c}$. Тогда, используя правило треугольника, эти три вектора мы можем сложить двумя разными способами: во-первых, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, а во-вторых,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. Следовательно, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. ■

Теорема 2 § **1.2.** *Для любых векторов* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}.$$

□ 1. Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то теорема верна в силу (2.2).

2. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

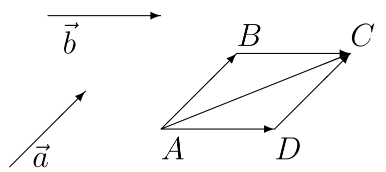


Рис.1.6

Возьмем произвольную точку A (Рис.1.6) и отложим направленные отрезки $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{AD}, \overline{BC} \in \vec{b}$. Тогда $ABCD$ является параллелограммом (по признаку), следовательно, $\overline{DC} \in \vec{a}$. По правилу треугольника, с одной стороны, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, а с другой стороны, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Итак, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

3. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

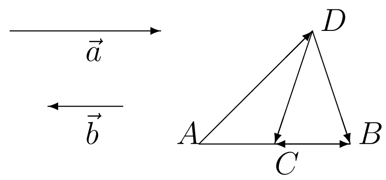


Рис.1.7

Возьмем произвольную точку A (Рис.1.7) и отложим представители векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как показано на рисунке:$\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{BC} \in \vec{b}$. Возьмем произвольную точку $D \notin (AB)$. Тогда, используя доказанный пункт 2, правило треугольника и теорему 1 § 1.2, мы получим цепочку равенств:

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{DB} + \vec{b}) + (\vec{a} + \overrightarrow{BD}) = (\vec{b} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{BD} + \vec{a}) = \vec{b} + (\overrightarrow{DB} + (\overrightarrow{BD} + \vec{a})) = \vec{b} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) + \vec{a} = \vec{b} + (\vec{0} + \vec{a}) = \vec{b} + \vec{a}$. ■

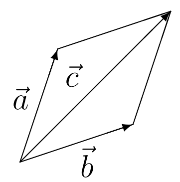


Рис.1.8

В качестве следствия теоремы 2 § 1.2 мы получаем еще одно правило для сложения не коллинеарных векторов (Рис.1.8): $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Оно называется *правилом параллелограмма.*

Следствие 1 § **1.2.** *Если* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *то* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

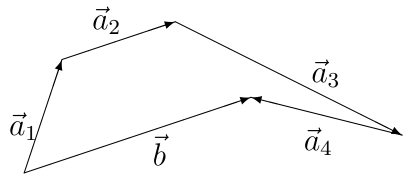
□ Рассмотрим равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и прибавим к обеим его частям вектор $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$. Тогда по правилу треугольника и теореме 2 § 1.2 получим $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. ■

Пусть даны n $(n > 2)$ векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. *Суммой* векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ называется вектор $\vec{b} = (\ldots((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + a_3) + \ldots + \vec{a}_n)$. Другими словами, для нахождения суммы n векторов нужно сначала сложить первые два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по правилу треугольника, затем найти сумму полученного вектора и вектора $\vec{a}_3$ и т. д.

В силу теоремы 1 § 1.2 скобки в определении суммы n векторов можно не писать и обозначать сумму данных векторов $\vec{b} = \vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_n$. В силу теоремы 2 § 1.2 не важен порядок, в котором складываются векторы.

Из правила треугольника легко вытекает правило для сложения n векторов. Оно называется *правилом многоугольника.* Чтобы сложить n векторов нужно от произвольной точки пространства отложить представитель $\overline{a_1}$ первого вектора $\vec{a}_1$ суммы, от его конца – представитель $\overline{a_2}$ второго вектора $\vec{a}_2$ и так далее. Тогда представителем $\bar{b}$ суммы $\vec{a}_1+\ldots+\vec{a}_n$ будет направленный отрезок с началом в начале $\overline{a_1}$ и концом в конце $\overline{a_n}$.

Пример 1.2.



$\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$ (Рис.1.9)

Рис.1.9

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Обозначение $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$. Напомним, что $-\vec{b}$ обозначает вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.

Замечание 1.2.

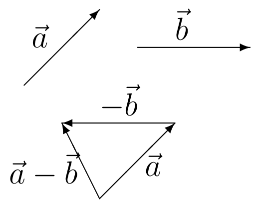


Рис.1.10

1) Из определения разности векторов вытекает правило для построения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (Рис.1.10): чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, нужно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор, противоположный вектору $\vec{b}$ (например, по правилу треугольника).

2) Пусть дано равенство $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$. Прибавим к обеим его частям вектор $-\vec{b}$. Тогда с учетом теоремы 1 § 1.2 получим $\vec{a} + (\vec{b} + (-\vec{b})) = \vec{c} + (-\vec{b})$, то есть $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$. Итак, мы видим, что вектор можно переносить из одной части равенства в другую с противоположным знаком.

§1.3. Произведение вектора на число.

Напомним, что каждый вектор однозначно характеризуется своими длиной и направлением. Значит, для того чтобы задать вектор, нужно указать его длину и направление.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется такой вектор $\vec{b}$, что

1) $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\alpha \geq 0$ и $\vec{b}$ противоположно направлен с вектором $\vec{a}$, если $\alpha < 0$. Обозначение $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Заметим, что первый пункт определения произведения вектора на число задает длину вектора $\vec{b}$, а второй – его направление. Таким образом, вектор $\vec{b}$ является однозначно определенным.

Лемма 3.1. *$\alpha\vec{a} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$.*

□ 1. Пусть $\alpha = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$. Тогда по определению произведения вектора на число вектор $\alpha\vec{a}$ имеет длину $|\alpha||\vec{a}| = 0$, то есть является $\vec{0}$.

2. Обратно, пусть $\alpha\vec{a} = \vec{0}$. Тогда длина вектора $\alpha\vec{a}$ равна 0, то есть $|\alpha||\vec{a}| = 0$. Следовательно, $|\alpha| = 0$ или $|\vec{a}| = 0$. Так как только нуль-вектор имеет длину 0, то получаем $\alpha = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$. ■

Теорема 1 § 1.3. *Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$1)\, 1\vec{a} = \vec{a};\ (-1)\vec{a} = -\vec{a};\quad 2)\, \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a};$$
$$3)\, \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b};\quad 4)\, (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b};$$

Для доказательства теоремы 1 § 1.3 нам нужно вспомнить определение гомотетии.

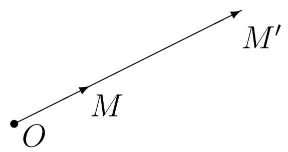


Рис.1.11

Пусть фиксирована точка O и число $m \in \mathbb{R}, m \neq 0$ (Рис.1.11). Будем говорить, что в пространстве задана *гомотетия* с центром в точке O и коэффициентом m, если каждой точке M пространства ставится в соответствие такая точка M', что

$$\overrightarrow{OM'} = m\overrightarrow{OM} \tag{3.1}$$

Замечание 1.3. Применяя определение произведения вектора на число к (3.1), получим $|\overrightarrow{OM'}| = |m||\overrightarrow{OM}|$ или в других обозначениях $OM' = |m|OM$.

Лемма 3.2. *Если гомотетия с центром O и коэффициентом m переводит треугольник OAB в треугольник $OA'B'$, то $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$.*

□

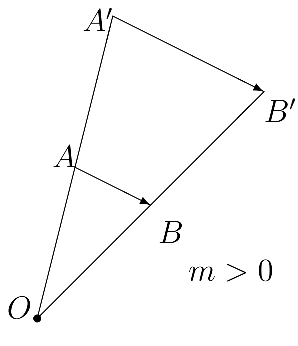


Рис.1.12

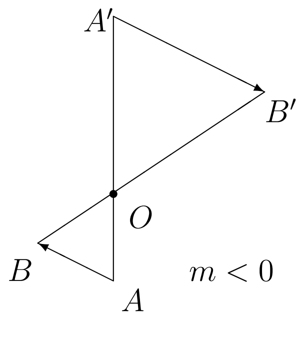


Рис.1.13

Из замечания 1.3 следует, что треугольники OAB и $OA'B'$ подобны с коэффициентом подобия $|m|$. Тогда $A'B' = mAB$. Если $m > 0$ (Рис.1.12), то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ сонаправлены, а значит, по определению произведения вектора на число $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$. Если $m < 0$ (Рис.1.13), то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ противоположно направлены и опять по определению произведения вектора на число получаем $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$. ■

□ Доказательство теоремы 1 § 1.3. 1) Докажем, что $1\vec{a} = \vec{a}$ (второе равенство доказывается аналогично). Обозначим $\vec{b} = 1\vec{a}$. Нужно доказать, что $\vec{b} = \vec{a}$. Напомним: чтобы доказать равенство двух векторов, нужно показать, во-первых, что равны их длины и, во-вторых, что векторы сонаправлены. Имеем, во-первых, по определению произведения вектора на число $|\vec{b}| = |1||\vec{a}| = 1|\vec{a}| = |\vec{a}|$. Во-вторых, так как $1 > 0$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ сонаправлены. Следовательно, $\vec{b} = 1\vec{a}$.

2) Докажем, что $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

Пусть $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$. Тогда равенство верно в силу леммы 3.1.

Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда обозначим $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a})$, $\vec{q} = (\alpha\beta)\vec{a}$. Нам нужно доказать, что $\vec{p} = \vec{q}$.

По определению произведения вектора на число получим $|\vec{p}| = |\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$ и $|\vec{q}| = |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$, следовательно, $|\vec{p}| = |\vec{q}|$.

Чтобы доказать, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сонаправлены, нужно рассмотреть четыре случая для знаков чисел α и β. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta < 0$ (остальные три случая рассматриваются аналогично). По определению произведения вектора на число получим $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то есть $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Аналогично, так как число $\alpha\beta < 0$, получим $\vec{q} = (\alpha\beta)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Итак, $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $\vec{q} \uparrow\downarrow \vec{a}$, а значит, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$.

Мы доказали, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ имеют равные длины и сонаправлены, а значит, равны.

3) Докажем, что $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

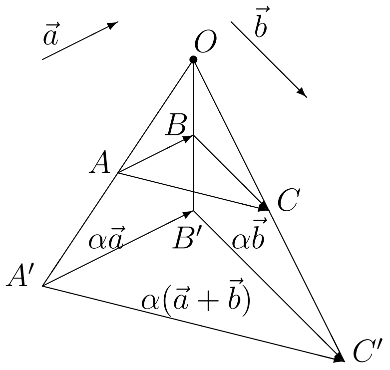


Рис.1.14

Возьмем произвольную точку A (Рис.1.14) и отложим от нее представители $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{BC} \in \vec{b}$. Тогда по правилу треугольника $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Возьмем произвольную точку O, не лежащую на прямых (AB), (BC), (AC) и рассмотрим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом α. При этой гомотетии точки A, B, C перейдут соответственно в точки A', B', C'. Согласно лемме 3.2 получаем $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{AC}$. Тогда по правилу треугольника $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$, то есть $\alpha\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BC}$ или в других обозначениях $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

4) Докажем, что $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. Обозначим $\vec{p} = (\alpha + \beta)\vec{a}$ и $\vec{q} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. Рассмотрим два случая:

а) числа α и β одного знака, то есть $\alpha\beta > 0$.

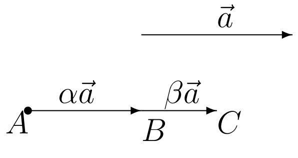


Рис.1.15

Возьмем произвольную точку A и отложим представители векторов $\overline{AB} \in \alpha\vec{a}$, $\overline{BC} \in \beta\vec{a}$ (Рис.1.15). Так как числа α и β одного знака, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, а значит, точка B лежит между точками A и C. Тогда по определению произведения вектора на число и свойства модуля суммы чисел одного знака получим $|(\alpha+\beta)\vec{a}| = |(\alpha+\beta)||\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|)|\vec{a}|$. С другой стороны, так как точка B лежит между точками A и C, $|\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\alpha\vec{a}| + |\beta\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}| + |\beta||\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|)|\vec{a}|$. Таким образом, $|\vec{p}| = |\vec{q}|$.

Проверим сонаправленность векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то $\vec{p} = (\alpha+\beta)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $\vec{q} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, то есть $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Если $\alpha < 0$ и $\beta < 0$, то $\vec{p} = (\alpha+\beta)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $\vec{q} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то есть опять $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Итак, $\vec{p} = \vec{q}$.

б) числа α и β разных знаков, то есть $\alpha\beta < 0$.
Если $\alpha + \beta = 0$, то $(\alpha+\beta)\vec{a} = (\alpha-\alpha)\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{0}$ и $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a} = \alpha\vec{a}+(-\alpha)\vec{a} = \alpha\vec{a}-\alpha\vec{a} = \vec{0}$, то есть $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. Если $\alpha+\beta \neq 0$, то либо числа $-\alpha, \alpha+\beta$, либо числа $-\beta, \alpha+\beta$ имеют одинаковые знаки, а значит, к ним можно применить пункт а). Рассмотрим числа $-\alpha, \alpha+\beta$ (второй случай рассматривается аналогично). Тогда для них по пункту а) и замечанию 1.2 имеем $(-\alpha+\alpha+\beta)\vec{a} = -\alpha\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{a}$, то есть $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. ■

Пример 1.3. Пусть дано равенство $6\vec{a}+3\vec{b} = 9\vec{c}$. Умножим обе части этого равенства на число $\frac{1}{3}$. По теореме 1 § 1.3 получим $(6\cdot\frac{1}{3})\vec{a}+(3\cdot\frac{1}{3})\vec{b} = (9\cdot\frac{1}{3})\vec{c}$, то есть $2\vec{a}+\vec{b} = 3\vec{c}$. В результате мы разделили исходное векторное равенство на 3.

Замечание 1.4. Заметим, что векторное равенство мы можем умножить или разделить (то есть умножить на обратное) на любое ненулевое число. По теореме 1 § 1.3 на это число будут умножаться (соответственно, делиться) коэффициенты перед векторами. Объединяя этот вывод с замечанием 1.2, мы видим, что действия с векторными равенствами аналогичны действиям с линейными уравнениями.

Теорема 2 § 1.3. *Пусть даны произвольные векторы $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует единственное число $\alpha \in \mathbb{R}$, такое что $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.*

□ 1. Пусть $\vec{a} \| \vec{b}$. Нужно доказать, что существует единственное число $\alpha \in \mathbb{R}$, такое что $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Докажем сначала существование числа α. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нам даны, то известны их длины $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$. Из этих чисел мы и будем строить число α. Положим

$$\alpha = \begin{cases} \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, \text{если}\, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, \text{если}\, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \end{cases}$$

Проверим, что при таком α векторы $\vec{b}$ и $\alpha\vec{a}$ равны. Для этого нам нужно доказать равенство их длин и сонаправленность. По определению произведения вектора на число имеем $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}| = |\pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}||\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Проверим сонаправленность векторов $\vec{b}$ и $\alpha\vec{a}$. Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} > 0$ и, следовательно, $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, следовательно, $\vec{b} \uparrow\uparrow \alpha\vec{a}$. Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} < 0$, следовательно, $\alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то есть $\vec{b} \uparrow\uparrow \alpha\vec{a}$. Итак, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ и существование числа α доказано.

Докажем единственность числа α. Пусть существует еще одно число α_1, такое что $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}$. Тогда $\alpha\vec{a} = \alpha_1\vec{a}$ или $(\alpha-\alpha_1)\vec{a} = \vec{0}$. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$ по условию, то по лемме 3.1 получим $\alpha - \alpha_1 = 0$, то есть $\alpha = \alpha_1$. Мы пришли к противоречию, которое и доказывает единственность числа α.

