1 Векторная алгебра.

§1. Направленные отрезки.

Пусть E^3 - трехмерное евклидово пространство.

Определение 1.1. Лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются *одинаково направленными*, если
1) прямые (AB), (CD) параллельны и лучи $[AB)$, $[CD)$ лежат в одной полуплоскости с границей (AC);
2) прямые (AB), (CD) совпадают и либо $[AB) \subset [CD)$, либо $[CD) \subset [AB)$.
Обозначение $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$.

Определение 1.2. Лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются *противоположно направленными*, если
1) прямые (AB), (CD) параллельны и лучи $[AB)$, $[CD)$ лежат в разных полуплоскостях с границей (AC);
2) прямые (AB), (CD) совпадают и ни $[AB) \not\subset [CD)$, ни $[CD) \not\subset [AB)$.
Обозначение $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$.

Определение 1.3. Множество всех лучей пространства, любые два из которых сонаправлены, называется *направлением*.

Очевидно, чтобы задать направление, достаточно указать один из лучей, принадлежащих этому направлению.

Определение 1.4. Отрезок AB называется *направленным*, если указаны его начало A и конец B. Направленные отрезки будем обозначать $\overline{AB}$. *Длиной* $|\overline{AB}|$ направленного отрезка $\overline{AB}$ называется длина обычного отрезка AB, а *направлением* - направление луча $[AB)$.

Определение 1.5. Будем говорить, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ *одинаково направлены или сонаправлены*, если одинаково направлены лучи $[AB)$ и $[CD)$ и обозначать $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$. Будем говорить, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ *противоположно направлены*, если противоположно направлены лучи $[AB)$ и $[CD)$ и обозначать $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$.

Определение 1.6. Две совпавшие точки будем называть *нулевым* направленным отрезком и обозначать $\overline{MM} = \overline{0}$. По определению будем считать длину нулевого направленного отрезка равной нулю. Направления нулевой направленный отрезок не определяет.

§2. Векторы.

Определение 1.7. Два направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются эквиполентными, если они сонаправлены и имеют равные длины. Обозначение $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD}$. **Свойства эквиполентных направленных отрезков.**
1^0. $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$ (рефлексивность).
2^0. $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$ (симметричность).
3^0. $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD}$ и $\overline{CD} \overset{\omega}{=} \overline{PQ} \Rightarrow \overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{PQ}$ (транзитивность).

Определение 1.8. *Вектором* называется множество всех направленных отрезков, любые два из которых эквиполентны. Каждый направленный отрезок из этого множества называется *представителем* этого вектора.
Векторы будем обозначать $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. Множество всех векторов обозначим V^3.
Множество всех нулевых направленных отрезков называется *нуль-вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Лемма 1.1. (об откладывании вектора от точки)
$\forall \overline{AB} \neq \overline{0}$, $\forall O \in E^3\ \exists! \overline{OC} : \overline{OC} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$.
Другими словами, если вектор $\vec{a}$ задан своим представителем $\overline{AB}$, то от любой точки пространства O можно отложить представитель этого вектора и притом единственным образом.

Доказательство. 1) Пусть $O \notin (AB)$. Докажем существование. Точки A, B, O достраиваем до параллелограмма $ABCO$. В силу свойств параллелограмма, направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{OC}$ будут сонаправлены и будут иметь одинаковую длину.
Докажем единственность. Пусть существует направленный отрезок $\overline{OD}$, эквиполентный направленному отрезку $\overline{AB}$. Тогда по транзитивности $\overline{OC} \overset{\omega}{=} \overline{OD}$. Из определения сонаправленых

направленных отрезков получаем, что лучи $[OC)$ и $[OD)$ совпадают, а так как длины $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$ равны, то совпадают точки C и D.
2) Пусть $O \in (AB)$. Возьмем точку $O_1 \notin (AB)$. Для этой точки существует направленный отрезок $\overline{O_1C_1}$ эквиполентный направленному отрезку $\overline{AB}$ (пункт 1). Аналогично существует направленный отрезок $\overline{OC}$ эквиполентный направленному отрезку $\overline{O_1C_1}$. По свойству транзитивности направленных отрезков $\overline{OC} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$. Аналогично первому случаю доказывается единственность (докажите самостоятельно). □

Определение 1.9. *Направлением* вектора называется направление любого его представителя.

