1 Векторная алгебра

§8. Скалярное произведение векторов.

Определение 1.33. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

Свойства

1^0. $\forall \vec{a},\vec{b} \in V^3$ $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (коммутативность)

Доказательство. Так как $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \angle(\vec{b},\vec{a})$, легко получаем из определения. □

2^0. $\forall \vec{a} \in V^3$ $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Доказательство. Положим в определении скалярного произведения $\vec{b} = \vec{a}$. Тогда $cos\angle(\vec{a},\vec{a}) = 1$. □

3^0. $\forall \vec{a} \in V^3$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|pr_{\vec{a}}\vec{b}$ (проекция ортогональная)

Доказательство. Легко следует из определения скалярного произведения с учетом теоремы об ортогональной проекции вектора. Действительно, $pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|cos\angle(\vec{a},\vec{b})$. □

4^0. $\forall \vec{a},\vec{b} \in V^3$ $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$, α - произвольное вещественное число.

Доказательство. 1) Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то обе части равенства по определению скалярного произведения обращаются в нуль, то есть равны.
2) Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тогда, используя теорему о произведении проекции вектора на число, получим $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{b}(\alpha\vec{a}) = pr_{\vec{b}}(\alpha\vec{a}) = \alpha(pr_{\vec{b}}\vec{a}) = \alpha(\vec{b}\vec{a}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$. □

5^0. $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V^3$ $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Доказательство. 1) Если $\vec{c} = \vec{0}$, то очевидно.
2) Если $\vec{c} \neq \vec{0}$. Тогда с учетом теоремы о проекции суммы
$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = pr_{\vec{c}}\vec{a} + pr_{\vec{c}}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$. □

6^0. $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Доказательство. 1) Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$ по определению.
2) Если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тогда $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0$. $\Leftrightarrow cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$. □

Если мы научимся вычислять скалярные произведения, то сможем определять длины векторов и углы между ними, в частности, определять ортогональность векторов. Мы введем базисы, в которых вычисления производить наиболее просто.

Определение 1.34. Базис $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ пространства V^3 называется *ортонормированным* (короче, о/н), если $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ и $\angle(\vec{i},\vec{j}) = \angle(\vec{i},\vec{k}) = \angle(\vec{j},\vec{k}) = \frac{\pi}{2}$.

Таблица скалярного умножения для ортонормированного базиса

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Теорема 1.17. (о вычислении скалярного произведения в о/н базисе)
Пусть $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ - о/н базис и векторы $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Доказательство. По определению координат вектора имеем $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Подставим эти равенства в скалярное произведение

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

Раскроем скобки с учетом свойств скалярного умножения
$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1(\vec{i}\vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}\vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}\vec{k}) + a_2b_1(\vec{j}\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}\vec{j}) + a_2b_3(\vec{j}\vec{k}) + a_3b_1(\vec{k}\vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}\vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}\vec{k})$
Воспользовавшись таблицей скалярного умножения, получим первую формулу. Подставим в выведенную формулу $\vec{b} = \vec{a}$. Тогда получим $\vec{a}\vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3$. Так как $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$, то мы получаем вторую формулу. □

Теорема 1.18. (о геометрическом смысле координат вектора в о/н базисе)
Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ - о/н базис и вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$. Тогда

$$a_1 = |\vec{a}|cos\angle(\vec{a}, \vec{i}),\ a_2 = |\vec{a}|cos\angle(\vec{a}, \vec{j}),\ a_3 = |\vec{a}|cos\angle(\vec{a}, \vec{k})$$

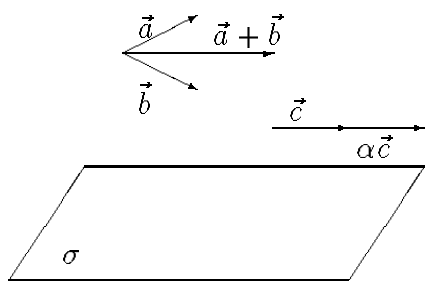
Доказательство. По определению координат имеем $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Умножим обе части этого равенства скалярно на $\vec{i}$. С учетом таблицы скалярного умножения получим $\vec{a}\vec{i} = a_1$. Используем определение скалярного произведения: $|\vec{a}||\vec{i}|cos\angle(\vec{a}, \vec{i}) = a_1$. Так как $|\vec{i}| = 1$, то мы получаем $a_1 = |\vec{a}|cos\angle(\vec{a}, \vec{i})$. Аналогично получаются остальные равенства (докажите самостоятельно). □

§9′. Векторные подпространства.

