1 Векторная алгебра

§5. Линейная зависимость векторов.

Определение 1.20. Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \in V^3$ и набор чисел $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{R}$. Вектор $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \in V^3$.

Определение 1.21. Векторы $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \in V^3$ называются *линейно зависимыми*, если $\exists\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{R}$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля и справедливо равенство

$$\alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{1}$$

Если же равенство (1) справедливо тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, то векторы $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \in V^3$ называются *линейно независимыми*.

Пример. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ линейно зависимы, так как $1\vec{a} + 1\vec{b} + (-1)(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$. □

Свойства

1^0. Векторы $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \in V^3$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них выражается через остальные векторы.

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть данные векторы $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \in V^3$ линейно зависимы. Тогда по определению линейно зависимых векторов имеем

$$\alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{2}$$

причем среди чисел $\alpha_1, ..., \alpha_n$ хотя бы одно отлично от нуля. Пусть это число α_k. Тогда мы можем разделить обе части равенства (2) на α_k и перенесем вектор $\vec{a}_k$ в правую часть равенства.

$$\vec{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1 - ... - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k+1} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\vec{a}_n$$

Если обозначить $-\frac{\alpha_1}{\alpha_k} = \beta_1, ..., -\frac{\alpha_n}{\alpha_k} = \beta_n$, то последнее равенство примет вид

$$\vec{a}_k = \beta_1\vec{a}_1 + ... + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1} + \beta_{k+1}\vec{a}_{k+1} + ... + \beta_n\vec{a}_n$$

то есть вектор $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_{k+1}, ..., a_n$.

$\Leftarrow$). Пусть

$$\vec{a}_k = \beta_1\vec{a}_1 + ... + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1} + \beta_{k+1}\vec{a}_{k+1} + ... + \beta_n\vec{a}_n$$

Тогда это равенство можно записать в виде

$$\beta_1\vec{a}_1 + ... + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1} - 1\vec{a}_k + \beta_{k+1}\vec{a}_{k+1} + ... + \beta_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

Мы получили набор чисел $\beta_1, ..., -1, ..., \beta_n$, среди которых $-1 \neq 0$. По определению линейной зависимости векторов это означает, что векторы $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ - линейно зависимы. □

2^0. Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$. Если часть этой системы векторов линейно зависима, то линейно зависима и вся система векторов.

Доказательство. Пусть линейно зависимы первые k векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k$ $(k \leq n)$ данной системы векторов. Этим мы не ограничили общность наших рассуждений, так как линейно зависимую часть векторов мы можем поставить на первые k мест. Тогда по определению линейной зависимости получим $\exists\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathcal{R}$ не равные нулю одновременно

$$\alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$$

Это равенство можно записать в виде

$$\alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_k\vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} + ... + 0\vec{a}_n = \vec{0} \tag{3}$$

Итак, мы нашли набор чисел $\alpha_1, ..., \alpha_k, 0, ..., 0$ не равных нулю одновременно и таких, что верно (3). По определению линейной зависимости векторов это означает, что вся система векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ линейно зависима.□

3^0. Если система векторов содержит $\vec{0}$, то она линейно зависима.

Доказательство. Очевидно верно равенство

$$1\vec{0} + 0\vec{a}_1 + ... + \vec{a}_n = \vec{0}$$

По определению линейной зависимости это означает, что система векторов линейно зависима. □

4^0. Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он отличен от $\vec{0}$. (доказать самостоятельно)

У нас появился набор понятий "линейно зависимые векторы", "линейно независимые векторы", "коллинеарные векторы", "компланарные векторы". Выясним, как они между собой соотносятся.

Теорема 1.7. (о геометрическом смысле линейной зависимости двух векторов) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ линейно зависимы. По определению линейной зависимости векторов $\exists \alpha, \beta \in \mathcal{R}$ одновременно не равные нулю и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Пусть для определенности $\alpha \neq 0$. Тогда на число $\alpha \neq 0$ можно разделить обе части равенства, получим $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}$. По теореме о коллинеарных векторах это означает, что $\vec{a} \| \vec{b}$.

