2 Элементы теории групп Ли

Звездочкой "*" отмечены те доказательства, которые можно пропустить при первом прочтении.

2.1 Группы Ли.

Определение 2.1. *Группой Ли* называется гладкое многообразие G, множество точек которого наделено структурой абстрактной группы, причем отображение $\varphi : G \times G \to G$, $\varphi(x, y) = x \cdot y^{-1}$ гладко.

Предложение 2.1. Групповые операции в группе Ли – гладкие отображения.

Доказательство. 1. Операция $\alpha : G \to G$, $\alpha(x) = x^{-1}$ взятия обратного элемента может быть представлена в виде $\alpha = \varphi \circ i_2$, где $i_2(x) = (e, x)$ – вложение, e – единица группы, то есть является композицией гладких отображений, следовательно, гладко.
Операция умножения $\mu : G \times G \to G$ может быть представлена в виде $\mu = \varphi \circ (id \times \alpha)$ – гладкое отображение как композиция гладких отображений. □

Пример 2.1. Арифметическое пространство $\mathbf{R}^n = \{(x^1, \ldots, x^n), x^i \in \mathbf{R}\}$ является группой Ли относительно операции сложения. Структуру гладкого многообразия на арифметическом пространстве мы уже построили.

Предложение 2.2.р Мультипликативная группа ненулевых целых чисел $\mathbf{C}^* = \{z \in \mathbf{C}, z \neq 0\}$ является группой Ли. Действительно, если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z = x + iy$, то

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); \quad z^{-1} = \tfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

и, значит,

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

то есть является гладким отображением.

Пример 2.2. В дальнейшем мы увидим, что всякая абстрактная подгруппа группы Ли, являющаяся замкнутым подмножеством, сама является группой Ли. В частности, *одномерный тор* $T^1 = \{z \in \mathbf{C}^* : |z| = 1\}$ индуцирует из $\mathbf{C}^*$ структуру (абелевой) группы Ли, представляющей собой, как гладкое многообразие, (одномерную) окружность S^1.

Пример 2.3. Пусть G_1, G_2 – группы Ли. Тогда гладкое многообразие $G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) | g_i \in G_i, i = 1, 2\}$ является группой Ли относительно покомпонентных групповых операций

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2); \quad (g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$$

Группа Ли G, построенная таким образом, называется *прямым произведением групп Ли* G_1 и G_2. В частности, прямое произведение n одномерных торов $T^n = \underbrace{T^1 \times \cdots \times T^1}_{\text{n раз}}$ – абелева группа Ли, называемая n-*мерным тором.*

Пример 2.4. Пусть $M_{n,n}$ – полная матричная алгебра. Тогда

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{(g_{ij} \in M_{n,n}, det(g_{ij}) \neq 0\}$$

гладкое многообразие (открытое подмногообразие евклидова пространства $M_{n,n} \equiv \mathbf{R}^{n^2}$), являющееся группой Ли относительно операции умножения матриц и взятия обратной матрицы. Напомним, что если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – произвольные элементы из $GL(n, \mathbf{R})$, то $C = A \cdot B = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, $A^{-1} = (h_{ij})$, $h_{ij} = \frac{A_{ji}}{det A}$, где A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A. Тогда отображение $\varphi(A, B) = A \cdot B^{-1} \equiv (t_{ij})$ задается функциями $t_{ij} = \frac{1}{det B} \sum_{k=1}^n a_{ik}B_{jk}$, которые являются гладкими. Группа Ли $GL(n, \mathbf{R})$ называется *полной линейной группой порядка* n.

Пример 2.5. С учетом замечания, сделанного в примере 2.2, получаем новые примеры групп Ли
а) группа Ли $O(n, \mathbf{R}) = \{g \in GL(n, \mathbf{R}) : g \cdot g^T = I_n\}$, где g^T обозначает транспонированную матрицу (строки матрицы g становятся столбцами матрицы g^T), I_n – единичная матрица порядка n. Эта группа состоит из матриц, сохраняющих каноническое скалярное произведение $(x, y) = \sum_{k=1}^n x^k y^k$ в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$. Эта группа Ли называется *ортогональной группой порядка* n.
б) группа Ли $SL(n, \mathbf{R}) = \{g \in GL(n, \mathbf{R}) : detg = 1\}$, называемая *специальной линейной* или *унимодулярной группой порядка* n.
в) группа Ли $SO(n, \mathbf{R}) = O(n, \mathbf{R}) \cap SL(n, \mathbf{R})$, называемая *специальной ортогональной группой порядка*

n.
Замечание. Легко видеть, что в случае n=2 эта группа естественно изоморфна группе T^1, рассмотренной в примере 2.2. Естественный изоморфизм задается сопоставлением комплексному числу $z = \cos t + \sqrt{-1}\sin t$ единичного модуля $(t \in \mathbf{R})$ матрицы $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Этот изоморфизм является локальным диффеоморфизмом, а значит, и диффеоморфизмом, а следовательно, группа Ли $SO(n, \mathbf{R})$ канонически отождествляется с одномерным тором T^1.

Пример 2.6. Группа Ли

$$GL(n, \mathbf{C})^R = \{g \in GL(2n, \mathbf{R}) :\ g \circ J = J \circ g\}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ – стандартная комплексная структура на $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$. Эта группа называется *вещественной реализацией полной линейной группы порядка* n. Очевидно,

$$g \in GL(n, \mathbf{C})^R \Leftrightarrow g = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix},\ det g \neq 0$$

где $A, B \in M_{n,n}$ – вещественные матрицы порядка n. Группа $GL(n, \mathbf{C})^R$, как абстрактная группа, естественно изоморфна *полной комплексной линейной группе порядка* n, то есть группе

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{(g_{ij}) \in M^C_{n,n} :\ det g \neq 0\}$$

где $M^C_{n,n}$ – полная комплексная матричная алгебра. Канонческий изоморфизм $\tau : GL(n, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C})^R$ задается следующим образом. Пусть $Z = (z_{ij}) \in GL(n, \mathbf{R})$, $z_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Положим $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Тогда $\tau(Z) = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$.

Задача 2.1. Докажите, что $\tau : GL(n, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C})^R$ является изоморфизмом групп.
С его помощью можно построить еще ряд важных примеров групп Ли:
а) группа Ли $O(n, \mathbf{C}) = \{g \in GL(n, \mathbf{C}) :\ g \cdot g^T = I_n\}$, состоящая из матриц, сохраняющих каноническое скалярное произведение

$$(X, Y) = \sum_{k=1}^{n} x^k y^k$$

в комплексном арифметическом пространстве $\mathbf{C}^n$. Эта группа Ли называется *комплексной ортогональной группой порядка* n.
б) группа Ли $U(n) = \{g \in GL(n, \mathbf{C}) :\ g \cdot \bar{g}^T = I_n\}$, состоящая из матриц, сохраняющих *каноническое эрмитово скалярное произведение*

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x^k \bar{y}^k$$

в $\mathbf{C}^n$ (черта над буквой обозначает комплексное сопряжение). Эта группа называется *унитарной группой порядка* n.
в) группа Ли $SO(n, \mathbf{C}) = O(n, \mathbf{C}) \cap SL(2n, \mathbf{R})$, а также группа Ли $SU(n) = U(n) \cap SL(2n, \mathbf{R})$, называемые соответственно *специальной комплексной ортогональной* и *унитарной унимодулярной* группами порядка n.

Пример 2.7. Мы уже знаем, что многообразие $GL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$ обладает естественной структурой группы Ли – прямого произведения групп Ли $GL(n, \mathbf{R})$ и $\mathbf{R}^n$. Оказывается, что в нем существует и другая структура группы Ли.

Задача 2.2. Проверьте, что операции

$$(A, X) \cdot (B, Y) = (AB, AY + X); \quad (A, X)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}X)$$

$A, B \in GL(n, \mathbf{R})$, $X, Y \in \mathbf{R}^n$ определяют в этом множестве структуру группы, обозначаемую A_n, причем $GL(n, \mathbf{R})$ и $\mathbf{R}^n$ вкладываются в эту группу в качестве подгрупп по формулам $A \to (A, 0)$, $X \to (I_n, X)$, соответственно.

Задача 2.3. Докажите, что подгруппа $\mathbf{R}^n$ является нормальным делителем, а факторгруппа $A_n/\mathbf{R}^n$ изоморфна группе $GL(n, \mathbf{R})$. Напомним, что подгруппа H называется *нормальным делителем*

группы G, если относительно нее левые и правые смежные классы совпадают, то есть $xH = Hx$ для любого $x \in G$. Это условие равносильно условию $x^{-1}Hx = H$. Говорят, что элемент a сопряжен с элементом b посредством элемента x, если $a = x^{-1}bx$. Тогда критерий нормальной подгруппы можно сформулировать в виде: подгруппа H является нормальной подгруппой в группе G тогда и только тогда, когда вместе с каждым своим элементом она содержит и все элементы, сопряженные с ним посредством элементов из G.
В этом случае отображение $\varphi : A_n \times A_n \to A_n$ определяется формулой

$$\varphi((A,X),(B,Y)) = (AB^{-1}, -AB^{-1}Y + X)$$

а значит, задается гладкими функциями

$$c_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}B_{jk}}{detB} \quad z^i = -\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y^j + x^i$$

Группа Ли A_n называется *аффинной группой порядка* n. Аналогично строится полупрямое произведение групп Ли $O(n, \mathbf{R})$ и $\mathbf{R}^n$, называемое *группой движений n-мерного евклидова пространства.* Из сказанного выше следует, в частности, что группа движений первого рода евклидовой плоскости (то есть двумерного евклидова пространства) диффеоморфно гладкому многообразию $S^1 \times \mathbf{R}^2$.

2.2 Алгебры Ли

Определение 2.2. *Алгеброй Ли* (над полем $\mathbf{F}$) называется линейное пространство $\mathbf{g}$ над полем $\mathbf{F}$, в котором фиксирована бинарная билинейная операция $[\cdot,\cdot] : \mathbf{g} \times \mathbf{g} \to \mathbf{g}$, называемая *операцией коммутирования* или *коммутатором* и обладающая свойствами
1) $[X,Y] = -[Y,X]$ (антикоммутативность);
2) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (тождество Якоби);
Мы будем полагать $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, если не оговорено противное.

Значение алгебр Ли в теории групп Ли определяется тем, что с каждой группой Ли внутренним образом связана некоторая конечномерная алгебра Ли, в свойствах которой отражаются свойства самой группы Ли.