2. Обратно, пусть $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Тогда по определению произведения вектора на число векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a} = \vec{b}$ либо сонаправлены, либо противоположно направлены, то есть коллинеарны по определению (§ 1.1.). ■

Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ *параллелен прямой* ℓ, если существует представитель $\bar{a} \in \vec{a}$, лежащий на этой прямой. Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ *параллелен плоскости* σ, если существует его представитель $\bar{a}$, лежащий в этой плоскости.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ называются *компланарными*, если существуют их представители $\bar{a} \in \vec{a}$, $\bar{b} \in \vec{b}$, $\bar{c} \in \vec{c}$ и плоскость σ, такие что направленные отрезки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ лежат в плоскости σ.

Пример 1.4.

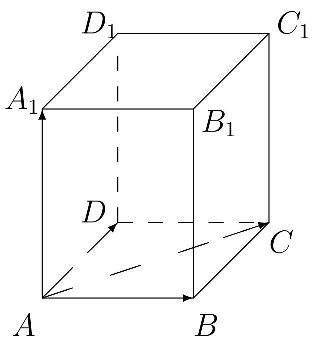


Рис.1.16

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед (Рис.1.16). Тогда
$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ – компланарные векторы;
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}$ – не компланарные векторы. ■

Теорема 3 § 1.3. *1. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то существует единственная пара чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такая что $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.*
2. Если для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ существуют числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такие что $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны.

□ 1. Пусть даны компланарные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, такие что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Докажем существование чисел α и β. Возьмем произвольную точку O. Так как векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то их представители, отложенные от точки O будут лежать в одной плоскости, то есть направленные отрезки $\overline{OA} \in \vec{a}$, $\overline{OB} \in \vec{b}$, $\overline{OC} \in \vec{c}$ лежат в одной плоскости. Рассмотрим два случая.

1)

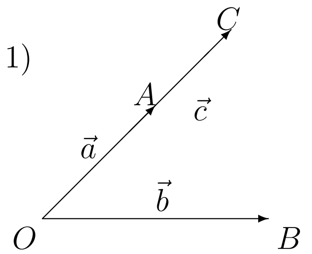


Рис.1.17

Пусть вектора $\vec{c}$ и $\vec{a}$ коллинеарны (Рис.1.17). Аналогично рассматривается случай, когда коллинеарны векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$. Тогда по теореме 2 § 1.3 существует число $\alpha \in \mathbb{R}$, такое что $\vec{c} = \alpha\vec{a}$. Это равенство мы можем записать в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + 0\vec{b}$. Итак, в этом случае искомая пара чисел: $\alpha, 0$.

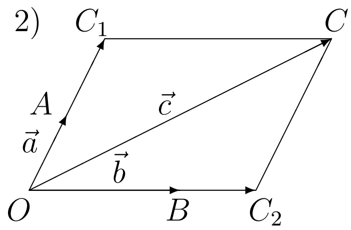


Рис.1.18

Пусть вектор $\vec{c}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$ (Рис.1.18). Через точку C проведем прямые, параллельные прямым (OA) и (OB) соответственно. Мы получим параллелограмм OC_2CC_1. По правилу параллелограмма имеем

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2} \tag{3.2}$$

Применим теорему 2 § 1.3 к парам векторов $\overrightarrow{OC_1}, \vec{a}$ и $\overrightarrow{OC_2}, \vec{b}$. В первом случае получим, что существует число $\alpha \in \mathbb{R}$, такое что $\overrightarrow{OC_1} = \alpha\vec{a}$, а во втором случае существует число $\beta \in \mathbb{R}$, такое что $\overrightarrow{OC_2} = \beta\vec{b}$. Подставляя эти равенства в (3.2), получим $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Таким образом, существование пары чисел α, β доказано и в этом случае.

Докажем единственность пары чисел α, β. Пусть существует еще одна пара чисел $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$, такая что $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$. Тогда

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} \tag{3.3}$$

Если $\alpha_1 = \alpha$, то из (3.3) следует, что $(\beta - \beta_1)\vec{b} = \vec{0}$. Так как по условию векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то $\vec{b} \neq \vec{0}$, а значит, по лемме 3.1 $\beta - \beta_1 = 0$, то есть $\beta_1 = \beta$. Мы пришли к противоречию с предположением.

Если $\alpha_1 \neq \alpha$, то выражая из (3.3) вектор $\vec{a}$, получим $\vec{a} = \frac{\beta-\beta_1}{\alpha_1-\alpha}\vec{b}$. По теореме 2 § 1.3 из этого следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию.

Таким образом, в обоих случаях мы пришли к противоречию, а значит, пара чисел α, β единственна.

2. Пусть для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет место равенство $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Фиксируем произвольную точку A и запишем это равенство в виде $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, где $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \beta\vec{b}$. Это означает, что направленный отрезок $\overline{AC}$ является представителем вектора $\vec{c}$, направленный отрезок $\overline{AB}$ – вектора $\alpha\vec{a}$, направленный отрезок $\overline{BC}$ – вектора $\beta\vec{b}$. Обозначим σ плоскость, которая содержит точки A, B, C. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то плоскость σ единственна. Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то таких плоскостей много и мы можем взять любую из них.

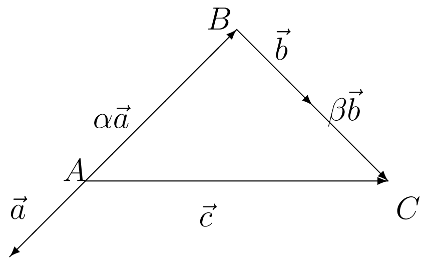


Рис.1.19

Утверждается, что в плоскости σ будут лежать представители векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Действительно, по теореме 2 § 1.3 векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, а значит, представитель вектора $\vec{b}$, отложенный от точки A, будет лежать на прямой (AB), и следовательно, в плоскости σ. Аналогично, представитель вектора $\vec{b}$ будет лежать на прямой (BC) и, следовательно, в плоскости σ. Тогда по определению компланарных векторов векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. На Рис.1.19 изображен один из возможных случаев расположения точек A, B, C. ■

Теорема 4 § 1.3. *Пусть даны произвольные не компланарные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ и произвольный вектор $\vec{d} \in V^3$. Тогда существует единственный набор чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, такой что $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.*

□ Докажем существование чисел α, β, γ.

Возьмем точку O и отложим от нее представители $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (Рис.1.20). Так как векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны, то точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости. Пусть точка D не принадлежит плоскостям (OAB), (OAC), (OBC). Проведем прямую (DE) параллельно прямой (OC), $E \in (OAB)$. Тогда по правилу треугольника

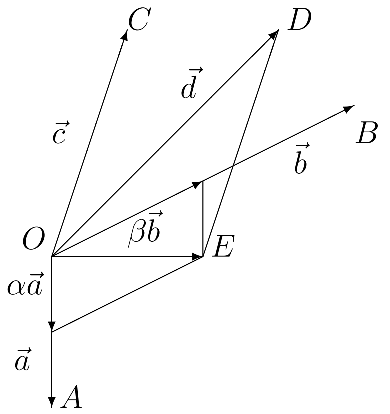


Рис.1.20

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} \tag{3.4}$$

Так как векторы $\overrightarrow{OE}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, по теореме 3 § 1.3 существуют числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такие что $\overrightarrow{OE} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Так как векторы $\overrightarrow{ED}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, то по теореме 2 § 1.3 существует число γ, такое что $\overrightarrow{ED} = \gamma\vec{c}$. Подставим полученные равенства в (3.4) и получим $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Пусть точка D лежит в какой-либо из плоскостей (OAB), (OAC), (OBC), например, $D \in (OAB)$. Тогда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. В этом случае по теореме 3 § 1.3 существуют числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такие что $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Добавим в правую часть этого равенства нулевое слагаемое (это не нарушит равенства): $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + 0\vec{c}$. Итак, в этом случае искомая тройка чисел:$\alpha, \beta, 0$.

Докажем единственность набора чисел α, β, γ. Допустим, что существует еще одна тройка чисел $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, такая что $\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$. Так как эти тройки чисел различны, то выполняется хотя бы одно неравенство $\alpha \neq \alpha_1$, $\beta \neq \beta_1$, $\gamma \neq \gamma_1$. Пусть $\gamma_1 \neq \gamma$. Тогда $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$. Перенесем в левую часть равенства слагаемые, содержащие $\vec{c}$ и разделим на число $\gamma - \gamma_1$: $\vec{c} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\gamma - \gamma_1}\vec{a} + \frac{\beta_1 - \beta}{\gamma - \gamma_1}\vec{b}$. По теореме 3 § 1.3 это означает, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Мы пришли к противоречию с условием. Итак, набор чисел α, β, γ единственен. ■

§1.4. Координаты вектора относительно базиса.

Базисом в V^3 будем называть любую упорядоченную тройку не компланарных векторов. Обозначение $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Пусть даны базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ в V^3 и произвольный вектор $\vec{x} \in V^3$. Тогда по теореме 4 § 1.3 существует единственная тройка чисел $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, такая что $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.

Упорядоченная тройка чисел (x_1, x_2, x_3) называется *координатами вектора* $\vec{x}$ *в базисе* E. Обозначение $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$. Из теоремы 4 § 1.3 получим

Следствие 1 § 1.4. *1. Если фиксирован базис, то координаты вектора определены однозначно.*
2. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты. ■

Пример 1.5. Пусть дан произвольный базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ в V^3. Тогда $\vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$, следовательно, $\vec{e}_1(1, 0, 0)$ в базисе E. Аналогично находим $\vec{e}_2(0, 1, 0)$, $\vec{e}_3(0, 0, 1)$.

По лемме 3.1 получим $\vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$, а значит, $\vec{0}(0, 0, 0)$ в базисе E.

Теорема 1 § 1.4. *Пусть даны базис* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, *произвольные векторы* $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$ *и произвольное число* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда*
1) Координаты суммы $\vec{x} + \vec{y}$ *равны сумме соответствующих координат векторов* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$, *то есть* $(\vec{x} + \vec{y})(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$;
2) Координаты произведения $\lambda\vec{x}$ *равны произведению числа* λ *на соответствующие координаты вектора* $\vec{x}$, *то есть* $(\lambda\vec{x})(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

□ По определению координат вектора имеем $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ и $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$. Сложим эти равенства, сгруппируем слагаемые с одинаковыми векторами и вынесем эти векторы за скобку: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + (x_3 + y_3)\vec{e}_3$. По определению координат вектора это означает, что вектор $\vec{x} + \vec{y}$ имеет координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. Второе утверждение докажите самостоятельно. ■

Теорема 2 § 1.4. *Пусть даны базис* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *и векторы* $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$. *Векторы* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число* $t \in \mathbb{R}$, *такое что*

$$1)\, y_1 = tx_1,\ y_2 = tx_2,\ y_3 = tx_3 \quad \text{или} \quad 2)\, x_1 = ty_1,\ x_2 = ty_2,\ x_3 = ty_3, \tag{4.1}$$

то есть координаты векторов $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *пропорциональны. При этом, векторы* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *сонаправлены тогда и только тогда, когда число* $t \geq 0$; *векторы* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *противоположно направлены тогда и только тогда, когда число* $t < 0$.

□ 1. Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Если оба вектора нулевые, то все их координаты равны нулю и равенства (4.1) выполняются для любого числа t.

Если $\vec{x} \neq \vec{0}$, то по теореме 2 § 1.3 существует число $t \in \mathbb{R}$, такое что $\vec{y} = t\vec{x}$. По теореме 1 § 1.4 координаты вектора $(t\vec{x})(tx_1, tx_2, tx_3)$. Тогда из последнего равенства, используя следствие 1 § 1.4, получим 1) из (4.1).

Если $\vec{y} \neq \vec{0}$, то аналогично рассуждая, получим 2) из (4.1).

2. Пусть для векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ существует число $t \in \mathbb{R}$, такое что верны равенства $y_1 = tx_1$, $y_2 = tx_2$, $y_3 = tx_3$ (для 2) из (4.1) рассуждения аналогичны). Умножим обе части первого равенства на вектор $\vec{e}_1$, второго – на вектор $\vec{e}_2$, а третьего – на вектор $\vec{e}_3$ и сложим:

$y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 = t(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)$, то есть $\vec{y} = t\vec{x}$. Если вектор $\vec{x} = \vec{0}$, то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны по определению. Если $\vec{x} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны по теореме 2 § 1.3. ■

Замечание 1.5. Если все координаты одного из векторов $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$ отличны от нуля, то условие (4.1) пропорциональности координат этих векторов можно записать в виде

$$\tfrac{x_1}{y_1} = \tfrac{x_2}{y_2} = \tfrac{x_3}{y_3} \quad \text{или} \quad \tfrac{y_1}{x_1} = \tfrac{y_2}{x_2} = \tfrac{y_3}{x_3}.$$

Определителем второго порядка $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ называется число $ad - bc$.

Определителем третьего порядка $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ называется число $x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Теорема 3 § 1.4. *Пусть даны базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и произвольные векторы $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z}(z_1, z_2, z_3)$. Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

□ 1. Пусть векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны. Если это нуль-векторы, то все их координаты нулевые. Подставим их в левую часть (4.2). Очевидно, что такой определитель равен нулю. Пусть хотя бы один из векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ненулевой, например, $\vec{z} \neq \vec{0}$. Тогда возможны два случая:

а) все векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ попарно коллинеарны. Тогда по теореме 2 § 1.3 существуют числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такие что $\vec{x} = \alpha\vec{z}$, $\vec{y} = \beta\vec{z}$. По теореме 1 § 1.4 и следствию 1 § 1.4 из этих векторных равенств получим $x_1 = \alpha z_1$, $x_2 = \alpha z_2$, $x_3 = \alpha z_3$, $y_1 = \beta z_1$, $y_2 = \beta z_2$, $y_3 = \beta z_3$. Подставим эти равенства в левую часть (4.2) и вычислим этот определитель. Мы получим нуль.

б) Пусть хотя бы два из векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ не коллинеарны, например, векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Тогда по теореме 3 § 1.3 существуют числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такие что $\vec{x} = \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}$. По теореме 1 § 1.4 и следствию 1 § 1.4 из этого векторного равенства получим три равенства для координат: $x_1 = \alpha y_1 + \beta z_1$, $x_2 = \alpha y_2 + \beta z_2$, $x_3 = \alpha y_3 + \beta z_3$. Подставим эти равенства в первый столбец определителя из (4.2) и вычислим этот определитель. Мы получим нуль.

2. Обратно, пусть выполняется (4.2). Докажем, что векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны. Запи-

шем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = 0 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

где α, β, γ – неизвестные. Из курса алгебры известно, что если выполняется (4.2), то система (*) имеет ненулевое решение, которое мы обозначим $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. А значит, мы имеем три тождества $\alpha_0 x_1 + \beta_0 y_1 + \gamma_0 z_1 = 0$, $\alpha_0 x_2 + \beta_0 y_2 + \gamma_0 z_2 = 0$, $\alpha_0 x_3 + \beta_0 y_3 + \gamma_0 z_3 = 0$. Умножим первое тождество на вектор $\vec{e}_1$, второе – на вектор $\vec{e}_2$, третье – на вектор $\vec{e}_3$ и сложим. По определению координат вектора получим $\alpha_0 \vec{x} + \beta_0 \vec{y} + \gamma_0 \vec{z} = \vec{0}$. Так как решение системы (*) ненулевое, то хотя бы одно из чисел $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ отлично от нуля. Пусть $\gamma_0 \neq 0$. Тогда выразим вектор $\vec{z}$: $\vec{z} = \frac{-\alpha_0}{\gamma_0}\vec{x} + \frac{-\beta_0}{\gamma_0}\vec{y}$. По теореме 3 § 1.3 векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны. ■

§1.5. Проекция вектора на ось.