Определение 1.35. Непустое подмножество L из V^3 будем называть *векторным подпространством* V^3, если
1) $\forall\vec{a}, \vec{b} \in L \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in L$
2) $\forall\vec{a} \in L, \forall\alpha \in \mathcal{R} \Rightarrow \alpha\vec{a} \in L$.

Примеры векторных подпространств

1. Пусть σ - плоскость. Рассмотрим множество L^2 всех векторов, параллельных этой плоскости.



Мы видим, что сумма двух векторов из L^2 также принадлежит L^2 и произведение вектора из L^2 на произвольное вещественное число также принадлежит L^2, то есть это множество является векторным подпространством. В нем также как и в V^3 можно ввести понятие базиса, для того, чтобы каждый вектор из L^2 наделить набором координат. В L^2 для этого достаточно взять два неколлинеарных вектора.

Определение 1.36. Базисом векторного подпространства L^2 назовем любую упорядоченную пару неколлинеарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ из L^2.

По теореме о геометрическом смысле линейной зависимости двух векторов базис L^2 представляет линейно независимую систему векторов, а по теореме о компланарных векторах $\forall\vec{c}\,\exists\, c_1, c_2 \in \mathcal{R} : \vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$. Упорядоченную пару чисел (c_1, c_2) будем называть *координатами* вектора $\vec{c}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ векторного подпространства L^2.

Теорема 1.19. (о координатах суммы векторов и произведения вектора на число)
Пусть в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$, $\alpha \in \mathcal{R}$. Тогда
1) $\vec{a}+\vec{b}(a_1+b_1, a_2+b_2)$; 2) $\alpha\vec{a}(\alpha a_1, \alpha a_2)$ (докажите самостоятельно по аналогии с соответствующей теоремой для V^3).

Теорема 1.20. Два вектора $\vec{a}, \vec{b} \in L^2$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны (докажите самостоятельно по аналогии с соответствующей теоремой для V^3).

В L^2 определено понятие скалярного произведения векторов, так как L^2 состоит из векторов V^3.

Определение 1.37. Базис $(\vec{i},\vec{j})$ векторного подпространства L^2 называется *ортонормированным*, если $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$, $\vec{i}\perp\vec{j}$.

В ортонормированном базисе имеют место формулы

$$1)\ \vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2;\ 2)\ |\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$$

(докажите самостоятельно по аналогии с соответствующей теоремой для V^3).

2. Пусть дана прямая l. Обозначим L^1 множество всех векторов, которые параллельны прямой l. Докажите самостоятельно, что это множество является векторным подпространством.

3. $L=\{\vec{0}\}$ является векторным подпространством.

Самостоятельно приведите примеры множеств векторов, не являющихся векторными подпространствами.

§9. Ориентация проистранства V^3.

Рассмотрим множество всех базисов в V^3. Пусть $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$, $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ - два базиса. Разложим векторы второго базиса по векторам первого базиса.

$$\begin{aligned}\vec{b}_1&=c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2+c_{31}\vec{a}_3\\ \vec{b}_2&=c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2+c_{32}\vec{a}_3\\ \vec{b}_3&=c_{13}\vec{a}_1+c_{23}\vec{a}_2+c_{33}\vec{a}_3\end{aligned}$$

Запишем координаты векторов $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ столбцами в матрицу

$$C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\ c_{21}&c_{22}&c_{23}\\ c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}$$

Эта матрица называется *матрицей перехода* от базиса A к базису B. Обозначение $C=A|B$. Заметим, что так как векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ - не компланарны, то определитель $detC\neq 0$.