Пример 2.8. Пусть M – гладкое многообразие. Тогда модуль гладких векторных полей $\mathcal{X}(M)$, рассматриваемый как (бесконечномерное) $\mathbf{R}$-линейное пространство, является (бесконечномерной) алгеброй Ли.

Пример 2.9. Всякое вещественное линейное пространство V является алгеброй Ли относительно коммутатора $[X,Y] = 0$, $X, Y \in V$. Такая алгебра Ли называется *абелевой алгеброй Ли.*

Задача 2.4. Докажите, что всякая ассоциативная алгебра $(\mathcal{A}, \cdot)$ является алгеброй Ли относительно коммутатора

$$[X,Y] = X \cdot Y - Y \cdot X; \; X, Y \in \mathcal{A}$$

В частности, матричная алгебра $M_{n,n}$ является алгеброй Ли относительно коммутатора $[A,B] = AB - BA$, $A, B \in M_{n,n}$, определенного с помощью матричного умножения. Эта алгебра Ли называется *полной матричной алгеброй Ли.* Аналогично, алгебра эндоморфизмов $EndV$ произвольного линейного пространства V является алгеброй Ли относительно коммутатора

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f; \; f, g \in EndV$$

определенного операцией композиции.

Пример 2.10. Геометрическое векторное пространство – пространство V^3 – является алгеброй Ли относительно операции векторного произведения. Тождество Якоби проверяется прямым подсчетом с использованием хорошо известной из курса аналитической геометрии формулы

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}); \; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$$

Пусть G – группа Ли, $g \in G$. Определим отображения
$L_g : G \to G$; $L_g(h) = g \cdot h$ (левый сдвиг на элемент g);
$R_g : G \to G$; $R_g(h) = h \cdot g$ (правый сдвиг на элемент g);
Очевидно, что эти отображения гладкие и обладают свойствами

1) $L_g \circ L_h = L_{gh}$; $g, h \in G$

Доказательство. $L_g \circ L_h(p) = L_g(h \cdot p) = g \cdot (h \cdot p) = (g \cdot h) \cdot p = L_{gh}(p)$. $\square$

2) $R_g \circ R_h = R_{hg}$; $g, h \in G$. Доказательство проведите самостоятельно.

3) Отображения L_g и R_g – диффеоморфизмы.

Доказательство. Докажем сначала, что $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$ и $R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$. Действительно, $L_g \circ L_{g^{-1}}(p) = g \cdot g^{-1} \cdot p = p$, то есть $L_g \circ L_{g^{-1}} = id$. Аналогично доказывается $L_{g^{-1}} \circ L_g = id$. Таким образом, отображения L_g и R_g биективны и являются гладкими вместе со своими обратными отображениями. $\square$

Определение 2.3. Векторное поле $X \in \mathcal{X}(G)$ называется *левоинвариантным*, если для любого $g \in G$ имеем $(L_g)_* X = X$.

Теорема 2.1. Совокупность $\mathbf{g}$ всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли G образует вещественное векторное пространство, естественно изоморфное касательному пространству $T_e(G)$ к группе Ли G в единице e. В частности, $dim\mathbf{g} = dimG$.

Доказательство. Докажем, что $\mathbf{g} \subset \mathcal{X}(G)$ является векторным подпространством в $\mathcal{X}(G)$, а следовательно, само является векторным пространством. В силу линейности дифференциала отображения имеем для любых $X, Y \in \mathbf{g}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, любого $g \in G$
$(L_g)_*(\lambda X + \mu Y) = \lambda (L_g)_* X + \mu (L_g)_* Y = \lambda X + \mu Y$.

Построим отображение $\beta : \mathbf{g} \to T_e(G)$, положив $\beta(X) = X_e$.

Задача 2.5. Докажите, что β линейное отображение.

Задача 2.6. Докажите, что ядро отображения β нулевое, а следовательно, это отображение инъективно.

Докажем, что отображение β сюръективно. Пусть $\xi \in T_e(G)$. Построим семейство $X = \{X_g \in T_g(G) | \, X_g = (L_g)_* \xi\}$. Докажем, что $X \in \mathcal{X}(G)$. Пусть отображение $\mu : G \times G \to G$ умножения в группе Ли G в локальных картах задается уравнениями

$$z^i = \mu^i(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n);\ i = 1, \ldots, n = dimG$$

Рассмотрим локальную карту (U, φ), содержащую единицу группы и пусть координаты единицы в этой локальной карте будут $(0, \ldots, 0)$. Фиксируем $g \in U$. Пусть в выбранной локальной карте g имеет координаты $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Тогда левый сдвиг L_g задается уравнениями

$$z^i = \mu^i(x_0^1, \ldots, x_0^n, y^1, \ldots, y^n);\ i = 1, \ldots, n$$

а значит, его дифференциал в точке $e \in G$ – матрицей Якоби $\left(\frac{\partial \mu^i}{\partial y^j}\right)|_e$. Следовательно, если вектор ξ имеет координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, то вектор X_g – координаты $(X_g)^i = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial y^j}\right)|_e \, \xi^j$, то в произвольной точке $g \in U$ имеем

$$X^i(g) = (X_g)^i(x^1, \ldots, x^n) = \frac{\partial \mu^i}{\partial y^j}(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)\xi^j;\ i = 1, \ldots, n$$

гладкие функции.

Рассмотрим произвольную карту (V, ψ), которая не содержит единицу группы. Из определения векторного поля X имеем $X_h = (L_h)_* \xi = ((L_h)_*)_e((L_{g^{-1}})_*)_g X_g = ((L_{hg^{-1}})_*)_g X_g$. Тогда если в фиксированной точке $g(g^1, \ldots, g^n) \in V$ вектор X_g построен, то в произвольной точке $h \in V$ аналогично предыдущему получим $X^i(h) = (X_h)^i(x^1, \ldots, x^n) = \frac{\partial \mu^i}{\partial y^j}(x^1, \ldots, x^n, g^1, \ldots, g^n)(X_g)^j$ – гладкие функции.

Итак, мы получили, что семейство $X = \{X_g \in T_g(G) | \, X_g = (L_g)_* \xi\}$ задает гладкое векторное поле на G. Более того, оно является левоинвариантным, так как $(L_g)_*(X_h) = (L_g)_*((L_h)_* \xi) = (L_g \circ L_h)_* \xi = (L_{gh})_* \xi = X_{gh} = X_{L_g(h)}$, $g, h \in G$, то есть $(L_g)_* X = X$. Кроме того, $\beta(X) = X_e = (L_e)_* \xi = id(\xi) = \xi$. Итак, мы доказали, что β – сюръективно, а следовательно, биективно. $\square$

Предложение 2.3. Линейное пространство $\mathbf{g}$ всех левоинвариантных векторных полей группы Ли G является алгеброй Ли относительно операции коммутирования векторных полей.

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathbf{g}$ является подалгеброй (бесконечномерной) алгебры Ли $\mathcal{X}(G)$. Пусть $X, Y \in \mathbf{g}$ – левоинвариантные векторные поля, то есть $(L_g)_* X = X$, $(L_g)_* Y = Y$, $g \in G$. Тогда $(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y]$, то есть $[X, Y] \in \mathbf{g}$ – левоинвариантное векторное поле. $\square$

Определение 2.4. Алгебра Ли $\mathbf{g} = \mathbf{g}(G)$ всех левоинвариантных векторных полей группы Ли G называется *присоединенной алгеброй Ли* или *алгеброй Ли группы Ли G*.

Замечание. Алгебру Ли группы Ли G можно отождествить с линейным пространством $T_e(G)$, операция коммутирования в котором определена формулой

$$[\xi, \eta] = \beta[\beta^{-1}\xi, \beta^{-1}\eta];\ \xi, \eta \in T_e(G)$$

Линейное пространство $\mathbf{g}$ стандартным образом порождает тензорную алгебру $\mathcal{T}(\mathbf{g})$, элементы которой характеризуются как левоинвариантные тензорные поля на группе Ли G, то есть

$$\mathcal{T}(\mathbf{g}) = \{t \in \mathcal{T}(G) \,|\, (L_g)_* t = t\ \forall g \in G\}.$$

Аналогичным образом определяется внешняя алгебра $\Lambda(\mathbf{g})$ левоинвариантных дифференциальных форм на G. Левоинвариантные дифференциальные 1-формы называются *формами Маурера-Картана.* Очевидно, если ω – форма Маурера-Картана, то есть $\omega \in \mathbf{g}^*$, $X, Y \in \mathbf{g}$, то $\omega(Y) \in \mathbf{R}$, а значит, $X(\omega(Y)) = 0$. С учетом этого получим

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]);\ \omega \in \mathbf{g}^*; X, Y \in \mathbf{g}$$

Пусть G – группа Ли, $dimG = n$, $\mathbf{g}$ – ее алгебра Ли. Зафиксируем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства $T_e(G)$. Он порождает базис $(E_1, \ldots, E_n)$ линейного пространства $\mathbf{g}$, где $E_k = \beta^{-1}(e_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Так как $[E_i, E_j] \in \mathbf{g}$,

$$[E_i, E_j] = C^k_{ij} E_k;\ i, j, k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

где $\{C^k_{ij}\}$ – набор констант (вещественных), которые называются *структурными константами алгебры Ли* $\mathbf{g}$. Очевидно, эти константы являются компонентами тензора $t(X, Y, u) = u([X, Y])$, $X, Y \in \mathbf{g}$, $u \in \mathbf{g}^*$ типа (2,1) на $\mathbf{g}$, задающего на линейном пространстве $\mathbf{g}$ структуру алгебры Ли, и, следовательно, при замене базиса меняются по соответствующему тензорному закону. Соотношения (1) называются *контравариантными структурными уравнениями группы Ли.*

Пусть $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ – дуальный базис в $\mathbf{g}$. Тогда получим $d\omega^k(E_i, E_j) = -\omega^k([E_i, E_j]) = -\omega^k(C^m_{ij} E_m) = -C^k_{ij}$. Итак, $d\omega^k(E_i, E_j) = -C^k_{ij}$, откуда следует, что $d\omega^k = -C^k_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$. Применим к обеим частям этого тождества оператор альтернирования: $d\omega^k = -C^k_{ij} Alt(\omega^i \otimes \omega^j) = -\frac{1!1!}{2!} C^k_{ij}\omega^i \wedge \omega^j$. Следовательно,

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C^k_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$$

Эти уравнения, двойственные уравнениям (1), называются *ковариантными структурными уравнениями* или *уравнениями Маурера-Картана*, группы Ли G.

