4 Главное расслоение вещественных реперов. Связности.

4.1 Тождества Бианки.

Мы знаем два тождества Бианки:

$$D\Phi = 0$$

Оно справедливо для любого главного расслоения.

$$D\Omega = \Phi\omega$$

Это дополнительное тождество Бианки. Оно справедливо только для главного расслоения реперов. Напомним, что Φ – форма кривизны связности, Ω – форма кручения связности, ω – форма смещения, $D = \Pi_H^* \circ d$ – оператор внешнего ковариантного дифференцирования.

Выясним, какую информацию они несут с точки зрения многообразия M. Имеем

$$s^*\omega_j^i = 0 \quad s^*\omega^k = dx^k \quad s^*\theta_j^i = \Gamma_{jc}^i dx^c$$

Рассмотрим

$$d\omega^i = -\theta_j^i \wedge \omega^j + \tfrac{1}{2} S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$$
$$d\theta_j^i = -\theta_k^i \wedge \theta_j^k + \tfrac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l$$

полную группу структурных уравнений связности в главном расслоении реперов $\mathcal{B}(M)$, где $\theta = \{\theta_j^i\}$ – форма связности со значениями в алгебре Ли $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ структурной группы; $\omega = \omega^i \otimes \varepsilon_i$ – форма смещения. Процедура дифференциального продолжения полной группы структурных уравнений позволила нам получить следующие соотношения

$$\begin{array}{l} \nabla S_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k + \left(S_{t[k}^i S_{rj]}^t - R_{[rjk]}^i \right) \omega^r \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \\ \nabla R_{jkl}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k + R_{jt[l}^i S_{rk]}^t \omega^r \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0 \end{array} \tag{1}$$

Из этих соотношений мы узнали, что системы функций $\{S_{jk}^i\}$ и $\{R_{jkl}^i\}$ на многообразии BM задают тензоры S типа (2,1) и R типа (3,1) на многообразии M. Согласно основной теореме тензорного анализа имеем

$$1)\ \nabla S_{jk}^i = S_{jk,l}^i \omega^l \quad 2)\ \nabla R_{jkl}^i = R_{jkl,t}^i \omega^t \tag{2}$$

где $\{S_{jk,l}^i\}$ и $\{R_{jkl,t}^i\}$ – компоненты тензоров ∇S и ∇R соответственно, где ∇ – оператор Кошуля, соответствующий данной связности.

Задача 4.4. Докажите, что $S_{jk,l}^i = -S_{kj,l}^i$ и $R_{jkl,t}^i = -R_{kjl,t}^i$.

Подставим (2) в (1):

$S_{jk,r}^i \omega^r \wedge \omega^j \wedge \omega^k + \left(S_{t[k}^i S_{rj]}^t - R_{[rjk]}^i \right) \omega^r \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0$

$\left(S_{[jk,r]}^i + S_{t[k}^i S_{rj]}^t - R_{[rjk]}^i \right) \omega^r \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0$

В силу линейной независимости базисных форм $\{\omega^r \wedge \omega^j \wedge \omega^k\}$, $r < j < k$ получим

$$S_{[jk,r]}^i + S_{t[k}^i S_{rj]}^t - R_{[rjk]}^i = 0 \tag{3}$$

Заметим, что это тождество на многообразии BM.

Замечание. Распишем $S_{[jk,r]}^i = \frac{1}{6}(S_{jk,r}^i + S_{kr,j}^i + S_{rj,k}^i - S_{kj,r}^i - S_{rk,j}^i - S_{jr,k}^i)$. В силу кососимметричности ковариантного дифференциала $S_{jk,l}^i$ тензора кручения по индексам j, k получим $S_{[jk,r]}^i = \frac{1}{3}(S_{jk,r}^i + S_{kr,j}^i + S_{rj,k}^i) = \overset{\sigma}{_{jkr}} S_{jk,r}^i$, где $\overset{\sigma}{_{jkr}}$ – оператор циклирования по индексам jkr. Остальные слагаемые расписываются аналогично. В результате получим

$$\overset{\sigma}{_{jkr}} \left(S_{jk,r}^i + S_{tk}^i S_{rj}^t - R_{rjk}^i \right) = 0 \tag{4}$$

□

Чтобы найти соответствующее (4) тождество на многообразии M, для произвольной фиксированной точки $m \in M$ рассмотрим область локальной тривиальности (U, φ) и локальное сечение главного расслоения реперов $s : U \to W = \pi^{-1}(U)$. Применим отображение s^* к (4). Заметим, что функции $S_{jk,r}^i \circ s$ есть ни что иное, как компоненты тензора ∇S – коватиантного дифференциала тензора кручения в

базисе модуля $\mathcal{X}(U)$, который определяется сечением s. Договоримся обозначать компоненты $S^i_{jk,r} \circ s$ тензора ∇S теми же буквами $S^i_{jk,r}$, помня, что это уже гладкие функции на U. Итак, в локальной карте (U, φ) в окрестности произвольной фиксированной точки $m \in M$ мы получили соотношение для компонент тензоров S, R, ∇S в произвольном базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ модуля $\mathcal{X}(U)$

$$\overset{\sigma}{jkr} \left(S^i_{jk,r} + S^i_{tk} S^t_{rj} - R^i_{rjk} \right) = 0 \tag{5}$$

Запишем эти соотношения в безындексном виде. По определению компонент тензора имеем $S^i_{jk,r} = (\nabla_{e_r}(S)(e_j, e_k))^i$, $S^i_{tk} S^t_{rj} = (S(S(e_r, e_j), e_k)^i$, $R^i_{rjk} = (R(e_j, e_k)e_r)^i$. Умножая каждое из равенств на e_i и суммируя по i, получим

$$\overset{\sigma}{jkr} \left(\nabla_{e_r}(S)(e_j, e_k) + S(S(e_r, e_j), e_k) - R(e_j, e_k)e_r \right) = 0 \tag{6}$$

Пусть $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ – произвольные векторные поля. Разложим из сужения на область локальной карты по базису $(e_1, \ldots, e_n)$: $X = X^j e_j$, $Y = Y^k e_k$, $Z = Z^r e_r$. Тогда в силу линейности оператора Кошуля по нижнему аргументу и линейности тензора $\nabla_Z(S)$ получим $\nabla_Z(S)(X, Y) = \nabla_{Z^r e_r}(S)(X^j e_j, Y^k e_k) = \nabla_{e_r}(S)(e_j, e_k) X^j Y^k Z^r$. Остальные слагаемые получаются аналогичным образом. Тогда аналог тождеств (5) в безындексном виде следующий

$$\overset{\sigma}{XYZ} \left(\nabla_Z(S)(X, Y) + S(S(Z, X), Y) - R(X, Y)Z \right) = 0$$

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Это тождество называется *первым тождеством Бианки*.
В частном случае, когда $S = 0$ (такая связность называется *связностью без кручения*) первое тождество Бианки примет вид

$$\overset{\sigma}{XYZ} R(X, Y)Z = 0$$

или в развернутом виде

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

Это тождество иногда называют *тождеством Риччи*.