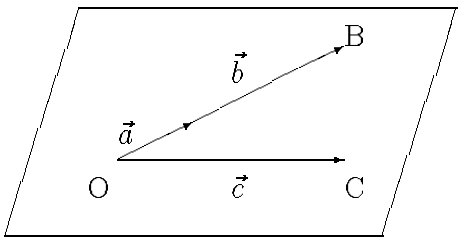
$\Leftarrow$). Пусть $\vec{a} \| \vec{b}$. Если хотя бы один из данных векторов нулевой, то такие векторы линейно зависимы по свойству 3^0. Если эти векторы оба ненулевые, то применим теорему о коллинеарных векторах. Тогда $\exists \alpha \neq 0$ $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. По свойству 1^0 линейной зависимости векторов это означает, что $\vec{a}, \vec{b}$ линейно зависимы. □

Следствие. $\vec{a} \nparallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ - линейно независимы.□

Теорема 1.8. (о геометрическом смысле линейной зависимости трех векторов) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

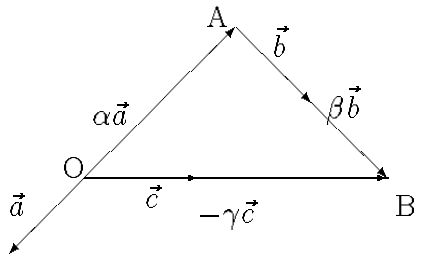
Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ линейно зависимы. По определению линейной зависимости векторов это означает, что $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ не равные нулю одновременно и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

1) хотя бы одно из α, β, γ равно нулю, для определенности, $\gamma \in 0$. Тогда $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$, причем хотя бы одно из двух оставшихся чисел α, β отлично от нуля. Это означает, по определению линейной зависимости, что $\vec{a}, \vec{b}$ линейно зависимы. По теореме о геометрическом смысле линейной зависимости двух коллинеарных векторов получим, что $\vec{a} \| \vec{b}$.



Отложим от произвольной точки O представитель $\overline{OB} \in \vec{b}$ и представитель $\overline{OC} \in \vec{c}$. Тогда плоскость (OBC) будет параллельна всем трем векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, следовательно, эти векторы будут компланарны по определению компланарности трех векторов.

2) все числа α, β, γ не равны нулю.

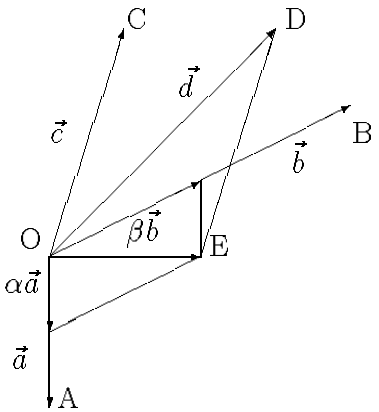


Имеем $\underbrace{\alpha\vec{a}}_{\overrightarrow{OA}} + \underbrace{\beta\vec{b}}_{\overrightarrow{AB}} = \underbrace{-\gamma\vec{c}}_{\overrightarrow{OB}}$. Тогда (OAB) является плоскостью, которой параллельны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, то есть эти векторы компланарны.

$\Rightarrow$). Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.
1) $\vec{a} \| \vec{b}$. Тогда векторы $\vec{a}, \vec{b}$ - линейно зависимы и по свойству линейно зависимых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - линейно зависимы.
2) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Тогда по теореме о компланарных векторах $\exists \alpha, \beta \in \mathcal{R} \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. По свойству линейно зависимых векторов это означает, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - линейно зависимы. □
Следствие. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - линейно независимы тогда и только тогда, когда они не компланарны. □

Теорема 1.9. Любая четверка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V^3$ - линейно зависима.

Доказательство. 1) Пусть среди данных четырех векторов существует тройка линейно зависимых векторов. Например, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Тогда по свойству линейно зависимых векторов все четыре вектора линейно зависимы.
2) Пусть ни одна из троек векторов данной системы векторов не является линейно зависимой. Отложим представители данных векторов от некоторой точки $O \in E^3$.



