Обобщение преобразований, индуцированных на главных T^1-расслоениях конформными преобразованиями их базы.

Конформные преобразования римановых многообразий, а именно переход от римановой структуры g гладкого многообразия M к римановой структуре $\tilde{g} = e^{2f}g$ на том же гладком многообразии M, где f – гладкая функция на M, являются классическим примером преобразований на гладком многообразии, наделенным некоторой дополнительной геометрической структурой.

Пусть на $2n$-мерном гладком многообразии M кроме римановой метрики g задана еще почти комплексная структура J, согласованная с римановой метрикой g, то есть антиинволютивный эндоморфизм, такой что $g(JX, JY) = g(X, Y)$, где X, Y – гладкие векторные поля на многообразии M. Пара (J, g) называется почти эрмитовой структурой на многообразии M. Если рассмотреть пару $(J, \tilde{g} = e^{2f}g)$, то очевидно, что она также задает почти эрмитову структуру на многообразии M. Переход от первой почти эрмитовой структуры ко второй будем называть конформным преобразованием почти эрмитовой структуры (J, g).

Как известно, задание почти эрмитовой структуры на гладком многообразии равносильно заданию подрасслоения главного расслоения реперов этого многообразия со структурной группой $U(n)$. Это так называемая присоединенная G-структура почти эрмитова многообразия, которую обозначим $(B^A(M), M, \pi, U(n))$. Также известно, что факторизация присоединенной G-структуры по группе Ли $SU(n)$, то есть четверка

$$\mathscr{P} = \big(B^A(M)/SU(n) = P, M, \pi, U(n)/SU(n) = T^1\big)$$

является главным расслоением со структурной группой T^1, то есть структурная группа такого главного расслоения является одномерным тором, то есть окружностью, и называется главным T^1-расслоением.

Если фиксировать на главном расслоении $\mathscr{P}$ связность ζ, то на $2n+1$-мерном гладком многообразии P будет определена почти контактная метрическая структура. Напомним, во-первых, что почти контактной метрической структурой на гладком многообразии называется четверка (Φ, η, ξ, g) тензорных полей, где Φ – тензорное поле типа (1,1), η – 1-форма, ξ – векторное поле, g – риманова метрика, которые удовлетворяют следующим требованиям

$$\begin{array}{ll} \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi; & \eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \\ g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y); & \eta \circ \Phi = 0, \end{array}$$

во-вторых, на T^1-расслоении почти контактная метрическая структура (Φ, ζ, ξ, g) определяется следующим образом

$$g = \pi^* g^M + \zeta \otimes \zeta; \quad \Phi = i_H \circ J \circ \pi_*,$$

(J, g^M) – почти эрмитова структура базы M, ζ – фиксированная связность на расслоении $\mathscr{P}$, ξ – единичное вертикальное векторное поле на P. В частности, если форма кривизны связности ζ является антиувлечением обобщенной формы Риччи с базы расслоения, то класс почти контактной метрической структуры на главном T^1-расслоении не зависит от выбора формы ζ.

Все основные действующие лица у нас определены. Переходим к рассмотрению преобразований. Пусть дано $2n$-мерное гладкое многообразие M. На нем фиксирована почти эрмитова структура (J, g). Обозначим полученное почти эрмитово многообразие через $\mathscr{M}$. Подвергнем почти эрмитову структуру (J, g) конформному преобразованию и получим почти эрмитово многобразие $\tilde{\mathscr{M}} = (M, J, \tilde{g})$. Для каждого из полученных почти эрмитовых многообразий построим присоединенную G-структуру (обозначим их $B^A(M)$ и $\tilde{B}^A(M)$ соответственно) и профакторизуем их. Получим два главных T^1-расслоения, которые обозначим $\mathscr{P}$ и $\tilde{\mathscr{P}}$.

Для главных расслоений $B^A(M)$ и $\tilde{B}^A(M)$ определим отображение

$$\psi : p = (m, \varepsilon_i) \to \tilde{p} = (m, \tilde{\varepsilon}_i = e^{-f}\varepsilon_i).$$

Пара (ψ, id) будет изоморфизмом присоединенных G-структур. Эта пара порождает изоморфизм главных T^1-расслоений $\mathscr{P}$ и $\tilde{\mathscr{P}}$, который будем обозначать так же (ψ, id). Фиксируем на $\mathscr{P}$ и $\tilde{\mathscr{P}}$ связности ζ и $\tilde{\zeta}$ соответственно. Тогда на тотальном пространстве расслоения $\mathscr{P}$ фиксируются две связности ζ и $\psi^*\tilde{\zeta}$, последнюю договоримся обозначать $\tilde{\zeta}$. Таким образом, на тотальном пространстве расслоения $\mathscr{P}$ получаем две почти контактные метрические структуры, которые обозначим (Φ, ζ, ξ, g) и $(\tilde{\Phi}, \tilde{\zeta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ соответственно. Переход от первой почти контактной метрической структуры ко второй назовем преобразованием, индуцированным на главном T^1-расслоении конформным преобразованием его базы.

Нетрудно получить формулы такого преобразования

$$\begin{array}{l} \tilde{\Phi} = \Phi - (\tilde{\zeta} \circ \Phi) \otimes \tilde{\xi}; \\ \tilde{g} = (e^{2f} \circ f)(g - \zeta \otimes \zeta) + \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\zeta}; \\ \xi = \tilde{\zeta}(\xi)\tilde{\xi}. \end{array}$$

Оказалось, что полученное преобразование существенно отличается от конформного преобразования, то есть от перехода от почти контактной структуры (Φ, ζ, ξ, g) к почти контактной метрической структуре $(\Phi, e^f\zeta, e^{-f}\xi, e^{2f}g)$. А именно, преобразование, индуцированное на T^1 -расслоении, является конформным тогда и только тогда, когда функция f является константой.

В связи с этим упомянутые два преобразования хочется объединить в некотором общем классе преобразований почти контактных метрических структур, чтобы изучать совместно.

Пусть $P - 2n+1$-мерное гладкое многообразие. Тогда переход от почти контактной метрической структуры (Φ, ζ, ξ, g) к четверке $(\tilde{\Phi}, \tilde{\zeta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$, где $\tilde{\zeta}$ – произвольная форма на многообразии P, такая что $\tilde{\zeta}(\xi) \neq 0$ в каждой точке многообразия P, а остальные тензорные поля задаются так же как и выше будет преобразованием почти контактной метрической структуры, так как полученная четверка тензорных полей удовлетворяет всем условиям из определения почти контактной метрической структуры при любых $\tilde{\zeta}$ и f. Назовем полученное преобразование обобщенным конформным преобразованием почти контактной метрической структуры.

Если положить в этом определении $\zeta = \eta$, $\tilde{\zeta} = e^f\eta$, то получим определение конформного преобразования почти контактной метрической структуры. Итак, введенное преобразование является обобщением конформного преобразования и преобразования, индуцированного на T^1-расслоении конформным преобразованием базы.