Предложение 4.1. Первое тождество Бианки на многообразии M равносильно дополнительному тождеству Бианки на многообразии BM.

Доказательство. Рассмотрим дополнительное тождество Бианки $D\Omega = \Phi\omega$. Согласно определению $\Omega = \frac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k \otimes \varepsilon_i$. Продифференцируем это соотношение внешним образом.
$d\Omega = \frac{1}{2}(dS^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k + S^i_{jk} d\omega^j \wedge \omega^k - S^i_{jk} \omega^j \wedge d\omega^k) \otimes \varepsilon_i = \frac{1}{2}(dS^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k + 2S^i_{jk} d\omega^j \wedge \omega^k) = \frac{1}{2}(dS^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k - 2S^i_{jk} \theta^j_r \wedge \omega^r \wedge \omega^k + 2S^i_{mk} \frac{1}{2} S^m_{lj} \omega^l \wedge \omega^j \wedge \omega^k) \otimes \varepsilon_i$. Применим к обеим частям оператор Π^*_H с учетом того, что форма связности θ вертикальная, а форма смещения ω горизонтальная.
$D\Omega = \frac{1}{2}(S^i_{[jk,l]} \omega^l \wedge \omega^j \wedge \omega^k + S^i_{m[k} S^m_{lj]} \omega^l \wedge \omega^j \wedge \omega^k) \otimes \varepsilon_i$
$D\Omega = \frac{1}{2}(S^i_{[jk,r]} + S^i_{m[k} S^m_{rj]}) \omega^r \wedge \omega^j \wedge \omega^k \otimes \varepsilon_i$.
Таким образом, мы в явном виде вычислили левую часть дополнительного тождества Бианки. С другой стороны, правая часть этого тождества имеет вид:
$\Phi\omega = \Phi^i_j \wedge \omega^j \otimes \varepsilon_i = (\frac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^j \otimes \varepsilon_i = \frac{1}{2} R^i_{[jkr]} \omega^k \wedge \omega^r \wedge \omega^j \otimes \varepsilon_i$. Так как $D\Omega = \Phi\omega$, то получим (3). Очевидно, верно и обратное. Следовательно, дополнительное тождество Бианки (на многообразии BM) и первое тождество Бианки (на многообразии M) эквивалентны. □

Аналогичным образом рассматриваются соотношения (1_2):

$$\left(R^i_{j[kl,r]} + R^i_{jt[l} S^t_{rk]} \right) \omega^r \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0$$

В силу линейной независимости базисных форм

$$R^i_{j[kl,r]} + R^i_{jt[l} S^t_{rk]} = 0 \tag{7}$$

В безындексной форме получим

$$\overset{\sigma}{XYZ} \left(\nabla_X(R)(Y, Z)W + R(S(X, Y), Z)W \right) = 0$$

Это *второе тождество Бианки*. В частном случае связности без кручения оно примет вид

$$\underset{XYZ}{\sigma}(\nabla_X(R)(Y,Z)W)=0$$

или

$$\nabla_X(R)(Y,Z)W+\nabla_Y(R)(Z,X)W+\nabla_Z(R)(X,Y)W=0$$

Предложение 4.2. Тождество $D\Phi=0$ на многообразии BM равносильно второму тождеству Бианки.

Доказательство. Согласно определению форма кривизны $\Phi=\frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l\otimes E^j_i$. Продифференцируем внешним образом. $d\Phi=\frac{1}{2}(dR^i_{jkl}\wedge\omega^k\wedge\omega^l+R^i_{jkl}d\omega^k\wedge\omega^l-R^i_{jkl}\omega^k\wedge d\omega^l)\otimes E^j_i=\frac{1}{2}(dR^i_{jkl}\wedge\omega^k\wedge\omega^l+2R^i_{jkl}d\omega^k\wedge\omega^l)\otimes E^j_i=\frac{1}{2}(R^i_{j[kl,r]}\omega^r\wedge\omega^k\wedge\omega^l+R^i_{jm[l}S^m_{rk]}\omega^r\wedge\omega^k\wedge\omega^l)\otimes E^j_i$. Применим оператор Π^*_H. $D\Phi=\frac{1}{2}(R^i_{j[kl,r]}+R^i_{jm[l}S^m_{rk]})\omega^r\wedge\omega^k\wedge\omega^l\otimes E^j_i$. С учетом этого соотношения и линейной независимости базисных форм получим, $D\Phi=0$ равносильно (7), которое равносильно второму тождеству Бианки на многообразии M. □

4.2 Вычисление компонент ковариантного дифференциала произвольного тензора в заданной карте.

Пусть (M,∇) – пространство аффинной связности, t – тензор типа (r,s) на M. Фиксируем локальную карту (U,φ) на M с координатами $(x^1,\ldots,x^n)$. Пусть оператор Кошуля ∇ аффинной связности в этой карте задается обобщенными коэффициентами Кристоффеля $\{\Gamma^i_{jk}\}$. Согласно основной теореме тензорного анализа задание тензора t на многообразии M равносильно заданию семейства $\hat{t}$ гладких функций $\hat{t}=\{t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\}$ на многообразии BM, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$dt^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}+t^{kj_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\theta^{j_1}_k+\ldots-t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\theta^k_{i_r}=t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}\omega^k \tag{8}$$

Применим к обеим частям этого выражения отображение s^*, где s – натуральное сечение, определенное на U. Напомним, что для натурального сечения

$$s^*\omega^i_j=0\quad s^*\omega^k=dx^k\quad s^*\theta^i_j=\Gamma^i_{jc}dx^c$$

Кроме того, $t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\circ s$ суть компоненты тензора t в натуральном базисе карты (U,φ), которые мы договорились обозначать теми же символами $t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$. Получим
$dt^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}+t^{kj_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\Gamma^{j_1}_{kp}dx^p+\ldots-t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\Gamma^k_{i_rp}dx^p=t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}dx^k$.
Так как $dt^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}=\frac{\partial t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}}{\partial x^p}dx^p$ и базисные формы (dx^p) линейно независимы, получим

$$t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k}=\frac{\partial t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}}{\partial x^p}+t^{kj_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\Gamma^{j_1}_{kp}+\ldots-t^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}k}\Gamma^k_{i_rp}$$

4.3 Тензор аффинной деформации.