Тогда точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости. Проведем прямую (DE) параллельно (OC), $E \in (OAB)$. Тогда по правилу треугольника

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} \qquad (4)$$

Так как векторы $\overrightarrow{OE}, \vec{a}, \vec{b}$ - компланарны и $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то по теореме о компланарных векторах $\overrightarrow{OE} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Так как $\overrightarrow{ED} \| \vec{c}$, то $\overrightarrow{ED} = \gamma\vec{c}$. Подставим эти равенитва в (4) и получим $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

По свойству линейной зависимости это означает, что четверка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ линейно зависима. □

Следствие. Система, содержащая более 4 векторов линейно зависима. (доказать самостоятельно)

§6. Координаты вектора относительно базиса.

Определение 1.22. *Базисом* в V^3 будем называть любую упорядоченную тройку некомпланарных векторов.

В силу теоремы о геометрическом смысле линейной зависимости системы трех векторов (а точнее, по следствию из нее) вектора, составляющие базис линейно независимы. По теореме о линейной зависимости четырех векторов (точнее, из п.2) ее доказательства) следует, что любой вектор V^3 представим в веде линейной комбинации векторов базиса. Будем обозначать базисы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда $\forall x \in V^3$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Упорядоченный набор чисел (x_1, x_2, x_3) называется *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Докажем, что эти числа для данного вектора в фиксированном базисе определены однозначно.

Доказательство. Пусть в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ вектор $\vec{x}$ имеет два набора координат (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3). По определению координат вектора это означает, что $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{x} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$. Тогда

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

$$(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + (x_3 - y_3)\vec{e}_3 = \vec{0}$$

В силу линейной независимости базисных векторов это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$, $x_3 - y_3 = 0$, то есть $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$. □

Следствие. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

Теорема 1.10. (о координатах суммы и произведении вектора на число) Пусть дан базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и координаты векторов $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$ в этом базисе, λ - вещественное число. Тогда
1) Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат данных векторов.

$$\vec{x} + \vec{y}(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

2) Координаты произведения вектора на число равны произведению этого числа на соответствующие координаты.

$$\lambda\vec{x}(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

Доказательство. По определению координат вектора имеем $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$. Тогда $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + (x_3 + y_3)\vec{e}_3$. По определению координат вектора это означает, что $\vec{x} + \vec{y}(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. Второе утверждение докажите самостоятельно. □

Теорема 1.11. (критерий коллинеарности векторов) Пусть дан базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и координаты векторов $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$ в этом базисе. Тогда

$$\vec{x} \| \vec{y} \Leftrightarrow \exists t \in \mathcal{R} : y_1 = tx_1,\ y_2 = tx_2,\ y_3 = tx_3$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\vec{x} \| \vec{y}$. Тогда по теореме о коллинеарных векторах $\vec{y} = t\vec{x}$. Так как равные векторы имеют равные координаты, а координаты произведения вектора на число равны произведению этого числа на соответствующие координаты вектора $\vec{x}$, то $y_1 = tx_1$, $y_2 = tx_2$, $y_3 = tx_3$
$\Leftarrow$) Пусть $\exists t \in \mathcal{R} : y_1 = tx_1$, $y_2 = tx_2$, $y_3 = tx_3$. Тогда умножая первое равенство на e_1, второе - на e_2, третье - на e_3 и результаты складывая, получим, что $\vec{y} = t\vec{x}$. По теореме о коллинеарных векторах это означает, что $\vec{y} \| \vec{x}$. □

Определение 1.23. *Определителем второго порядка* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ называется число $ad - bc$.