Свойства определителей матриц перехода

1^0. $A|A=1$.

2^0. $(A|B)(B|C)=A|C$

3^0. $(A|B)(B|A)=1$

Доказательство. 1^0. Разложим векторы базиса A по векторам базиса A. Получим

$$\begin{aligned}\vec{a}_1&=1\vec{a}_1+0\vec{a}_2+0\vec{a}_3\\ \vec{a}_2&=0\vec{a}_1+1\vec{a}_2+0\vec{a}_3\\ \vec{a}_3&=0\vec{a}_1+0\vec{a}_2+1\vec{a}_3\end{aligned}$$

Запишем определитель матрицы перехода

$$A|A=\begin{vmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&0\\ 0&1\end{vmatrix}=1$$

2^0. Примем без доказательства как факт известный из алгебры. 3^0. Положим в свойстве 2^0 $A=C$. Тогда получим $(A|B)(B|A)=(A|A)=1$. □

Определение 1.38. Будем говорить, что базисы A и B *одинаково ориентированы*, если $A|B>0$. Будем писать в этом случае $A\Delta B$. Будем говорить, что базисы A и B *противоположно ориентированы*, если $A|B<0$.

Все базисы можно разделить на два множества следующим образом. Возьмем произвольный базис $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и рассмотрим базис $B = (\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3)$. Запишем определитель матрицы перехода

$$A|B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Итак, мы видим, что базисы $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $B = (\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3)$ противоположно ориентированы. Обозначим множество, в котором будет находится базис A через K_A, а множество, в котором будет находится базис B через K_B. Поместим в множество K_A базисы одинаково ориентированные с базисом A, а в множество K_B - базисы одинаково ориентированные с базисом B.
Докажем, что каждый базис C принадлежит либо множеству K_A, либо множеству K_B.

Доказательство. Если $A|C > 0$, то $C \in K_A$. Если $A|C < 0$, то по свойству 2^0 имеем $(A|B)(B|C) = (A|C)$. Так как $(A|B) = -1 < 0$, то $(B|C) > 0$ и, значит, базис B принадлежит множеству K_B. □
Базисы одного из полученных множеств будем называть *правыми*, а другого - *левыми*.

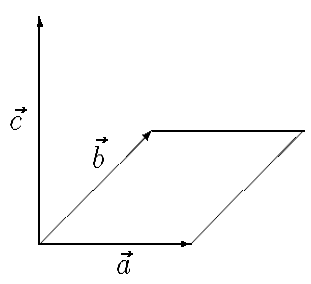
Определение 1.39. Каждое из множеств K_A и K_B называется *ориентацией* пространства V^3. Векторное пространство будем называть *ориентированным*, если в нем фиксирована одна из ориентаций.

Замечание. Договоримся называть правыми те базисы, в которых первый, второй и третий векторы расположены как большой, указательный и средний пальцы на правой руке, соответственно. А левыми - как на левой руке.
Докажите самостоятельно, что
1) Если в базисе поменять два вектора местами, то ориентация базиса изменится на противоположную;
2) Если в базисе заменить один вектор на противоположный, то базис изменит ориентацию на противоположную;
3) Если один из векторов базиса умножить на положительное число, то ориентация базиса не изменится;
4) Если один из векторов базиса умножить на отрицательное число, то ориентация базиса изменится на противоположную.

§10. Векторное произведение векторов.

Пусть V^3 ориентировано.

Определение 1.40. *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ $(\vec{a} \not\parallel \vec{b})$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$, то есть длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$,
3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ образуют правый базис.
Обозначение $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.
Если $(\vec{a} \| \vec{b})$, то по определению положим $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.



Следствия.
1) $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$
2) $\forall \vec{a} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$
3) $S = \sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}$, где S - площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (докажите самостоятельно, используя определение векторного произведения, определение скалярного произведения и основное тригонометрическое тождество)

Свойства.