2.3 Полная линейная группа

Полная линейная группа $GL(n, \mathbf{R})$ является одним из наиболее важных примеров групп Ли, во-первых, в силу своей фундаментальной роли в дифференциальной геометрии (она является структурной группой главного расслоения реперов над гладким многообразием) и, во-вторых, потому, что практически все важные для приложений группы Ли являются подгруппами этой группы (такие группы Ли называются *алгебраическими группами*).

Как гладкое многообразие, являющееся открытым подмногообразием евклидова пространства $M_{n,n} \equiv \mathbf{R}^{n^2}$, она имеет атлас, состоящий из единственной карты $\varphi : M_{n,n} \to \mathbf{R}^{n^2}$, определенной глобальными координатными функциями $\{x_{ij}\}$, сопоставляющими матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ее компоненту a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Наша задача – доказать, что алгебра Ли $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ полной линейной группы естественно изоморфна полной матричной алгебре Ли $M_{n,n}$. Прежде всего заметим, что по доказанному выше касательное пространство в любой точке линейного пространства, наделенного канонической гладкой структурой, изоморфно этому пространству. Тогда канонический изоморфизм линейных пространств $\kappa : T_e(GL(n, \mathbf{R})) = T_e(M_{n,n}) \to M_{n,n}$, сопоставляющий вектору $\xi \in T_e(M_{n,n})$ матрицу (a_{ij}), где $a_{ij} = \xi(x_{ij}) = dx_{ij}(\xi)$. Здесь $e = I_n$ – единичная матрица порядка n. Отображение $\gamma = \kappa \circ \beta : \mathbf{gl}(n, \mathbf{R}) \to M_{n,n}$ является изоморфизмом линейных пространств. Мы хотим доказать, что в действительности оно является изоморфизмом алгебр Ли. Заметим, что по определению, $\gamma(X)_{ij} = \kappa(X_e)_{ij} = X_e(x_{ij})$.

Лемма 2.1. Пусть $g, h \in GL(n,\mathbf{R})$, $Y \in \mathbf{gl}(n,\mathbf{R})$. Тогда в принятых обозначениях

$$1)\ x_{ij}\circ L_g = \textstyle\sum_{k=1}^n x_{ik}(g)x_{kj};\quad 2)\ (Y(x_{ij}))(g) = \sum_{k=1}^n x_{ik}(g)Y_e(x_{kj})$$

Доказательство. По правилу умножения матриц имеем
$(x_{ij}\circ L_g)(h) = x_{ij}(gh) = \sum_{k=1}^n x_{ik}(g)x_{kj}(h)$. В силу произвола $h \in GL(n,\mathbf{R})$, получаем первое соотношение. С его учетом
$(Y(x_{ij}))(g) = Y_g(x_{ij}) = (L_g)_*Y_e(x_{ij}) = Y_e(x_{ij}\circ L_g) = \sum_{k=1}^n Y_e(x_{ik}(g)x_{kj}) = \sum_{k=1}^n x_{ik}(g)Y_e(x_{kj})$. □

Теорема 2.2. Отображение $\gamma : \mathbf{gl}(n,\mathbf{R}) \to M_{n,n}$ является изоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathbf{gl}(n,\mathbf{R})$. Тогда с учетом определения и доказанной леммы получим $\gamma([X,Y])_{ij} = [X,Y]_e(x_{ij}) = X_e(Y(x_{ij})) - Y_e(X(x_{ij})) = \sum_{k=1}^n\{X_e(x_{ik})Y_e(x_{kj}) - Y_e(x_{ik})X_e(x_{kj})\} = \sum_{k=1}^n\{\gamma(X)_{ik}\gamma(Y)_{kj} - \gamma(Y)_{ik}\gamma(X)_{kj}\} = [\gamma(X),\gamma(Y)]_{ij}$. Значит, $\gamma([X,Y]) = [\gamma(X),\gamma(Y)]$, $X, Y \in \mathbf{gl}(n,\mathbf{R})$, то есть γ – изоморфизм алгебр Ли. □

Рассмотрим инвариантную версию этой конструкции. Пусть V – n-мерное линейное пространство, $EndV$ – алгебра его эндоморфизмов,

$$AutV = \{f \in EndV | det f \neq 0\}$$

– группа автоморфизмов пространства V. Эта группа является открытым подмногообразием линейного пространства $EndV$ относительно его канонической гладкой структуры. Фиксация базиса в пространстве V определяет канонический изоморфизм τ линейных пространств $EndV$ и $M_{n,n}$, сопоставляющий линейному оператору $f \in EndV$ его матрицу в этом базисе. Этот изоморфизм, очевидно, является картирующим отображением для канонической гладкой структуры на линейном пространстве $EndV$, а значит, и на его открытом подмногообразии $AutV$, относительно которого отображение $\varphi : AutV \times AutV \to AutV$, $\varphi(f,g) = f\circ g^{-1}$ задается гладкими (рациональными) функциями, следовательно, гладко, а значит, группа $AutV$ приобретает естественную структуру группы Ли. Она называется группой автоморфизмов линейного пространства V. Кроме того, из алгебры хорошо известно, что если $f, g \in EndV$, $\tau(f) = A$, $\tau(g) = B$, то $\tau(f\circ g) = AB$, то есть отображение τ является изоморфизмом $EndV$ и $M_{n,n}$ как алгебр, а значит, и как алгебр Ли (см. задачу 2.2). Более того, из этого сразу же следует, что $\tau|_{AutV}$ определяет изоморфизм групп $AutV$ и $GL(n,\mathbf{R})$, являющийся из диффеоморфизмом как гладких многообразий (то есть изоморфизмом групп Ли см. в следующем пункте). Отождествив группы Ли $AutV$ и $GL(n,\mathbf{R})$ при помощи этого изоморфизма, мы получаем цепочку отождествлений алгебр Ли

$$\mathbf{g}(Aut)V \xrightarrow{\tau_*} \mathbf{gl}(n,\mathbf{R}) \xrightarrow{\gamma} M_{n,n} \xrightarrow{\tau^{-1}} EndV$$

В частности, из этого следует

Теорема 2.3. Алгебра Ли группы Ли $AutV$ естественно изоморфна алгебре Ли $EndV$. □ В заключение вычислим уравнения Маурера-Картана группы Ли $GL(n,\mathbf{R})$. Поскольку в этом контексте элементы данной группы Ли обычно интерпретируются как матрицы линейных операторов, естественно принять обозначения

$$GL(n,\mathbf{R}) = \{(a^i_j) \in M_{n,n} | det(a^i_j) \neq 0\}$$

Зафиксируем в пространстве $T_e(GL(n,\mathbf{R})) \equiv M_{n,n}$ стандартный базис (e^i_j), $i,j = 1,\dots,n$, состоящий из матриц, у которых на пересечении j-й строки и i-го столбца стоит 1, а остальные компоненты – нулевые. Очевидно, такая матрица имеет компоненты $(e^i_j)^k_l = \delta^i_l\delta^k_j$. Этот базис порождает базис (E^i_j), $E^i_j = \gamma^{-1}(e^i_j)$ алгебры Ли $\mathbf{gl}(n,\mathbf{R})$. Пусть (ω^i_j) – двойственный ему базис, то есть $\omega^i_j(E^k_l) = \delta^i_l\delta^k_j$. Согласно общим уравнениям Маурера-Картана имеем

$$d\omega^i_j = -\frac{1}{2}C^{\binom{i}{j}}_{\binom{k}{l}\binom{r}{s}}\omega^l_k\wedge\omega^s_r$$

где коэффициенты $C^{\binom{i}{j}}_{\binom{k}{l}\binom{r}{s}}$, в силу контравариантных структурных уравнений, определяются из соотношений $[E^k_l, E^r_s] = C^{\binom{q}{p}}_{\binom{k}{l}\binom{r}{s}}E^p_q$. Применим к обеим частям этого равенства изоморфизм γ.

$$[e^k_l, e^r_s] = C^{\binom{q}{p}}_{\binom{k}{l}\binom{r}{s}}e^p_q$$

Распишем это равенство покомпонентно. С одной стороны, $[e_l^k, e_s^r]_j^i = (e_l^k)_t^i (e_s^r)_j^t - (e_s^r)_t^i (e_l^k)_j^t = \delta_t^k \delta_l^i \delta_j^r \delta_s^t - \delta_t^r \delta_s^i \delta_j^k \delta_l^t = \delta_s^k \delta_l^i \delta_j^r - \delta_l^r \delta_s^i \delta_j^k$. С другой стороны, $\left(C^{\binom{q}{p}}_{\binom{k}{l}\binom{r}{s}} e_q^p \right)_j^i = C^{\binom{q}{p}}_{\binom{k}{l}\binom{r}{s}} \delta_j^p \delta_q^i = C^{\binom{i}{j}}_{\binom{k}{l}\binom{r}{s}}$. Сравнивая, получаем, что $C^{\binom{i}{j}}_{\binom{k}{l}\binom{r}{s}} = \delta_s^k \delta_l^i \delta_j^r - \delta_l^r \delta_s^i \delta_j^k$. Подставим эти соотношения в уравнения Маурера-Картана:
$d\omega_j^i = -\frac{1}{2}(\delta_s^k \delta_l^i \delta_j^r - \delta_l^r \delta_s^i \delta_j^k)\omega_k^l \wedge \omega_s^r = -\omega_r^i \wedge \omega_j^r$. Таким образом, доказана

Теорема 2.4. Уравнения Маурера-Картана группы Ли $GL(n, \mathbf{R})$ в стандартном базисе $\{E_j^i\}$ имеют вид

$$d\omega_j^i = -\omega_r^i \wedge \omega_j^r \ \square$$

2.4 Гомоморфизмы групп Ли и алгебр Ли

Определение 2.5. Отображение $\varphi : G \to H$ групп Ли называется *гомоморфизмом групп Ли*, если
(1) φ – гладкое отображение;
(2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$; $x, y \in G$
Если $H = AutV$ для некоторого линейного пространства V, отображение φ называется *линейным представлением группы Ли* G. Гомоморфизм групп Ли, являющийся диффеоморфизмом, называется *изоморфизмом групп Ли*.

Определение 2.6. Отображение $\phi : \mathbf{g} \to \mathbf{h}$ алгебр Ли называется гомоморфизмом алгебр Ли, если
(1) ϕ – линейное отображение;
(2) $\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y]$ $X, Y \in \mathbf{g}$. Если $\mathbf{h} = EndV$ для некоторого линейного пространства V, отображение ϕ называется *линейным представлением алгебры Ли* $\mathbf{g}$.

Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда $\varphi(e) = e$ и, значит, φ_* задает линейное отображение из $T_e(G)$ в $T_e(H)$. Это отображение индуцирует линейное отображение присоединенных алгебр Ли $\phi : \mathbf{g} \to \mathbf{h}$ по формуле $\phi = \beta^{-1} \circ (\varphi_*)_e \circ \beta$. Очевидно, отображение ϕ однозначно определяется соотношением

$$\phi(X)_e = \varphi_*(X_e);\ X \in \mathbf{g}$$

Теорема 2.5. Пусть G и H – группы Ли с алгебрами Ли $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, соответственно, и пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда
(1) для любого $X \in \mathbf{g}$ векторные поля X и $\phi(X)$ φ-связаны;
(2) $\phi : \mathbf{g} \to \mathbf{h}$ – гомоморфизм алгебр Ли.

Доказательство. Заметим, что если $g, h \in G$, то $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ и, значит,

$$\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi;\ g \in G$$

Поэтому если $\tilde{X} = \phi(X)$, $X \in \mathbf{g}$, то $\tilde{X}_{\varphi(g)} = (L_{\varphi(g)})_* \tilde{X}_e = (L_{\varphi(g)})_* \circ \varphi_*(X_e) = (L_{\varphi(g)} \circ \varphi)_*(X_e) = (\varphi \circ L_g)_*(X_e) = \varphi_* \circ (L_g)_*(X_e) = \varphi_*(X_g)$, то есть векторные поля X и $\tilde{X}$ φ-связаны. Далее, если $\tilde{X} = \phi(X)$, $\tilde{Y} = \phi(Y)$, то векторные поля $[X, Y]$ и $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ φ-связаны. В частности,

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_e = \varphi_*([X, Y]_e) = \phi([X, Y])_e$$

то есть $[\phi(X), \phi(Y)]_e = \phi([X, Y])_e$, и, значит,

$$[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y]),\ X, Y \in \mathbf{g}$$

Таким образом, отображение $\phi : \mathbf{g} \to \mathbf{h}$ является гомоморфизмом алгебр Ли. $\square$

2.5 Подгруппы Ли

Предложение 2.4. Пусть G – связная группа Ли, U – некоторая ее окрестность единицы. Тогда $G = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$, где $U^n = \{g_1 \cdot \ldots \cdot g_n | g_i \in U; i = 1, \ldots, n\}$.

Доказательство.* Выберем окрестность единицы $V \subset U$ так, чтобы $V^{-1} = V$. Например, можем положить $V = U \cap U^{-1}$. Рассмотрим подмножество $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. Пусть $a, b \in H$. Тогда существуют натуральные числа m, n такие, что $a \in V^m$, $b \in V^n$, то есть $a = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m$, $b = \tilde{g}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{g}_n$. Но тогда $a \cdot b = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \cdot \tilde{g}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{g}_n \in V^{m+n} \subset H$, $a^{-1} = g_m^{-1} \cdot \ldots \cdot g_1^{-1} \in V^m \subset H$, то есть $H \subset G$ – абстрактная подгруппа. Пусть теперь $g \in H$ – произвольный элемент. Тогда существует натуральное число n такое, что $g \in V^n$. Поскольку $L_g : G \to G$ – диффеоморфизм, $L_g(V) \subset G$ – открытое подмножество, содержащее g. Но $L_g(V) = g \cdot V \subset V^{n+1} \subset H$ и, значит, каждый элемент из H входит в H вместе со своей окрестностью, то есть $H \subset G$ – открытое подмножество. Но тогда и все левые смежные классы $\{gH | g \in G\}$ открыты в G. Следовательно, $H = G \setminus \{\bigcup_{g \notin H} gH\} \subset G$ – замкнутое подмножество. Итак, $H \subset G$ – открыто- замкнутое подмножество, и поскольку G связно, то $H = G$. Тем более $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n = G$. $\square$

Определение 2.7. Пусть $\varphi : H \to G$ – гомоморфизм групп Ли. Пара (H, φ) называется *подгруппой Ли* группы Ли G, если она является подмногообразием в G (то есть если отображение φ регулярно и инъективно).

Определение 2.8. Пусть $\mathbf{g}$ – алгебра Ли. Подпространство $\mathbf{h} \subset \mathbf{g}$ называется *подалгеброй Ли* алгебры Ли $\mathbf{g}$, если

$$\forall X, Y \in \mathbf{h} \Rightarrow [X, Y] \in \mathbf{h}$$

Очевидно, если (H, φ) – подгруппа Ли группы Ли G, то отображение $\phi : \mathbf{h} \to \mathbf{g}$ их алгебр Ли, определяемое соотношением $\phi(X)_e = \varphi_*(X_e)$, $X \in \mathbf{g}$, задает изоморфизм алгебры Ли $\mathbf{h}$ на ее образ – подалгебру Ли $\phi(\mathbf{h}) \subset \mathbf{g}$. Обратно, справедлива

Теорема 2.6. Пусть G – группа Ли, $\mathbf{g}$ – ее алгебра Ли, $\tilde{\mathbf{h}} \subset \mathbf{g}$ – подалгебра Ли в $\mathbf{g}$. Тогда существует, и притом единственная с точностью до изоморфизма, связная подгруппа Ли (H, φ) группы Ли G, такая, что $\phi(\mathbf{h}) = \tilde{\mathbf{h}}$.

Доказательство.* Подалгебра $\tilde{\mathbf{h}} \subset \mathbf{g}$ порождает распределение $\mathcal{H}$ на G, натянутое на любой базис этой подалгебры. Именно, если $(X_1, \ldots, X_n)$ – любой базис этой подалгебры, то $\mathcal{H} = \{f^i X_i | f^i \in C^{\infty}(G)\}$. Непосредственно проверяется, что это распределение не зависит от выбора базиса. Заметим, что распределение $\mathcal{H}$ инволютивно. В самом деле, пусть $X, Y \in \mathcal{H}$, $X = f^i X_i$, $Y = g^j Y_j$. Тогда $[X, Y] = [f^i X_i, g^j Y_j] = f^i X_i(g^j) X_j - g^j X_j(f^i) X_i + f^i g^j [X_i, X_j] = (f^i X_i(g^k) - g^i X_i(f^k) + C^k_{ij} f^i g^j) X_k \in \mathcal{H}$. Здесь $\{C^k_{ij}\}$ – структурные константы алгебры Ли $\mathbf{h}$ в данном базисе. По теореме Фробениуса, существует максимальное связное интегральное многообразие распределения $\mathcal{H}$, проходящее через единицу e группы Ли G. Обозначим его (H, φ). Пусть $g \in \varphi(H)$. Поскольку распределение $\mathcal{H}$ инвариантно относительно левых сдвигов в силу своего определения, подмногообразие $(H, L_{g^{-1}} \circ \varphi)$ также является интегральным многообразием этого распределения, проходящим через единицу e. Поскольку (H, φ) – максимальное интегральное многообразие, то $(L_{g^{-1}} \circ \varphi)(H) \subset \varphi(H)$. В частности, если $a, b \in \varphi(H)$, то $a^{-1} b \in \varphi(H)$, то есть $\varphi(H) \subset G$ – абстрактная подгруппа. Поскольку отображение φ инъективно, на H индуцируется групповая структура с операцией умножения

$$h_1 \cdot h_2 = \varphi^{-1}(\varphi(h_1) \cdot \varphi(h_2)),\ h_1, h_2 \in H$$

относительно которой отображение $\varphi : H \to G$ является гомоморфизмом. Проверим, что H является группой Ли. Достаточно доказать, что отображение $\theta : H \times H \to H$, задаваемое формулой $\theta(h_1, h_2) = h_1 \cdot h_2^{-1}$, $h_1, h_2 \in H$ гладко. Но отображение $\chi : H \times H \to G$ $\chi(h_1, h_2) = \varphi(h_1) \cdot \varphi(h_2)^{-1}$ гладко как композиция гладких отображений. Значит, отображение $\theta = \varphi^{-1} \circ \chi$ гладко как композиция гладких отображений (в силу регулярности отображения φ).

Пусть, наконец, (K, ψ) – другая подгруппа Ли группы Ли G, такая, что $\Psi(\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{h}}$, где $\Psi : \mathbf{k} \to \mathbf{g}$ – гомоморфизм алгебр Ли, порожденный гомоморфизмом $\psi : K \to G$ групп Ли. Тогда (K, ψ) – тоже интегральное многообразие распределения $\mathcal{H}$, проходящее через единицу, и в силу максимальности интегрального многообразия (H, φ) имеем $\psi(K) \subset \varphi(H)$, причем, причем в силу инъективности отображения φ, однозначно определено инъективное отображение $\eta : K \to H$, такое, что $\varphi \circ \eta = \psi$, то есть имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\eta} & H \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ G & = & G \end{array}$$

Очевидно, η – гомоморфизм абстрактных групп. Кроме того, в силу теоремы, доказанной в пункте "Распределения и интегрируемость" (анализ на многообразиях, часть 2), это отображение гладко, и значит, является инъективным гомоморфизмом групп Ли. Кроме того, в силу регулярности отображений φ и ψ, их дифференциалы в единицах соответствующих групп Ли, $(\varphi_*)_e$ и $(\psi_*)_e$, являются изоморфизмами на образ, следовательно, $\eta_*)_e = (\varphi_*)_e^{-1} \circ (\psi_*)_e$ тоже является изоморфизмом, а значит, отображение η задает диффеоморфизм некоторой окрестности U_e единицы группы Ли K на некоторую окрестность V_e единицы группы Ли H. Будучи гомоморфизмом, отображение η перестановочно с левыми сдвигами и, значит, является локальным диффеоморфизмом: если $g \in K$, то $U_g = L_g(U_e)$ и $V_{\eta(g)} = L_{\eta(g)}(V_e)$ – окрестности точек g и $\eta(g)$ соответственно, причем $\eta\left|_{U_g}\right. = L_{\eta(g)} \circ \eta \circ L_g^{-1} : U_g \to V_{\eta(g)}$ – диффеоморфизм как композиция диффеоморфизмов. Теперь можно доказать, что отображение η сюръективно. Пусть $h \in H$. Тогда $h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_n$ для некоторого натурального n, $h_i \in V_e$, $i = 1, \ldots, n$. Но поскольку $\eta\left|_{U_e}\right.$ – диффеоморфизм, $h_i = \eta(g_i)$, где $g_i \in U_e$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$. Тогда $\eta(g) = \eta(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n) = \eta(g_1) \cdot \ldots \cdot \eta(g_n) = h$. Таким образом, η – изоморфизм групп K и H, являющийся диффеоморфизмом, то есть изоморфизм групп Ли. □

Пусть (H, φ) – подгруппа Ли группы Ли G. Поскольку отображение φ инъективно, можно отождествить H с подмножеством $\varphi(H) \subset G$, то есть говорить о подгруппе Ли $H \subset G$, понимая под этим подгруппу Ли (H, i), где $i : H \subset G$ – отображение включения. Важно отметить, что это отображение, вообще говоря, не является гомеоморфизмом, (и тем более диффеоморфизмом) на образ: топология, которой наделено H в результате этого отождествления, вообще говоря, отлична от топологии вложения $H \subset G$. Возникает естественный вопрос. Пусть $H \subset G$ – подгруппа Ли. Какую степень произвола на выбор топологии, дифференцируемой и алгебраической структуры H как группы Ли накладывает это требование?