Определение 1.10. Два вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ называются *одинаково направленными*, если одинаково направлены их представители. Обозначение $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.
Два вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ называются *противоположно направленными*, если противоположно направлены их представители. Обозначение $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение 1.11. Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ - представитель вектора $\vec{a}$. Тогда направленный отрезок $\overline{BA}$ задает вектор, который мы будем называть *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначать $-\vec{a}$. Другими словами, вектор называется противоположным вектору $\vec{a}$, если он имеет такую же длину и противоположно направлен с вектором $\vec{a}$.

Заметим, что $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

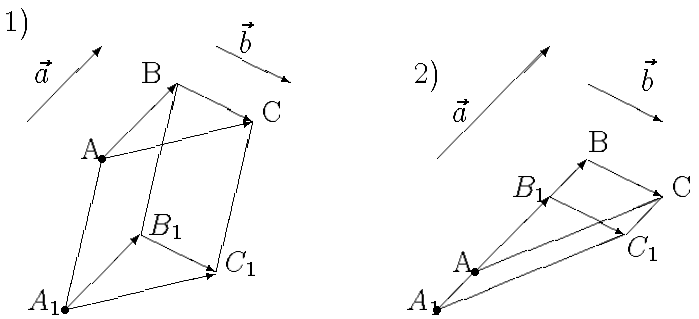
Определение 1.12. Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ *равен* вектору $\vec{b}$, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление, то есть эти вектора совпадают как множества направленных отрезков. Обозначение $\vec{a} = \vec{b}$.

Определение 1.13. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если у них существуют параллельные представители. По определению будем считать нуль-вектор коллинеарным с любым вектором $\vec{a}$.

§3. Сложение и вычитание векторов.

Определение 1.14. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем $\forall A \in E^3$ и отложим от нее представитель $\overline{AB}$ вектора $\vec{a}$. От точки B отложим представитель $\overline{BC}$ вектора $\vec{b}$. Направленный отрезок $\overline{AC}$ будет представителем некоторого вектора $\vec{c}$, который называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Докажем корректность определения, то есть его независимость от выбора точки A.



Нам нужно доказать, что если мы возьмем другую точку A_1 проведем аналогичные построения, то получим представитель A_1C_1 того же вектора $\vec{c}$.
1) $A_1 \notin (AB)$. Так как $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{A_1B_1}$ четырехугольник ABB_1A_1 является параллелограммом, то есть его стороны AA_1 и BB_1 параллельны и равны.
Аналогично, из эквиполентности $\overline{BC} \overset{\omega}{=} \overline{B_1C_1}$ следует, что стороны параллелограмма BCC_1B_1 параллельны и равны. По транзитивности получаем, что $AA_1 = CC_1$ и эти стороны параллельны. Тогда ACC_1A_1 - параллелограмм (по признаку). Откуда получаем, что отрезки AC и A_1C_1 параллельны и равны, значит, направленные отрезки $\overline{AC} \overset{\omega}{=} \overline{A_1C_1}$.
2) $A_1 \in (AB)$. Аналогично доказываем, что отрезки AA_1 и CC_1 параллельны и равны, откуда делаем вывод об эквиполентности $\overline{AC} \overset{\omega}{=} \overline{A_1C_1}$. Здесь мы получим вырожденный параллелограмм AA_1B_1B: $AA_1 = A_1B_1 - AB_1 = A_1B_1 - (AB - BB_1) = BB_1$.
В обоих случаях мы получаем один и тот же вектор $\vec{c}$.

Запишем определение суммы векторов в других обозначениях:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника.*

Следствия.

1. В правиле треугольника положим C=A. Получим $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

2. В правиле треугольника положим B=A. Получим

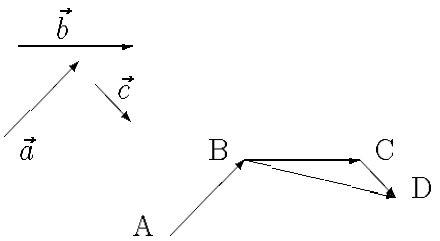
$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

3. Аналогично

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Теорема 1.1. Сложение векторов ассоциативно.
$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

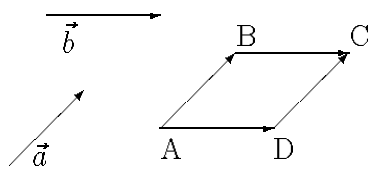
Доказательство.