Пусть (P,M,π,G) – произвольное главное расслоение, θ – форма связности на P, $\hat{\theta}$ – некоторая 1-форма с значениями в алгебре Ли структурной группы. Рассмотрим 1-форму $\zeta=\hat{\theta}-\theta$.

Предложение 4.3. $\hat{\theta}$ – форма связности на многообразии P тогда и только тогда, когда форма ζ обладает свойствами:
1) ζ – горизонтальная форма;
2) $\zeta\circ(R_g)_*=Ad(g^{-1})\circ\zeta$ для любого элемента $g\in G$ (эквивариантность).

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\hat{\theta}$ – форма связности. Тогда по свойству связностей в главном расслоении $\zeta=\hat{\theta}-\theta$ является горизонтальной формой. Далее, по свойству эквивариантности для каждой из форм связностей имеем $\theta\circ(R_g)_*=Ad(g^{-1})\circ\theta$, $\hat{\theta}\circ(R_g)_*=Ad(g^{-1})\circ\hat{\theta}$. Тогда этим же свойством обладает и форма ζ.
$\Leftarrow$) Пусть форма ζ обладает указанными свойствами. Рассмотрим 1-форму $\hat{\theta}=\theta+\zeta$. Тогда $\hat{\theta}\circ\Lambda=\theta\circ\Lambda-\zeta\circ\Lambda$. Так как ζ – горизонтальная форма, а $\Lambda(X)$ – вертикальное векторное поле для любого $X\in\mathbf{g}$, то $\zeta\circ\Lambda=0$. Тогда $\hat{\theta}\circ\Lambda=\theta\circ\Lambda=id$. Кроме того, $\hat{\theta}\circ(R_g)_*=\theta\circ(R_g)_*+\zeta\circ(R_g)_*=$

$Ad(g^{-1})\circ(\theta+\zeta)=Ad(g^{-1})\circ\hat{\theta}$. Эти два свойства являются характеристическими свойствами формы связности, следовательно, форма $\hat{\theta}$ является формой связности на многообразии P. $\square$

Пусть теперь M – произвольное n-мерное гладкое многообразие, $\mathcal{B}(M)$ – главное расслоение реперов над M.

Теорема 4.6. Задание на многообразии BM 1-формы ζ со значениями в алгебре Ли $\mathbf{gl}(n,\mathbf{R})$, обладающей свойствами горизонтальности и эквивариантности, равносильно заданию на многообразии M тензорного поля T типа (2,1).

Доказательство. Пусть ζ – горизонтальная эквивариантная форма. Фиксируем на многообразии M какую-нибудь аффинную связность. Пусть ∇ – ее оператор Кошуля, θ – форма этой связности. По доказанному выше форма $\hat{\theta}=\theta+\zeta$ также форма некоторой связности. Пусть $\hat{\nabla}$ – ее оператор Кошуля.

Так как ζ – горизонтальная форма, она раскладывается по формам $\{\omega^k\otimes E_j^i\}$, то есть ее тензорные компоненты ζ_j^i представимы в виде $\zeta_j^i=T_{jk}^i\omega^k$, а значит, $\zeta=\zeta_j^i\otimes E_i^j=T_{jk}^i\omega^k\otimes E_i^j$. Продифференцируем внешним образом с учетом первой группы структурных уравнений связности:
$d\zeta_j^i=dT_{kj}^i\wedge\omega^k+T_{kj}^i d\omega^k=dT_{kj}^i\wedge\omega^k-T_{kj}^i\theta_r^k\wedge\omega^r+\frac{1}{2}T_{kj}^iS_{ab}^k\omega^a\wedge\omega^b$. С другой стороны, с учетом второй группы структурных уравнений $d\zeta_j^i=d\hat{\theta}_j^i-d\theta_j^i=-\hat{\theta}_k^i\wedge\hat{\theta}_j^k+\theta_k^i\wedge\theta_j^k+\frac{1}{2}(\hat{R}_{jkl}^i-R_{jkl}^i)\omega^k\wedge\omega^l=-(\theta_k^i+\zeta_k^i)\wedge(\theta_j^k+\zeta_j^k)+\theta_k^i\wedge\theta_j^k+\frac{1}{2}(\hat{R}_{jkl}^i-R_{jkl}^i)\omega^k\wedge\omega^l=-\zeta_k^i\wedge\theta_j^k-\theta_k^i\wedge\zeta_j^k-\zeta_k^i\wedge\zeta_j^k+\frac{1}{2}(\hat{R}_{jkl}^i-R_{jkl}^i)\omega^k\wedge\omega^l=-T_{lk}^i\omega^l\wedge\theta_j^k-T_{lj}^k\theta_k^i\wedge\omega^l+\frac{1}{2}(-2T_{[k|r|}^iT_{l]j}^r+\hat{R}_{jkl}^i-R_{jkl}^i)\omega^k\wedge\omega^l$.
Сравнивая эти соотношения мы получаем, что
$dT_{kj}^i-T_{rj}^i\theta_k^r-T_{kr}^i\theta_j^r+T_{kj}^r\theta_r^i)\wedge\omega^k=-\frac{1}{2}(T_{rj}^iS_{kl}^r+2T_{[k|r|}^iT_{l]j}^r-\hat{R}_{jkl}^i+R_{jkl}^i)\omega^k\wedge\omega^l$. В левой части этого равенства стоит ∇T_{kj}^i, а правую часть обозначим $B_{jkl}^i\omega^k\wedge\omega^l$. Тогда
$(\nabla T_{kj}^i+B_{jkl}^i\omega^l)\wedge\omega^k=0$. По лемме Картана получим $\nabla T_{kj}^i+B_{jkl}^i\omega^l=T_{kjl}^i\omega^l$, где $\{T_{kjl}^i\}$ – система подходящих функций на BM, для которых $T_{k[jl]}^i=0$. Следовательно, $\nabla T_{kj}^i=(T_{kjl}^i-B_{jkl}^i)\omega^l$, то есть 1-формы ∇T_{kj}^i – горизонтальны, а следовательно, по основной теореме тензорного анализа семейство функций $\{T_{kj}^i\}\subset C^\infty(BM)$ определяет тензор T типа (2,1) на многообразии M. Этот тензор называется *тензором аффинной деформации* от связности ∇ к связности $\hat{\nabla}$.