Теорема 2.7. Если абстрактная подгруппа A группы Ли G обладает структурой гладкого многообразия, такой, что пара (A, i) – подмногообразие в G, где $i : A \subset G$ – отображение включения, то такая структура единственна. Относительно этой структуры A – группа Ли, а (A, i) – подгруппа Ли группы Ли G.

Доказательство.* Докажем, что относительно этой структуры A является группой Ли. Рассмотрим касательное пространство $T_e(A) \subset T_e(G)$ и распределение $D = \bigcup_{g \in G} (L_g)_* T_e(A)$ на G. Утверждается, что A – интегральное многообразие этого распределения, проходящее через $e \in G$. Заметим, что это не очевидно. Сложность состоит в том, что левый сдвиг L_a, $a \in A$ гладкой кривой $\gamma(t)$, лежащей в A и представляющей вектор $\xi \in T_e(A)$, есть кривая, лежащая в A и гладкая в G, но, вообще говоря, не гладкая в A.

Поэтому априори возможно, что в D_a существуют векторы, не являющиеся касательными векторами к A. Из того, что L_a – диффеоморфизм, вытекает, что $dim D_a = dim T_a(A)$, а значит, и в $T_a(A)$ есть векторы, не лежащие в D_a. Надо доказать, что в действительности этого не происходит. Пусть $dim A = k$, и пусть существует элемент $a \in A$, такой, что $D_a \neq T_a(A)$. Поскольку как векторы из $T_a(A)$, так и векторы из D_a представлены гладкими в G кривыми, лежащими в A и имеющими начало в точке a, из нашего предположения следует, что существуют $(k+1)$ гладких в G кривых, лежащих в A и имеющих в точке a линейно независимые касательные векторы. Левый сдвиг $L_{-a} : G \to G$ переводит их в кривые $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{k+1}(t)$, проходящие через e, целиком лежащие в A и имеющие в точке e линейно независимые касательные векторы. Как мы уже отметили, в этом еще нет противоречия, поскольку возможно, что хотя такая кривая и лежит целиком в A, ее касательный вектор в точке e не обязан лежать в $T_e(A)$. Построим отображение $\alpha : \mathbf{R}^{k+1} \to G$, положив $\alpha(t_1, \ldots, t_{k+1}) = \gamma_1(t_1) \cdot \ldots \cdot \gamma_{k+1}(t_{k+1})$. Это отображение регулярно в точке $O = (0, \ldots, 0)$, поскольку касательные векторы к кривым $\gamma_i(t)$, $i = 1, \ldots, k+1$ линейно независимы по предположению, а матрица Якоби отображения α в этой точке образована столбцами координат этих векторов в натуральном базисе. Следовательно, α – диффеоморфизм некоторой окрестности $U_0(\mathbf{R}^{k+1})$ на ее образ в G, причем этот образ лежит в A, поскольку $A \subset G$ – подгруппа. Отображение $\alpha\left|_{U_0(\mathbf{R}^{k+1})}\right.$ продолжается до диффеоморфизма $\beta : U_0(\mathbf{R}^n) \to U_e(G)$, определенного формулой

$$\beta(t_1, \ldots, t_n) = \gamma_1(t_1) \cdot \ldots \cdot \gamma_n(t_n)$$

где $\gamma_{k+2}(t), \ldots, \gamma_n(t)$ – кривые, представляющие касательные векторы в точке e, дополняющие касательные векторы к кривым $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{k+1}(t)$ в этой точке до линейно независимой системы векторов. Очевидно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_0(\mathbf{R}^{k+1}) & \xrightarrow{\alpha} & A \cap U_e(G) \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ U_0(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow{\beta} & U_e(G) \end{array}$$

В силу этого, $\beta^{-1} \circ i(A \cap U_e(G)) = i \circ \alpha^{-1}(A \cap U_e(G)) = i(U_0(\mathbf{R}^{k+1}))$, то есть

$$U_0(\mathbf{R}^{k+1}) \subset \beta^{-1} \circ i(A \cap U_e(G))$$

что противоречит тому, что $dim(A \cap U_e(G)) = dimA = k$. Значит, предположение не верно, то есть для любого $a \in A$ следует, что $T_a(A) = D_a$. Следовательно, (A, i) – интегральное многообразие максимальной размерности распределения D, проходящее через точку a. Более того, имеем, что для любого $g \in G$ $L_g(A)$ – интегральное многообразие максимальной размерности, проходящее через точку g, то есть распределение D вполне интегрируемо и по теореме Фробениуса оно инволютивно. Далее, отображение $\psi : A \times A \to A$ $\psi(a,b) = i(a) \cdot i(b)^{-1}$ гладко как композиция гладких отображений. Отображение $\varphi = i^{-1} \circ \psi : A \times A \to A$ гладко по той же причине, а это означает, что A – группа Ли, причем отображение вложения $i : A \subset G$ – гомоморфизм групп Ли, то есть (A, i) – подгруппа Ли в G.

Допустим, что на A можно ввести две структуры гладкого многообразия, A_1 и A_2, таких, что (A_1, i), (A_2, i) – подмногообразия в G. Тогда имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{id} & A_k \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ G & = & G \end{array}$$

$j, k = 1, 2,\ j \neq k$. Тогда отображение $id : A_1 \to A_2$ является диффеоморфизмом, а значит, гладкие структуры многообразий A_1, A_2 совпадают. $\square$

Следствие. Если некоторое подмножество группы Ли можно сделать подгруппой Ли относительно включения, то это можно сделать однозначно – групповая структура, топология и гладкая структура этого подмножества определена однозначно. $\square$

Замечание. Естественно возникает вопрос: когда это подмножество будет вложенным подмногообразием? Иначе говоря, когда топология подгруппы Ли на нем будет совпадать с индуцированной топологией? Ответ на этот вопрос заключен в следующем утверждении

Теорема 2.8. Пусть (H, φ) – подгруппа Ли группы Ли G. Отображение φ является вложением (то есть гомеоморфизмом H и $\varphi(H)$ в индуцированной топологии) тогда и только тогда, когда $(H, \varphi) \subset G$ – замкнутая подгруппа, то есть подмножество $\varphi(H)$ замкнуто в G. $\square$

2.6 Однопараметрические подгруппы групп Ли и экспоненциальное отображение

Определение 2.9. *Однопараметрической подгруппой* группы Ли G называется гомоморфизм групп Ли $g : \mathbf{R} \to G$.

Иначе говоря, гладкое отображение $g : \mathbf{R} \to G$ называется однопараметрической подгруппой группы Ли G, если

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbf{R} \Longrightarrow g(t_1 + t_2) = g(t_1)g(t_2)$$

Отсюда следует, что $g(0) = e$, где $e \in G$ – единица группы Ли G. Однопараметрическую подгруппу $g : \mathbf{R} \to G$ группы Ли G мы обозначим $g(t)$.

Лемма 2.2. Пусть $X \in \mathbf{g}$ – ненулевой элемент алгебры Ли $\mathbf{g}$ группы Ли G, то есть ненулевое левоинвариантное векторное поле на группе G. Тогда порожденный им локальный поток Φ_X на G обладает следующими свойствами:
(1) $\Phi_X(\Phi_X(a, t_1), t_2) = \Phi_X(a, t_1 + t_2)$;
(2) $\Phi_{\lambda X}(a, t) = \Phi_X(a, \lambda t)$;
(3) $\Phi_X(b \cdot a, t) = b \cdot \Phi_X(a, t)$
$a, b \in G,\ \lambda, t_1, t_2, t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Первые два свойства есть общие свойства локальных потоков, которые мы доказали в теме "Анализ на многообразиях". Докажем третье свойство. Рассмотрим траекторию $x(t) = \Phi_X(a, t)$ векторного поля X и кривую $L_b x(t)$. Имеем $\frac{d}{dt} L_b x(t) = (L_b)_* \frac{dx(t)}{dt} = (L_b)_*(X_{x(t)}) = X_{L_b x(t)}$. Таким образом, $L_b x(t)$ – это траектория того же векторного поля X. Для нее $L_b x(0) = b \cdot x(0) = b \cdot a$. С другой стороны, рассмотрим траекторию того же поля $y(t) = \Phi_X(b \cdot a, t)$. Очевидно, $y(0) = b \cdot a$, и, значит, $x(t) \equiv y(t)$, то есть $\Phi_X(b \cdot a, t) = b \cdot \Phi_X(a, t)$. $\square$

Теорема 2.9. Всякое левоинвариантное векторное поле на группе Ли полно, и его траектория с началом в единице этой группы Ли является однопараметрической подгруппой.

Доказательство. Пусть $X \in \mathbf{g}$ – левоинвариантное векторное поле. По лемме имеем $\Phi_X(e, t_1) \cdot \Phi_X(e, t_2) = \Phi_X(\Phi_X(e, t_1), t_2) = \Phi_X(e, t_1 + t_2)$. Пусть траектория $\Phi_X(e, t)$ определена в некоторой ε-окрестности $(-\varepsilon, \varepsilon)$ нуля, и пусть $t \in \mathbf{R}$ – произвольное вещественное число. Тогда существует натуральное число n такое, что $\left|\frac{t}{n}\right| < \varepsilon$ и, значит, определено значение $\Phi_X(e, \frac{t}{n})$. По доказанному определено и значение $\Phi_X(e,t) = n\Phi_X(e,\frac{t}{n})$. Значит, траектория $\Phi_X(e,t)$ определена для всех вещественных t. С другой стороны, если $\Phi_X(a,t)$ – произвольная траектория этого векторного поля, то по лемме $\Phi_X(a,t) = L_a\Phi_X(e,t)$, а значит, и эта траектория определена для всех $t \in \mathbf{R}$, то есть поле X полно. Обозначим $\Phi_X(e,t) = g(t)$. Тогда $g(t_1+t_2) = \Phi_X(e,t_1+t_2) = \Phi_X(e,t_1)\cdot\Phi_X(e,t_2) = g(t_1)\cdot g(t_2)$, то есть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G. □

Теорема 2.10. Всякая однопараметрическая подгруппа группы Ли является траекторией некоторого левоинвариантного векторного поля на этой группе Ли с началом в единице группы.