1^0. $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{a},\vec{b}]$ (антикоммутативность)

Доказательство. Обозначим $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{p}$, $-[\vec{b},\vec{a}] = \vec{q}$. Мы хотим доказать, что $\vec{p} = \vec{q}$, то есть нам нужно убедиться, что эти векторы имеют равные длины и одинаковые направления.
По определению векторного произведения $|\vec{p}| = |\vec{a}||\vec{b}|sin\angle(\vec{a},\vec{b})$ и $|\vec{q}| = |\vec{b}||\vec{a}|sin\angle(\vec{b},\vec{a})$. Так как $\angle(\vec{b},\vec{a}) = \angle(\vec{a},\vec{b})$, то $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. По определению векторного произведения $(\vec{a},\vec{b},\vec{p})$ и $(\vec{b},\vec{a},-\vec{q})$ - правые базисы. Тогда базис $(\vec{b},\vec{a},\vec{q})$ - левый базис, $(\vec{a},\vec{b},\vec{q})$ - правый базис. Так как оба вектора $\vec{p}$, $\vec{q}$ перпендикулярны векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и ориентация базисов одинаковая, то $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Итак, $\vec{p} = \vec{q}$. □

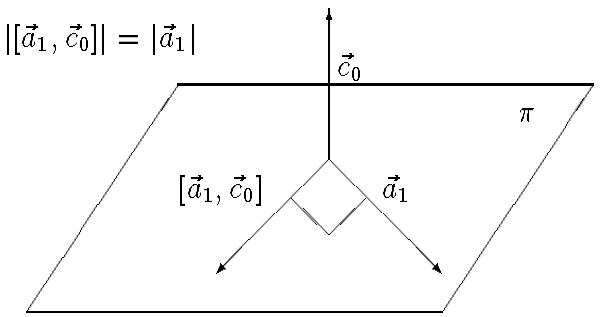
2^0. $\forall \vec{a},\vec{b} \in V^3$, $\forall \alpha \in \mathcal{R}$ $[(\alpha\vec{a}),\vec{b}] = [\vec{a},(\alpha\vec{b})] = \alpha[\vec{a},\vec{b}]$

Доказательство. Если $\vec{a} \| \vec{b}$ или $\alpha = 0$, обе части равенств равны $\vec{0}$ и равенство выполняется.
Пусть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ и $\alpha \neq 0$. Обозначим $\vec{p} = [(\alpha\vec{a}),\vec{b}]$, $\vec{q} = \alpha[\vec{a},\vec{b}]$.

1) Вычислим длины векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$.
$|\vec{p}| = |\alpha\vec{a}||\vec{b}|sin\angle(\alpha\vec{a},\vec{b}) = |\alpha||\vec{a}||\vec{b}|sin\angle(\vec{a},\vec{b})$
$|\vec{q}| = |\alpha||\vec{a}||\vec{b}|sin\angle(\vec{a},\vec{b})$, то есть $|\vec{p}| = |\vec{q}|$.
2) По определению векторного произведения $\vec{p} \perp \alpha\vec{a}$, следовательно, $\vec{p} \perp \vec{a}$. Кроме того, $\vec{p} \perp \vec{b}$. Тогда $\vec{p} \| [\vec{a},\vec{b}] = \vec{q}$.
3) а) Пусть $\alpha > 0$. Тогда по определению векторного произведения $(\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{p})$- правая. Так как $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{p})$- правая. Следовательно, $\vec{p} \uparrow\uparrow [\vec{a},\vec{b}] \uparrow\uparrow \vec{q}$.
б) Пусть $\alpha < 0$. Тогда по определению векторного произведения $(\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{p})$- правая.Так как $\alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{p})$- левая. $\vec{p} \uparrow\downarrow [\vec{a},\vec{b}] \uparrow\downarrow \vec{q}$. Итак, и в этом случае $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$.
Мы получили, что длины векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$ равны и направления совпадают, то есть векторы равны. □.

