Канонические конформные преобразования 6-мерных многообразий Вайсмана-Грея

Игнаточкина Л.А. (Москва)

Пусть дано гладкое многообразие M размерности $2n > 2$; на нем задана пара тензорных полей (J, g), где J – почти комплексная структура, согласованная с римановой метрикой g. Пара (J, g) называется *почти эрмитовой структурой* на многообразии M, а многообразие с фиксированной на ней почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым многообразием.* Договоримся, что индексы $i, j, k, l = 1, \ldots, 2n$, $a, b, c, d, f = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$.

В 1980 году Грей и Хервелла провели классификацию почти эрмитовых многообразий и выделили 16 классов. Среди выделенных 16 классов были как уже широко изучавшиеся классы, например, $\{0\}$ – класс келеровых многообразий, W_1 – класс приближенно келеровых многообразий, так и новые классы. Примером такого класса почти эрмитовых многообразий может служить класс $W_1 \oplus W_4$, названный позднее (в диссертации Н.А. Ежовой) классом многообразий Вайсмана-Грея. Хорошо известно, что класс многообразий Вайсмана-Грея содержит классы W_1 и W_4.

Глубокое изучение даже класса приближенно келеровых структур методами формализма Кошуля сталкивалось с большим количеством технических трудностей. Поэтому для изучения классов почти эрмитовых многообразий применяют так называемый метод присоединенной $G-$ структуры. Он заключается в следующем. В расслоении всех реперов над гладким многообразием выделяется подрасслоение со структурной группой $U(n)$. Это подрасслоение называется присоединенной $G-$ структурой почти эрмитова многообразия. Тогда задание тензорных полей на многообразии равносильно заданию систем функций на пространстве расслоения присоединенной $G-$ структуры.

Присоединенная $G-$ структура характеризуется тем, что компоненты тензорных полей g и J имеют следующий вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}; \ (J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix};$$

С помощью ковариантного дифференциала ∇J в римановой связности метрики g можно построить два тензорных поля

$$B(X,Y) = \frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X - \nabla_(J)(JX));$$
$$C(X,Y) = \frac{1}{8}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY);$$

Первое называется виртуальным тензором, а второе – структурным тензором почти эрмитова многообразия. Их ненулевые компоненты на пространстве присоединенной $G-$ структуры обозначаются $\{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$ и $\{B^{abc}, B_{abc}\}$ соответственно. С помощью этих тензоров можно записать условия принадлежности почти эрмитова многообразия каждому из 16 классов. С помощью этих компонент первая группа структурных уравнений римановой связности принимает вид:

$$d\omega^a = \theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b;$$
$$d\omega_a = -\theta^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B^{ab}{}_c\omega_b \wedge \omega^c;$$

Пусть задана гладкая функция f на многообразии M. Под *конформным преобразованием почти эрмитова многообразия* $\mathbb{M} = (M, J, g)$ будем понимать переход к почти эрмитову многообразию $\tilde{\mathbb{M}} = (M, J, \tilde{g} = e^{2f}g)$. Договоримся все объекты, относящиеся к конформно преобразованному многообразию обозначать с помощью волны над соответствующей буквой.

Таким образом, если для почти эрмитова многообразия задано конформное преобразование его структуры, то возникают два почти эрмитовых многообразия, каждое из которых обладает своей присоединенной $G-$ структурой и характеризуется набором функций на своей присоединенной $G-$ структуре. Возникает потребность в получении соотношений между этими системами функций.

Обозначим $(P, M, \pi, U(n))$ и $(\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, U(n))$ присоединенные $G-$ структуры. Определим отображение $\psi : P \to \tilde{P}$, по формуле $\psi(p) = p'$, где $p = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}) \in P$ – произвольный $A-$ репер,

$$p' = (m, \tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}(m)\varepsilon_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f}(m)\varepsilon_{\hat{a}})$$

Тогда пара $(\psi, id : U(n) \to U(n))$ – изоморфизм присоединенных $G-$ структур.

С помощью отображения ψ и первых групп структурных уравнений почти эрмитовых структур получены соотношения между компонентами форм смещения и компонентами римановых связностей исходного и конформно преобразованного многообразий.