Выясним геометрический смысл этого тензора. Фиксируем точку $m\in M$. Определим в касательном пространстве $T_m(M)$ тензор $T_m(X,Y)=p(\zeta_p(X_p^\natural)\omega_p(Y_p^\natural))$. Здесь $X,Y\in T_m(M)$, p – любая точка слоя над точкой m. Покажем, что это определение корректно в смысле независимости от выбора репера p. Пусть $p'\in\pi^{-1}(m)$ – другой репер. Тогда существует единственный элемент $g\in GL(n,\mathbf{R})$ такой, что $p'=pg\equiv R_g(p)$. Имеем
$p'(\zeta_{p'}(X_{p'}^\natural)\omega_{p'}(Y_{p'}^\natural)=pg(\zeta_{pg}((R_g)_*X_p^\natural)\omega_{pg}((R_g)_*Y_p^\natural))=p\circ g(R_g^*\zeta(X_p^\natural)R_g^*\omega(Y_p^\natural))=$
$=p\circ g((Ad(g^{-1}\zeta_p)(X_p^\natural))((g^{-1}\omega)(Y_p^\natural))=p\circ g(g^{-1}\zeta_p(X_p^\natural)g)(g^{-1}\omega_p(Y_p^\natural))=p(\zeta_p(X_p^\natural)(\omega_p(Y_p^\natural))$.

Таким образом, мы построили семейство тензоров $\tilde{T}=\{T_m,m\in M\}$. Покажем, что это семейство совпадает с тензором T аффинной деформации, то есть это семейство определяет тензорное поле типа (2,1), совпадающее с полем тензором аффинной деформации.
Фиксируем элемент $p=(m,e_1,\ldots,e_n)\in BM$. Пусть $(m,e^1,\ldots,e^n)$ – дуальный корепер. Тогда $(T_m)_{kj}^i=e^i(T_m(e_k,e_j))=e^i(p(\zeta_p((e_k)_p^\natural)\omega_p((e_j)_p^\natural))=e^i(p(T_{rb}^a(p)\omega^r\otimes E_a^b(e_k^\natural)(p^{-1}\circ(\pi)_*(e_j^\natural)))$. Учтем, что $p^{-1}\circ(\pi)_*(e_j^\natural)=p^{-1}(e_j)=\varepsilon_j$, $\omega^r\otimes E_a^b(e_k^\natural)=\omega^r(e_k^\natural)E_a^b=(\omega_p(e_k^\natural))^rE_a^b=(\varepsilon_k)^rE_a^b=\delta_k^rE_a^b$. Вернемся к прерванной цепочке равенств: $(T_m)_{kj}^i=e^i(p(T_{rb}^a(p)\delta_k^rE_a^b(\varepsilon_j)))=e^i(p(T_{kb}^a(p)\delta_j^b\varepsilon_a))=T_{kj}^a(p)e^i(e_a)=T_{kj}^a(p)\delta_a^i=T_{kj}^i(p)$. Но по определению $T_{kj}^i(p)$ – это компоненты тензора T в репере p, а значит, компоненты тензоров T_m и тензора аффинной деформации в точке $m\in M$ совпадают, то есть построенное семейство тензоров $\tilde{T}$ есть ни что иное как тензор аффинной деформации.

Обратно, пусть T – тензорное поле типа (2,1) на M. Определим на многообразии BM 1-форму ζ со значениями в алгебре Ли $\mathbf{gl}(n,\mathbf{R})$ соотношением

$$\zeta_p(X)\omega_p(Y)=p^{-1}(T_{\pi(p)}((\pi_*)_pX,(\pi_*)_pY))$$

$X,Y\in T_p(BM)$.

Задача 4.5. Докажите, что, во-первых, построена форма со значениями в алгебре Ли структурной группы, во-вторых, она горизонтальна.
Очевидно, что это гладкая форма, так как является композицией гладких отображений.

Докажем, что построенная форма эквивариантна. Действительно, с учетом того, что $\pi_*\circ(R_g)_*=\pi_*$; $pg=p\circ g$ получим $\zeta_{pg}((R_g)_*X)\omega_{pg}((R_g)_*Y)=(pg)^{-1}(T_{\pi(pg)}(\pi_*(R_g)_*X,\pi_*(R_g)_*Y))=g^{-1}\circ p^{-1}(T_{\pi(p)}(\pi_*X,\pi_*Y))=$

$g^{-1}\circ\zeta_p(X)\omega_p(Y)$. С другой стороны, преобразуем левую часть этого равенства $\zeta_{pg}((R_g)_*X_p)\omega_{pg}((R_g)_*Y_p) = (R_g^*\zeta)(X)((R_g^*\omega)(Y)) = (R_g^*\zeta)(X)(g^{-1}\omega(Y))$. Итак,

$$(R_g^*\zeta)(X)(g^{-1}\omega_p(Y)) = g^{-1}\circ\zeta_p(X)(\omega_p(Y))$$

Это верно для любого $\omega_p(Y)\in\mathbf{R}^n$, значит,

$$(R_g^*\zeta)(X)\circ g^{-1} = g^{-1}\circ\zeta_p(X)$$

Это равносильно соотношению $(R_g^*\zeta)_p = g^{-1}\circ\zeta_p\circ g = Ad(g^{-1})\circ\zeta_p$ или в эквивалентной форме $R_g^*(\zeta_{pg}) = Ad(g^{-1})\circ\zeta_p$, то есть форма ζ эквивариантна.
Нам осталось доказать, что этой форме отвечает тензор T аффинной деформации. Действительно, для любых векторов $X,Y\in T_m(M)$ имеем $\tilde{T}_m(X,Y) = p(\zeta_p(X_p^\sharp)\omega_p(Y_p^\sharp)) = p(p^{-1}(T_{\pi(p)}(\pi_*X_p^\sharp,\pi_*Y_p^\sharp)) = T_m(X,Y)$. □

Теорема 4.7. В принятых обозначениях $\tilde{\nabla}_XY - \nabla_XY = T(X,Y)$, $X,Y\in\mathcal{X}(M)$.