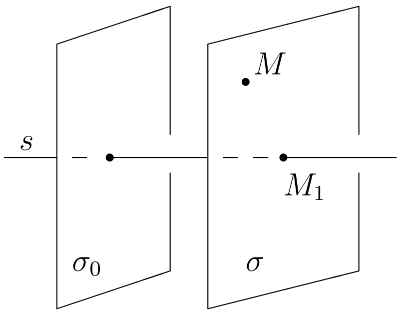


Рис.1.21

Пусть s – произвольная прямая, σ_0 – произвольная плоскость, не параллельная прямой s, M – произвольная точка пространства (Рис.1.21). Проведем через точку M плоскость σ, параллельную плоскости σ_0. Если точка M принадлежит плоскости σ_0, то через σ обозначим плоскость σ_0. Обозначим через M_1 точку пересечения прямой s и плоскости σ. Точка M_1 называется *проекцией точки M на прямую s параллельно плоскости* σ_0. Если плоскость σ_0 перпендикулярна прямой s, то проекция точки M на прямую s называется *ортогональной.*

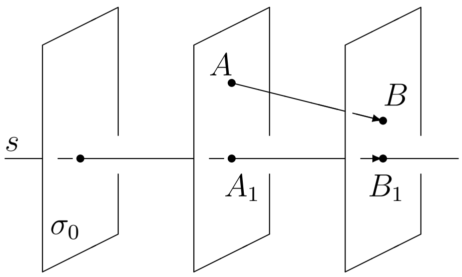


Рис.1.22

Пусть $\overline{AB}$ – произвольный направленный отрезок, точки A_1, B_1 – проекции точек A, B на прямую s параллельно плоскости σ_0 (Рис.1.22). Направленный отрезок $\overline{A_1B_1}$ называется *проекцией направленного отрезка $\overline{AB}$ на прямую s параллельно плоскости* σ_0.

Теорема 1 § 1.5. *Если направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ эквиполентны, то их проекции $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_1'B_1'}$ на прямую s параллельно плоскости σ_0 также эквиполентны.*

□ Пусть даны эквиполентные направленные отрезки $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, прямая s и плоскость σ_0, не параллельная прямой s. Рассмотрим несколько случаев.

1)

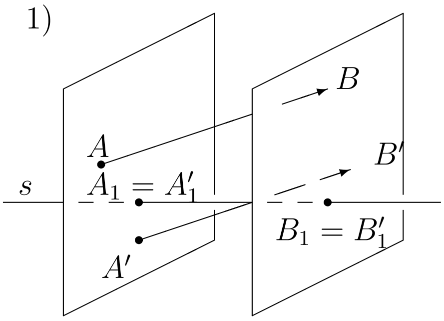


Рис.1.23

Пусть прямые (AA') и (BB') параллельны плоскости σ_0 (Рис.1.23). Тогда по определению проекции точки на прямую $A_1 = A'_1$, $B_1 = B'_1$. В силу рефлексивности отношения эквиполентности направленный отрезок $\overline{A_1B_1}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{A_1B_1}$, который совпадает с направленным отрезком $\overline{A'_1B'_1}$, следовательно, направленные отрезки $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A'_1B'_1}$ эквиполентны.

2)

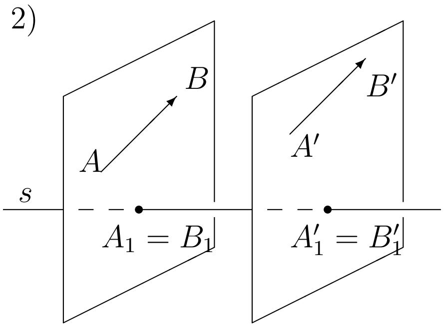


Рис.1.24

Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ параллелен плоскости σ_0 (Рис.1.24). Тогда в силу эквиполентности направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ получим, что направленный отрезок $\overline{A'B'}$ параллелен плоскости σ_0. Из определения проекции направленного отрезка на прямую получим $\overline{A_1B_1} = \bar{0}$ и $\overline{A'_1B'_1} = \bar{0}$, в частности, они эквиполентны.

3)

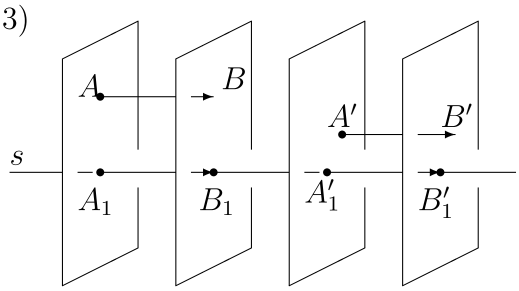


Рис.1.25

а) Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ параллелен прямой s (Рис.1.25). Так как по условию направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ эквиполентны, то из определения эквиполентности (§ 1.1.) следует, что направленный отрезок $\overline{A'B'}$ параллелен прямой s. Тогда четырехугольники ABB_1A_1 и $A'B'B'_1A'_1$ являются параллелограммами (по определению), а значит, эквиполентны направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$, а также направленные отрезки $\overline{A'B'}$ и $\overline{A'_1B'_1}$. Так как, кроме того, по условию эквиполентны направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$, то получим эквиполентность направленных отрезков $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A'_1B'_1}$.

б) Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ лежит на прямой s. Докажите самостоятельно.

4)

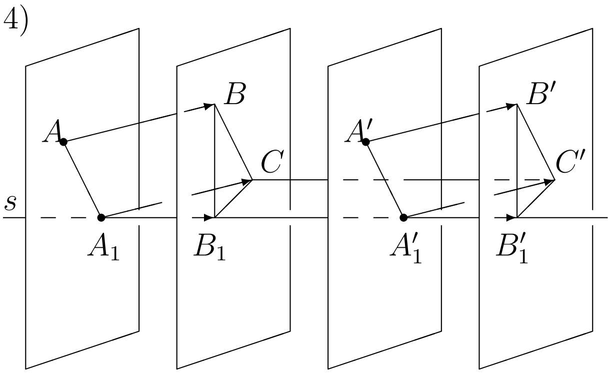


Рис.1.26

Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ не параллелен ни плоскости σ_0, ни прямой s и не лежит в них (Рис.1.26). Тогда и направленный отрезок $\overline{A'B'}$ не параллелен ни плоскости σ_0, ни прямой s и не лежит в них. Отложим от точки A_1 направленный отрезок $\overline{A_1C}$ эквиполентный направленному отрезку $\overline{AB}$. Тогда A_1ABC – параллелограмм, следовательно, прямая (BC) параллельна плоскости σ_0. Кроме того, прямая (BB_1) параллельна плоскости σ_0. Тогда будут параллельными плоскости (BB_1C) и σ_0. Аналогично доказывается, что плоскость $(B'C'B_1')$ параллельна плоскости σ_0.

Аналогично строим точку C'. Тогда по правилу треугольника получим

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C}$$
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_1'C'} = \overrightarrow{A_1'B_1'} + \overrightarrow{B_1'C'}$$

Так как по условию направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ эквиполентны, то по определению вектора (§ 1.1.) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{A_1'B_1'} + \overrightarrow{B_1'C'} \qquad (*)$$

В силу эквиполентности направленных отрезков $\overline{A_1'C'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{AB}$ и $\overline{A_1C}$, получим, что $A_1CC'A_1'$ – параллелограмм (по признаку), следовательно, прямая (CC') параллельна прямой s. Следовательно, параллельны прямые (B_1C) и $(B_1'C')$ как прямые пересечения параллельных плоскостей (BB_1C) и $(B'C'B_1')$ плоскостью параллелограмма $A_1CC'A_1'$. Тогда $B_1CC'B_1'$ – параллелограмм по определению, следовательно, направленные отрезки $\overline{B_1C}$ и $\overline{B_1'C'}$ эквиполентны, то есть $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B_1'C'}$. Подставив это равенство в (*), получим $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1'B_1'}$, то есть направленные отрезки $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_1'B_1'}$ эквиполентны. ■

Доказанная теорема позволяет корректно определить проекцию вектора на прямую.

Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$. Возьмем какой-нибудь его представитель $\overline{AB}$ и спроектируем на прямую s. Мы получим направленный отрезок $\overline{A_1B_1}$, который задает вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$. Этот вектор называется *векторной проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на прямую* s параллельно плоскости σ_0. Обозначение $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{pr}_s\overrightarrow{AB}\,(\|\sigma_0)$. Если плоскость σ_0 перпендикулярна прямой s, то векторную проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую s называют *ортогональной*.

Определение векторной проекции вектора на прямую не зависит от выбора представителя этого вектора. Действительно, если взять другой представитель $\overline{A'B'}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ и спроектировать на прямую s, то по теореме 1 § 1.5 мы получим направленный отрезок $\overline{A_1'B_1'}$ эквиполентный направленному отрезку $\overline{A_1B_1}$. Следовательно, направленные отрезки $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_1'B_1'}$ задают один и тот же вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Следствие 1 § 1.5. *Если вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен прямой s, то его проекция на прямую s параллельно плоскости σ_0 есть сам вектор $\overrightarrow{AB}$ (см. доказательство пункта 3) теоремы 1 § 1.5).*
Если вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен плоскости σ_0, то его проекция на прямую s параллельно плоскости σ_0 есть $\vec{0}$ (см. доказательство пункта 2) теоремы 1 § 1.5).

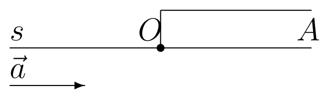


Рис.1.27

Пусть дана прямая s (Рис.1.27). Фиксируем на ней какой-нибудь луч $[OA)$. Он задает направление (см. § 1.1.). Прямая s с фиксированным на ней направлением $[OA)$ называется *осью*, а зафиксированное направление называется *положительным направлением*.

Задавать направление на прямой удобнее не с помощью луча, а с помощью вектора. Для этого нужно указать какой-нибудь вектор $\vec{a}$, который имеет то же направление, что и луч $[OA)$ (см. § 1.1.). Заметим, что вектор $\vec{a}$ не нулевой, так как для нуль-вектора направление не определено (см. §1.1.). Тогда осью будет являться пара $(s, \vec{a})$. Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ *задает положительное направление* на оси $(s, \vec{a})$.

Среди всех векторов $\vec{a}$, задающих положительное направление существует единственный вектор $\vec{a}_0$, длина которого равна 1. Вектор $\vec{a}_0$ называется *ортом* вектора $\vec{a}$. Орт $\vec{a}_0$ и вектор $\vec{a}$ связаны следующим образом: $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Действительно, $|\vec{a}_0| = |\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$. Кроме того, так как число $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, векторы $\vec{a}_0$ и $\vec{a}$ сонаправлены. Таким образом, вектор $\vec{a}_0$ имеет длину 1 и положительное направление, то есть является ортом вектора $\vec{a}$.

В дальнейшем мы будем задавать ось, указывая на ней не произвольный вектор положительного направления, а именно орт, и будем писать ось $(s, \vec{e})$ или ось s.

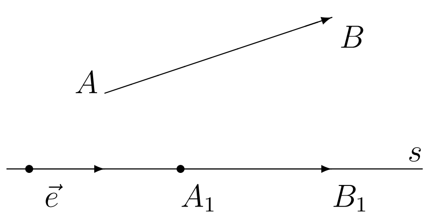


Рис.1.28

Пусть даны ось $(s, \vec{e})$, вектор $\overrightarrow{AB}$ и векторная проекция $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{pr}_s\overrightarrow{AB}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую s параллельно плоскости σ_0 (Рис.1.28). Тогда векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\vec{e}$ коллинеарны и по теореме 2 § 1.3 существует единственное число $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\vec{e}$. Число λ называется *скалярной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $(s, \vec{e})$ параллельно плоскости σ_0* (короче, *проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось s*). Если плоскость σ_0 перпендикулярна прямой s, то скалярная проекция называется *ортогональной.* Обозначение $\lambda = pr_s\overrightarrow{AB}(\|\sigma_0)$ или $\lambda = pr_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}(\|\sigma_0)$.

С учетом введенного обозначения определение скалярной проекции можно записать в виде

$$\overrightarrow{pr}_s\overrightarrow{AB} = (pr_s\overrightarrow{AB})\vec{e} \tag{5.1}$$

Теорема 2 § **1.5.** *Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ – произвольные векторы. Тогда $pr_s(\vec{a}+\vec{b}) = pr_s\vec{a}+pr_s\vec{b}$.*

□

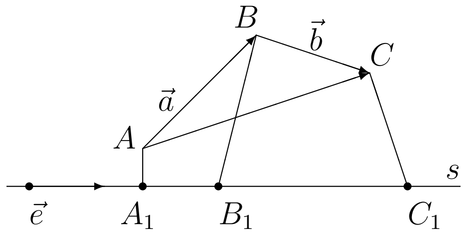


Рис.1.29

Возьмем произвольную точку A и отложим представители $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{BC} \in \vec{b}$ данных векторов (Рис.1.29). Обозначим A_1, B_1, C_1 проекции точек A, B, C на прямую s параллельно плоскости σ_0. По правилу треугольника получим $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$ или в других обозначениях

$$\overrightarrow{pr}_s\vec{a} + \overrightarrow{pr}_s\vec{b} = \overrightarrow{pr}_s(\vec{a} + \vec{b})$$

Подставим (5.1) в это равенство.

$$(pr_s\vec{a})\vec{e} + (pr_s\vec{b})\vec{e} = (pr_s(\vec{a} + \vec{b}))\vec{e}$$

Перенесем все слагаемые в одну сторону и вынесем вектор $\vec{e}$ за скобки: $(pr_s\vec{a} + pr_s\vec{b} - pr_s(\vec{a} + \vec{b}))\vec{e} = \vec{0}$. Так как вектор $\vec{e}$ имеет длину 1, то $\vec{e} \neq \vec{0}$. Тогда по лемме 3.1 получим $pr_s\vec{a} + pr_s\vec{b} - pr_s(\vec{a} + \vec{b}) = 0$. Что и требовалось доказать. ■

Теорема 3 § **1.5.** *Пусть $\vec{a} \in V^3$ – произвольный вектор, $\alpha \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Тогда $pr_s(\alpha\vec{a}) = \alpha(pr_s\vec{a})$.*

□

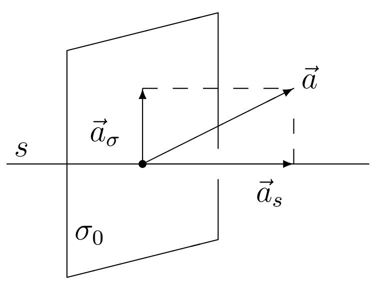


Рис.1.30

Используя правило параллелограмма, представим вектор $\vec{a}$ в виде суммы $\vec{a} = \vec{a}_\sigma + \vec{a}_s$, где вектор $\vec{a}_\sigma$ параллелен плоскости σ_0, а вектор $\vec{a}$ параллелен прямой s (Рис.1.30). Умножим обе части этого равенства на α: $\alpha\vec{a} = \alpha\vec{a}_\sigma + \alpha\vec{a}_s$ и применим теорему 2 § 1.5. Получим

$$\overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}) = \overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}_\sigma) + \overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}_s) \tag{5.2}$$

Так как вектор $\alpha\vec{a}_\sigma$ параллелен плоскости σ_0, то по следствию 1 § 1.5 $\overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}_\sigma) = \vec{0}$.
Кроме того, так как вектор $\alpha\vec{a}_s$ параллелен прямой s, то по следствию 1 § 1.5 получим $\overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}_s) = \alpha\vec{a}_s = \alpha(\overrightarrow{pr}_s\vec{a}_s + \vec{0}) = \alpha(\overrightarrow{pr}_s\vec{a}_s + \overrightarrow{pr}_s\vec{a}_\sigma) = \alpha(\overrightarrow{pr}_s(\vec{a}_s + \vec{a}_\sigma)) = \alpha(\overrightarrow{pr}_s\vec{a})$. Тогда (5.2) запишется в виде

$$\overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}) = \alpha\overrightarrow{pr}_s\vec{a}$$

Подставим (5.1) в это равенство: $(pr_s(\alpha\vec{a}))\vec{e} = \alpha(pr_s\vec{a})\vec{e}$. Так как $\vec{e} \neq \vec{0}$, получим $pr_s(\alpha\vec{a}) = \alpha(pr_s\vec{a})$. ■

Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^3$. Возьмем произвольную точку O и отложим от нее представители векторов $\overline{OA} \in \vec{a}$, $\overline{OB} \in \vec{b}$. Тогда величина угла $\angle AOB$ называется *углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$*. Обозначение $(\vec{a}, \vec{b})$. Очевидно, что $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$.