Возьмем $\forall A \in E^3$ и отложим представитель $\overline{AB} \in \vec{a}$. От точки B отложим представитель $\overline{BC} \in \vec{b}$. От точки C отложим представитель $\overline{CD} \in \vec{c}$. Тогда, используя правило треугольника, эти три вектора мы можем сложить в двух различных порядках: С одной стороны, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. С другой стороны, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ □

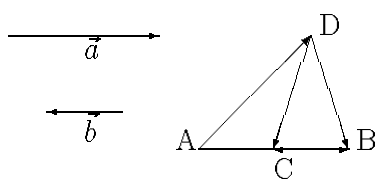
Теорема 1.2. Сложение векторов коммутативно.
$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$

Доказательство. 1) $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$ - доказано в следствиях выше).
2) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$.



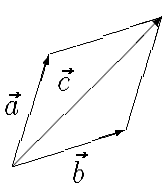
Возьмем произвольную точку $A \in E^3$ и будем откладывать представители векторов $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{AD}, \overline{BC} \in \vec{b}$. Тогда по признаку $ABCD$ - параллелограмм, следовательно, $\overline{DC} \in \vec{a}$. Тогда по правилу треугольника, с одной стороны, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, с другой стороны, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Итак, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

3) $\vec{a} \| \vec{b}$.



Возьмем произвольную точку A и отложим от нее представители векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как показано на рисунке: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Возьмем произвольную точку $D \notin (AB)$ Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{DB} + \vec{b}) + (\vec{a} + \overrightarrow{BD}) = (\vec{b} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{BD} + \vec{a}) = \vec{b} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) + \vec{a} = \vec{b} + \vec{a}$ □

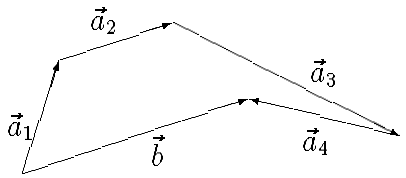
Следствие. (Правило параллелограмма)



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Определение 1.15. Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V^3$, $n \geq 3$. *Суммой* этих векторов называется вектор $(\ldots((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + a_3) + \ldots + \vec{a}_n)$. В силу теоремы о ассоциативности сложения будем обозначать сумму векторов $\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_n$.

Складывать более двух векторов будем по правилу многоугольника: от произвольной точки пространства E^3 отложим представитель $\overline{a_1}$ первого вектора $\vec{a}_1$ суммы, от его конца - представитель $\overline{a_2}$ второго вектора суммы и т. д. Тогда представителем $\bar{b}$ суммы $\vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_n$ будет направленный отрезок с началом в начале $\overline{a_1}$ и концом - в конце $\overline{a_n}$.



$$\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$$

Определение 1.16. *Разностью* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$. Обозначение $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$.

Теорема 1.3. Для любых двух векторов существует единственная разность.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3 \exists! \vec{x} : \vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$$

Доказательство. $\exists$). Положим $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Докажем, что этот вектор нам годится, то есть $\vec{x} + \vec{b} = (\vec{a} + (-\vec{b})) + \vec{b} = \vec{a} + (\vec{b} + (-\vec{b})) = \vec{a}$. Таким образом, построенный нами вектор является искомой разностью.
!). Допустим, что кроме построенного вектора $\vec{x}$ существует еще один вектор $\vec{y}$, удовлетворяющий определению разности, то есть $\vec{y} + \vec{b} = \vec{a}$. Тогда $\vec{y} + \vec{b} = \vec{x} + \vec{b}$. Прибавляя к обеим частям этого равенства вектор противоположный вектору $\vec{b}$, то есть $-\vec{b}$, получим $\vec{y} = \vec{x}$. Мы пришли к противоречию. Значит, вектор $\vec{x}$ - единственный. □

§4. Умножение вектора на число.

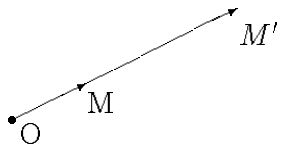
Определение 1.17. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на вещественное число α называется вектор $\vec{b}$ такой, что
1) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$
2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\alpha \geq 0$
$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$
Обозначение $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Следствие. $\alpha\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$.

