Вопросы к зачету по геометрии для студентов 6 группы 2 курса (2010-2011 уч. год).

Необходимо знать все определения, формулировки теорем (и др. утверждений), формулы по программе экзамена. Кроме того, уметь отвечать на вопросы, аналогичные следующим:

Проективная геометрия.

1. Можно ли ввести структуру проективной плоскости на множестве крокодилов, греющихся на солнышке на берегу Нила?

2. Дана расширенная прямая $\bar{d}$ и проективный репер на ней. Построить точку $M(2,-1)$ на этой прямой. Рассмотрите различные случаи расположения точек репера на прямой.

3. Может ли репер на расширенной прямой $\bar{d}$ иметь вид $R=(A_1^\infty, A_2^\infty, E)$, $R=(A_1^\infty, A_2, E^\infty)$ и т.п.?

4. В модели проективной прямой – пучке прямых – введите проективный репер и постройте какую-нибудь точку по ее координатам в этом репере.

5. На расширенной проективной плоскости $\bar{\pi}$ дан проективный репер $R=(A_1^\infty, A_2, A_3, E^\infty)$. Может ли точка с координатами $M(1,2,4)_R$ быть бесконечно удаленной?

6. В модели проективной плоскости – связке прямых – определите "бесконечно удаленную" прямую; на каждой проективной прямой этой модели укажите "бесконечно удаленную точку"; укажите две "параллельные" прямые; постройте "параллелограмм".

7. Существует ли на расширенной плоскости такой проективный репер, что точки E_1, E_2, E_3 лежали бы на одной прямой?

8. Существует ли на расширенной плоскости такой проективный репер, что все три точки E_1, E_2, E_3 были бы бесконечно удаленными?

9. Какое наибольшее число бесконечно удаленных точек может иметь проективный репер на расширенной плоскости?

10. Могут ли на бесконечно удаленной прямой расширенной плоскости быть собственные точки?

11. Могут ли точки E_1, E_2, E_3 совпадать с точками A_1, A_2, A_3 проективного репера $R=(A_1, A_2, A_3, E)$?

12. Дана произвольная тройка чисел (a,b,c) $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$. Всегда ли можно выбрать проективный репер на расширенной плоскости так, чтобы точка $M(a,b,c)_R$ в этом репере была бы бесконечно удаленной? Тот же вопрос для расширенной прямой. Если да, то единственен ли такой репер?

13. На расширенной плоскости дан проективный репер. Постройте точку (прямую), заданную своими координатами (уравнением) в данном репере.

14. Может ли ось (центр) перспективы двух перспективных трехвершинников быть бесконечно удаленным элементом? Если да, то привести пример (картинка).

15. Возможно ли применить принцип двойственности к следующим утверждениям:
а) Через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной прямой;
б) Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости;
в) Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость;
г) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку; д) Существует единственная плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые;
е) Медианы треугольника пересекаются в одной точке? Если да, то сформулируйте двойственное утверждение.

16. Могут ли два перспективных трехвершинника иметь две пары параллельных соответствующих сторон? Если да, то что можно сказать о третьей паре соответствующих сторон?

17. Могут ли две (три) точки пересечения соответствующих сторон двух перспективных трехвершинников совпадать?

18. Проиллюстрируйте теорему Дезарга для трехвершинников с бесконечно удаленными элементами. Каково максимально возможное число бесконечно удаленных вершин могут иметь перспективные трехвершинники?

19. Верно ли, что по принципу двойственности бесконечно удаленная точка соответствует бесконечно удаленной прямой?

20. Будет ли параллелограмм с проведенными диагоналями, полным четырехвершинником? Если да, то указать его вершины, противоположные стороны, диагональные точки, диагонали, гармонические четверки точек. Тот же вопрос для трапеции.

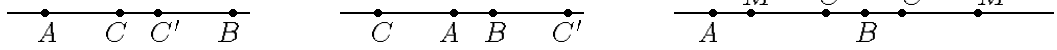
21. Могут ли все диагональные точки полного четырехвершинника быть бесконечно удаленными? Если да, то привести пример (картинка).

22. На расширенной плоскости даны пучки $\mathcal{P}(O^\infty)$ и $\mathcal{P}(O')$. Задать проективное отображение $f : \mathcal{P}(O^\infty) \to \mathcal{P}(O')$ так, чтобы оно было перспективным. Какое проективное преобразование индуцируется при этом на оси перспективы? Задайте две прямые так, чтобы индуцированное отображение прямой на прямую было а) перспективным; б) проективным, но не перспективным.

23. Задайте отображение одной прямой на другую так, чтобы оно было проективным, но не перспективным (картинка). Тот же вопрос для пучков.

24. На расширенной прямой даны четыре различные точки A, B, C, D. Известно, что они задают инволюцию ($A \to B, C \to D$). Определите вид инволюции (эллиптическая или гиперболическая).