Так как углы с соответственно параллельными сторонами равны, определение угла между векторами корректно, то есть не зависит от выбора представителей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Будем по определению считать, что $\vec{0}$ ортогонален любому вектору. Обозначение $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Теорема 4 § 1.5. *Пусть даны произвольный ненулевой вектор $\vec{a} \in V^3$, ось $(s, \vec{e})$, плоскость σ_0, причем $\sigma_0 \perp s$. Тогда*

$$pr_s\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi \tag{5.3}$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$.

□ Рассмотрим возможные случаи углов между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$.

1) Пусть $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости σ_0 и согласно следствию 1 § 1.5 обе части равенства (5.3) обращаются в нуль, а значит, это равенство верно.

2) Пусть $\varphi = 0$ ($\varphi = \pi$ доказывается аналогично). В этом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{e}$ сонаправлены (то есть вектор $\vec{e}$ является ортом для вектора $\vec{a}$) и $\overrightarrow{pr}_s\vec{a} = \vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}$. По определению скалярной проекции вектора это означает, что левая часть равенства (5.3) примет вид $pr_s\vec{a} = |\vec{a}|$. С другой стороны, правая часть равенства (5.3) $|\vec{a}|cos\varphi = |\vec{a}|cos\,0 = |\vec{a}|$. Таким образом, (5.3) верно.

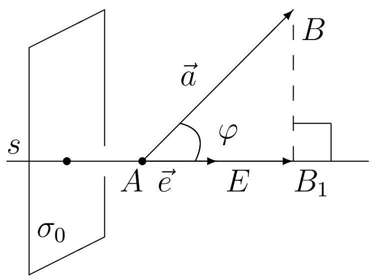


Рис.1.31

3) Пусть $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (Рис.1.31). Тогда $pr_s\vec{a} = |\overrightarrow{AB_1}| = |\vec{a}|\cos\varphi$ (по определению косинуса угла в прямоугольном треугольнике $\triangle ABB_1$).

4) Пусть $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ (Рис.1.32). Рассмотрим ось $(s, \vec{e}\,')$, где $\vec{e}\,' = -\vec{e}$. Обозначим $\varphi' = (\vec{a}, \vec{e}\,') < \frac{\pi}{2}$, а значит, по пункту 3) для оси $(s, \vec{e}\,')$ и вектора $\vec{a}$ получим

$$pr_{\vec{e}\,'}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi' \tag{5.4}$$

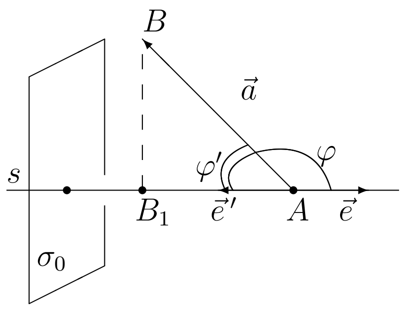


Рис.1.32

По формулам приведения правая часть (5.4) равна $|\vec{a}|\cos\varphi' = |\vec{a}|\cos(\pi - \varphi) = -|\vec{a}|\cos\varphi$. Выясним, чему будет равна левая часть (5.4). По определению скалярной проекции вектора, с одной стороны, имеем $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{pr}_{\vec{e}\,'}\vec{a} = (pr_{\vec{e}\,'}\vec{a})\vec{e}\,'$, а с другой стороны, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{pr}_{\vec{e}}\vec{a} = (pr_{\vec{e}}\vec{a})\vec{e}$. Тогда $(pr_{\vec{e}\,'}\vec{a})\vec{e}\,' = (pr_{\vec{e}}\vec{a})\vec{e}$. Так как $\vec{e}\,' = -\vec{e}$, то $-(pr_{\vec{e}\,'}\vec{a})\vec{e} = (pr_{\vec{e}}\vec{a})\vec{e}$, то есть $-pr_{\vec{e}\,'}\vec{a} = pr_{\vec{e}}\vec{a}$.

Подставляя полученные соотношения в (5.4) получим (5.3). ■

§1.6. Скалярное произведение векторов.

У нас уже введены две операции с векторами: сложение векторов и произведение вектора на число. Введем операции умножения векторов (у нас будет три вида умножения векторов). Начнем со *скалярного умножения.*

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, то есть

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

Свойства скалярного произведения векторов.

1^0. Для любых векторов $\vec{a},\vec{b}\in V^3$ верно равенство $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$.

□ Из определения угла между векторами (§ 1.5.) следует, что углы $(\vec{a},\vec{b})$ и $(\vec{b},\vec{a})$ равны. Тогда по определению скалярного произведения векторов получим $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{b},\vec{a}) = \vec{b}\vec{a}$. ■

Обозначим $\vec{a}\vec{a}=\vec{a}^2$ и будем называть *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$.

2^0. Для любого вектора $\vec{a}\in V^3$ скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен квадрату его длины, то есть $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

□ Положим в определении скалярного произведения $\vec{b}=\vec{a}$. Тогда $\vec{a}^2=\vec{a}\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$. ■ 3^0. Пусть $\vec{a},\vec{b}\in V^3$ – произвольные векторы, $\vec{a}\neq\vec{0}$; $(s,\vec{e})$ – ось, где $\vec{e}$ – орт вектора $\vec{a}$; плоскость σ_0 перпендикулярна прямой s. Тогда $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|pr_{\vec{e}}\vec{b}$.

□ По теореме 4 § 1.5 получим $|\vec{a}|pr_s\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{b},\vec{e})$. Так как вектор $\vec{e}$ является ортом вектора $\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{e}$ сонаправлены, а значит, $(\vec{b},\vec{a})=(\vec{b},\vec{e})$. Следовательно,$|\vec{a}|pr_{\vec{e}}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{b},\vec{a}) = \vec{a}\vec{b}$. ■

4^0. Для любых векторов $\vec{a},\vec{b}\in V^3$ и любого числа $\alpha\in\mathbb{R}$ верны равенства $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$.

□ 1) Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то обе части равенства по определению скалярного произведения обращаются в нуль, а значит, равны.

2) Пусть $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$. Обозначим через $\vec{e}$ орт вектора $\vec{b}$ и рассмотрим произвольную ось $(s,\vec{e})$. Тогда, используя свойство 1^0, свойство 3^0 и теорему 3 § 1.5, получим $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{b}(\alpha\vec{a}) = |\vec{b}|pr_{\vec{e}}(\alpha\vec{a}) = \alpha(|\vec{b}|pr_{\vec{e}}\vec{a}) = \alpha(\vec{b}\vec{a}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$. Второе равенство доказывается аналогично. ■

5^0. Для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V^3$ верно равенство $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

□ 1) Если $\vec{c}=\vec{0}$, то согласно определению скалярного произведения векторов обе части равенства обращаются в нуль, а значит, равны.

2) Пусть $\vec{c}\neq\vec{0}$. Обозначим $\vec{e}$ орт вектора $\vec{c}$ и рассмотрим произвольную ось $(s,\vec{e})$. Тогда по свойству 3^0 и теореме 2 § 1.5 получим $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = |\vec{c}|pr_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|pr_{\vec{e}}\vec{a}+|\vec{c}|pr_{\vec{e}}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$. ■

6^0. $\vec{a}\vec{b}=0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

□ Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны. Тогда по определению скалярного произведения $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Обратно, пусть $\vec{a}\vec{b} = 0$, то есть $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0$. Тогда, если $|\vec{a}| = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$, а нуль-вектор перпендикулярен любому вектору по определению. Аналогично рассматривается случай $|\vec{b}| = 0$. Если $\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0$, то угол $(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, то есть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны. ■

7^0. Если $\vec{a}\vec{b} = 0$ для любого вектора $\vec{b} \in V^3$, то $\vec{a} = \vec{0}$.

□ Так как скалярное произведение $\vec{a}\vec{b} = 0$ для любого вектора $\vec{b} \in V^3$, то, в частности, оно равно нулю для вектора $\vec{a}$, то есть $\vec{a}\vec{a} = 0$. Тогда по свойству 2^0 получим $|\vec{a}| = 0$, то есть $\vec{a} = \vec{0}$. ■

Замечание 1.6. Свойства 1^0, 4^0, 5^0 скалярного произведения векторов показывают, что введенные нами действия с векторами аналогичны действиям с алгебраическими выражениями.

Пример 1.6. Раскроем скобки $5(\vec{a}+\vec{d})(\vec{b}-3\vec{c})+\vec{a}(2\vec{b}) = 5(\vec{a}\vec{b})-15(\vec{a}\vec{c})+5(\vec{d}\vec{b})-15(\vec{d}\vec{c})+2(\vec{a}\vec{b}) = 7(\vec{a}\vec{b}) - 15(\vec{a}\vec{c}) + 5(\vec{b}\vec{d}) - 15(\vec{c}\vec{d})$. ■

Следующая наша задача – научиться вычислять скалярное произведение векторов через их координаты. Среди всех базисов выделяются такие, в которых формулы для вычисления скалярного произведения векторов выглядят наиболее просто. Это так называемые ортонормированные базисы.

Базис $I = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ в V^3 называется *ортонормированным*, если длины $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ и углы $(\vec{i},\vec{j}) = (\vec{i},\vec{k}) = (\vec{j},\vec{k}) = \frac{\pi}{2}$.

Если мы применим определение скалярного произведения векторов к векторам ортонормированного базиса, то получим таблицу скалярного умножения (для ортонормированного базиса):

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Теорема 1 § 1.6. *Пусть даны ортонормированный базис $I = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ в V^3 и произвольные векторы $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$. Тогда*

$$1)\ \vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3;\quad 2)\ |\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} \tag{6.1}$$

□ По определению координат вектора (§ 1.4.) имеем $\vec{a} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$. Подставим эти равенства в скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$ и раскроем скобки $\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1b_1(\vec{i}\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\vec{j})+a_1b_3(\vec{i}\vec{k})+a_2b_1(\vec{j}\vec{i})+a_2b_2(\vec{j}\vec{j})+a_2b_3(\vec{j}\vec{k})+a_3b_1(\vec{k}\vec{i})+a_3b_2(\vec{k}\vec{j})+a_3b_3(\vec{k}\vec{k})$. Воспользовавшись таблицей скалярного умножения, получим первую формулу в (6.1). Если положить в этой формуле $\vec{b} = \vec{a}$, то получим $\vec{a}\vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 +$

a_3a_3. По свойству 2^0 скалярного произведения векторов $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$, а значит, верна вторая формула в (6.1). ■

Теорема 2 § 1.6. *Пусть даны ортонормированный базис $I = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ в V^3 и вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$. Возьмем произвольную точку O и проведем через нее три прямые (Ox), (Oy), (Oz), параллельные векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно. Тогда координаты a_1, a_2, a_3 суть ортогональные проекции вектора $\vec{a}$ на оси $((Ox), \vec{i})$, $((Oy), \vec{j})$, $((Oz), \vec{k})$ соответственно.*

□ По определению координат вектора имеем

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}. \tag{$*$}$$

Умножим скалярно обе части на вектор $\vec{i}$ и раскроем скобки в правой части. Используя таблицу скалярного умножения, получим $\vec{a}\vec{i} = a_1$. По определению скалярного произведения левая часть этого равенства примет вид $\vec{a}\vec{i} = |\vec{a}||\vec{i}|\cos(\vec{a}, \vec{i}) = |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{i})$. Тогда получим $a_1 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{i})$. Аналогично, умножая (*) скалярно на сначала на $\vec{j}$, а затем на вектор $\vec{k}$, получим еще два равенства:

$$a_1 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{i}); \quad a_2 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{j}); \quad a_3 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{k}). \tag{6.2}$$

В правых частях формул (6.2) согласно свойству 3^0 скалярного произведения векторов стоят ортогональные проекции вектора $\vec{a}$, а именно,

$$a_1 = pr_{\vec{i}}\vec{a}; \quad a_2 = pr_{\vec{j}}\vec{a}; \quad a_3 = pr_{\vec{k}}\vec{a}.$$

■

Замечание 1.7. При доказательстве теоремы 2 § 1.6 мы получили формулы (6.2), которые представляют самостоятельный интерес и будут использоваться в дальнейшем.

§1.7. Векторные подпространства.

Непустое подмножество L из V^3 называется *векторным подпространством в* V^3, если
1) для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in L$ их сумма $\vec{a} + \vec{b}$ принадлежит L;
2) для любого вектора $\vec{a} \in L$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ их произведение $\alpha\vec{a}$ принадлежит L.

Пусть σ – плоскость. Рассмотрим множество L^2 всех векторов, параллельных плоскости σ.

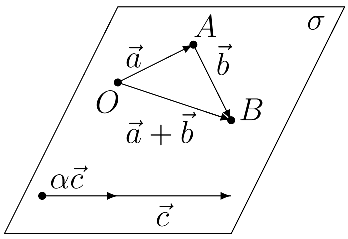


Рис.1.33

Докажем, что L^2 является векторным подпространством V^3.

Рассмотрим два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из множества L. По определению L эти векторы параллельны плоскости σ. Значит, представители $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (Рис.1.33) лежат в плоскости σ. Тогда направленный отрезок $\overline{OB}$ является представителем вектора $\vec{a}+\vec{b}$ и лежит в плоскости σ. Тогда по определению (§ 1.3.) вектор $\vec{a}+\vec{b}$ параллелен плоскости σ, а значит, принадлежит множеству L.

Аналогично проверяется второе условие из определения векторного подпространства. Таким образом, доказано, что L^2 есть векторное подпространство V^3.

Базисом векторного подпространства L^2 называется любая упорядоченная пара не коллинеарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ из L^2.

По теореме 3 § 1.3 для любого вектора $\vec{c} \in L^2$ существует единственная пара чисел $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, такая что $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$. Упорядоченная пара чисел (c_1, c_2) называется *координатами* вектора $\vec{c}$ относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Так как в L^2 находятся векторы из V^3, то операция сложения векторов и произведение вектора на число в L^2 то же, что и в V^3.