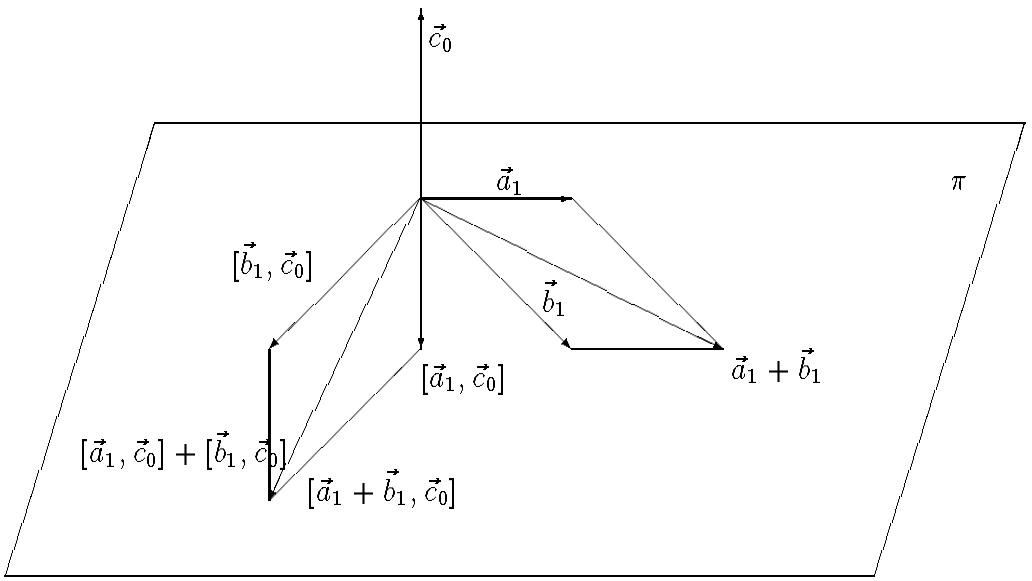
3^0. $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V^3$ $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}]$.

Доказательство. Если хотя бы один из данных векторов равен нуль-вектору, то равенство очевидно.
Пусть все данные векторы ненулевые. Разобьем доказательство на четыре этапа.
1) Докажем, что в случае $\vec{c}_0$ - единичный и $\vec{a}_1 \perp \vec{c}_0$, векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{c}_0]$ - это вектор, получающийся из вектора $\vec{a}_1$ поворотом на прямой угол против часовой стрелки, если смотреть из конца представителя вектора $\vec{c}_0$.



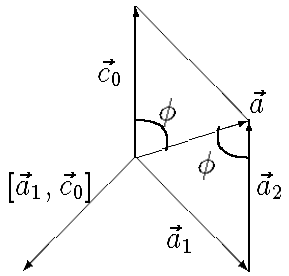
Действительно, $|[\vec{a}_1,\vec{c}_0]| = |\vec{a}_1||\vec{c}_0|sin\angle(\vec{a}_1,\vec{c}_0) = |\vec{a}_1|$. Вектор $[\vec{a}_1,\vec{c}_0]$ перпендикулярен векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{c}_0$ и базис $(\vec{a}_1,\vec{c}_0,[\vec{a}_1,\vec{c}_0])$ - правый (ставим правую руку на картинку и видим, куда направлен вектор $[\vec{a}_1,\vec{c}_0]$.

2) Докажем, что если $\vec{a}_1 \perp \vec{c}_0$ и $\vec{b}_1 \perp \vec{c}_0$, то $[\vec{a}_1+\vec{b}_1,\vec{c}_0] = [\vec{a}_1,\vec{c}_0] + [\vec{b}_1,\vec{c}_0]$.



Применим п.1) к векторам $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ и $\vec{a}_1 + \vec{b}_1$, а затем - правило параллелограмма к векторам $[\vec{a}_1, \vec{c}_0]$ и $[\vec{b}_1, \vec{c}_0]$.

3) Пусть $\vec{a}$ - произвольный вектор. Представим этот вектор $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, где $\vec{a}_1 \perp \vec{c}_0$, $\vec{a}_2 \| \vec{c}_0$. Докажем, что $[\vec{a}, \vec{c}_0] = [\vec{a}_1, \vec{c}_0]$.