Доказательство. Пусть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G, $\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, g(t)$, $X = \beta^{-1}(\xi)$, то есть $X_g = (L_g)_*\xi$, $g \in G$. Докажем, что $g(t)$ – траектория поля X. В самом деле, $\frac{d}{dt}|_{t=t_1}\, g(t) = \frac{d}{dt}|_{t-t_1=0}\, g((t-t_1)+t_1) = \frac{d}{d(t-t_1)}|_{t-t_1=0}\, g((t-t_1)+t_1) = \frac{d}{d\tau}|_{\tau=0}\, g(\tau+t_1) = \frac{d}{d\tau}|_{\tau=0}\, g(\tau)\cdot g(t_1) = (L_{g(t_1)})_*\frac{d}{d\tau}|_{\tau=0}\, g(\tau) = (L_{g(t_1)})_*\xi = X_{g(t_1)}$, $t_1 \in \mathbf{R}$. □

Таким образом, существует естественное взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbf{g}$ левоинвариантных векторных полей и множеством однопараметрических подгрупп группы Ли G, сопоставляющее каждому элементу $X \in \mathbf{g}$ однопараметрическую подгруппу $g(t)$ группы Ли G, являющееся траекторией потока Φ_X с началом в единице группы Ли G. Эта однопараметрическая подгруппа в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, однозначно определена условиями

$$1)\ \frac{d}{dt}|_{t=0}\, g(t) = X_e; \quad 2)\ g(0) = e$$

Определение 2.10. Элемент алгебры Ли $\mathbf{g}$ группы Ли G, порождающий однопараметрическую подгруппу этой группы Ли указанным образом, называется *генератором* этой однопараметрической подгруппы.

Определение 2.11. Пусть G – группа Ли, $\mathbf{g}$ – ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей. *Экспоненциальным отображением* называется отображение $exp : \mathbf{g} \to G$, определяемое соотношением $expX = \Phi_X(e,1)$.

Предложение 2.5. Всякая однопараметрическая подгруппа $g(t)$ группы Ли G с генератором $X \in \mathbf{g}$ в терминах экспоненциального отображения допускает представление вида $g(t) = exptX$.

Доказательство. С учетом определения и леммы имеем $g(t) = \Phi_X(e,t) = \Phi_{tX}(e,1) = exptX$. □

Теорема 2.11. Отображение $exp : \mathbf{g} \to G$ является гладким отображением относительно канонической гладкой структуры на $\mathbf{g}$ и, более того, диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля $U_0(\mathbf{g})$ алгебры Ли $\mathbf{g}$ на некоторую окрестность единицы $U_e(G)$ группы Ли G.

Доказательство. Определим на декартовом произведении $G \times \mathbf{g}$ векторное поле ν по формуле

$$\nu_{(g,X)} = (X_g, 0) \in T_g(G) \oplus T_X(\mathbf{g}) \equiv T_g(G) \oplus \mathbf{g}$$

Его гладкость следует из гладкости поля X. Его траектория, проходящая через точку (g,X), есть не что иное, как кривая $\gamma(t) = (g\cdot exptX, X)$. В самом деле, $\frac{d}{dt}\gamma(t) = (\frac{d}{dt}(g\cdot exptX), 0) = ((L_g)_*\frac{d}{dt}exptX, 0) = ((L_g)_*X_{exptX}, 0) = (X_{g\cdot exptX}, 0) = \nu_{(g\cdot exptX, X)} = \nu_{\gamma(t)}$. Значит, ν – полное векторное поле. Следовательно, если Ψ_ν – порожденный им поток, то отображение $\Psi : G \times \mathbf{g} \to G \times \mathbf{g}$, определенное формулой $\Psi(g,X) = \Psi_\nu((g,X),1) = \gamma(1) = (g\cdot expX, X)$ является диффеоморфизмом. Рассмотрим естественную проекцию $\pi : G \times \mathbf{g} \to G$ на первый сомножитель. Тогда $exp = \pi \circ \Psi\Big|_{\{e\}\times\mathbf{g}}$ – гладкое отображение как композиция гладких отображений. Далее, пусть $\xi \in T_0(\mathbf{g}) \equiv \mathbf{g} \equiv T_e(G)$. Тогда $\gamma(t) = t\xi$ – кривая в $\mathbf{g}$, представляющая этот вектор как класс эквивалентности. Следовательно, $(exp)_*\xi = (exp)_*\frac{d}{dt}|_{t=0}\, t\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, expt\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \Phi_{t\xi}(e,1) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \Phi_\xi(e,t) = \xi_e \equiv \xi$. В силу произвола $\xi \in \mathbf{g}$, заключаем, что $(exp_*)_0 = id$, в частности, отображение $(exp_*)_0$ невырождено, а значит, сужение отображения exp на некоторую окрестность единицы группы Ли G является диффеоморфизмом. □

Определение 2.12. Окрестности $U_0 \subset \mathbf{g}$, $U_e \subset G$ называются *нормальными окрестностями.*

Теорема 2.12. Пусть $\varphi : H \to G$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{h} & \xrightarrow{\phi=\varphi_*|_{\mathbf{h}}} & \mathbf{g} \\ exp\downarrow & & \downarrow exp \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathbf{h}$. Тогда $\gamma(t) = \varphi(exp\,tX)$ – гладкая кривая в G с касательным вектором в единице: $\xi_e = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \varphi(exp\,tX) = \varphi_*\frac{d}{dt}|_{t=0}\, exp\,tX = \varphi_*(X_e) = (\phi X)_e$. Поскольку φ –

гомоморфизм, $\gamma(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G. Но $exp\, t\phi X$ – тоже однопараметрическая подгруппа, причем $\frac{d}{dt}|_{t=0}\, exp\, t\phi X = (\phi X)_e$. Таким образом, эти подгруппы имеют один и тот же генератор и, следовательно, совпадают, то есть $\varphi(exp\, tX) = exp\, t\phi X$. В частности, при $t = 1$ получим $\varphi \circ exp = exp \circ \phi$. $\square$

Теорема 2.13. Пусть (H, φ) – подгруппа Ли группы Ли G, пусть $X \in \mathbf{g}$. Если $X \in \phi(\mathbf{h})$, то $exp\, tX \in \varphi(H)$. Обратно, если для любого $t \in (a, b) \subset \mathbf{R}$ $exp(tX) \in \varphi(H)$, то $X \in \phi(\mathbf{h})$.

Доказательство. Если $X \in \phi(\mathbf{h})$, то $X = \phi(Y)$ для некоторого $Y \in \mathbf{h}$. Следовательно, $exp(tX) = exp(t\phi Y) = \varphi \circ exp\, tY \subset \varphi(H)$. Обратно, пусть $exp(tX) \in \varphi(H)$, $t \in (a, b)$. Поскольку (H, φ) – интегральное многообразие максимальной размерности вполне интегрируемого распределения, существует гладкое отображение $\alpha : I \to H$, такое, что отображение $g : (a, b) \to G$, действующее по формуле $g(t) = exp(tX)$, можно представить в виде композиции $g = \varphi \circ \alpha$. Пусть $\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \alpha(t) \in T_e(H)$, $Y = \beta^{-1}\xi \in \mathbf{h}$. Тогда $(\phi Y)_e = \varphi_*(Y_e) = \varphi_* \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \alpha(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \varphi \circ \alpha(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, exp(tX) = X_e$, а значит, $\phi Y = X$, то есть $X \in \phi(\mathbf{h})$. $\square$

Теорема 2.14. Пусть $A \subset G$ – абстрактная подгруппа группы Ли, $\mathbf{a} \subset \mathbf{g}$ – подпространство соответствующей алгебры Ли. Пусть U – окрестность нуля в $\mathbf{g}$, диффеоморфно отображающаяся на некоторую окрестность единицы V группы Ли G при экспоненциальном отображении. Допустим, что $exp(U \cap \mathbf{a}) = V \cap A$. Тогда подгруппа A, наделенная индуцированной топологией, является подгруппой Ли группы Ли G относительно отображения включения, а подпространство $\mathbf{a}$ – подалгеброй Ли в алгебре Ли $\mathbf{g}$, причем $\mathbf{a}$ – алгебра Ли группы Ли A.

Доказательство. Достаточно доказать, что в индуцированной топологии A имеет гладкую структуру, такую, что (A, i) – подмногообразие в G, где $i : A \subset G$ – отображение включения. Тогда в силу выше доказанного (A, i) – подгруппа Ли группы Ли G, а в силу предыдущей теоремы, $\mathbf{a}$ – ее алгебра Ли. Заметим, что отображение $\psi = exp|_{U \cap \mathbf{a}} : U \cap \mathbf{a} \to V \cap A$ является гомеоморфизмом открытого подмножества в $\mathbf{a}$ на открытое подмножество в A, а следовательно, пара $(A \cap V, \varphi)$, где $\varphi = \psi^{-1}$, является локальной картой в окрестности точки e подгруппы A, снабженной индуцированной топологией. Тогда требуемая гладкая структура на A задается семейством гладко перекрывающихся карт $\{(A \cap L_a(V), \varphi \circ L_{a^{-1}}) | a \in A\}$. В самом деле, переход от одной карты $(A \cap L_a(V), \varphi \circ L_{a^{-1}})$ этого семейства к другой карте $(A \cap L_b(V), \varphi \circ L_{b^{-1}})$ этого же семейства задается отображением $\varphi \circ L_{b^{-1}} \circ (\varphi \circ L_{a^{-1}})^{-1} = \varphi \circ L_{b^{-1}} \circ L_a \circ \varphi^{-1}$, которое гладко как композиция гладких отображений. $\square$