Теорема 1. *Пусть даны почти эрмитовы многообразия* (M, J, g) *и* $(M, J, \tilde{g})$. *Тогда*

$$\begin{aligned} (\psi^* \tilde{\omega}^i)(p) &= e^f(m)\omega^i(p); \\ \psi^* \tilde{\theta}^a_b &= \theta^a_b + \beta^a \omega_b - \beta_b \omega^a \end{aligned}$$

где ω, $\tilde{\omega}$ *– формы смещения,* θ, $\tilde{\theta}$ *– формы римановых связностей многообразий* $\mathbb{M}$ *и* $\tilde{\mathbb{M}}$ *соответственно,* $\beta_i \omega^i = \pi^*(df)$.

При доказательстве теоремы 1 получаются также и следующие соотношения на компоненты структурного и виртуального тензоров.

Теорема 2. *Для любого почти эрмитова многообразия*

$$\begin{aligned} &e^f(\tilde{B}^{abc} \circ \psi) = B^{abc}; && e^f(\tilde{B}_{abc} \circ \psi) = B_{abc}; \\ &e^f(\tilde{B}^{ab}{}_c \circ \psi) = B^{ab}{}_c + \beta^a \delta^b_c - \beta^b \delta^a_c; && e^f(\tilde{B}_{ab}{}^c \circ \psi) = B_{ab}{}^c + \beta_a \delta^c_b - \beta_b \delta^c_a; \end{aligned}$$

В качестве тривиального примера применения результатов теоремы 1 покажем как легко доказать, что класс приближенно келеровых многообразий не является конформно инвариантным. Напомним, что почти эрмитово многообразие является приближенно келеровым многообразием тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной $G-$ структуры компоненты структурного и виртуального тензоров удовлетворяют соотношениям

$$B^{[abc]} = B^{abc}; \;\; B^{ab}{}_{c} = 0;$$

то есть структурный тензор кососимметричен по любой паре индексов, а виртуальный тензор тождественно равен нулю.

Пусть многообразие $\mathbb{M}$ является приближенно келеровым, то есть выполняются соотношения, написанные выше. Подставим в них соотношения из теоремы 2:

$$\tilde{B}^{[abc]} \circ \psi = \tilde{B}^{abc} \circ \psi; \;\; \tilde{B}^{ab}{}_{c} \circ \psi = \beta^{a}\delta^{b}_{c} - \beta^{b}\delta^{a}_{c};$$

Тогда виртуальный тензор многообразия $\tilde{\mathbb{M}}$ будет равен 0 тогда и только тогда, когда $\beta^{a}\delta^{b}_{c} - \beta^{b}\delta^{a}_{c} = 0$, то есть $\beta^{a} = 0$. Если многообразие M связно, то это означает, что функция f – константа.

Итак, приближенно келерово многообразие переходит в приближенно келерово многообразие тогда и только тогда, когда f – константа.

Аналогичные соотношения получены для других систем функций, характеризующих исходное и конформно преобразованное почти эрмитовы многообразия. С помощью этих формул мы можем для любого тождества, характеризующего исходное многообразие, записать соответствующее тождество для конформно преобразованного многообразия и, таким образом, изучать свойства конформно преобразованного многообразия на его присоединенной $G-$ структуре. С другой стороны, среди всех конформных преобразований почти эрмитова многообразия есть такие, которые "упрощают"
его структуру, а значит, "сложные"
тождества исходного многообразия можно перевести в "более простые"
тождества конформно преобразованного многообразия. С этими

тождествами провести необходимые преобразования и результат "вернуть"
на исходное многообразие.

Применим этот метод для исследования многообразий Вайсмана-Грея. Напомним, что почти эрмитово многообразие является многообразием Вайсмана-Грея тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной $G-$ структуры выполняются соотношения

$$B^{[abc]} = B^{abc};\ \ B^{ab}{}_{c} = \alpha^{[a}\delta_{c}^{b]};$$

(и формулы комплексно сопряженные), где $\{\alpha_a, \alpha^a\}$ – компоненты 1-формы, которая называется *формой Ли.*

Известно, что некоторые многообразия Вайсмана-Грея конформным преобразованием с функцией $f = \ln\sqrt{B}$, где $B = B^{abc}B_{abc}$, преобразуются в приближенно келеровы многообразия, изучать которое проще. Будем рассматривать такие конформные преобразования в некоторой окрестности каждой точки произвольного многообразия Вайсмана-Грея, в которой функция $B \neq 0$.