Определение 1.24. *Определителем третьего порядка* $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ называется число

$$x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.12. (критерий компланарности векторов) Пусть дан базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и координаты векторов $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z}(z_1, z_2, z_3)$ в этом базисе. Тогда векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ - компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство. Пусть векторы $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z}(z_1, z_2, z_3)$ - компланарны, другими словами - линейно зависимы, то есть $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ не равные нулю одновременно и

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{0}$$

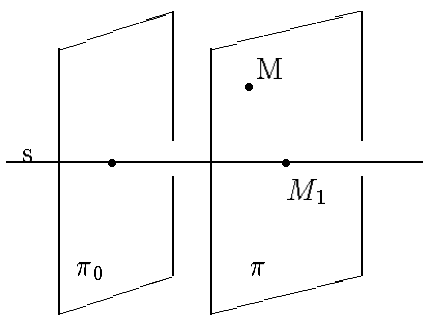
Это равенство равносильно трем равенствам для координат (два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = 0 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 = 0 \end{cases}$$

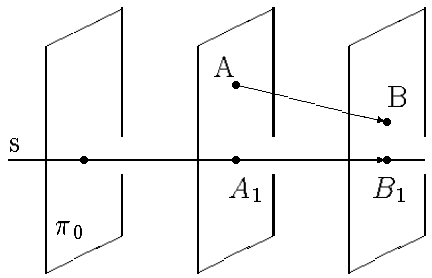
Это система трех однородных линейных уравнений, имеющая ненулевое решение α, β, γ. По теореме из алгебры это равносильно тому, что $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$ □

§7. Проекция вектора на ось.

Определение 1.25. Пусть s - произвольная прямая, π_0 - произвольная плоскость, не параллельная прямой s, M - произвольная точка E^3.



Проведем через точку M плоскость π параллельно плоскости π_0. Обозначим $M_1 = s \cap \pi$. Точка M_1 называется *проекцией* точки M на прямую s, взятой параллельно плоскости π_0.
Если $\pi_0 \perp s$, то проекция называется *ортогональной*.

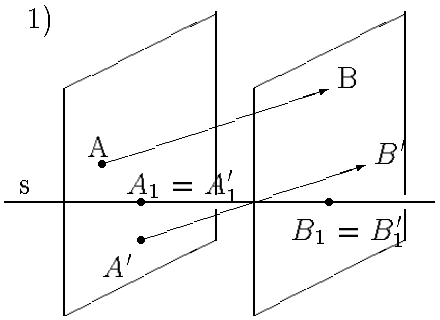


Определение 1.26. Пусть $\overline{AB}$ - направленный отрезок, точки A_1, B_1 - проекции точек A, B на прямую s параллельно плоскости π_0. Направленный отрезок $\overline{A_1B_1}$ называется *проекцией* направленного отрезка $\overline{AB}$ на прямую s.

Теорема 1.13. (о проекции эквиполентных направленных отрезков)
Если $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{A'B'}$, то $\overline{A_1B_1} \overset{\omega}{=} \overline{A'_1B'_1}$
(Если направленные отрезки эквиполентны, то их проекции на прямую s параллельно плоскости π_0 также эквиполентны.)

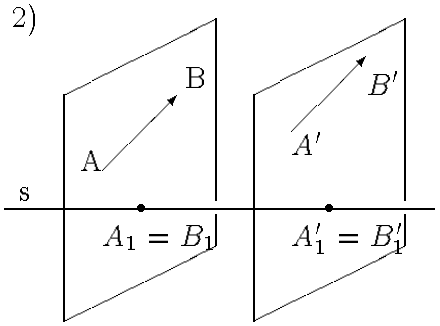
Доказательство. Пусть даны эквиполентные направленные отрезки $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{A'B'}$, прямая s и плоскость π_0. Рассмотрим насколько случаев.

1)



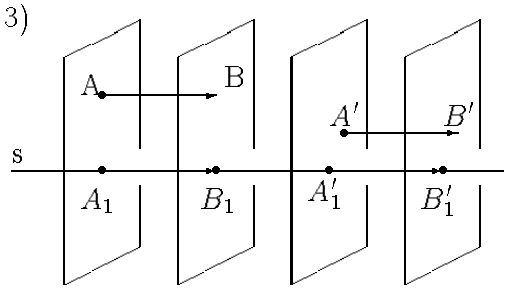
Пусть $(AA')\|(BB')\|\pi_0$. Тогда по построению $A_1 = A'_1$, $B_1 = B'_1$. В силу рефлексивности отношения эквиполентности $\overline{A_1B_1} \overset{\omega}{=} \overline{A_1B_1} \equiv \overline{A'_1B'_1}$