2.7 Экспоненциальное отображение для полной линейной группы

В этом пункте мы покажем, что в случае полной линейной группы экспоненциальное отображение $exp : \mathbf{gl}(n, \mathbf{F}) \to GL(n, F)$, $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ либо $\mathbf{F} = \mathbf{C}$, допускает конструктивное описание, и укажем важные приложения этого факта. Вначале рассмотрим некоторые наводящие соображения. Пусть $n = 1$, $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. Тогда как мы знаем, $\mathbf{gl}(1, \mathbf{R}) \equiv M_{1,1} = \mathbf{R}$, $GL(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^*$ – группа ненулевых вещественных чисел. Зафиксируем $\xi \in \mathbf{R}$. Пусть $X = \beta^{-1}(\xi) \in \mathbf{gl}(1, \mathbf{R})$, $g(t) = exp(tX)$. Тогда

$$\frac{dg(t)}{dt} = X_{g(t)} = (L_{g(t)})_* X_e = g(t) \cdot \xi$$

и, значит, $g(t)$ находится как решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dg(t)}{dt} = g(t) \cdot \xi \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Используя метод разделения переменных последовательно находим

$$\int \frac{dg(t)}{dt} = \int \xi dt; \quad \ln g(t) = t\xi + \ln C; \quad g(t) = Ce^{t\xi}$$

С учетом начальных условий находим, что $C = 1$, следовательно, $exp(tX) = e^{t\xi}$. В частности, имея в виду каноническое отождествление $X \equiv \beta(X) = X_e = \xi$, мы получаем, что

$$exp\xi = e^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \xi^k$$

Пусть теперь n – произвольное натуральное число. Фиксируем $A \in \mathbf{gl}(n, \mathbf{F}) \equiv M_{n,n}$. Рассмотрим матричный ряд

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

Покажем, что матричный ряд, а точнее, каждый из функциональных рядов $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x_{ij}(A^k)$, определенных глобальными координатными функциями $\{x_{ij}, i, j = 1, \ldots, n\}$, сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области евклидова пространства $\mathbf{gl}(n, \mathbf{F}) \equiv M_{n,n}$. Пусть Ω – такая область. Тогда существует вещественное число μ такое, что для любых $i, j = 1, \ldots, n$ и любой точки $A \in \Omega$ имеем $|x_{ij}A| < \mu$, а следовательно,

$$|x_{ij}(A^2)| = \sum_{k=1}^{n} |x_{ik}(A)x_{kj}(A)| \le \sum_{k=1}^{n} |x_{ik}(A)||x_{kj}(A)| \le \sum_{k=1}^{n} \mu^2 = n\mu^2$$

Аналогично, $|x_{ij}(A^2)| \le n^2\mu^3$, ..., $|x_{ij}(A^k)| \le n^{k-1}\mu^k$, ... Следовательно, каждый из функциональных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x_{ij}(A^k);\ i, j = 1, \ldots, n$$

мажорируется числовым рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}\mu^k}{k!}$. Но этот числовой ряд сходится по признаку Даламбера, поскольку его общий член $a_k = \frac{n^{k-1}\mu^k}{k!}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{n^k \mu^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{n^{k-1}\mu^k} = \lim_{k \to \infty} \frac{n \cdot \mu}{k+1} = 0$$

По признаку Вейерштрасса, каждый из рядов $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x_{ij}(A^k)$ сходится абсолютно и равномерно в области Ω, $i, j = 1, \ldots, n$, и, по определению, матричный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^k)$ также сходится абсолютно и равномерно в этой области.

Определение 2.13. Сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^k)$ называется *экспонентой* матрицы A и обозначается e^A.

Теорема 2.15. Однопараметрическая подгруппа $g : \mathbf{R} \to GL(n, \mathbf{F})$ с генератором $A \in \mathbf{gl}(n, \mathbf{F}) \equiv M_{n,n}$ определяется формулой

$$g(t) = e^{tA} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $g : \mathbf{R} \to GL(n, \mathbf{F})$, задаваемое формулой (2). Достаточно доказать, что оно определяет траекторию левоинвариантного векторного поля $X = \beta^{-1}A$ с началом в точке $e = I_n$, иначе говоря, что $g(t)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dg(t)}{dt} = g(t) \cdot A \\ g(0) = I_n \end{cases}$$

Но поскольку e^{tA} – равномерно сходящийся степенной ряд, его можно почленно дифференцировать в интервале сходимости (то есть всюду), и значит, $\frac{d}{dt}g(t) = \frac{d}{dt}(I_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots) = A + \frac{t}{1!}A^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \ldots = (I_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots) = e^{tA} \cdot A = g(t) \cdot A$, кроме того, очевидно, что $g(0) = I_n$. $\square$

Замечание. Возвращаясь к инвариантной версии теории полной линейной группы как группы $AutV$ автоморфизмов линейного пространства V в фиксированном базисе этого пространства, с учетом только что доказанного убеждаемся, что отображение $exp : EndV \to AutV$ задается формулой $expL = id + L + \frac{1}{2!}L^2 + \ldots + \frac{1}{k!}L^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}L^k \equiv e^L$; $L \in EndV$, где $L^k = L \circ \ldots \circ L$ k раз. Если φ – линейное представление группы Ли G, иначе говоря, если $\varphi : G \to AutV$ – гомоморфизм групп Ли, то

$$\varphi(expX) = exp(\phi X) = id + \phi X + \frac{1}{2!}(\phi X)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(\phi X)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\phi X)^k \tag{3}$$

При этом

$$\phi X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(exptX) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(exptX) - 1}{t}$$

Предложение 2.6. Пусть $A \in M_{n,n}$. Тогда $dete^A = e^{trA}$, где trA – след матрицы A.

Доказательство. Пусть $B \in GL(n, \mathbf{R})$. Поскольку левые и правые сдвиги в группе Ли являются непрерывными отображениями, $B \cdot (\lim_{k\to\infty} S_k(A)) \cdot B^{-1} = \lim_{k\to\infty}(B \cdot S_k(A) \cdot B^{-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k(B \cdot A \cdot B^{-1})$, где $S_k(A) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}A^j$ – k-я частичная сумма ряда e^A. Значит,

$$B \cdot e^A \cdot B^{-1} = e^{B \cdot A \cdot B^{-1}}$$

Далее, из линейной алгебры хорошо известно, что

$\exists B \in GL(n, \mathbf{C})$ $B \cdot A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

(то есть матрица $B \cdot A \cdot B^{-1}$ имеет верхнетреугольный вид). Тогда

$B \cdot A^2 \cdot B^{-1} = B \cdot A \cdot B^{-1} \cdot B \cdot A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$,

и по индукции получаем, что $B \cdot A^k \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$, откуда $e^{B \cdot A^k \cdot B^{-1}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

В частности, $dete^A = det(B \cdot e^A \cdot B^{-1})det(e^{B \cdot A^k \cdot B^{-1}}) = e^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} = e^{tr\,A}$. $\square$

Предложение 2.7. Пусть $A, B \in M_{n,n}$ – две коммутирующие матрицы, то есть $A \cdot B = B \cdot A$. Тогда $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

Доказательство. По определению, $e^{A+B} = \lim_{k\to\infty} S_k(A + B)$. Кроме того, по определению умножения рядов,

$$e^A \cdot e^B = \lim_{k\to\infty} S_k(A) \cdot S_k(B)$$

Следовательно, достаточно проверить, что

$$\lim_{k\to\infty} |S_k(A) \cdot S_k(B) - S_k(A + B)| = 0 \tag{4}$$

По индукции легко показать, что

$$S_k(A) \cdot S_k(B) - S_k(A + B) = \sum_{\substack{0 \le m, l \le k \\ k+1 \le m+l \le 2k}} \frac{1}{m!l!} A^m B^l$$

Обозначим $\mu = max_{i,j=1,\ldots,n}\{|a_{ij}|, |b_{ij}|\}$. Тогда, как и выше,

$$\frac{|x_{ij}(A^m B^l)|}{m!l!} \le \frac{n^{m+l-1}\mu^{m+l}}{m!l!}$$

Значит, $|x_{ij}(S_k(A) \cdot S_k(B) - S_k(A + B))| \le \sum_{\substack{0 \le m, l \le k \\ k+1 \le m+l \le 2k}} \frac{n^{m+l-1}\mu^{m+l}}{m!l!} \le \frac{(n\mu)^{2k}k^2}{[k/2]^2!}$. Но ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\mu)^{2k}k^2}{[k/2]^2!}$ сходится по признаку Даламбера, а значит, в силу необходимого условия сходимости ряда, его общий член стремится к нулю: $\lim_{k\to\infty} \frac{(n\mu)^{2k}k^2}{[k/2]^2!} = 0$, откуда и получаем (4). $\square$

Замечание. Экспоненциальное отображение $exp : \mathbf{g} \to G$, будучи гладким и регулярным в нуле отображением, вообще говоря, не инъективно и не сюръективно даже в случае связной группы Ли.

2.8 Некоторые подгруппы Ли в $GL(n, \mathbf{C})$ и их алгебры Ли

Пусть $GL(n, \mathbf{C})$ – полная комплексная линейная группа порядка порядка n. В ее алгебре Ли $\mathbf{gl}(n, \mathbf{C}) \equiv M_{n,n}^C$ внутренним образом определены два линейных оператора: оператор $A \to A^T$ транспонирования, определенный соотношением $x_{ij}(A^T) = x_{ji}(A)$; $i, j = 1, \ldots, n$ и оператор комплексного сопряжения $A \to \bar{A}$. Рассмотрим следующие абстрактные подгруппы в группе $GL(n, \mathbf{C})$:

(1) унитарная группа

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbf{C}) | A^{-1} = \bar{A}^T\};$$

(2) комплексная ортогональная группа

$$O(n, \mathbf{C}) = \{A \in GL(n, \mathbf{C}) | A^{-1} = A^T\};$$

(3) специальная линейная группа

$$SL(n, \mathbf{C}) = \{A \in GL(n, \mathbf{C}) | det A = 1\}.$$

Теорема 2.16. Каждая из перечисленных подгрупп является подгруппой Ли группы Ли $GL(n, \mathbf{C})$ с алгеброй Ли соответственно:
(1) $u(n) = \{A \in M^C_{n,n} | \bar{A} + A^T = 0\}$ (алгебра Ли косоэрмитовых матриц);
(2) $o(n, \mathbf{C}) = \{A \in M^C_{n,n} | A + A^T = 0\}$ (алгебра Ли комплексных кососимметрических матриц);
(3) $sl(n, \mathbf{C}) = \{A \in M^C_{n,n} | tr\, A = 0\}$ (алгебра Ли бесследных матриц).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.6. Очевидно, что $u(n)$, $o(n, \mathbf{C})$, $sl(n, \mathbf{C})$ – вещественные подпространства овеществления линейного пространства $M^C_{n,n}$. Пусть $W \subset \mathbf{gl}(n, \mathbf{C}) \equiv M^C_{n,n}$ – окрестность нуля, диффеоморфная некоторой окрестности V единицы группы Ли $GL(n, \mathbf{C})$ при отображении exp, и пусть

$$U = W \cap \bar{W} \cap (-W) \cap W^T \cap \{A \in GL(n, \mathbf{C}) | \, |tr\, A| < 2\pi\}.$$

Пусть $A \in U \cap u(n)$. Тогда $\overline{(e^A)}^T = e^{\bar{A}^T} = e^{-A}$, откуда следует, что $\overline{(e^A)}^T \cdot e^A = e^{-A} \cdot e^A = e^0 = I_n$, а значит, $e^A \in V \cap U(n)$. Таким образом,

$$exp(U \cap u(n)) \subset V \cap U(n)$$

Обратно, пусть $e^A \in V \cap U(n)$. Поскольку $exp|_U = V$, то $A \in U$. Кроме того, $e^{-A} = (e^A)^{-1} = \overline{(e^A)}^T = e^{\bar{A}^T}$. Поскольку A и $\bar{A}^T$ лежат в U, а $exp|_U$ инъективно, то $\bar{A}^T = -A$, то есть $A \in u(n)$. Следовательно,

$$exp(U \cap u(n)) = V \cap U(n)$$

По теореме 2.6 $U(n) \subset GL(n, \mathbf{C})$ – подгруппа Ли, а $u(n)$ – ее алгебра Ли.