Определение 1. Назовем конформное преобразование почти эрмитова многообразия *каноническим, если* $f = \ln\sqrt{B}$.

Такое преобразование действительно оказалось "упрощающим" структуру. А именно, доказана

Теорема 3. *Любое многообразие Вайсмана-Грея в окрестности каждой своей точки, для которой* $B \neq 0$, *каноническим конформным преобразованием переводится в многообразие Вайсмана-Грея, для которого* $\tilde{B} = \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = 1$.

Дифференцируя внешним образом это соотношение и применяя некоторые тождества, которые выполняются для каждого многообразия Вайсмана-Грея, получим

Теорема 4. *Любое многообразие Вайсмана-Грея в окрестности каждой своей точки, для которой* $B \neq 0$, *каноническим конформным преобразованием может быть переведено в много-*

образие Вайсмана-Грея, для которого выполняется $\tilde{\alpha}^d = (\tilde{\alpha}_{[ab]} - \tilde{\alpha}^h \tilde{B}_{hab})\tilde{B}^{abd}$. *Здесь* $\{\alpha_{ab}\}$ *– система функций, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям* $d\alpha_a + \alpha_b \theta^b_a = \alpha_{ab}\omega^b + \alpha_a{}^b\omega_b$.

"Вернем"это тождество на исходное многообразие Вайсмана-Грея.

Следствие. *Для любого многообразия Вайсмана-Грея в окрестности каждой своей точки, для которой* $B \neq 0$, *имеет место соотношение* $B\alpha^d + 2B^{abcd}B_{abc} + 3\alpha^c B_{cab}B^{abd} = 0$. *Здесь* $\{B^{abcd}\}$ *– система функций, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям* $dB^{abc} - B^{dbc}\theta^a_d - B^{adc}\theta^b_d - B^{abd}\theta^c_d = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d$.

Тензор Вейля конформной кривизны C многообразия Вайсмана-Грея на пространстве присоединенной $G-$ структуры имеет четыре основных группы компонент. Обращение в нуль каждой из этих групп определяет конформно инвариантный класс. Нас будут интересовать два класса: $C_0 : C_{abcd} = 0$ и $C_1 : C_{\hat{a}bcd} = 0$. Критерии принадлежности многообразий Вайсмана-Грея названным классам были получены в диссертации Ежовой:

$$C_0 : B^{abcd} = -\alpha^{[a}B^{b]cd} - \alpha^{(c}B^{d)ab};$$
$$C_1 : \alpha_{[ab]} = \alpha^f B_{fab};$$

Рассмотрим собственные 6-мерные многообразия Вайсмана-Грея. В этом случае компоненты структурного тензора имеют вид $B_{abc} = \lambda\varepsilon_{abc}$, $B^{abc} = \bar{\lambda}\varepsilon^{abc}$, где ε_{abc} и ε^{abc} – символ Кронекера третьего порядка. Тогда из следствия получим, что критерий класса C_1 выполняется и

Теорема 5. *Любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу* C_0.

Далее, используя соотношение теоремы 4 и теорему 5, получим, что любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_1. Выясним геометрический смысл этого факта.

Напомним, что многообразие Вайсмана-Грея называется локально конформно келеровым, если для каждой его точки существует окрестность U и функция f на этой окрестности, такие что многообразие $(U, J, \tilde{g} = e^{2f} g)$ является приближенно келеровым.

Игнаточкиной Л.А. доказано, что в размерности выше 4 класс C_1 многообразий Вайсмана-Грея совпадает с классом локально конформно приближенно келеровых многообразий. В частности, это верно для 6-мерных многообразий. Так как мы доказали, что любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_1, то получим

Теорема 6. *Любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея является локально конформно приближенно келеровым многообразием.*

Для 8-мерных многообразий Вайсмана-Грея удалось доказать, что совпадают классы C_0 и C_1. Для многообразий больших размерностей вопрос остается открытым.