Теорема 1 § 1.7. *Пусть даны базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в L^2, векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ из L^2 и число $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$1)\,(\vec{a}+\vec{b})(a_1+b_1, a_2+b_2);\quad 2)\,(\alpha\vec{a})(\alpha a_1, \alpha a_2);$$

□ Аналогично доказательству теоремы 1 § 1.4. Докажите самостоятельно. ■

Теорема 2 § 1.7. *Пусть даны базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в L^2 и векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ из L^2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число $t \in \mathbb{R}$, такое что $a_1 = tb_1$, $a_2 = tb_2$ или $b_1 = ta_1$, $b_2 = ta_2$, то есть координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны.*

□ Аналогично доказательству теоремы 2 § 1.4. Докажите самостоятельно. ■

Замечание 1.8. Если все координаты одного из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ не равны нулю, то пропорциональность координат можно записать в виде

$$\tfrac{a_1}{b_1} = \tfrac{a_2}{b_2} \quad \text{или} \quad \tfrac{b_1}{a_1} = \tfrac{b_2}{a_2}.$$

Следствие 1 § 1.7. *Пусть даны базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в L^2 и векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ из L^2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.1}$$

□ Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда по теореме 2 § 1.7 существует число $t \in \mathbb{R}$, такое что $a_1 = tb_1$, $a_2 = tb_2$ (второй случай рассматривается аналогично). Подставляя эти выражения в левую часть (7.1) и вычисляя определитель, получим нуль, то есть формула (7.1) верна.

Обратно, пусть верна (7.1). Тогда, вычисляя определитель в левой части этой формулы, получим

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0. \tag{7.2}$$

Если $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, то (7.2) равносильно равенству $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, то есть координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны, а значит, по теореме 2 § 1.7 эти векторы коллинеарны.

Если $a_1 \neq 0$ и $a_2 = 0$, то из (7.2) получим $b_2 = 0$. Тогда в качестве числа t возьмем число $\frac{b_1}{a_1}$ и получим $b_1 = \frac{b_1}{a_1}a_1$, $b_2 = \frac{b_1}{a_1}a_2$. По теореме 2 § 1.7 получаем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Если $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$, то вектор $\vec{a} = \vec{0}$. Так как по определению нуль-вектор коллинеарен любому вектору, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. ■

Определение скалярного произведения векторов дословно переносится в L^2, а именно *скалярным произведением векторов* $\vec{a}, \vec{b} \in L^2$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

Среди всех базисов векторного подпространства L^2 есть такие, в которых наиболее удобно вычислять скалярное произведение векторов.

Базис $I = (\vec{i}, \vec{j})$ в L^2 называется *ортонормированным*, если длины $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ и угол $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

Теорема 3 § 1.7. *Пусть даны ортонормированный базис* $I = (\vec{i}, \vec{j})$ *в* L^2 *и векторы* $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2) \in L^2$. *Тогда*

$$1)\, \vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2; \quad 2)\, |\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

□ Аналогично доказательству теоремы 1 § 1.6. Докажите самостоятельно. ■

Пример 1.7. Пусть в V^3 дан базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Рассмотрим векторное подпространство L^2, для которого векторы $\vec{a}(1, 0, 1)$ и $\vec{b}(1, 1, 0)$ будут базисом. Выясним, принадлежит ли вектор $\vec{c}(1, -1, 2)$ векторному подпространству L^2. Напомним, что в L^2 находятся векторы, которые параллельны некоторой фиксированной плоскости. По определению компланарных векторов (§ 1.3.) это означает, что вектор $\vec{c}$ принадлежит L^2 тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарными. Значит, чтобы проверить, принадлежит ли вектор $\vec{c}$ векторному подпространству L^2, нам нужно выяснить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Для этого применим теорему 3 § 1.4 и вычислим определитель, составленный из координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0$$

Так как определитель получился равным 0, по теореме 3 § 1.4 получим, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, а значит, $\vec{c}$ принадлежит векторному подпространству L^2. Следовательно, мы можем поставить следующий вопрос: какие координаты имеем вектор $\vec{c}$ в базисе $A = (\vec{a}, \vec{b})$? По определению координат вектора в подпространстве L^2 это означает, что нам нужно найти числа c_1, c_2 в равенстве

$$\vec{c} = c_1\vec{a} + c_2\vec{b}. \qquad (*)$$

Мы знаем координаты векторов $\vec{c}(1, -1, 2)$, $\vec{a}(1, 0, 1)$ и $\vec{b}(1, 1, 0)$ относительно базиса E. По определению координат вектора (§ 1.4.) получим

$$\vec{c} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3; \quad \vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3; \quad \vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \qquad (**)$$

Подставим $(**)$ в $(*)$, раскроем скобки и соберем коэффициенты при векторах $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$(1 - c_1 - c_2)\vec{e}_1 + (-1 - c_2)\vec{e}_2 + (2 - c_1)\vec{e}_3 = \vec{0} \qquad (***)$$

Так как $\vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$, то $\vec{0}(0, 0, 0)$ в базисе E. По следствию 1 § 1.4 получим, что у вектора, стоящего в левой части $(***)$, и нуль-вектора равные координаты, то есть $1 - c_1 - c_2 = 0$, $-1 - c_2 = 0$, $2 - c_1 = 0$. Итак, мы нашли координаты вектора $\vec{c}(2, -1)$ в базисе A. ■

Пусть дана прямая ℓ. Рассмотрим все векторы из V^3, которые параллельны прямой ℓ, и обозначим их множество L^1. Аналогично L^2 доказывается, что L^1 будет векторным подпространством.

§1.8. Ориентация L^2 и V^3.

1. Обозначим $\mathfrak{b}$ множество всех базисов векторного подпространства L^2. Пусть $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ – два произвольных базиса из $\mathfrak{b}$. Разложим векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ по векторам базиса A:

$$\vec{b}_1 = b_{11}\vec{a}_1 + b_{21}\vec{a}_2; \quad \vec{b}_2 = b_{12}\vec{a}_1 + b_{22}\vec{a}_2;$$

Согласно определению координат вектора в L^2 (§ 1.6.) числа (b_{11}, b_{21}) и (b_{12}, b_{22}) являются координатами векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ в базисе A соответственно. Отметим, что первый индекс у координаты вектора указывает номер координаты, а второй – номер вектора. Сама буква говорит, вектор какого базиса мы раскладывали. Так b_{12} означает, что это первая координата (то есть коэффициент перед $\vec{a}_1$) для вектора $\vec{b}_2$. К сожалению, в обозначении координаты не отражено, по какому базису раскладывался вектор.

Из координат векторов $\vec{b}_1(b_{11}, b_{21})$, $\vec{b}_2(b_{12}, b_{22})$ составим матрицу, записывая координаты векторов в столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей перехода от базиса A к базису B*. Ее определитель обозначается $A|B$ и называется *определителем матрицы перехода от базиса A к базису B*.

Так как вектора базиса не коллинеарны, то их координаты не пропорциональны, а значит, определитель матрицы перехода отличен от нуля.

Свойства определителей матриц перехода.
Пусть даны произвольные базисы $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ из $\mathfrak{b}$.

$$1^0.\, A|A = 1; \quad 2^0.\, (A|B)(B|C) = A|C; \quad 3^0.\, (A|B)(B|A) = 1$$

$\square$ 1^0. Чтобы получить матрицу перехода от базиса A к базису A, нужно разложить векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ по векторам базиса $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$:

$$\vec{a}_1 = 1\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2; \quad \vec{a}_2 = 0\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2;$$

и записать коэффициенты разложения в матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Определитель $A|A$ такой матрицы равен 1 (см. определение определителя второго порядка § 1.4.). Таким образом, $A|A = 1$.
2^0. Нам нужны три определителя матриц перехода: $A|B$, $B|C$ и $A|C$. Чтобы получить первые два определителя, разложим векторы базиса B по векторам базиса A (для $A|B$) и векторы базиса C по векторам базиса B (для $B|C$):

$$1)\ \begin{array}{l} \vec{b}_1 = b_{11}\vec{a}_1 + b_{21}\vec{a}_2; \\ \vec{b}_2 = b_{21}\vec{a}_1 + b_{22}\vec{a}_2; \end{array} \quad 2)\ \begin{array}{l} \vec{c}_1 = c_{11}\vec{b}_1 + c_{21}\vec{b}_2; \\ \vec{c}_2 = c_{12}\vec{b}_2 + c_{22}\vec{b}_2; \end{array} \qquad (*)$$

Для получения определителя $A|C$ нам нужно знать разложение векторов базиса C по векторам базиса A. Для этого подставим выражения для векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ из (*) в выражения для векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ (*), раскроем скобки и соберем коэффициенты при векторах $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$\begin{array}{l} \vec{c}_1 = (c_{11}b_{11} + c_{21}b_{12})\vec{a}_1 + (c_{11}b_{21} + c_{21}b_{22})\vec{a}_2; \\ \vec{c}_2 = (c_{12}b_{11} + c_{22}b_{12})\vec{a}_1 + (c_{12}b_{21} + c_{22}b_{22})\vec{a}_2; \end{array} \qquad (**)$$

Используя (*) и (**) запишем определители $A|B$, $B|C$ и $A|C$.

$$A|B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21};$$
$$B|C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21};$$
$$A|C = \begin{vmatrix} c_{11}b_{11} + c_{21}b_{12} & c_{12}b_{11} + c_{22}b_{12} \\ c_{11}b_{21} + c_{21}b_{22} & c_{12}b_{21} + c_{22}b_{22} \end{vmatrix} = (c_{11}b_{11} + c_{21}b_{12})(c_{12}b_{21} + c_{22}b_{22}) -$$
$$(c_{12}b_{11} + c_{22}b_{12})(c_{11}b_{21} + c_{21}b_{22});$$

Подставляя полученные выражения в равенство $(A|B)(B|C) = A|C$, убеждаемся, что оно верно.

3^0. Возьмем во свойстве 2^0 базисы A и C совпадающими, то есть $A = C$. Тогда получим $(A|B)(B|A) = A|A = 1$. ■

Будем говорить, что базисы $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ из $\mathfrak{b}$ *одинаково ориентированы*, если определитель матрицы перехода $A|B > 0$. В противном случае базисы A и B называются *противоположно ориентированными*. Другими словами, базисы A и B противоположно ориентированы, если определитель матрицы перехода $A|B < 0$.

Пусть $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \in \mathfrak{b}$ – произвольный базис. Обозначим через K_1 множество всех базисов из $\mathfrak{b}$, которые одинаково ориентированы с базисом A. Другими словами, множеству K_1 принадлежат все базисы $B \in \mathfrak{b}$, такие что определитель $A|B > 0$. Через K_2 обозначим множество всех остальных базисов из $\mathfrak{b}$. Это множество состоит из базисов противоположно ориентированных с базисом A.

Множество K_2 не пусто. Действительно, рассмотрим базис $B = (\vec{a}_2, \vec{a}_1)$ и докажем, что он противоположно ориентирован с базисом A. Имеем $\vec{a}_2 = 0\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2$, $\vec{a}_1 = 1\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2$. Тогда $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Таким образом, базисы A и B противоположно ориентированы и $B \in K_2$.

Докажем, что любые два базиса $C, D \in K_1$ одинаково ориентированы. В самом деле, имеем $A|C > 0$ и $A|D > 0$. По свойству 3^0 определителей матриц перехода получим $C|A > 0$, а по свойству 2^0 получим, что $|D = (C|A)(A|D) > 0$, то есть базисы D и C одинаково ориентированы.

Докажем, что любые два базиса $C, D \in K_2$ одинаково ориентированы. В самом деле, так как базисы C и D противоположно ориентированы с базисом A, то $A|C < 0$ и $A|D < 0$. По свойствам 3^0 и 2^0 получим $C|D = (C|A)(A|D) > 0$, а значит, базисы C и D одинаково ориентированы.

Докажем, что любые два базиса $C \in K_1$, $D \in K_2$ противоположно ориентированы. В самом деле, имеем $A|C > 0$ и $A|D < 0$. Тогда $C|D = (C|A)(A|D) < 0$.

Итак, мы разбили множество всех базисов $\mathfrak{b}$ на два непустых непересекающихся множества K_1 и K_2. При этом любые два базиса, принадлежащие одному из этих множеств, одинаково ориентированы, а любые два базиса, принадлежащие разным множествам, противоположно ориентированы. Очевидно, что классы K_1 и K_2 не зависят от выбора базиса A.

Множества K_1 и K_2 называются *ориентациями* L^2. Будем говорить, что L^2 *ориентировано*, если для него фиксирована одна из ориентаций. Базисы, принадлежащие фиксированной ориентации называются *правыми*, остальные базисы называются *левыми*.

Замечание 1.9.

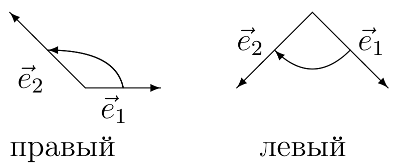


Рис.1.34

Можно доказать, что все базисы из $\mathfrak{b}$ (Рис.1.34), у которых кратчайший поворот от первого вектора ко второму идет против часовой стрелки, имеют одинаковую ориентацию. Договоримся, для удобства, фиксировать на L^2 именно это множество базисов. Тогда базисы этого множества будут правыми, а базисы из второго множества (кратчайший поворот от первого вектора ко второму идет по часовой стрелке) будут левыми.

2. Ориентация V^3 определяется аналогично ориентации L^2.

Обозначим множество всех базисов в V^3 через $\mathfrak{B}$. Пусть $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – произвольные базисы из $\mathfrak{B}$. Разложим векторы базиса B по векторам базиса A

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= b_{11}\vec{a}_1 + b_{21}\vec{a}_2 + b_{31}\vec{a}_3 \\ \vec{b}_2 &= b_{12}\vec{a}_1 + b_{22}\vec{a}_2 + b_{32}\vec{a}_3 \\ \vec{b}_3 &= b_{13}\vec{a}_1 + b_{23}\vec{a}_2 + b_{33}\vec{a}_3 \end{aligned}$$

и запишем их столбцами в матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей перехода от базиса A к базису B*. Ее определитель называется *определителем матрицы перехода от базиса A к базису B* и обозначается $A|B$. Так как вектора базиса не компланарны, то по теореме 3 § 1.4 определитель матрицы перехода от базиса A к базису B отличен от нуля.

Свойства определителей матриц перехода.

$$1^0.\, A|A = 1; \quad 2^0.\, (A|B)(B|C) = A|C; \quad 3^0.\, (A|B)(B|A) = 1.$$

$\square$ Проведите самостоятельно аналогично случаю L^2. $\blacksquare$

Будем говорить, что базисы $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ из $\mathfrak{B}$ *одинаково ориентированы*, если определитель матрицы перехода $A|B > 0$. В противном случае будем называть базисы A и B *противоположно ориентированными*. Другими словами, базисы A и B противоположно ориентированы, если $A|B < 0$.

Пусть $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \in \mathfrak{B}$ – произвольный базис. Обозначим через K_1 множество всех базисов из $\mathfrak{B}$, которые одинаково ориентированы с базисом A. Другими словами, множеству K_1 принадлежат все базисы $B \in \mathfrak{B}$, такие что определитель $A|B > 0$. Через K_2 обозначим множество всех остальных базисов из $\mathfrak{B}$. Это множество состоит из базисов противоположно ориентированных с базисом A.

Множество K_2 не пусто. Действительно, рассмотрим базис $B = (\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3)$ и докажем, что он противоположно ориентирован с базисом A. Имеем $A|B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Мы видим, что базисы A и B ориентированы противоположно, а значит, базис B принадлежит классу K_2.

Докажем, что любые два базиса $C, D \in K_1$ одинаково ориентированы. В самом деле, имеем $A|C > 0$ и $A|D > 0$. По свойству 3^0 определителей матриц перехода получим $C|A > 0$, а по свойству 2^0 получим, что $|D = (C|A)(A|D) > 0$, то есть базисы D и C одинаково ориентированы.

Докажем, что любые два базиса $C, D \in K_2$ одинаково ориентированы. В самом деле, так как базисы C и D противоположно ориентированы с базисом A, то $A|C < 0$ и $A|D < 0$. По свойствам 3^0 и 2^0 получим $C|D = (C|A)(A|D) > 0$, а значит, базисы C и D одинаково ориентированы.