а) $|[\vec{a}, \vec{c}_0]| = |\vec{a}||\vec{c}_0| sin\angle(\vec{a}, \vec{c}_0) = |\vec{a}_1|$
$|[\vec{a}_1, \vec{c}_0]| = |\vec{a}_1|$
б) $[\vec{a}_1, \vec{c}_0], [\vec{a}, \vec{c}_0] \perp \alpha \Rightarrow [\vec{a}_1, \vec{c}_0] \| [\vec{a}, \vec{c}_0]$
в) $(\vec{a}, \vec{c}_0, [\vec{a}, \vec{c}_0])$, $(\vec{a}_1, \vec{c}_0, [\vec{a}_1, \vec{c}_0])$ - правые (правая рука),
то есть $[\vec{a}_1, \vec{c}_0] \uparrow\uparrow [\vec{a}, \vec{c}_0]$

4) Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - произвольны. Тогда эти векторы можно представить в виде $\vec{c} = |\vec{c}|\vec{c}_0$, где $\vec{c}_0$ - орт вектора $\vec{c}$, $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ как в п.3). Тогда $\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \perp \vec{c}_0$, $\vec{a}_2 + \vec{b}_2 \| \vec{c}_0$. Применяем доказанные свойства векторного произведения и п.3),2).

$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{a}_2 + \vec{b}_2, |\vec{c}|\vec{c}_0] = |\vec{c}|[\vec{a}_1 + \vec{b}_1, \vec{c}_0] = |\vec{c}|[\vec{a}_1, \vec{c}_0] + |\vec{c}|[\vec{b}_1, \vec{c}_0] = |\vec{c}|[\vec{a}, \vec{c}_0] + |\vec{c}|[\vec{b}, \vec{c}_0] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$. □

Запишем таблицу векторного умножения для правого ортонормированного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (столбец - первый сомножитель, строка - второй)

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$-\vec{k}$	$\vec{j}$
$\vec{j}$	$\vec{k}$	$\vec{0}$	$-\vec{i}$
$\vec{k}$	$-\vec{j}$	$\vec{i}$	$\vec{0}$

По определению векторного произведения вектор $[\vec{j}, \vec{i}]$ перпендикулярен векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и по длине равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Для ортонормированного базиса этот параллелограмм является квадратом со стороной 1. Таким образом, на роль вектора $[\vec{j}, \vec{i}]$ претендуют вектор $\vec{k}$ и вектор $-\vec{k}$. Проверим выполнение третьего пункта определения векторного произведения: $(\vec{j}, \vec{i}, [\vec{j}, \vec{i}])$ должен быть правым. Если $[\vec{j}, \vec{i}] = \vec{k}$, то базис $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ - правый, а значит, базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ - левый, что противоречит условию. Следовательно, $[\vec{j}, \vec{i}] = -\vec{k}$.

Теорема 1.21. (о координатах векторного произведения в правом ортонормированном базисе)

Пусть $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ - правый ортонормированный базис. Даны векторы $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$. Тогда

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Эту формулу легко запомнить в виде формального определителя

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & a_1 & b_1 \\ \vec{j} & a_2 & b_2 \\ \vec{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство. Применим определение координат вектора и свойства векторного умножения. $[\vec{a},\vec{b}]=[a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}]=a_1b_1[\vec{i},\vec{i}]+a_1b_2[\vec{i},\vec{j}]+a_1b_3[\vec{i},\vec{k}]+a_2b_1[\vec{j},\vec{i}]+a_2b_2[\vec{j},\vec{j}]+a_2b_3[\vec{j},\vec{k}]+a_3b_1[\vec{k},\vec{i}]+a_3b_2[\vec{k},\vec{j}]+a_3b_3[\vec{k},\vec{k}]$
Применим таблицу векторного умножения
$[\vec{a},\vec{b}]=(a_1b_2-a_2b_1)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_2b_3-a_3b_2)\vec{k}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$ □

Замечание. Векторное произведение векторов позволяет нам вычислять площади параллелограммов и треугольников.

$$S_{\#}=|[\vec{a},\vec{b}]|=\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\vec{b})^2}$$
$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|[\vec{a},\vec{b}]|=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\vec{b})^2}$$

§11. Смешанное произведение векторов.