Теорема 1.4. Свойства операции умножения вектора на число.
1^0. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$
(Произведение вектора $\vec{a}$ на 1 есть вектор $\vec{a}$. Произведение вектора $\vec{a}$ на -1 есть вектор, противоположный вектору $\vec{a}$.)
2^0. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
3^0. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
4^0. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нам потребуется вспомогательное понятие.

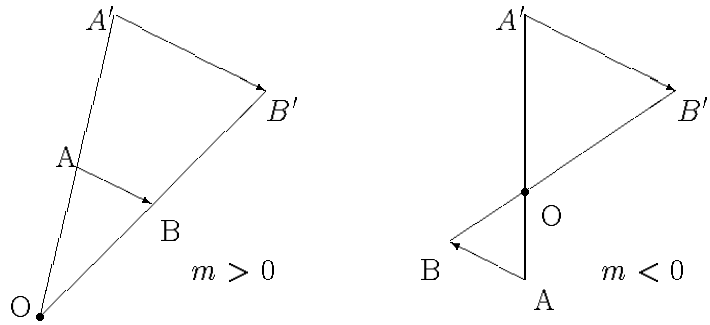
Определение 1.18. Пусть фиксированы точка $O \in E^3$ и число $m \in \mathcal{R}, m \neq 0$. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом m называется такое преобразование пространства E^3, что $\forall M \in E^3$ ставится в соответствие точка $M' \in E^3$: $\overrightarrow{OM'} = m\overrightarrow{OM}$.



Здесь $m = 3$

Лемма 1.2. Если гомотетия с центром O и коэффициентом m переводит треугольник OAB в треугольник $OA'B'$, то $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$.

Доказательство. леммы.



В обоих случаях мы видим, что треугольники OAB и $OA'B'$ подобны с коэффициентом подобия $|m|$, так как у них пара равных углов и отношения сторон, прилежащих к этим углам, равны $|m|$. Тогда $A'B' = mAB$. Теперь смотрим на картинки. В первом случае векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ сонаправлены и число $m > 0$, то есть $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$. Во втором случае вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ противоположно направлены, но и число $m < 0$, то есть опять $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$. Итак, в обоих случаях мы получаем нужное равенство. □

Переходим к доказательству теоремы.

1^0. Обозначим левую часть равенства $\vec{b} = 1 \cdot \vec{a}$. Нам нужно доказать, что $\vec{b} = \vec{a}$. Чтобы доказать равенство двух векторов, нужно убедиться, что они имеют равные длины и одинаковое направление. Начнем с длины. По определению умножения вектора на число имеем $|\vec{b}| = |1| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$. Теперь проверим направления: так как $1 > 0$, то по второй части определения произведения вектора на число получим, что $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Объединяя оба результата, получим, что $\vec{b} = \vec{a}$, то есть $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Докажем, что $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$. Опять действуем как и выше. Обозначим $\vec{b} = -1 \cdot \vec{a}$. Найдем длину вектора $\vec{b}$: $|\vec{b}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| = |-\vec{a}|$. Так как $-1 < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, но и $-\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то есть $\vec{b} \uparrow\downarrow -\vec{a}$. Итак, $\vec{b} = -\vec{a}$.

2^0. Обозначим $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a})$, $\vec{q} = (\alpha\beta)\vec{a}$. Надо доказать, что $\vec{p} = \vec{q}$. Начнем с доказательства равенства их длин. По первой части определения произведения вектора на число получаем

$|\vec{p}| = |\alpha| \cdot |\beta\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|$

$|\vec{q}| = |\alpha\beta| \cdot |\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|$. Откуда мы видим, что $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Для доказательства сонаправленности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ нам надо рассмотреть четыре случая:

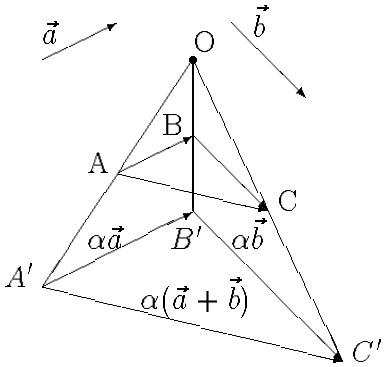
1) $\alpha > 0, \beta > 0$. Тогда $\alpha > 0 \beta > 0$ и $\vec{q} \uparrow\uparrow \vec{a}$. С другой стороны, $\beta\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, следовательно, $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \beta\vec{a}$, и значит, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Итак, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$.