Доказательство. По доказанному в любой точке $m\in M$ имеем

$$(\tilde{\nabla}_XY - \nabla_XY)_m = p(\tilde{X}_p^\sharp(\hat{Y}) - X_p^\sharp(\hat{Y})) \tag{9}$$

Отметим, что горизонтальные лифты $\tilde{X}_p^\sharp$ и $X_p^\sharp$ различны, так как соответствуют различным связностям. Далее, векторное поле $Z = \tilde{X}_p^\sharp - X_p^\sharp\in\mathcal{V}$ – вертикальное, так как $\pi_*Z = \pi_*\tilde{X}_p^\sharp - \pi_*X_p^\sharp = X - X = 0$. С учетом этого обозначения соотношение (9) запишется в виде

$$(\tilde{\nabla}_XY - \nabla_XY)_m = p(Z_p(\hat{Y})) \tag{10}$$

Обозначим $W_e = \tilde{\theta}_p(Z_p)$. Так как $(\tilde{\theta})_p = (\Lambda^{-1}\circ\tilde{\Pi}_V)_p : T_p(BM)\to\mathcal{V}_p\to\mathbf{gl}(n,\mathbf{R})$, то W_e – элемент алгебры Ли $\mathbf{gl}(n,\mathbf{R})$, $\tilde{\theta}$ – форма связности $\tilde{\nabla}$. Пусть W – соответствующее левоинвариантное векторное поле. Тогда $Z_p = (W^\flat)_p$, так как $W^\flat = \lambda(W) = \lambda\circ\theta(Z) = Z$. По доказанной выше лемме имеем $W^\flat(\hat{Y}) = -W_e(\hat{Y}_p)$. Тогда $(\tilde{\nabla}_XY - \nabla_XY)_m = p((W^\flat)_p(\hat{Y})) = -p(W_e(\hat{Y}_p))$. Так как $\omega_p(Y_p^\sharp) = p^{-1}(\pi_*Y_p^\sharp) = p^{-1}(Y_p) = \hat{Y}_p$ и в силу вертикальности формы связности $\tilde{\theta}_p(\tilde{X}_p^\sharp - X_p^\sharp) = -\tilde{\theta}(X_p^\sharp)$, продолжая вычисления, получим $(\tilde{\nabla}_XY - \nabla_XY)_m = -p(\tilde{\theta}_p(Z_p)(\omega_p(Y_p^\sharp)) = p(\tilde{\theta}(X_p^\sharp)(\omega_p(Y_p^\sharp)) = p((\theta_p + \zeta_p)(X_p^\sharp)(\omega_p(Y_p^\sharp)) = p(\zeta_p(X_p^\sharp)(\omega_p(Y_p^\sharp)) = T_m(X,Y)$. Это верно для любой точки $m\in M$. Таким образом, $\tilde{\nabla}_XY - \nabla_XY = T(X,Y)$. □

Следствие 1. Совокупность всех аффинных связностей на гладком многообразии имеет структуру бесконечномерного аффинного пространства, ассоциированного векторному пространству тензорных полей типа (2,1) многообразия M.

Доказательство. Напомним, что *аффинным пространством*, ассоциированным векторному пространству V, называется непустое множество $\mathcal{A}$ произвольной природы, на котором фиксировано отображение $\sigma : \mathcal{A}\times V\to\mathcal{A}$, обозначаемое $\sigma(X,u) = X+u$ и называемое откладыванием вектора от точки, удовлетворяющее двум аксиомам:
1) $\forall X,Y\in\mathcal{A}\,\exists!u\in V : X+u = Y$;
2) $\forall X\in\mathcal{A}\,\forall u,v\in V\Rightarrow (X+u)+v = X+(u+v)$.
Обозначим $\mathcal{A} = \{$ множество всех аффинных связностей на многообразии $M\}$, $V = \mathcal{T}_2^1(M)$. Тогда для любой связности $\nabla\in\mathcal{A}$ и любого тензорного поля $T\in\mathcal{T}_2^1(M)$ определена связность $\tilde{\nabla} = \nabla + T$. При этом для любых двух связностей $\tilde{\nabla}$, ∇ существует единственный тензор (тензор аффинной деформации) $T(X,Y) = \tilde{\nabla}_XY - \nabla_XY$. Кроме того, очевидно, что $(\nabla + T_1) + T_2 = \nabla + (T_1 + T_2)$. Итак, по определению аффинного пространства получаем утверждение следствия. □

Следствие 2. Пусть $\tilde{\nabla} = \nabla + T$. Тогда тензоры кручения связностей $\tilde{\nabla}$ и ∇ связаны соотношением

$$\tilde{S}(X,Y) - S(X,Y) = T(X,Y) - T(Y,X)$$

$X,Y\in\mathcal{X}(M)$.

Доказательство. Имеем $\tilde{S}(X,Y) - S(X,Y) = \tilde{\nabla}_XY - \tilde{\nabla}_YX - [X,Y] - \nabla_XY + \nabla_YX + [X,Y] = \nabla_XY + T(X,Y) - \nabla_YX - T(Y,X) - \nabla_XY + \nabla_YX = T(X,Y) - T(Y,X)$. □

Следствие 3. Две связности имеют одинаковый тензор кручения тогда и только тогда, тензор аффинной деформации симметричен по ковариантным аргументам.

Предложение 4.4. Компоненты тензора T аффинной деформации от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$ в локальной карте вычисляются по формуле

$$T^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}$$

где $\{\tilde{\Gamma}^i_{jk}\}$, $\{\Gamma^i_{jk}\}$ – обобщенные коэффициенты Кристоффеля связностей $\tilde{\nabla}$ и ∇ соответственно.

Доказательство. По определению имеем $\tilde{\theta}^i_j - \theta^i_j = T^i_{kj}\omega^k$, где $\{T^i_{kj}\}$ – система функций на многообразии BM, задающая тензор аффинной деформации. Применим к этому тождеству отображение s^*, где s – натуральное сечение (напомним, что мы находимся в области локальной тривиальности и такое сечение существует). Как мы знаем, $s^*\theta^i_j = \Gamma^i_{jk}dx^k$, $s^*\omega^k = dx^k$ и $\{T^i_{jk} \circ s\}$ суть компоненты тензора аффинной деформации T в натуральном базисе локальной карты (U, φ), которые мы будем обозначать теми же символами $\{T^i_{jk}\}$. Тогда получим $\tilde{\Gamma}^i_{jk}dx^k - \Gamma^i_{jk}dx^k = T^i_{kj}dx^k$. В силу линейной независимости базисных форм $\{dx^k\}$ получим требуемое соотношение. □

4.4 Параллелизм и геодезические.

Пусть (M, ∇) – пространство аффинной связности.

Определение 4.3. Тензорное поле $T \in \mathcal{T}^s_r(M)$ называется *параллельным или ковариантно постоянным в связности* ∇, если $\nabla T = 0$.