Пусть V^3 ориентировано. Пусть $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ - правый ортонормированный базис.

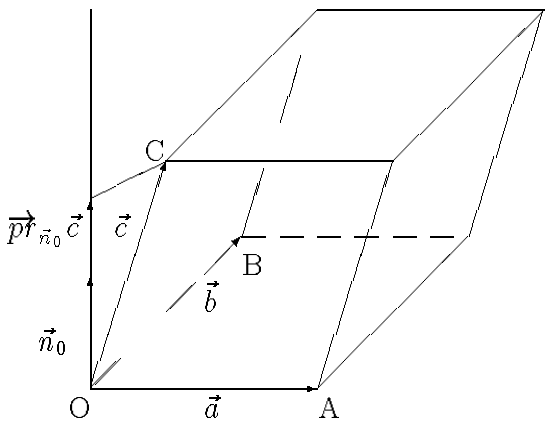
Определение 1.41. *Смешанным произведением векторов* $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}$.

Теорема 1.22. (геометрический смысл смешанного произведения векторов)
Если $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ - три некомпланарных вектора, то

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{cases} V, \text{если}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})-\text{правый} \\ -V, \text{если}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})-\text{левый} \end{cases}$$

где V - объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Доказательство.



Обозначим S - площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}_0$ - орт вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ (и по определению векторного произведения $(\vec{a},\vec{b},\vec{n}_0)$ - правая тройка векторов). Тогда $[\vec{a},\vec{b}]=S\vec{n}_0$. Вычислим $[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}=(S\vec{n}_0)\vec{c}=S(\vec{n}_0\vec{c})=S(pr_{\vec{n}_0}\vec{c})$ (проекция ортогональная)
Смотрим на картинку и видим, что

$$pr_{\vec{n}_0}\vec{c}=\begin{cases} h, \text{если}\angle(\vec{n}_0,\vec{c})\le\frac{\pi}{2}, \text{то есть}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}),(\vec{a},\vec{b},\vec{n}_0)\text{одинаково ориентированы} \\ -h\text{если}\angle(\vec{n}_0,\vec{c})>\frac{\pi}{2}, \text{то есть}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}),(\vec{a},\vec{b},\vec{n}_0)\text{противоположно ориентированы} \end{cases}$$

где h - высота параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Тогда

$[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \begin{cases} V, \text{если}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - \text{правый} \\ -V, \text{если}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - \text{левый} \end{cases}$ $\square$

Свойства.

1^0 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]$.

Доказательство. 1) Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны, то есть линейно зависимы. Тогда хотя бы один из них представим в виде линейной комбинации остальных векторов. Пусть $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. Тогда $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}](\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha([\vec{a}, \vec{b}]\vec{a}) + \beta([\vec{a}, \vec{b}]\vec{b}) = 0$, так как по определению $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$ и $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$. С другой стороны, $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}[\vec{b}, \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}] = \alpha(\vec{a}[\vec{b}, \vec{a}]) + \beta(\vec{a}[\vec{b}, \vec{b}]) = 0$.

2) Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - не компланарны. Тогда по геометрическому смыслу смешанного произведения $|[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}|$ и $|\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]|$ - объем параллелепипеда построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, то есть эти величины равны.

Так как $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}]\vec{a} = (\vec{b}\vec{c}\vec{a})$, $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ и тройки векторов $(\vec{b}\vec{c}\vec{a})$, $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ ориентированы одинаково, то знаки чисел $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$, $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]$ одинаковые. $\square$

2^0 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a})$.

Доказательство. По определению смешанного произведения $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = -[\vec{b}\vec{a}]\vec{c} = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$.

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = -\vec{a}[\vec{c}, \vec{b}] = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a})$. Остальные соотношения доказываются аналогично (докажите самостоятельно). $\square$

Следствие $(\vec{a}\vec{a}\vec{b}) = 0$.