Аналогично доказывается второе утверждение теоремы.

Пусть теперь $A \in U \cap sl(n, \mathbf{C})$. Тогда $tr\, A = 0$ и, согласно формуле $det e^A = e^{tr\, A}$, получим $det e^A = 1$, то есть $e^A \in V \cap SL(n, \mathbf{C})$. Обратно, если $e^A \in V \cap SL(n, \mathbf{C})$, то $A \in U$, причем $det e^A = 1$. Тогда $e^{tr\, A} = 1 = e^{2\pi k\sqrt{-1}}$, откуда следует, что $tr\, A = 2\pi k\sqrt{-1}$; k – целое число. В силу определения U, $tr\, A = 0$ и, таким образом, $A \in sl(n, \mathbf{C})$. Следовательно, $exp(U \cap sl(n, \mathbf{C})) = V \cap SL(n, \mathbf{C})$. Согласно теореме 2.6, $SL(n, \mathbf{C}) \subset GL(n, \mathbf{C})$ – подгруппа Ли, $sl(n, \mathbf{C})$ – ее алгебра Ли. □

Следствие. Абстрактные подгруппы
(1) $SU(n) = SL(n, \mathbf{C}) \cap U(n)$;
(2) $SO(n, \mathbf{C}) = SL(n, \mathbf{C}) \cap O(n, \mathbf{C})$;
(3) $SL(n, \mathbf{R}) = SL(n, \mathbf{C}) \cap GL(n, \mathbf{R})$;
(4) $O(n, \mathbf{R}) = O(n, \mathbf{C}) \cap GL(n, \mathbf{R})$;
(5) $SO(n, \mathbf{R}) = O(n, \mathbf{R}) \cap SL(n, \mathbf{R})$;
являются подгруппами Ли групп Ли $GL(n, \mathbf{C})$ и $GL(n, \mathbf{R})$ соответственно, алгебры Ли которых являются пересечением алгебр Ли групп Ли – сомножителей. Зная размерности алгебр Ли, легко вычислить и равные им размерности соответствующих им групп Ли:

$$\begin{aligned}
&dim SL(n, \mathbf{C}) = 2n^2 - 2;\\
&dim U(n) = 2\tfrac{n(n-1)}{2} + n = n^2;\\
&dim SU(n) = n^2 - 1;\\
&dim O(n, \mathbf{C}) = 2\tfrac{n(n-1)}{2} = n(n-1); \qquad .\square\\
&dim SO(n, \mathbf{C}) = n(n-1) - 2;\\
&dim SL(n, \mathbf{R}) = n^2 - 1;\\
&dim O(n, \mathbf{R}) = dim SO(n, \mathbf{R}) = \tfrac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

2.9 Присоединенное представление

Определение 2.14. Пусть M – гладкое многообразие, G – группа Ли. Гладкое отображение $\mu : G \times M \to M$, такое, что
1) $\mu(gh, m) = \mu(g, \mu(h, m))$; 2) $\mu(e, m) = m$, $g, h \in G$, $m \in M$,
называется *левым действием* группы G на многообразии M.

Если μ – левое действие, то каждый элемент $g_0 \in G$ порождает отображение $\mu_{g_0} : M \to M$, заданное формулой $\mu_{g_0}(m) = \mu(g_0, m)$. Это отображение является диффеоморфизмом, поскольку обратное отображение $\mu_{g_0}^{-1} : M \to M$, очевидно, определенное формулой $\mu_{g_0}^{-1}(m) = \mu(g_0^{-1}, m)$, гладко.

Аналогично, гладкое отображение $\nu : M \times G \to M$, такое, что
1) $\nu(m, gh) = \nu(\nu(m, g), h)$; 2) $\nu(e, m) = m$, $m \in M$, $g, h \in G$, называется *правым действием группы Ли* G на многообразии M.

Определение 2.15. *Линейным представлением* группы Ли G называется гомоморфизм групп Ли $\varphi : G \to AutV$, где $Aut\,V$ – группа автоморфизмов линейного пространства V.

Теорема 2.17. Пусть $\mu : G \times M \to M$ – левое действие группы Ли G на многообразии M. Пусть m – неподвижная точка действия, то есть

$$\forall g \in G \Longrightarrow \mu(g, m) = m.$$

Тогда отображение $\varphi : G \to Aut(T_m(M))$, определенное формулой $\varphi(g) = ((\mu_g)_*)_m$, $g \in G$, является линейным представлением группы Ли G.

Доказательство. Прежде всего, отображение φ – гомоморфизм групп, так как $\varphi(gh) = ((\mu_{gh})_*)_m = ((\mu_g)_*)_m \circ ((\mu_h)_*)_m = \varphi(g)\varphi(h)$. Гладкость этого отображения следует из того, что в соответствующих локальных картах оно задается гладкими функциями – сужениями частных производных функций, задающих отображение μ на подмногообразие $G \times \{m\} \subset G \times M$. $\square$

Пусть G – произвольная группа Ли. Тогда внутренним образом определено отображение $A : G \times G \to G$, действующее по формуле $A(g, h) = ghg^{-1}$.

Задача 2.7. Докажите, что отображение A является левым действием группы Ли G на себе.

Задача 2.8. Докажите, что диффеоморфизмы $A_g : G \to G$ $A_g(h) = ghg^{-1}$, $g, h \in G$ являются гомоморфизмами группы Ли G, а следовательно, автоморфизмами этой группы. Они называются *внутренними автоморфизмами группы Ли* G.

В частности, для любой точки $g \in G$ имеем $A_g(e) = e$, то есть $e \in G$ – неподвижная точка этого действия. По доказанной теореме отображение $\varphi : G \to Aut\,T_e(G) \equiv Aut\mathbf{g}$, действующее по формуле $\varphi(g) = ((A_g)_*)_e$, $g \in G$, является линейным представлением группы Ли G. Оно называется *присоединенным представлением* группы Ли G и обозначается Ad. Таким образом, отображение $Ad : G \to Aut\mathbf{g}$ задается соотношением $Ad(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e$, где $\beta : \mathbf{g} \to T_e(G)$ – канонический изоморфизм отождествления левоинвариантного векторного поля и вектора касательного пространства. Согласно теореме 2.6 имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} & \xrightarrow{Ad(g)} & \mathbf{g} \\ exp\downarrow & & \downarrow exp \\ G & \xrightarrow{A_g} & G \end{array}$$

Иначе говоря, $exp(t\,Ad(g)X) = gexp(tX)g^{-1}$. Далее, дифференциал гомоморфизма $Ad : G \to Aut\mathbf{g}$ порождает гомоморфизм $ad : \mathbf{g} \to \mathbf{g}(Aut\mathbf{g}) \equiv End\mathbf{g}$ соответствующих алгебр Ли. Таким образом, $ad = (Ad)_*|_{\mathbf{g}}$. Согласно теореме 2.6 имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} & \xrightarrow{ad} & End\mathbf{g} \\ exp\downarrow & & \downarrow exp \\ G & \xrightarrow{Ad} & Aut\mathbf{g} \end{array}$$

В частном случае, если $G = AutV$, где V – линейное пространство, эти коммутативные диаграммы принимают вид

$$\begin{array}{ccc} EndV & \xrightarrow{Ad(B)} & EndV \\ exp\downarrow & & \downarrow exp \\ AutV & \xrightarrow{A_B} & AutV \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} EndV & \xrightarrow{ad} & End(EndV) \\ exp\downarrow & & \downarrow exp \\ AutV & \xrightarrow{Ad} & Aut(EndV) \end{array}$$

где $B \in AutV$.

Предложение 2.8. Пусть $B \in AutV$, $C \in EndV$. Тогда $Ad(B)C = B \circ C \circ B^{-1}$.

Доказательство. Имеем $Ad(B)C = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} A_B(exptC) = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} B \circ e^{tC} \circ B^{-1} = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} e^{t(B \circ C \circ B^{-1})} = B \circ C \circ B^{-1}$. $\square$

Теорема 2.18. Пусть G – группа Ли с алгеброй Ли $\mathbf{g}$, $X, Y \in \mathbf{g}$. Тогда $ad_X Y = [X, Y]$.

Доказательство. В силу определений присоединенных представлений имеем $ad_X Y = = \left(\frac{d}{dt}\mid_{t=0} Ad(exptX)\right) Y = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} Ad(exptX)Y = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (A_{exptX})_* Y = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (R_{(exptX)^{-1}} \circ L_{exptX})_* Y = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (R_{exp(-tX)})_* \circ (L_{exptX})_* Y$. Значит, $(ad_X Y)_e = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (R_{exp(-tX)})_* \circ (L_{exptX})_* Y_e =$

$= \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (R_{exp(-tX)})_* Y_{exptX} \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (F_{-t})_* Y_{F_t(e)} = \lim_{t\to 0} \frac{(F_{-t})_* Y_{F_t(e)} - Y_e}{t} = (\mathcal{L}_X Y)_e = [X, Y]_e$, где $F_t(g) = \Phi_X(g, t)$ – поток, порожденный векторным полем X. Так как векторные поля X, Y – левоинвариантны, $ad_X Y = [X, Y]$. $\square$