Докажем, что любые два базиса $C \in K_1$, $D \in K_2$ противоположно ориентированы. В самом деле, имеем $A|C > 0$ и $A|D < 0$. Тогда $C|D = (C|A)(A|D) < 0$.

Итак, мы разбили множество всех базисов $\mathfrak{B}$ на два непустых непересекающихся множества K_1 и K_2. При этом любые два базиса, принадлежащие одному из этих множеств, одинаково ориентированы, а любые два базиса, принадлежащие разным множествам, противоположно ориентированы. Очевидно, что классы K_1 и K_2 не зависят от выбора базиса A.

Множества K_1 и K_2 называются *ориентациями* в V^3. Будем говорить, что V^3 *ориентировано*, если для него фиксирована одна из ориентаций. Базисы, принадлежащие фиксированной ориентации называются *правыми*, остальные базисы называются *левыми*.

Замечание 1.10. Можно доказать, что все базисы, у которых первый, второй и третий векторы расположены как большой, указательный и средний пальцы правой руки, имеют одинаковую ориентацию. Для удобства договоримся фиксировать на V^3 именно эту ориентацию. Тогда ее базисы будут называться правыми, а базисы, принадлежащие другой ориентации будут называться левыми. У них первый, второй и третий векторы расположены как большой, указательный и средний пальцы левой руки.

§1.9. Векторное и смешанное произведения векторов.

Пусть V^3 ориентировано.

Векторным произведение не коллинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ называется такой вектор $\vec{c}$, что

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

2) $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) базис $(\vec a, \vec b, \vec c)$ – правый. Обозначение $\vec c = [\vec a, \vec b]$.

По определению положим для коллинеарных векторов $\vec a, \vec b \in V^3$ векторное произведение $[\vec a, \vec b] = \vec 0$.

Замечание 1.11.

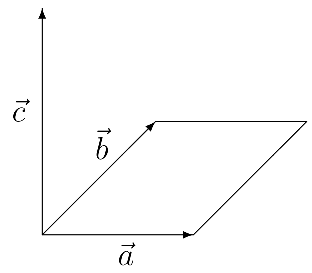


Рис.1.35

1. Первое условие в определении векторного произведения можно сформулировать так: длина вектора $[\vec a, \vec b]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec a$ и $\vec b$ (Рис.1.35).
2. Напомним, что для однозначного задания вектора нам нужно указать его длину и направление. Первое условие в определении векторного произведения задает длину вектора, а второе и третье – его направление.

Замечание 1.12. Длину векторного произведения $|[\vec a, \vec b]|$ можно выразить через скалярные произведения по формуле

$$|[\vec a, \vec b]| = \sqrt{\vec a^2 \vec b^2 - (\vec a \vec b)^2} \tag{9.1}$$

В самом деле, по определению векторного произведения векторов и основному тригонометрическому тождеству получим $|[\vec a, \vec b]|^2 = (|\vec a||\vec b| \sin(\vec a, \vec b))^2 = |\vec a|^2|\vec b|^2 - |\vec a|^2|\vec b|^2 \cos^2(\vec a, \vec b) = \vec a^2 \vec b^2 - (\vec a \vec b)^2$.

Смешанным произведением векторов $\vec a, \vec b, \vec c \in V^3$ называется число $[\vec a, \vec b]\vec c$. Обозначение $(\vec a \vec b \vec c)$.

Замечание 1.13. Чтобы найти смешанное произведение векторов $\vec a, \vec b, \vec c$ нужно сначала найти векторное произведение векторов $\vec a$ и $\vec b$, а затем скалярно умножить его на вектор $\vec c$.

Замечание 1.14. Если векторы $\vec a, \vec b, \vec c$ компланарны, то их смешанное произведение $(\vec a \vec b \vec c)$ равно нулю. В самом деле, по определению векторного произведения векторов вектор $[\vec a, \vec b]$ перпендикулярен векторам $\vec a$ и $\vec b$, а значит, перпендикулярен вектору $\vec c$. Тогда по свойству 6^0 скалярного произведения векторов (§ 1.6.) получим $(\vec a \vec b \vec c) = [\vec a, \vec b]\vec c = 0$.

Теорема 1 § 1.9. *Пусть $\vec a, \vec b, \vec c$ – три не компланарные вектора и V – объем параллелепипеда, построенного на этих векторах. Тогда смешанное произведение $(\vec a \vec b \vec c)$ равно V, если базис $(\vec a, \vec b, \vec c)$ – правый и равно $-V$, если базис $(\vec a, \vec b, \vec c)$ – левый.*

□

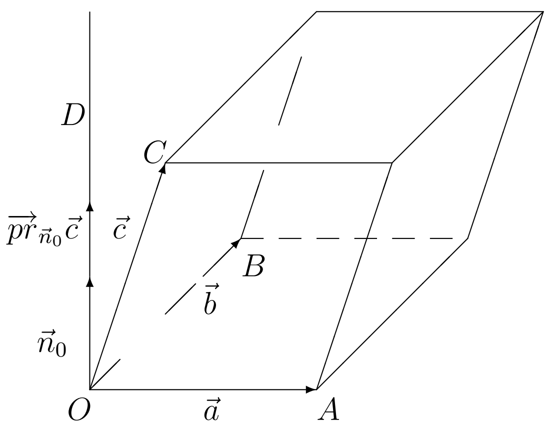


Рис.1.36

Обозначим $\vec n_0$ орт вектора $[\vec a, \vec b]$ (Рис.1.36), то есть $\vec n_0 = \frac{[\vec a, \vec b]}{|[\vec a, \vec b]|}$ (§ 1.5.). По определению векторного произведения векторов длина $|[\vec a, \vec b]|$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec a$, $\vec b$. Обозначим ее через S. Тогда

$$[\vec a, \vec b] = S\vec n_0. \qquad (*)$$

Кроме того, по определению векторного произведения векторов базис $(\vec a, \vec b, [\vec a, \vec b])$ будет правым, а значит, будет правым и базис $(\vec a, \vec b, \vec n_0)$.

Возьмем произвольную точку O, отложим от нее представители векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ и построим на них параллелепипед (Рис.1.36). Через точку O проведем прямую (OD), перпендикулярную плоскости (OAB). Спроектируем вектор $\vec c$ на ось $((OD), \vec n_0)$ параллельно плоскости (OAB). Так как плоскость (OAB) перпендикулярна прямой (OD), то проекция ортогональная и, во-первых, по свойству 3^0 скалярного произведения векторов (§ 1.6.) получим

$$\vec n_0 \vec c = pr_{\vec n_0}\vec c, \qquad (**)$$

во-вторых, $|\overrightarrow{pr}_{\vec n_0}\vec c| = h$. Выясним, как связаны проекция $pr_{\vec n_0}\vec c$ вектора $\vec c$ на ось $((OD), \vec n_0)$ (§ 1.5.) и высота построенного параллелепипеда h. Для этого обозначим координаты вектора $\vec c$ в базисе $(\vec a, \vec b, \vec n_0)$ через (c_1, c_2, c_3). Пусть базис $(\vec a, \vec b, \vec c)$ – правый, то есть одинаково ориентирован с базисом $(\vec a, \vec b, \vec n_0)$. Тогда определитель матрицы перехода от базиса $(\vec a, \vec b, \vec n_0)$ к базису $(\vec a, \vec b, \vec c)$ положителен (§ 1.8.), то есть $\begin{vmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} > 0$ или $c_3 > 0$. Следовательно, представители векторов $\vec c$ и $\vec n_0$, отложенные от точки O, находятся в одном полупространстве с границей (OAB), а значит, векторная проекция $\overrightarrow{pr}_{\vec n_0}\vec c$ и вектор $\vec n_0$ сонаправлены. Тогда по определению скалярной проекции (§ 1.5.)

$$pr_{\vec n_0}\vec c = h. \qquad (***)$$

Аналогично, если базис $(\vec a, \vec b, \vec c)$ – левый, то $c_3 < 0$ и представители векторов $\vec n_0$ и $\vec c$, отложенные от точки O, находятся в разных полупространствах с границей (OAB), следовательно, векторная проекция $\overrightarrow{pr}_{\vec n_0}\vec c$ и вектор $\vec n_0$ противоположно направлены, а значит, по определению скалярной проекции (§ 1.5.)

$$pr_{\vec n_0}\vec c = -h. \qquad (****)$$

Вычислим смешанное произведение $(\vec a\vec b\vec c)$ с учетом $(*)$ и $(**)$: $(\vec a\vec b\vec c) = [\vec a, \vec b]\vec c = (S\vec n_0)\vec c = S(\vec n_0\vec c) = S pr_{\vec n_0}\vec c$. Если базис $(\vec a, \vec b, \vec c)$ – правый, то с учетом $(***)$ получим $(\vec a\vec b\vec c) = Sh = V$. Если базис $(\vec a, \vec b, \vec c)$ – левый, то с учетом $(****)$ получим $(\vec a\vec b\vec c) = S(-h) = -V$. ■

Теорема 2 § 1.9. *Для любых векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}).$$

□ Докажем, что $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$. Остальное доказывается аналогично.

1. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Тогда по замечанию 1.14 смешанные произведения $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$ и $(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = 0$, а значит, требуемое равенство выполняется.

2. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны. Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правый базис, то $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ – левый базис (§ 1.8.). В первом случае по теореме 1 § 1.9 смешанное произведение $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком плюс, а во втором случае – объему того же параллелепипеда, взятого со знаком минус, то есть $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$. Если базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – левый базис, то аналогичные рассуждения приводят к тому же результату. ■

Теорема 3 § 1.9. *Для любых векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V^3$

$$1)\ ((\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d}) = (\vec{a}\vec{c}\vec{d}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{d});\quad 2)\ (\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{d}) + (\vec{a}\vec{c}\vec{d});\quad 3)\ (\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d})) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + (\vec{a}\vec{b}\vec{d}).$$

□ Докажем 3). По определению смешанного произведения векторов и по свойству 5^0 скалярного произведения векторов (§ 1.6.) получим $(\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d})) = [\vec{a}, \vec{b}](\vec{c} + \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} + [\vec{a}, \vec{b}]\vec{d} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + (\vec{a}\vec{b}\vec{d})$.

Докажем 1). Дважды применим теорему 2 § 1.9, а затем проведем вычисления аналогичные доказательству пункта 3). Получим $((\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d}) = (\vec{c}\vec{d}(\vec{a} + \vec{b})) = [\vec{c}, \vec{d}](\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{c}\vec{d}\vec{a}) + (\vec{c}\vec{d}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{c}\vec{d}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{d})$. Пункт 2) докажите самостоятельно. ■

Теорема 4 § 1.9. *Для любых векторов* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

□ Пусть $\vec{c} \in V^3$ – произвольный вектор. Вычислим скалярное произведение $([\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}])\vec{c}$ с учетом теоремы 2 § 1.9: $([\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}])\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} + [\vec{b}, \vec{a}]\vec{c} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + (\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$, то есть $([\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}])\vec{c} = 0$ для любого вектора $\vec{c} \in V^3$. По свойству 7^0 скалярного произведения векторов (§ 1.6.) это означает, что $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}] = \vec{0}$, то есть $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$. ■

Теорема 5 § 1.9. *Для любых векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$

$$1)\ [(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}];\quad 2)\ [\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}].$$

□ Докажем 1). Пусть $\vec{e} \in V^3$ – произвольный вектор. Вычислим скалярное произведение $([(\vec{a}+\vec{b}), \vec{c}] - [\vec{a}, \vec{c}] - [\vec{b}, \vec{c}])\vec{e}$ с учетом свойств $4^0, 5^0$ скалярного произведения векторов (§ 1.6.), определения смешанного произведения векторов и теоремы 3 § 1.9: $([(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] - [\vec{a}, \vec{c}] - [\vec{b}, \vec{c}])\vec{e} = [(\vec{a}+\vec{b}), \vec{c}]\vec{e} - [\vec{a}, \vec{c}]\vec{e} - [\vec{b}, \vec{c}]\vec{e} = ((\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{e}) - (\vec{a}\vec{c}\vec{e}) - (\vec{b}\vec{c}\vec{e}) = (\vec{a}\vec{c}\vec{e}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{e}) - (\vec{a}\vec{c}\vec{e}) - (\vec{b}\vec{c}\vec{e}) = 0$. Тогда по свойству 7^0 скалярного произведения векторов (§ 1.6.) $[(\vec{a}+\vec{b}), \vec{c}] - [\vec{a}, \vec{c}] - [\vec{b}, \vec{c}] = \vec{0}$, то есть $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.

Формула 2) следует из формулы 1) в силу теоремы 4 § 1.9. ■

Теорема 6 § 1.9. *Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = ((\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c}) = (\vec{a}\vec{b}(\alpha\vec{c})).$$

$\square$ Докажем, что $\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = ((\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c})$ (остальные равенства доказываются аналогично). Применяя дважды теорему 2 § 1.9, определение смешанного произведения и свойство 4^0 скалярного произведения векторов (§ 1.6.), получим $((\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}(\alpha\vec{a})) = [\vec{b}, \vec{c}](\alpha\vec{a}) = \alpha([\vec{b}, \vec{c}]\vec{a}) = \alpha(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. $\blacksquare$

Теорема 7 § 1.9. *Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\alpha[\vec{a}, \vec{b}] = [(\alpha\vec{a}), \vec{b}] = [\vec{a}, (\alpha\vec{b})]$$

$\square$ Докажем, что $\alpha[\vec{a}, \vec{b}] = [(\alpha\vec{a}), \vec{b}]$ (остальное доказывается аналогично). Пусть $\vec{c} \in V^3$ – произвольный вектор. Вычислим скалярное произведение векторов $(\alpha[\vec{a}, \vec{b}] - [(\alpha\vec{a}), \vec{b}])\vec{c}$ с учетом свойств скалярного произведения векторов (§ 1.6.), определения смешанного произведения векторов и теоремы 6 § 1.9: $(\alpha[\vec{a}, \vec{b}] - [(\alpha\vec{a}), \vec{b}])\vec{c} = (\alpha[\vec{a}, \vec{b}])\vec{c} - [(\alpha\vec{a}), \vec{b}]\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) - ((\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) - \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$. Тогда по свойству 7^0 вектор $\alpha[\vec{a}, \vec{b}] - [(\alpha\vec{a}), \vec{b}] = \vec{0}$. $\blacksquare$

Теорема 8 § 1.9. *Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – правый ортонормированный базис. Тогда векторные произведения векторов этого базиса составляют следующую таблицу (столбец – первый сомножитель, строка – второй):*

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$-\vec{k}$	$\vec{j}$
$\vec{j}$	$\vec{k}$	$\vec{0}$	$-\vec{i}$
$\vec{k}$	$-\vec{j}$	$\vec{i}$	$\vec{0}$

$\square$ Так как вектор $\vec{i}$ коллинеарен сам себе, то $[\vec{i}, \vec{i}] = \vec{0}$ по определению векторного произведения векторов. Вычислим векторное произведение $[\vec{i}, \vec{j}]$. Обозначим $\vec{a} = [\vec{i}, \vec{j}]$. По определению векторного произведения векторов длина $|\vec{a}| = |[\vec{i}, \vec{j}]| = |\vec{i}||\vec{j}|\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 1$. Далее, вектор $\vec{a}$ перпендикулярен и вектору $\vec{i}$, и вектору $\vec{j}$. Векторов единичный длины, перпендикулярных векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ одновременно, только два: $\vec{k}$ и $-\vec{k}$. Для выбора между этими векторами используем третье условие из определения векторного произведения векторов. Базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{a})$ – правый по определению векторного произведения векторов. По условию базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – тоже правый, а значит, $\vec{a} = \vec{k}$. Итак, $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$. Используя теорему 4 § 1.9, получим $[\vec{j}, \vec{i}] = -\vec{k}$. Остальные произведения вычисляются аналогично. $\blacksquare$