2)



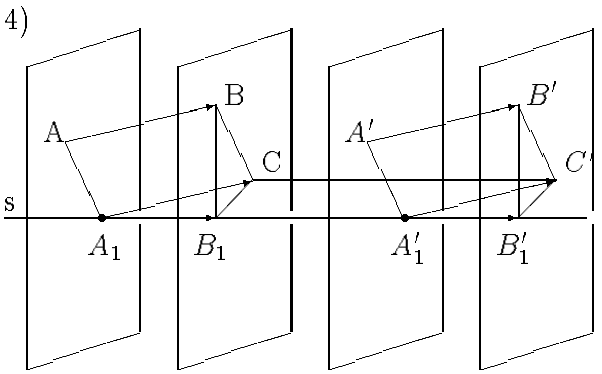
Пусть $\overline{AB}\|\pi_0$. Тогда из эквиполентности $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{A'B'}$ следует, что $\overline{A'B'}\|\pi_0$. Из определения проекции направленного отрезка на прямую получим $\overline{A_1B_1} = \overline{A'_1B'_1} = \bar{0}$, в частности, эквиполентны.

3)



Пусть $\overline{AB}\|s$. Так как по условию $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{A'B'}$, из определения эквиполентности следует, что $\overline{A'B'}\|s$. Получаем, что $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{A_1B_1}$ и $\overline{A'B'} \overset{\omega}{=} \overline{A'_1B'_1}$. Так как по условию $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{A'B'}$, то $\overline{A_1B_1} \overset{\omega}{=} \overline{A'_1B'_1}$.

4)



Пусть $\overline{AB} \not\|\pi_0$ и $\overline{AB} \not\|s$. Тогда $\overline{A'B'} \not\|\pi_0$ и $\overline{A'B'} \not\|s$. Имеем

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'_1C'} = \overrightarrow{A'_1B'_1} + \overrightarrow{B'_1C'}$$

Так как по условию $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{A'B'}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{A'_1B'_1} + \overrightarrow{B'_1C'} \tag{5}$$

Так как $\overline{A'_1C'} \overset{\omega}{=} \overline{A'B'} \overset{\omega}{=} \overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{A_1C}$, то $A_1CC'A'_1$ - параллелограмм (по признаку), следовательно, $(CC')\|s$. Тогда $B_1CC'B'_1$ - параллелограмм (так в п 3) мы видели, что в этом случае $\overline{CC'} \overset{\omega}{=} \overline{B_1B'_1}$ - проекции $\overline{CC'}$ на прямую s). Значит, $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B'_1C'}$. Подставив это равенство в (5), получим $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A'_1B'_1}$, то есть $\overline{A_1B_1} \overset{\omega}{=} \overline{A'_1B'_1}$. □

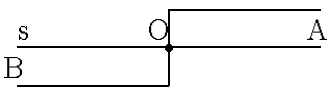
Эта теорема позволяет корректно определить понятие проекции вектора на ось.

Определение 1.27. Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$. Спроектируем каждый его представитель на прямую s. По теореме о проекции эквиполентных направленных отрезков эти проекции определяют один и тот же вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$. Он называется *векторной проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую s параллельно плоскости π_0. Обозначение

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{pr}_s\overrightarrow{AB}\,(\|\pi_0)$$

Следствие. 1. $\overrightarrow{AB}\|s \Rightarrow \overrightarrow{pr}_s\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{AB}\|\pi_0 \Rightarrow \overrightarrow{pr}_s\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. □

Пусть дана прямая s. Фиксируем на ней какой-либо луч OA.



Тогда луч OA и дополнительный ему луч OB определяют два направления. Фиксируем одно из этих направлений и назовем его *положительным*.

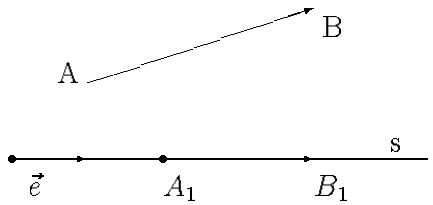
Определение 1.28. Прямая с указанием на ней положительного направления называется *осью*.