Пусть T – параллельное тензорное поле, $\hat{T} = \{T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\}$ – система функций на многообразии BM, задающих это тензорное поле. Тогда параллельность тензорного поля T равносильна условиям $T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k} = 0$. Так как по основной теореме тензорного анализа $\nabla T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k}\omega^k$, то

$$dT^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} - T^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_r}\theta^k_{i_1} - \dots + T^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}\theta^{j_s}_k = 0 \tag{11}$$

Эта дифференциальная система не является вполне интегрируемой (то есть из равенства нулю форм, стоящих в ее левой части не следует равенство нулю их внешних дифференциалов). А именно, дифференцируя уравнения (11) внешним образом, получим, что система (11) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда

$$T^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_r}R^k_{i_1ab} + \dots + T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1}k}R^k_{i_rab} + T^{kj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}R^{j_1}_{kab} - \dots - T^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_r}R^{j_s}_{kab} = 0$$

Оказывается, что система (11) имеет много 1-мерных интегральных многообразий.

Фиксируем любую гладкую кривую $\gamma : I \to M$ с началом в точке m (то есть $\gamma(0) = m$), которая в карте (U, φ) с координатами $(x^1, \dots, x^n)$, задается уравнениями $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \dots, n = dimM$.

Определение 4.4. Тензорное поле $T \in \mathcal{T}^s_r(M)$ называется *параллельным* вдоль кривой γ, если для любого $\tau \in I$ $\nabla_{\dot{\gamma}(\tau)}T = 0$, где $\dot{\gamma}(\tau) = \frac{d}{dt}\big|_{t=\tau}\ \varphi\circ\gamma(t) \equiv \xi$. Тогда $0 = \nabla_\gamma(T)^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r,k}\xi^k$. Здесь $T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$ – компоненты тензорного поля T в локальной карте (U, φ) многообразия M. Распишем это равенство подробнее:

$\left(\frac{\partial T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}}{\partial x^k} - T^{j_1\dots j_s}_{pi_2\dots i_r}\Gamma^p_{i_1k} - \dots + T^{pj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\Gamma^{j_s}_{pk}\right)\frac{dx^k}{dt} = 0$, то есть

$\frac{dT^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}}{dt} - \left(T^{j_1\dots j_s}_{pi_2\dots i_r}\Gamma^p_{i_1k} + \dots - T^{pj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\Gamma^{j_s}_{pk}\right)\frac{dx^k}{dt} = 0.$

Итак, мы доказали

Предложение 4.5. Тензорное поле T параллельно вдоль кривой γ тогда и только тогда, когда

$$\frac{dT^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}}{dt} = \left(T^{j_1\dots j_s}_{pi_2\dots i_r}\Gamma^p_{i_1k} + \dots - T^{pj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\Gamma^{j_s}_{pk}\right)\frac{dx^k}{dt}$$

Заметим, что это нормальная линейная система дифференциальных уравнений, а значит, имеет единственное решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dT^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}}{dt} = \left(T^{j_1\dots j_s}_{pi_2\dots i_r}\Gamma^p_{i_1k} + \dots - T^{pj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\Gamma^{j_s}_{pk}\right)\frac{dx^k}{dt} \\ T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}(t_0) = (T_0)^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} \end{cases} \tag{12}$$

при любых начальных данных. Ее решения, то есть система функций $\{T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}(t)\}$ на интервале I, определяющая семейство тензоров, которое мы обозначим $T_\gamma = \{T_{\gamma(t)}, t \in I\}$.

Определение 4.5. Семейство T_γ называется *семейством тензоров, параллельных вдоль кривой* γ. Итак, доказана

Теорема 4.8. Для любой кусочно-гладкой кривой $\gamma : I \to M$: $\gamma(t_0) = m$ и для любого тензора $T_0 \in T_r^s(m)$ в точке m существует единственное семейство T_γ тензоров, параллельных вдоль γ и таких, что $T_{\gamma(t_0)} = T_0$. $\square$

Фиксируем $t \in I$. Тогда определено отображение $\Pi_{\dot\gamma(t_0)\gamma(t)} : T_m(M) \to T_{\gamma(t)}(M)$. Это отображение сопоставляет тензору T_0 в точке m представитель соответствующейго параллельного семейства в точке $\gamma(t)$. Из линейности уравнений (12) следует, что это отображение линейно (совокупность решений линейной системы дифференциальных уравнений образует линейное пространство). Более того, отображение $\Pi_{\dot\gamma(t_0)\gamma(t)}$ является биекцией, так как для него существует обратное отображение, а именно, отображение $(\Pi_{\dot\gamma(t_0)\gamma(t)})^{-1} = \Pi_{\dot\gamma(t)\gamma(t_0)}$. Следовательно, отображение $\Pi_{\dot\gamma(t_0)\gamma(t)} : T_m(M) \to T_{\gamma(t)}(M)$ является линейным изоморфизмом касательных пространств в соответствующих точках. Он называется *параллельным переносом* тензора T из точки m в точку $\gamma(t)$. Более того, будучи линейным изоморфизмом, это отображение индуцирует отображение множества реперов пространства $T_m(M)$ на множество реперов в пространстве $T_{\gamma(t)}(M)$ (так как линейный изоморфизм переводит базис в базис), то есть слой $\pi^{-1}(m)$ переходит в слой $\pi^{-1}(\gamma(t))$, где $\pi : BM \to M$ – естественная проекция главного расслоения реперов. При этом если $p_0 = (m, e_1, \dots, e_n)$ – репер в точке m, то для любого $t \in I$ однозначно определяется репер $p_t = (\gamma(t), e_1(t), \dots, e_n(t))$ в точке $\gamma(t)$, где $e_i(t) = \Pi_{\gamma(0)\gamma(t)} e_i$. Тем самым отображение Π индуцирует кривую $\gamma^\sharp : I \to BM$ по формуле $\gamma^\sharp(t) = p_t$ такую, что $\pi \circ \gamma^\sharp = \gamma$. Докажем, что кривая $\gamma^\sharp$ является интегральной кривой горизонтального распределения, определяемого связностью ∇. Действительно, в силу определения параллельного переноса каждое семейство векторов $e_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ будет параллельным вдоль кривой γ, а значит, будет удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$d(e_i)^j = -(e_i)^k \Gamma^j_{kr} dx^r$$

Применим отображение антиувлечения π^*: $d((e_i)^j \circ \pi) + ((e_i)^k \circ \pi)(\Gamma^j_{kr} \circ \pi) d(x^r \circ \pi) = 0$, то есть $dy_i^j + y_i^k (\Gamma^j_{kr} \circ \pi) dy^r = 0$. Напомним, что компоненты формы связности имеют вид $\theta^i_j = \tilde y^i_k dy^k_j + (\Gamma^k_{bc} \circ \pi) y^b_j \tilde y^i_k dy^c = \tilde y^i_k (dy^k_j + (\Gamma^k_{bc} \circ \pi) y^b_j dy^c) = 0$. Таким образом, кривая $\gamma^\sharp$ является интегральной кривой распределения, задаваемого уравнениями $\theta^i_j = 0$, то есть горизонтального распределения связности ∇.