Пример 1.8. 1. Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – правый ортонормированный базис. Найдем длину вектора $\vec{p} = [(2\vec{i} + \vec{j}), (\vec{j} - 3\vec{k})]$. Обозначим вектор $\vec{a} = \vec{j} - 3\vec{k}$ и применим теоремы 5 § 1.9, 7 § 1.9. Тогда $[(2\vec{i}+\vec{j}), \vec{a}] = 2[\vec{i}, \vec{a}] + [\vec{j}, \vec{a}] = 2[\vec{i}, (\vec{j}-3\vec{k})] + [\vec{j}, (\vec{j}-3\vec{k})] = 2[\vec{i}, \vec{j}] - 2\cdot 3[\vec{i}, \vec{k}] + [\vec{j}, \vec{j}] - 3[\vec{j}, \vec{k}]$. Посмотрим на полученный результат "раскрытия скобок":

$$[(2\vec{i} + \vec{j}), (\vec{j} - 3\vec{k})] = 2[\vec{i}, \vec{j}] - 2 \cdot 3[\vec{i}, \vec{k}] + [\vec{j}, \vec{j}] - 3[\vec{j}, \vec{k}].$$

Принцип тот же, что и при работе со скалярным произведением векторов, но нужно следить за порядком сомножителей (см. теорему 4 § 1.9). Далее, применяя теорему 8 § 1.9, получим $\vec{p} = 2\vec{k} + 6\vec{j} - 3\vec{i}$. По определению координат (§ 1.4.) получим $\vec{p}(-3, 6, 2)$. Осталось только вычислить длину вектора $\vec{p}$ по теореме 1 § 1.6: $|\vec{p}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2} = 7$.
2. Пусть смешанное произведение $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -1$. Найдем смешанное произведение $\alpha = ((\vec{a} + \vec{b})\vec{c}(\vec{b} - 3\vec{c}))$. Обозначим $\vec{q} = \vec{b} - 3\vec{c}$. Найдем число α, используя теоремы 6 § 1.9 и 3 § 1.9: $\alpha = ((\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{q}) = (\vec{a}\vec{c}\vec{q}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{q}) = (\vec{a}\vec{c}(\vec{b} - 3\vec{c})) + (\vec{b}\vec{c}(\vec{b} - 3\vec{c})) = (\vec{a}\vec{c}\vec{b}) - 3(\vec{a}\vec{c}\vec{c}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{b}) - 3(\vec{b}\vec{c}\vec{c})$. Посмотрим на полученный результат "раскрытия скобок":

$$((\vec{a} + \vec{b})(\vec{c})(\vec{b} - 3\vec{c})) = (\vec{a}\vec{c}\vec{b}) - 3(\vec{a}\vec{c}\vec{c}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{b}) - 3(\vec{b}\vec{c}\vec{c})$$

Опять тот же принцип раскрытия скобок: из каждой скобки берем по одному слагаемому и записываем их смешанное произведение, вынося числа за знак смешанного произведения. По-прежнему, следим за порядком сомножителей. Так как векторы $\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}$ компланарны, то смешанное произведение $(\vec{a}\vec{c}\vec{c}) = 0$. Аналогично, $(\vec{b}\vec{c}\vec{b}) = 0$ и $(\vec{b}\vec{c}\vec{c}) = 0$. Тогда $\alpha = (\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 1$. ■

Теорема 9 § 1.9. *Пусть $I = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – правый ортонормированный базис; $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ – произвольные векторы из V^3. Тогда*

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Эту формулу легко запомнить в виде формального определителя

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_1 & b_1 \\ \vec{j} & a_2 & b_2 \\ \vec{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

□ По определению координат вектора (§ 1.4.) имеем $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Вычислим векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$, используя теоремы 5 § 1.9, 7 § 1.9 и 8 § 1.9.
$[\vec{a}, \vec{b}] = [a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}] = a_1b_1[\vec{i}, \vec{i}] + a_1b_2[\vec{i}, \vec{j}] + a_1b_3[\vec{i}, \vec{k}] + a_2b_1[\vec{j}, \vec{i}] + a_2b_2[\vec{j}, \vec{j}] + a_2b_3[\vec{j}, \vec{k}] + a_3b_1[\vec{k}, \vec{i}] + a_3b_2[\vec{k}, \vec{j}] + a_3b_3[\vec{k}, \vec{k}] = a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$. ■

Замечание 1.15. Пусть даны два не коллинеарных вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданных своими координатами в правом ортонормированном базисе $I = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Возьмем произвольную точку O и отложим от нее представители $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Достроим точки O, A, B до параллелограмма $OACB$. Обозначим через $S_{\#}$ площадь параллелограмма $OACB$, через $S_{\triangle}$ – площадь треугольника $\triangle OAB$. Тогда, используя определение векторного произведения векторов, теорему 9 § 1.9 и теорему 6.1, получим формулы для вычисления площадей параллелограмма и треугольника через координаты, заданные в ортонормированном базисе:

$$S_{\#} = 2S_{\triangle} = |[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} \tag{9.2}$$

Теорема 10 § 1.9. *Пусть* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *– произвольный базис;* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3) \in V^3$ *– произвольные векторы. Тогда*

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3). \tag{9.3}$$

□ По определению координат вектора (§ 1.4.) имеем

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3; \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3; \quad \vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3. \tag{$*$}$$

Вычислим смешанное произведение $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, используя $(*)$ и свойства смешанного произведения векторов: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = ((a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3))$. Применяя теоремы 6 § 1.9 и 3 § 1.9, мы получим 27 смешанных произведений, среди них 21 нулевое. Это те смешанные произведения, в которых есть хотя бы два одинаковых вектора (это тройки компланарных векторов). Таким образом, получим

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = a_1b_2c_3(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3) + a_1b_3c_2(\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_2) + a_2b_1c_3(\vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_3) + a_2b_3c_1(\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_1) + a_3b_1c_2(\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_2) + \\ + a_3b_2c_1(\vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_1)$$

Применяя теорему 2 § 1.9, получим

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3). \tag{$**$}$$

Если раскрыть определитель, стоящий в правой части формулы (9.3), то получим правую часть равенства $(**)$. Итак, формула (9.3) верна. ■

Следствие 1 § 1.9. *Пусть* $I = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *– правый ортонормированный базис. Тогда*

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{9.4}$$

□ Применим теорему 9.3 в случае ортонормированного базиса I. Чтобы получить формулу (9.4), нам нужно доказать, что смешанное произведение $(\vec{i}\vec{j}\vec{k}) = 1$. Воспользуемся теоремой 1 § 1.9. Так как базис I ортонормированный, то параллелепипед, построенный на векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ является кубом, у которого ребро имеет длину 1. Его объем равен 1. Так как базис I – правый, то смешанное произведение $(\vec{i}\vec{j}\vec{k}) = 1$. ■

Теорема 11 § 1.9. *Пусть дан тетраэдр* $OABC$. *Обозначим его объем через* V. *Тогда*

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC})|.$$

□

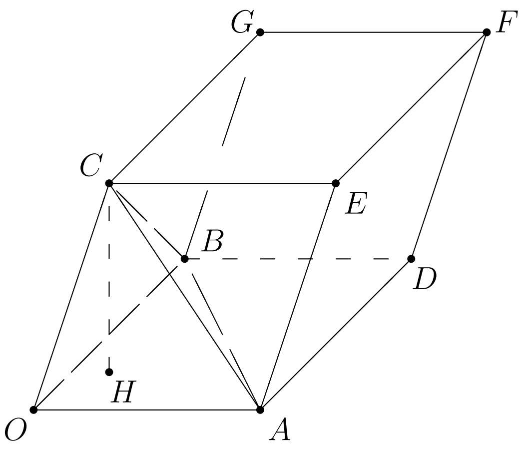


Рис.1.37

Достроим тетраэдр $OABC$ до параллелепипеда как показано на Рис.1.37. Тогда объемы V_{OABC} тетраэдра $OABC$ и V параллелепипеда $OADBCEFG$ связаны следующим образом: $V_{OABC} = \frac{1}{3}S_{OAB}CH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{OADB}CH = \frac{1}{6}V$, где S_{OAB} – площадь треугольника OAB, S_{OADB} – площадь параллелограмма $OADB$. Итак, объем параллелепипеда равен шести объемам тетраэдра $OABC$. По теореме 1 § 1.9 объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, равен модулю смешанного произведения этих векторов. Откуда получим нужную формулу. ■

§1.10. Ориентированный угол в векторном подпространстве L^2.

Пусть в ориентированном векторном подпространстве L^2 даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. *Ориентированным (или направленным) углом* между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}; \\ \pi, \text{ если } \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}; \\ (\vec{a},\vec{b}), \text{ если базис } (\vec{a},\vec{b}) \text{– правый}; \\ -(\vec{a},\vec{b}), \text{ если базис } (\vec{a},\vec{b}) \text{– левый}; \end{cases}$$

Напомним, что $(\vec{a},\vec{b})$ обозначает угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (§ 1.5.). Ориентированный угол $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ может принимать значения в полуинтервале $(-\pi,\pi]$.

Лемма 10.1. *Для любых векторов* $\vec{a},\vec{b}\in L^2$ *имеем* $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \cos(\vec{a},\vec{b})$.

□ Пусть даны произвольные векторы $\vec{a},\vec{b}\in L^2$. Если они коллинеарны, то формула очевидна.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Если базис $(\vec{a},\vec{b})$ – правый, то $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \cos(\vec{a},\vec{b})$. Если базис $(\vec{a},\vec{b})$ – левый, то $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \cos(-(\vec{a},\vec{b})) = \cos(\vec{a},\vec{b})$, так как cos – четная функция. ■

Лемма 10.2. *Пусть* $\vec{a},\vec{b}\in V^3$ *– произвольные ненулевые векторы. Тогда*

$$\sin(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{10.1}$$

□ По определению векторного произведения векторов и формуле (9.1) имеем $\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2(\vec{a},\vec{b})$. Так как $0\le(\vec{a},\vec{b})\le\pi$, $\sin(\vec{a},\vec{b})\ge 0$, а значит, верна формула (10.1). ■

Теорема 1 § 1.10. *Пусть* $(\vec{i},\vec{j})$ *– правый ортонормированный базис в* L^2*;* $\vec{a}(a_1,a_2)$*,* $\vec{b}(b_1,b_2)$ *– произвольные ненулевые векторы в* L^2*. Тогда*

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2}};\quad \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2}}. \tag{10.2}$$

□ По определению скалярного произведения (§ 1.7.) и теореме 3 § 1.7 получим $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2}}$. Так как по лемме 10.1 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \cos(\vec{a},\vec{b})$, то получим первую формулу из (10.2).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то вторая формула из (10.2) верна в силу следствия 1 § 1.7 и определения ориентированного угла (в обеих частях равенства будут стоять нули).

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Тогда из формулы (10.1) с учетом теоремы 3 § 1.7 получим $\sin(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\sqrt{((a_1)^2+(a_2)^2)((b_1)^2+(b_2)^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Таким образом,

$$\sin(\vec{a},\vec{b}) = \left|\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right|. \tag{$*$}$$

Если базис $(\vec{a},\vec{b})$ – правый, то по определению ориентированного угла $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\vec{a},\vec{b})$, следовательно, $\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \sin(\vec{a},\vec{b})$. С другой стороны, в числителе формулы ($*$) стоит определитель матрицы перехода от базиса $(\vec{i},\vec{j})$ к базису $(\vec{a},\vec{b})$. Так как эти базисы имеют одинаковую ориентацию (оба правые), определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0$, следовательно, модуль в правой части ($*$) раскрывается со знаком плюс и мы получаем вторую формулу из (10.2).

Если базис $(\vec{a},\vec{b})$ – левый, то $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -(\vec{a},\vec{b})$, следовательно, $\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \sin(-(\vec{a},\vec{b})) = -\sin(\vec{a},\vec{b})$ в силу нечетности функции sin. С другой стороны, так как базисы $(\vec{i},\vec{j})$ и $(\vec{a},\vec{b})$ противоположно ориентированы, определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} < 0$, следовательно, модуль в правой части ($*$) раскрывается со знаком минус, а значит, верна вторая формула из (10.2). ■

Следствие 1 § 1.10. *Пусть даны правый ортонормированный базис* $(\vec{i},\vec{j})$ *и ненулевой вектор* $\vec{a}(a_1,a_2)$*. Тогда*

$$a_1 = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{i},\vec{a}});\quad a_2 = |\vec{a}|\sin(\widehat{\vec{i},\vec{a}}). \tag{10.3}$$

□ Применим формулу (10.2) для векторов $\vec{i}$ и $\vec{a}$. Тогда $\cos(\widehat{\vec{i},\vec{a}}) = \frac{a_1}{|\vec{a}||\vec{i}|}$, то есть мы получаем первую формулу из (10.3).

Аналогично $\sin(\widehat{\vec{i},\vec{a}}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}}{|\vec{a}||\vec{i}|}$, то есть $\sin(\widehat{\vec{i},\vec{a}}) = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$, то есть верна вторая формула из (10.3). ■

Следствие 2 § 1.10. *Пусть* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *– произвольные ненулевые векторы. Тогда имеют место формулы*

$$cos(\widehat{(\vec{a},\vec{b})} + \widehat{(\vec{b},\vec{c})}) = cos(\widehat{\vec{a},\vec{c}}); \quad sin(\widehat{(\vec{a},\vec{b})} + \widehat{(\vec{b},\vec{c})}) = sin(\widehat{\vec{a},\vec{c}}). \tag{10.4}$$

□ Проведем доказательство первой формулы. Вторая формула доказывается аналогично (докажите самостоятельно).

Фиксируем правый ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j})$ и обозначим координаты данных векторов в нем следующим образом: $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$, $\vec{c}(c_1, c_2)$.

Рассмотрим левую часть первого равенства из (10.4), применим формулу для косинуса суммы двух углов, формулы (10.2) и теорему 3 § 1.7:

$$cos(\widehat{(\vec{a},\vec{b})} + \widehat{(\vec{b},\vec{c})}) = cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})cos(\widehat{\vec{b},\vec{c}}) - sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})sin(\widehat{\vec{b},\vec{c}}) =$$
$$= \frac{(a_1b_1+a_2b_2)(b_1c_1+b_2c_2)-(a_1b_2-a_2b_1)(a_1c_2-a_2c_1)}{|\vec{a}||\vec{b}|^2|\vec{c}|} = \frac{b_1^2(a_1c_1+a_2c_2)+b_2^2(a_1c_1+a_2c_2)}{|\vec{a}||\vec{b}|^2|\vec{c}|} =$$
$$= \frac{a_1c_1+a_2c_2}{|\vec{a}||\vec{c}|} = cos(\widehat{\vec{a},\vec{c}})$$

Что и требовалось доказать. ■

§1.11. Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии.

Приведем алгоритм решения задач элементарной геометрии с использованием векторной алгебры.

1. Связать с данными и искомыми объектами задачи векторы.
2. Переформулировать задачу на языке векторной алгебры.
3. Решить задачу из п.2:

   1) ввести базис (для задач планиметрии – подпространства L^2; для задач стереометрии – V^3);

   2) найти координаты векторов, введенных в п.1;

   3) применить необходимые формулы.
4. Перевести ответ с языка векторной алгебры на язык элементарной геометрии (если это необходимо).

Задача 11.1. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Выяснить, являются ли прямые (AB_1), (BC_1) и (CA_1) параллельными одной плоскости?