Пусть дан вектор $\vec{a}$. Определим вектор $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. Определим длину этого вектора: $|\vec{a}_0| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$. Вектор $\vec{a}_0$ называется *ортом* вектора $\vec{a}$. Заметим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}_0$ определяют одно и то же направление. Кроме того,

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$$

Положительное направление на оси s можно указать с помощью вектора $\vec{s}$, параллельного прямой s. Будем обозначать орт $\vec{s}$ через $\vec{e}$. Тогда естественно *осью* называть пару $(s, \vec{e})$, где s - прямая, $\vec{e}$ - орт, задающий положительное направление.

Определение 1.29. Пусть дана ось $(s, \vec{e})$, вектор $\overrightarrow{AB}$, векторная проекция $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{pr}_s\overrightarrow{AB}(\|\pi_0)$.



Тогда $\overrightarrow{A_1B_1}\|\vec{e}$ и по теореме о коллинеарных векторах $\exists!\lambda \in \mathcal{R} : \overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\vec{e}$. Число λ называется *скалярной проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось s $(\|\pi_0)$ или просто *проекцией*.

Обозначение $\lambda = pr_s\overrightarrow{AB}$. С учетом этого обозначения и определения проекции и векторной проекции получим

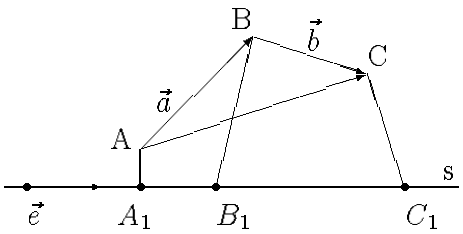
$$\overrightarrow{pr}_s\overrightarrow{AB} = (pr_s\overrightarrow{AB})\vec{e} \tag{6}$$

Это же число λ называется проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ *на направление*, задаваемое ортом $\vec{e}$ (или $\forall\vec{a}\|\vec{e}$). Обозначение $\lambda = pr_{\vec{e}}\overrightarrow{AB} = pr_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}(\|\pi_0)$.
Если проекция ортогональна $\pi_0 \perp s$, то слова $\|\pi_0$ опускают.

Теорема 1.14. (о проекции суммы)

$$pr_s(\vec{a} + \vec{b}) = pr_s\vec{a} + pr_s\vec{b}\ (\|\pi_0)$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку A и отложим представители данных векторов $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} \in \vec{b}$.



Имеем по определению векторной проекции $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$. В других обозначениях

$$\overrightarrow{pr}_s\vec{a} + \overrightarrow{pr}_s\vec{b} = \overrightarrow{pr}_s(\vec{a} + \vec{b})$$

Подставим соотношение (6) в это равенство

$$(pr_s\vec{a})\vec{e} + (pr_s\vec{b})\vec{e} = (pr_s(\vec{a} + \vec{b}))\vec{e}$$

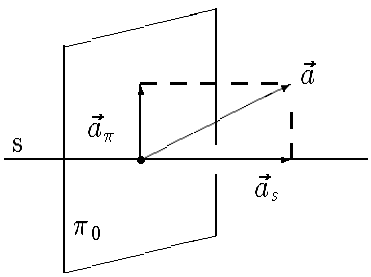
Так как $\vec{e} \neq \vec{0}$, из этого соотношения получим утверждение теоремы. □

Теорема 1.15. (о проекции произведения вектора на число)

$$pr_s(\alpha\vec{a}) = \alpha pr_s\vec{a} \ (\|\pi_0)$$

α - произвольное вещественное число.

Доказательство.