25. Пусть f – гиперболическая инволюция с инвариантными точками A и B. Правдоподобна ли картинка?



26. Задайте гомологию проективной плоскости так, чтобы на некоторых ее инвариантных прямых индуцировалась инволюция. В случае гиперболической инволюции укажите ее инвариантные точки.

27. Проективное преобразование плоскости задано парой соответствующих реперов (нарисованы). Найти необходимое и достаточное условие того, что это гомология.

28. Можно ли поворот аффинной плоскости задать как сужение некоторой гомологии? Тот же вопрос для скользящей симметрии. Можно ли поворот аффинной плоскости задать как сужение композиции нескольких гомологий?

29. Параболическая гомология задана осью, центром и парой соответствующих точек. Найти образ бесконечно удаленной точки оси гомологии.

30. Докажите, что гомология не может иметь инвариантных точек, отличных от точек оси и центра.

31. Может ли гомология иметь инвариантные прямые кроме пучка инвариантных прямых?

32. Существует ли прямая, на которой гомология индуцировала бы эллиптическую инволюцию?

33. Может ли гомология с несобственной осью и собственным центром быть параболической? А гомология с собственной осью и несобственным центром?

34. Что получим, если в теореме Штейнера возьмем перспективное отображение пучка на пучок?

35. Что можно сказать о количестве общих точек овальной линии второго порядка на расширенной плоскости и бесконечно удаленной прямой этой плоскости, если известно, что единичная точка E автополярного трехвершинника первого рода данной овальной линии является точкой пересечения медиан координатного треугольника $A_1A_2A_3$? Какую линию второго порядка будет моделировать эта овальная линия?

36. На расширенной плоскости задайте отображение $f : \mathcal{P}(O_1) \to \mathcal{P}(O_2)$ так, чтобы на аффинной плоскости получилась а) гипербола; б)парабола; в) эллипс.

37. Дана точка. Постройте ее поляру относительно гиперболы (параболы). Чем будет являться поляра центра гиперболы? вершины параболы? Найти полюс для каждой из асимптот гиперболы. Найти поляры фокусов эллипса, гиперболы и фокуса параболы.

38. Дана точка и гипербола (парабола) своим очертанием. Постройте касательные к ней, проведенные из данной точки, пользуясь одной линейкой.

39. Построить автополярный трехвершинник первого рода для овальной линии (нарисовать). Рассмотрите случаи эллипса, гиперболы, параболы.

40. Можно ли получить эллипс по теореме Штейнера, если пучки имеют несобственные центры? А что получится?

41. Построить полюс данной прямой с помощью одной линейки, не используя теорему о взаимности поляритета.

42. Могут ли два сопряженных диаметра гиперболы пересекать ее в вещественных точках оба? (доказательство на модели)

43. Существуют ли у гиперболы касательные, параллельные ее асимптотам? (доказательство на модели)

44. Имеет ли парабола параллельные касательные? (доказательство на модели)

45. Докажите, что диагонали параллелограмма, вписанного в эллипс (гиперболу) являются сопряженными диаметрами данного эллипса (гиперболы). (доказательство на модели)

Основания геометрии и геометрия Лобачевского.

1. Можно ли доказать с помощью аксиом только первой группы, что множество элементов (точек, прямых, плоскостей) бесконечно?

2. Может ли геометрия, построенная на первой и второй группах аксиом, содержать бесконечное число точек и конечное число прямых и плоскостей?

3. Какое минимальное число точек, прямых и плоскостей для геометрии, построенной на первой группе аксиом?

4. Измените аксиомы третьей группы так, чтобы у отрезка было больше одной середины.

5. Может ли в какой-либо геометрии, в которой выполняются аксиомы первой и второй групп, у отрезка быть более одной середины, а у угла – единственная биссектриса?

6. Какие из утверждений являются фактами абсолютной геометрии:
   1) медианы (высоты, биссектрисы) треугольника пересекаются в одной точке;
   2) внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним;
   3) внешний угол треугольника равен сумме внутренних, не смежных с ним;
   4) средняя линия треугольника параллельна основанию и равна половине его длины;
   5) около любого треугольника можно описать окружность?

7. Будут ли у четырехугольника Саккери противоположные стороны расходящимися?

8. Исходя из 9 утверждений, эквивалентных пятому постулату Евклида, сформулировать утверждения, эквивалентные аксиоме Лобачевского и проиллюстрировать их на модели Кэли-Клейна.

9. Изобразить (построить несколько точек) окружности, орицикла, эквидистанты на модели Кэли-Клейна.

10. Правдоподобно изобразить (не проводя построений) треугольник и его средние линии; трапецию и ее среднюю линию; треугольник и его высоты.

11. Проиллюстрировать на модели Кэли-Клейна утверждение: у параллельных прямых нет общего перпендикуляра.

12. Является ли треугольник объектом абсолютной геометрии? Сколько групп аксиом Гильберта для этого нужно?