3^0. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\forall \alpha \in \mathcal{R}$ $((\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c}) = (\vec{a}\vec{b}(\alpha\vec{c})) = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Доказательство. Аналогично свойству 2^0 с использованием свойств скалярного и векторного произведений (докажите самостоятельно) $\square$.

4^0 $\forall \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}$ $((\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a}_1\vec{b}\vec{c}) + (\vec{a}_2\vec{b}\vec{c})$

Доказательство. Аналогично предыдущему свойству (докажите самостоятельно). $\square$.

Теорема 1.23. (о вычислении смешанного произведения в произвольном базисе)
Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ - произвольный базис. В этом базисе заданы векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. Тогда

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$$

Доказательство. Используем свойство 1^0 смешанного произведения и определение координат вектора $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = [a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3](c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) =$
$\{(a_1b_2 - a_2b_1)[\vec{e}_1, \vec{e}_2] + (a_2b_3 - a_3b_2)[\vec{e}_2, \vec{e}_3] + (a_1b_3 - a_3b_1)[\vec{e}_1, \vec{e}_3]\}(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) = c_1(a_2b_3 - a_3b_2)[\vec{e}_2, \vec{e}_3]\vec{e}_1 + c_2(a_1b_3 - a_3b_1)[\vec{e}_1, \vec{e}_3]\vec{e}_2 + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)[\vec{e}_1, \vec{e}_2]\vec{e}_3 = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3) - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3) +$
$c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$ $\square$

Следствие 1 (о вычислении смешанного произведения в правом ортонормированном базисе)
Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ - правый ортонормированный базис. В этом базисе заданы векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. Тогда

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство. По теореме о геометрическом смысле смешанного произведения $|(\vec{i}\vec{j}\vec{k})|$ - это объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Так как базис ортонормированный, то это будет куб с ребром 1. Его объем равен 1. Так как базис правый, то берем знак

"+", то есть $(\vec{i}\vec{j}\vec{k}) = 1$. Далее применяя предыдущую теорему получим нужный результат. □

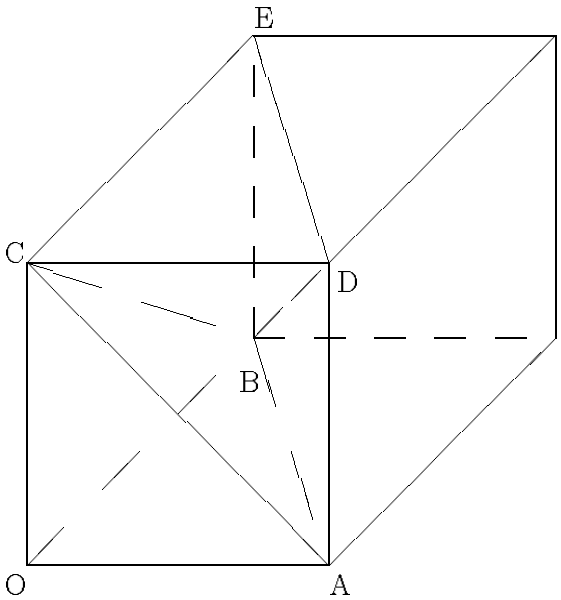
Следствие 2 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны $\Leftrightarrow (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$.

Доказательство. Вспомним критерий компланарности векторов и применим теорему о вычислении смешанного произведения в произвольном базисе. □

Теорема 1.24. (о вычислении объема тетраэдра)
Пусть дан тетраэдр $OABC$. Тогда

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC})|$$

Доказательство. Достроим тетраэдр $OABC$ до параллелепипеда как показано на рисунке.



Объемы тетраэдров $OABC$ и $ADCB$ равны, так как у них равные основания COA и ADC и общая высота - перпендикуляр, опущенный из точки B на плоскость $OADC$. Аналогичные рассуждения показывают, что объемы тетраэдров $ACDB$ и $BDEC$ равны (докажите самостоятельно). Тогда объем тетраэдра $OABC$ равен $\frac{1}{3}$ объема треугольной призмы $OABCDE$. А объем треугольной призмы $OABCDE$ равен $\frac{1}{2}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. По геометрическому смыслу смешанного произведения получим $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC})|$