Используя правило параллелограмма, представим вектор $\vec{a}$ в виде суммы векторов $\vec{a} = \vec{a}_\pi + \vec{a}_s$, $\vec{a}_\pi \| \pi_0$, $\vec{a} \| s$. Тогда

$$\alpha\vec{a} = \alpha\vec{a}_\pi + \alpha\vec{a}_s$$

Так как

Применим теорему о проекции суммы.

$$\overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}) = \overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}_\pi) + \overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}_s)$$

$\alpha\vec{a}_\pi \| \pi_0$, то $\overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}_\pi) = \vec{0}$.
$\overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}_s) = \alpha\vec{a}_s = \alpha\overrightarrow{pr}_s\vec{a}$. Итак,

$$\overrightarrow{pr}_s(\alpha\vec{a}) = \alpha\overrightarrow{pr}_s\vec{a}$$

Теперь перейдем к скалярной проекции как в предыдущей теореме (сделайте самостоятельно). □

Определение 1.30. Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$. Возьмем произвольную точку O и отложим от нее представители векторов $\overline{OA} \in \vec{a}$, $\overline{OB} \in \vec{b}$. Тогда величина угла $\angle AOB$ называется *углом* между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Так как углы с соответственно сонаправленными сторонами равны, введенное определение корректно в смысле независимости от выбора точки O.

Определение 1.31. Два ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ будем называть *ортогональными*, если угол между ними прямой. Обозначение $\vec{a} \perp \vec{b}$. Будем считать по определению, что $\vec{0} \perp \vec{a}$, $\forall\vec{a}$.

Определение 1.32. *Углом* между осью $(s, \vec{e})$ и вектором $\vec{a}$ будем называть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$. Обозначение $\angle(s, \vec{a})$.

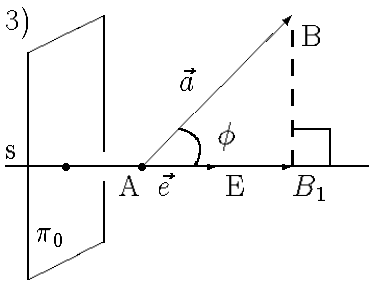
Теорема 1.16. (об ортогональной проекции вектора)

$$pr_s\vec{a} = |\vec{a}|cos\phi \ (s \perp \pi_0) \tag{7}$$

$\phi = (s, \vec{a}) \equiv (\vec{e}, \vec{a})$, $\vec{e}$ - орт оси s.

Доказательство.

3)

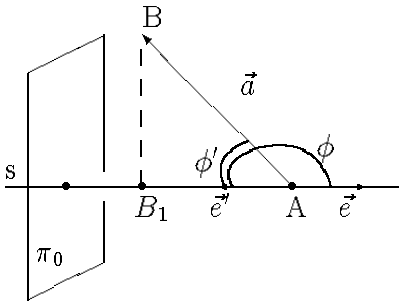


1) Пусть $\phi = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\vec{a} \| \pi_0$ и обе части равенства (7) обращаются в нуль (действительно, $\overrightarrow{pr}_s\vec{a} = \vec{0}$, то есть $pr_s\vec{a} = 0$).

2) Пусть $\phi = 0$ ($\phi = \pi$ доказывается аналогично. Докажите самостоятельно). Тогда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}$ и $\overrightarrow{pr}_s\vec{a} = \vec{a}$. Получим $\vec{a} = \overrightarrow{pr}_s\vec{a} = (pr_s\vec{a})\vec{e}$, то есть $pr_s\vec{a} = |\vec{a}|$ и равенство (7) верно.

3) Пусть $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Тогда $pr_s\vec{a} = |\overrightarrow{AB_1}| = |\vec{a}|cos\phi$ (по определению косинуса угла в прямоугольном треугольнике ΔABB_1).

4) Пусть $\phi > \frac{\pi}{2}$.



Рассмотрим ось $(s, \vec{e'})$, $\vec{e'} = -\vec{e}$ и обозначим $\phi' = \angle(\vec{e'}, \vec{a}) < \frac{\pi}{2}$. По п.3) получим

$$pr_{\vec{e'}}\vec{a} = |\vec{a}|cos\phi'$$

Так как $pr_{\vec{e'}}\vec{a} = -pr_{\vec{e}}\vec{a}$ и $cos\phi' = cos(\pi - \phi) = -cos\phi$, то получим (7). □