Определение 4.6. Кривые, у которых касательные вектор в каждой точке принадлежит горизонтальному распределению, называются *горизонтальными кривыми.*

Обратно, если $\hat\gamma$ – горизонтальная кривая, проектирующаяся в γ, причем $\hat\gamma(0) = p_0$, то проводя рассуждения в обратном порядке, убеждаемся, что векторы реперов, являющихся ее точками, являются результатом параллельного переноса векторов репера p_0 в соответствующую точку, а значит, $\hat\gamma = \gamma^\sharp$.

Итак, доказана

Теорема 4.9. Для любой кусочно-гладкой кривой γ с началом в точке $m \in M$ существует единственная горизонтальная кривая $\gamma^\sharp$ с началом в произвольной точке $p_0 \in \pi^{-1}(m)$, проектирующаяся в γ. $\square$

Определение 4.7. Кривая $\gamma^\sharp$, обладающая указанными свойствами, называется *горизонтальным лифтом* кривой γ через точку p_0.

В терминах горизонтального лифта кривых можно получить новое, более удобное, определение параллельного переноса вдоль кривой и более наглядную интерпретацию ковариантной производной.

Лемма 4.7. Пусть $\gamma : I \to M$ – кусочно-гладкая кривая на M. Обозначим $\gamma(I) = \{m_t, t \in I\}$, $\gamma^\sharp : I \to BM$ – соответствующий горизонтальный лифт, $\gamma^\sharp(I) = \{p_t, t \in i\}$. Тогда параллельный перенос

$$\Pi_{m_0 m_t} = p_t \circ p_0^{-1}$$

Доказательство. Рассмотрим общую конструкцию. Пусть дан линейный изоморфизм $f : V \to \tilde V$ n- мерных линейных пространств V и $\tilde V$. Обозначим $p = (e_1, \dots, e_n)$ – базис в V, $\varepsilon_i = f(e_i)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда (ε_i) является базисом $\tilde V$, так как f – линейный изоморфизм. Определим отображения $p : \mathbf{R}^n \to V$ по формуле $p(X^1, \dots, X^n) = X^i e_i$ и отображение $\tilde p : \mathbf{R}^n \to \tilde V$ по формуле $\tilde p(X^1, \dots, X^n) = X^i \varepsilon_i$. Тогда $f(X) = f(X^i e_i) = X^i f(e_i) = X^i \varepsilon_i = \tilde p(X^1, \dots, X^n) = \tilde p(p^{-1}(X))$, то есть $f = \tilde p \circ p^{-1}$. $\square$

Пусть теперь $m \in M$, $X \in \mathcal{X}(M)$, $X_m \neq 0$, $T \in \mathcal{T}_r^s(M)$, γ – интегральная кривая поля X с началом в точке m, то есть $m_0 = m$. Тогда $\gamma^\sharp$ – интегральная кривая поля $X^\sharp$. С учетом леммы имеем $\lim_{t\to 0} \frac{(\Pi^{-1}_{m_0 m_t} T_{m_t} - T_{m_0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{p_0 \circ p_t^{-1}(T_{m_t}) - T_{m_0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{p_0 \circ p_t^{-1}(T_{m_t}) - p_0 \circ p_0^{-1} T_{m_0}}{t} = p_0 \lim_{t\to 0} \frac{p_t^{-1}(T_{m_t}) - p_0^{-1} T_{m_0}}{t} =$

$p_0 \lim_{t\to 0} \frac{\hat{T}_{p_t} - \hat{T}_{p_0}}{t} = p_0(X^{\sharp}_{p_0}(\hat{T})) = (\nabla_X T)_m$. Итак,

$$(\nabla_X T)_m = \lim_{t\to 0} \frac{(\Pi^{-1}_{m_0 m_t} T_{m_t} - T_{m_0})}{t}$$

Это наиболее наглядное определение ковариантной производной, определяющее смысл данного термина.

Замечание. Из (11) и проведенных рассуждений следует, что поле тензора T параллельно (то есть ковариантно постоянно) тогда и только тогда, когда для любых $m_1, m_2 \in M$ тензор $\Pi_{m_1 m_2}(T_{m_1})$ не зависит от выбора кривой, соединяющей эти точки.

Определение 4.8. Кривая $\gamma : I \to M$ называется *геодезической*, если семейство $\dot{\gamma} = \{\dot{\gamma}_s = \frac{d}{dt}|_{t=s}\, \gamma(t), s \in I\}$ параллельно вдоль γ.

Пусть в некоторой карте (U, φ) кривая γ задается уравнениями $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\dot{\gamma}_s = \frac{d}{dt}|_{t=s} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(s)}$. Так как уравнение параллельности семейства векторов $X_\gamma = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ задается системой уравнений $\frac{dX^i}{dt} = -\Gamma^i_{jk} X^j \frac{dx^k}{dt}$, то кривая $\gamma(t)$ является геодезической тогда и только тогда

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

Это нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Из теоремы о существовании и единственности решений следует, что такая система всегда имеет решение, опрделенное в некоторой окрестности начальных условий, то есть задача Коши

$$\begin{cases} x^i(0) = x^i_0 \\ \frac{dx^i}{dt}|_{t=0} = X^i_0 \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \end{cases}$$

имеет единственное решение в некоторой окрестности нуля при любых начальных данных.

Геометрически это означает, что через любую точку $m(x^1_0, \ldots, x^n_0)$ проходит единственная геодезическая, касательный вектор к которой в начальной точке совпадает с вектором $X_0 = X^i_0 \frac{\partial}{\partial x^i}|_m$.

Оказывается, этот факт можно доказать чисто геометрически, опираясь на связь между геодезическими линиями и базисными векторными полями.

Фиксируем $\xi \in \mathbf{R}^n$. Тогда на многообразии BM возникает соответствующее базисное векторное поле X_ξ (оно горизонтально). Если мы будем рассматривать репер $p \in BM$ как реперное отображение, то $(p(\xi))^{\sharp} = (X_\xi)_p$. Напомним, что если $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ – стандартный базис арифметического пространства $\mathbf{R}^n$, то ему отвечает базис $X_{\xi_1}, \ldots, X_{\xi_n}$ n-мерного линейного пространства $\mathbf{b}$ базисных векторных полей. Он же является базисом горизонтального распределения связности.