2) $\alpha < 0, \beta > 0$. Аналогично получим, что $\alpha\beta < 0$, следовательно, $\vec{q} \uparrow\downarrow \vec{a}$. С другой стороны, последовательно умножая сначала на β, а потом на α вектор $\vec{a}$, получим, что $\beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то есть $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Итак, $\vec{q} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то есть $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$.

3) $\alpha > 0, \beta < 0$. Доказывается аналогично. Проведите рассуждение самостоятельно.

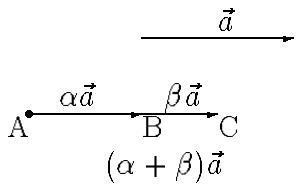
4) $\alpha < 0, \beta < 0$. Доказывается аналогично. Проведите рассуждение самостоятельно.

3^0. Возьмем произвольную точку $A \in E^3$ и отложим от нее векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда по правилу треугольника $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Применим гомотетию с центром в произвольной точке O и коэффициентом α. Тогда $A \to A', B \to B', C \to C'$. По лемме $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{AC}$. Тогда по правилу треугольника $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$ или с учетом последних соотношений
$\alpha\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BC}$
$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

4^0. Рассмотрим два случая:
1) $\alpha\beta > 0$ (то есть эти числа одного знака).



Тогда возьмем произвольную точку $A \in E^3$ и отложим представители векторов $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \beta\vec{a}$. Так как числа α и β одного знака, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены (если α и β - положительны, то эти векторы сонаправлены с $\vec{a}$, если - отрицательны, то противоположно направлены с вектором $\vec{a}$). Тогда $|(\alpha+\beta)\vec{a}| = |(\alpha+\beta)||\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|)|\vec{a}| = |\alpha\vec{a}| + |\beta\vec{a}|$.
Проверим сонаправленность векторов $(\alpha+\beta)\vec{a}$ и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. Если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то $(\alpha+\beta)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, то есть $(\alpha+\beta)\vec{a} \uparrow\uparrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. Аналогично, если $\alpha < 0$ и $\beta < 0$, то $(\alpha+\beta)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то есть $(\alpha+\beta)\vec{a} \uparrow\uparrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. Итак, $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
2) $\alpha\beta < 0$ (то есть эти числа имеют разные знаки).
а) $\alpha + \beta = 0$, то есть $\alpha = -\beta$. Тогда вычислим левую и правую части доказываемого тождества
$(\alpha+\beta)\vec{a} = (\alpha-\alpha)\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.
$\alpha\vec{a} + \beta\vec{a} = \alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{a} = \vec{0}$.
б) $\alpha + \beta \neq 0$. Тогда либо $-\alpha, \alpha+\beta$, либо $-\beta, \alpha+\beta$ имеют один и тот же знак. Пусть $-\alpha, \alpha+\beta$ имеют один и тот же знак (второй случай доказывается аналогично): применим п.1) $(-\alpha+\alpha+\beta)\vec{a} = -\alpha\vec{a} + (\alpha+\beta)\vec{a}$ или перенося $-\alpha\vec{a}$ в левую часть, $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. □

Напомним, что два вектора мы назвали коллинеарными, если у них существуют параллельные представители. Докажем

Теорема 1.5. (о коллинеарных векторах). Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \exists! \alpha \in \mathcal{R} : \vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Доказательство. $\Rightarrow$). Пусть $\vec{a} \| \vec{b}$. Нам надо доказать, что $\exists! \alpha \in \mathcal{R} : \vec{b} = \alpha\vec{a}$. Доказательство состоит из двух частей.
$\exists$). Положим

$$\alpha = \begin{cases} \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, \ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, \ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \end{cases}$$