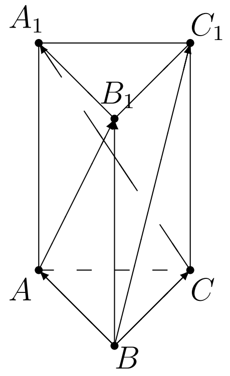


Рис.1.38

□ 1. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ (Рис.1.38).

2. Задача на языке векторной алгебры: выяснить, являются ли векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ компланарными (см. задачу 5 из Задач к главе 1).

3. Рассмотрим базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, где $\vec{e}_1 = \overrightarrow{BA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{BB_1}$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ в базисе E. По правилу треугольника получим $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$. По правилу параллелограмма получим $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Наконец, по правилу многоугольника получим $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} = -\vec{e}_2 + \vec{e}_1 + \vec{e}_3$. Тогда по определению координат вектора (§ 1.4.) получим $\overrightarrow{AB_1}(-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{BC_1}(0, 1, 1)$, $\overrightarrow{CA_1}(1, -1, 1)$.
Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ и применим теорему 3 § 1.4: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Итак, векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ не компланарны.

4. Прямые (AB_1), (BC_1) и (CA_1) не параллельны одной плоскости. ■

Задача 11.2. В условиях предыдущей задачи найти точку K на прямой (A_1B_1), такую что прямые (AK), (BC_1) и (CA_1) будут параллельны одной плоскости.

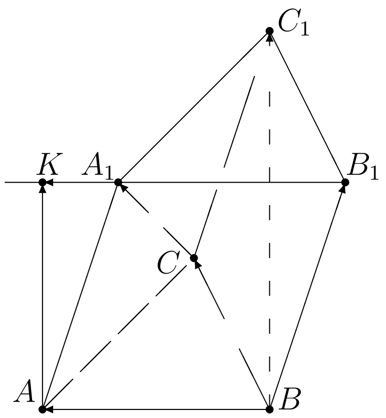


Рис.1.39

□ 1. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{A_1K}$ (Рис.1.39).

2. Задача на языке векторной алгебры: найти такой вектор $\overrightarrow{A_1K}$, чтобы векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ были компланарны.

3. Рассмотрим такой же базис как в предыдущей задаче. У нас уже найдены координаты векторов $\overrightarrow{BC_1}(0, 1, 1)$ и $\overrightarrow{CA_1}(1, -1, 1)$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AK}$.
Так как точка K принадлежит прямой (A_1B_1), то векторы $\overrightarrow{A_1K}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ коллинеарны, а значит, по теореме 2 § 1.3 существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что $\overrightarrow{A_1K} = \lambda\overrightarrow{A_1B_1}$. Тогда по правилу треугольника $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1K} = \vec{e}_3 + \lambda(-\vec{e}_1)$. Таким образом, $\overrightarrow{AK}(-\lambda, 0, 1)$.
Применяя теорему 3 § 1.4 к векторам $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$, получим $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ или $-2\lambda - 1 = 0$, то есть $\lambda = -\frac{1}{2}$.

4. Итак, мы получили $\overrightarrow{A_1K} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1}$. Выясним, где находится точка K. По определению произведения вектора на число (§ 1.3.) получаем, что векторы $\overrightarrow{A_1K}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ противоположно направлены и их длины связаны равенством $A_1K = \frac{1}{2}A_1B_1$. Следовательно, точка

K находится на луче, дополнительном к лучу $[A_1B_1)$, на расстоянии, равном половине длины отрезка A_1B_1. ■

Задача 11.3. Пусть $ABCD$ – произвольный тетраэдр; $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $\widehat{ADB} = \gamma$, $\widehat{BDC} = \alpha$, $\widehat{ADC} = \beta$. Найдите величину угла между ребрами DA и BC.

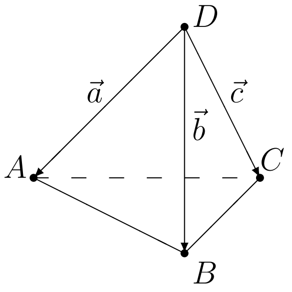


Рис.1.40

□ 1. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$ (Рис.1.40).

2.Задача на языке векторной алгебры: найти угол между векторами $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

3. Введем базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, где $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Из определения скалярного произведения векторов (§ 1.6.) получим

$$\cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{DA}\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{BC}|} \qquad (****)$$

Заметим, что введенный базис не является ортонормированным, а значит, использовать теорему 6.1 мы не можем. Будем вычислять скалярное произведение векторов и их длины, используя свойства скалярного произведения (§ 1.6.). По правилу треугольника получим $\overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{c}$. Кроме того, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$. Тогда скалярное произведение $\overrightarrow{DA}\overrightarrow{BC} = \vec{a}(-\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} = -ab\cos\gamma + ac\cos\beta$. Очевидно, что $|\overrightarrow{DA}| = a$. Найдем $|\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (-\vec{b} + \vec{c})(-\vec{b} + \vec{c}) = \vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 = b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2$. Подставим все найденное в $(****)$: $\cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{-ab\cos\gamma + ac\cos\beta}{a\sqrt{b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2}}$.

4. Итак, угол между ребрами DA и BC равен $\frac{ac\cos\beta - ab\cos\gamma}{a\sqrt{b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2}}$. ■

Задача 11.4. Стороны AB, BC, CA треугольника ABC удвоены при продолжении за точки B, C, A соответственно и получены точки M, N, P. Найдите отношение площадей S_{ABC} и S_{MNP} треугольников ABC и MNP.

Решение.

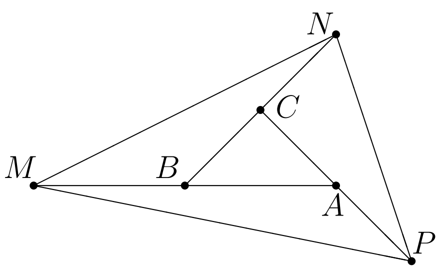


Рис.1.41

1. Так как в задаче нужно найти отношение площадей треугольников, то нам нужны векторы определяющие эти треугольники. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MN}$ (Рис.1.41).

2. Применяя замечание 1.11, получим задачу на языке векторной алгебры: найти число

$$\frac{S_{MPN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}|[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}]|}{\frac{1}{2}|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]|} = \frac{|[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}]|}{|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]|} \qquad (\vee)$$

3. Так как задача из планиметрии, нужно ввести базис векторного подпространства L^2. Рассмотрим базис $(\vec{a}, \vec{b})$, где $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = 2\vec{a} + (-\vec{b} + \vec{a}) = 3\vec{a} - \vec{b}$. Аналогично, $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Вычислим $|[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}]| = |[3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]| = |6[\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{a}]| = 7|[\vec{a}, \vec{b}]|$. Подставим полученный результат в $(\vee)$: $\frac{S_{MPN}}{S_{ABC}} = \frac{7|[\vec{a}, \vec{b}]|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}$. Сократим на число $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ и получим $\frac{S_{MPN}}{S_{ABC}} = 7$. ■

Задача 11.5. Найти отношение объема параллелепипеда к объему тетраэдра, ребрами которого служат диагонали трех граней параллелепипеда, выходящие из одной его вершины.

Решение.

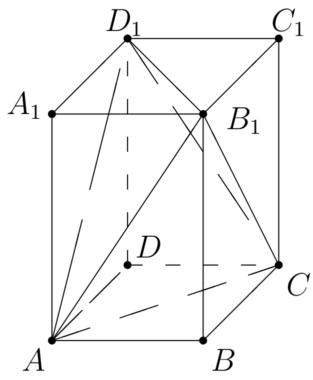


Рис.1.42

Пусть дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (Рис.1.42). Обозначим его объем V. Рассмотрим тетраэдр ACB_1D_1 и обозначим его объем V_t.

1. Так как в задаче требуется найти отношение объемов параллелепипеда и тетраэдра, нам потребуются вектора, определяющие их: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$.

2. Используя теоремы 1 § 1.9 и 11 § 1.9, получим, что надо найти отношение модулей смешанных произведений

$$\frac{V}{V_t} = \frac{|(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AA_1})|}{\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB_1}\overrightarrow{AD_1})|} \qquad (\vee\vee)$$

3. Введем базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$. Тогда по правилу параллелограмма (§ 1.2.) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AD_1} = \vec{b} + \vec{c}$. По определению координат вектора (§ 1.4.) получим $\overrightarrow{AC}(1,1,0)$, $\overrightarrow{AB_1}(1,0,1)$, $\overrightarrow{AD_1}(0,1,1)$. Применяя формулу (9.3), получим $(\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB_1}\overrightarrow{AD_1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -2(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. Подставим в $(\vee\vee)$: $\frac{V}{V_t} = \frac{|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|}{\frac{1}{6}|-2(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|} = 3$.

4. Итак, $\frac{V}{V_t} = 3$. ■

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1.

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите по несколько представителей векторов а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$.

   Ответ. а) $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$; б) $\overline{DC}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{A_1B_1}$.

2. Пусть $ABCD$ – произвольный тетраэдр; точка R – середина медианы DM грани ADB, точка K – пересечения медиан грани BDC. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{RK}$ в базисе $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.

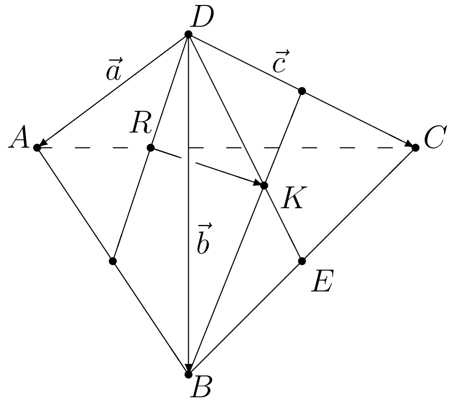


Рис.1.43

Решение. Обозначим для краткости векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ (Рис.1.43). По правилу треугольника получим

$$\overrightarrow{RK} = \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{DK} \qquad (*)$$

Так как точка R – середина отрезка DM, то $|\overrightarrow{DR}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DM}|$ и векторы $\overrightarrow{DR}$, $\overrightarrow{DM}$ сонаправлены. Тогда по определению произведения вектора на число (§ 1.3.) получим $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM}$. Далее, используя правило параллелограмма, получим $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Тогда $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$ и

$$\overrightarrow{RD} = -\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) \qquad (**)$$

Аналогичным образом выразим вектор $\overrightarrow{DK}$. Обозначим через E точку пересечения прямых (DK) и (BC). Так как точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины, то $\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c})$ и

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \qquad (***)$$

Подставим $(**)$ и $(***)$ в $(*)$ и упростим: $\overrightarrow{RK} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$. Тогда по определению координат (§ 1.4.) получим $\overrightarrow{RK}(-\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3})$.

3. Два студента математического факультета, Петя и Вася, решали задачу: представить вектор $\vec{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Они получили два различных ответа, причем оба ответа оказались верными. Возможно ли это?
Ответ: да.

4. Докажите, что вектор параллелен прямой (плоскости) тогда и только тогда, когда существует его представитель, параллельной этой прямой (плоскости).

5. Докажите, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ компланарны тогда и только тогда, когда существует плоскость σ и представители векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, параллельные этой плоскости.

6. Докажите формулы "сокращенного скалярного умножения": а) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$; б) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

7. Верно ли равенство $(\vec{a}\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

8. Пусть L и $\tilde{L}$ – векторные подпространства в V^3. Докажите, что их пересечение $L \cap \tilde{L}$ является векторным подпространством, а объединение $L \cup \tilde{L}$ – нет.

Указания. Рассмотрите две пересекающиеся прямые и множества всех векторов, параллельных им.

9. Приведите примеры множеств векторов, которые не являются векторными подпространствами.

10. Докажите, что $\vec{0}$ принадлежит любому векторному подпространству. В частности, множество, состоящее из одного нуль-вектора, является векторным подпространством.

11. Докажите, что если в базисе один из векторов умножить на отрицательное число, то получится базис противоположной ориентации. Базис какой ориентации получится, если умножить какой-нибудь вектор на положительное число?

12. Докажите формулы "сокращенного векторного умножения": а) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}]=\vec{0}$; б) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}]=-2[\vec{a},\vec{b}]$.

13. Верно ли, что для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ верно равенство $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{a}+(\vec{b}\vec{c}\vec{a})\vec{b}+(\vec{c}\vec{a}\vec{b})\vec{c}=\vec{0}$? Если нет, то для каких векторов выполняется это равенство?

14. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите величину угла между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани.
Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

15. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ векторы $\overrightarrow{AB}(0,1,-1)$ и $\overrightarrow{AC}(2,-1,4)$ определяют основание, а вектор $\overrightarrow{AA_1}(-3,2,2)$ – боковое ребро. Найдите объем призмы, площадь основания и высоту призмы (базис ортонормированный).

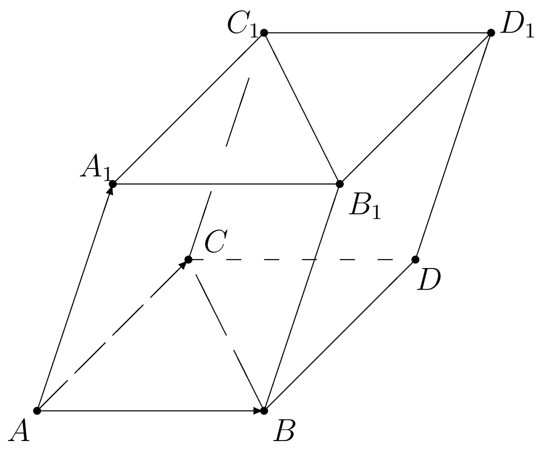


Рис.1.44

Решение. Найдем объем V призмы. Достроим основания ABC и $A_1B_1C_1$ призмы до параллелограммов $ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$ соответственно (Рис.1.44). Получим параллелепипед $ABDCA_1B_1D_1C_1$. Обозначим его объем V_p. Тогда $V=\frac{1}{2}V_p$. По теореме 1 § 1.9 $V_p=|(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AA_1})|$. Так как координаты векторов заданы в ортонормированном базисе, мы можем для вычисления смешанного произведения $(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AA_1})$ воспользоваться формулой (9.4). Тогда $V_p=\left\|\begin{matrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{matrix}\right\| = |-17| = 17$, следовательно, объем призмы $V=\frac{17}{2}$.

Найдем площадь S основания ABC. Треугольник ABC построен на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Тогда по формуле (9.2) получим $S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{17}$. Итак, площадь основания $S=\sqrt{17}$.

Из школьного курса геометрии мы знаем, что высота h призмы равна отношению ее объема V к площади основания S, следовательно, $h=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

16. Докажите тождества:

$$1)\,(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{m}\vec{n}\vec{p}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{m} & \vec{a}\vec{n} & \vec{a}\vec{p} \\ \vec{b}\vec{m} & \vec{b}\vec{n} & \vec{b}\vec{p} \\ \vec{c}\vec{m} & \vec{c}\vec{n} & \vec{c}\vec{p} \end{vmatrix}; \quad 2)\,(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{a} & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{b}\vec{a} & \vec{b}\vec{b} & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{c}\vec{a} & \vec{c}\vec{b} & \vec{c}\vec{c} \end{vmatrix};$$

для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \in V^3$.

Указания. 1) Введите правый ортонормированный базис, координаты векторов и вычислите обе части равенства; 2) примените пункт 1).

17. Боковые ребра OA, OB, OC треугольной пирамиды $OABC$ равны a, b, c соответственно, углы $\widehat{AOB} = \gamma$, $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{AOC} = \beta$. Докажите, что объем V пирамиды $OABC$ вычисляется по формуле: $V = \frac{1}{6}abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$.

Указания. Применить п.б) предыдущей задачи.

18. Докажите, что в произвольном трехгранном угле биссектрисы двух плоских углов и угла, смежного третьему плоскому углу, лежат в одной плоскости.