Теорема 4.10. Следующие утверждения эквивалентны:
1) Кривая $\gamma : I \to M$ геодезическая;
2) Кривая γ является проекцией интегральной кривой некоторого базисного векторного поля на многообразии BM;
3) Горизонтальный лифт кривой γ является интегральной кривой некоторого базисного векторного поля на BM.

Доказательство. Эквивалентность 2) и 3) является непосредственным следствием единственности горизонтального лифта кривой через заданный репер и горизонтальности интегральной кривой базисного векторного поля.

Пусть X_ξ – базисное векторное поле на BM, отвечающее вектору $\xi \in \mathbf{R}^n$. Пусть $\rho : I \to BM$ – интегральная кривая этого векторного поля с началом в точке $p_0 \in BM$. Рассмотрим кривую γ, являющуюся проекцией ρ, то есть $\gamma = \pi \circ \rho : I \to M$. Надо доказать, что это геодезическая с началом в точке $m_0 = \pi(p_0)$. Пусть $m = \gamma(s)$ – произвольная точка этой кривой. Вычислим касательный вектор к кривой γ в этой точке:
$\dot{\gamma}_s = \frac{d}{dt}|_t = s\ \pi \circ \rho(t) = (\pi_*)_{\rho(s)} \frac{d}{dt}|_{t=s}\, \rho(t) = (\pi_*)_{\rho(s)} (X_\xi)_{\rho(s)} = \rho(s)(\xi)$, так как $(\pi_*)_p (X_\xi)_p = p(\xi)$. В частности, $\dot{\gamma}_0 = p_0(\xi)$, а значит, $\dot{\gamma}_s = \rho(s) \circ p_0^{-1} \dot{\gamma}_0 = p_s \circ p_0^{-1}(\dot{\gamma}_0) = \Pi_{m\gamma(s)} \dot{\gamma}_0$, то есть семейство касательных векторов к кривой γ параллельно вдоль γ, то есть γ – геодезическая.

Обратно, пусть γ – геодезическая на многообразии M с началом в точке m_0. Фиксируем точку $p_0 \in \pi^{-1}(m_0)$ и рассмотрим горизонтальный лифт $\rho = \gamma^{\sharp}$ линии γ через точку p_0. Обозначим $\xi = p_0^{-1}(\dot{\gamma}_0) \in \mathbf{R}^n$. Рассмотрим базисное векторное поле X_ξ. Так как γ – геодезическая, то

$\rho(t)p_0^{-1}(\dot\gamma_0) = p_t \circ p_0^{-1}(\dot\gamma_0) = \Pi_{p_0\rho(t)}(\dot\gamma_0) = \dot\gamma_t$, и значит, $\rho(t)(\xi) = \dot\gamma_t$. Следовательно, так как $\gamma(t) = \pi\circ\rho(t)$, то $\xi = \rho(t)^{-1}(\dot\gamma_t) = \rho(t)^{-1} \circ (\pi_*)(\dot\rho_{\rho(t)}) = \omega_{\rho(t)}(\dot\rho_{\rho(t)})$. Следовательно, $\frac{d\rho(t)}{dt} \equiv \dot\rho_{\rho(t)} = (X_\xi)_{\rho(t)}$ (по определению формы смещения). Это значит, что линия $\rho(t)$ будет интегральной линией векторного поля X_ξ, причем по определению $\pi(\rho) = \pi(\gamma^\sharp) = \gamma$. $\square$

Следствие. Для любой $m_0 \in M$ и любого вектора $X_0 \in T_m(M)$ существует единственная геодезическая $\gamma : I \to M$ такая, что 1) $\gamma(0) = m_0$; 2) $\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,\gamma(t) = X_0$.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $p_0 \in \pi^{-1}(m_0)$. Обозначим через $\xi = p_0^{-1}(X_0)$. Пусть X_ξ – соответствующее базисное векторное поле на многообразии BM, $\rho : I \to BM$ – интегральная кривая этого поля с началом в точке p_0. Тогда как мы доказали $\gamma = \pi\circ\rho$ – геодезическая на M. Для нее $\gamma(0) = \pi \circ \rho(0) = \pi(p_0) = m_0$. Далее, $\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,\gamma(t) = (\pi_*)_{\rho(0)}\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,\rho(t) = (\pi_*)_{p_0}(X_\xi)_{p_0} = p_0(\xi) = X_0$. Осталось доказать единственность геодезической. Пусть $\tilde\gamma$ – другая геодезическая на M с теми же начальными данными, $\tilde\rho : I \to BM$ – ее горизонтальный лифт, то есть $\tilde\rho = \tilde\gamma^\sharp$ через точку $q_0 \in \pi^{-1}(m)$. По доказанному, $\tilde\rho$ – интегральная линия некоторого базисного векторного поля X_η, где $\eta = q_0^{-1}(X_0)$. Тогда существует элемент $a \in GL(n, \mathbf{R})$ такой, что $p_0 a = q_0$. При этом $\eta = q_0^{-1}(X_0) = (p_0 a)^{-1}(X_0) = a^{-1} \circ p_0^{-1}(X_0) = a^{-1}\xi$, то есть $\eta = a^{-1}\xi$. Следовательно, $X_\eta = X_{a^{-1}\xi} = (R_a)_* X_\xi$, а значит,

$$\tilde\rho = R_a \circ \rho$$

В самом деле, $R_a \circ \rho(0) = R_a(p_0) = p_0 a = q_0 = \tilde\rho(0)$. Кроме того, $\frac{d}{dt}(R_a \circ \rho(t) = (R_a)_*\frac{d}{dt}\rho(t) = (R_a)_*(X_\xi)_{\rho(t)} = (X_{a^{-1}\xi})_{R_a\circ\rho(t)} = (X_\eta)_{R_a\circ\rho(t)}$, то есть $\frac{d}{dt}(R_a \circ \rho(t) = (X_\eta)_{R_a\circ\rho(t)}$. Итак, кривые $\tilde\rho$ и $R_a \circ \rho$ будут интегральными линиями векторного поля X_η с одинаковыми начальными условиями, значит, $\tilde\rho = R_a \circ \rho$. В частности, $\tilde\gamma = \pi \circ \tilde\rho = \pi \circ R_a \circ \rho = \pi \circ \rho = \gamma$. $\square$