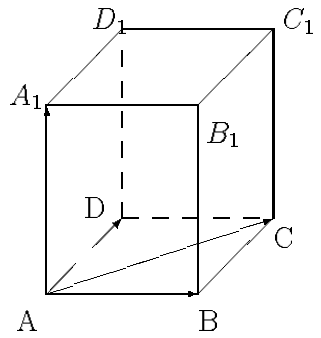
Докажем, что это число нам годится. Для этого нужно доказать, что векторы $\vec{b}$ и $\alpha\vec{a}$ имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Действительно, используя определение произведения вектора на число (первая часть) и определение числа α, получим $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}| = |\pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}||\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = |\vec{a}|$, то есть длины равны.
Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} > 0$ и, следовательно, $\vec{b} \uparrow\uparrow \alpha\vec{a}$. Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} < 0$ и, следовательно, $\vec{b} \uparrow\uparrow \alpha\vec{a}$. Итак, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.
!). Пусть $\exists \alpha_1 \in \mathcal{R} : \vec{b} = \alpha_1\vec{a}$. Тогда $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ и $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}$, то есть $(\alpha_1 - \alpha)\vec{a} = \vec{0}$. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, то по свойству произведения вектора на число $\alpha_1 - \alpha = 0$, то есть число α единственно.

$\Leftarrow$). Пусть $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Тогда по определению произведения вектора на число $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, либо $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$. В обоих случаях векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны. $\square$

Определение 1.19. Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ *параллелен* плоскости σ, если существует представитель $\bar{a}$ вектора $\vec{a}$, параллельный плоскости σ.

$$\vec{a} \| \sigma \Leftrightarrow \exists \bar{a} \in \vec{a}\ \bar{a} \| \sigma$$

Определение 1.20. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ называются *компланарными*, если существует плоскость σ, которой они параллельны. Пример.

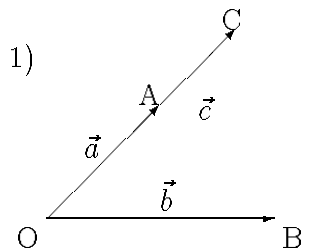


$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ – компланарны
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}$ – не компланарны

Теорема 1.6. (о компланарных векторах) Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a} \not\| \vec{b}$, то $\exists! \alpha, \beta \in \mathcal{R}\ \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

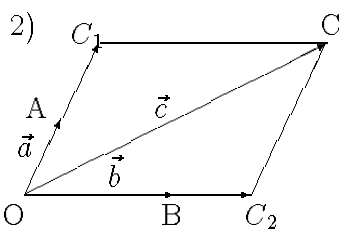
Доказательство. $\exists$). Возьмем произвольную точку O. Так как векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то их представители, отложенные от точки O лежат в одной плоскости, то есть направленные отрезки $\overline{OA} \in \vec{a}$, $\overline{OB} \in \vec{b}$, $\overline{OC} \in \vec{c}$ лежат в одной плоскости. Рассмотрим два случая.

1)



Пусть $\vec{c} \| \vec{a}$. Тогда по теореме о коллинеарных векторах $\exists \alpha \in \mathcal{R}\ \vec{c} = \alpha\vec{a}$. Тогда $\vec{c} = \alpha\vec{a} + 0\vec{b}$. Итак, в этом случае искомая пара чисел $\alpha, 0$.

2)



Пусть $\vec{c} \not\| \vec{a}$. Через точку C проведем прямые, параллельные прямым (OA) и (OB). Мы получим параллелограмм OC_2CC_1. По правилу параллелограмма имеем

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}$$

А теперь применим теорему о коллинеарных векторах к векторам $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC_2}$: $\exists \alpha \in \mathcal{R} : \overrightarrow{OC_1} = \alpha\vec{a}$ и $\exists \beta \in \mathcal{R} : \overrightarrow{OC_2} = \beta\vec{b}$. Итак, $\exists \alpha, \beta \in \mathcal{R}\ \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

!). Пусть еще $\exists \alpha_1, \beta_1 \in \mathcal{R} : \vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$. Так как кроме этого $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, то $(\alpha_1 - \alpha)\vec{a} + (\beta_1 - \beta)\vec{b} = \vec{0}$.

1) Если $\alpha_1 - \alpha = 0$, то $(\beta_1 - \beta)\vec{b} = \vec{0}$. Так как $\vec{b} \neq \vec{0}$ (иначе он был бы коллинеарен вектору $\vec{a}$), то $\beta_1 - \beta = 0$, то есть $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$.

2) Если $\alpha_1 - \alpha \neq 0$, то $\vec{a} = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha}\vec{b}$. По теореме о коллинеарных векторах мы получаем, что $\vec{a} \| \vec{b}$, что противоречит условию теоремы. Значит, $\alpha_1 - \alpha = 0$ и по пункту 1) $\beta_1 - \beta = 0$. Итак, в обоих случаях $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$, то есть пара чисел α, β единственна. $\square$