

Краткое руководство к действию по многомерной дифференциальной геометрии.

17 сентября 2012 г.

Глава 1. Тензорный анализ (продолжение).

§1.1. Алгебра Грассмана гладкого многообразия.

Пусть M – n -мерное гладкое многообразие. Рассмотрим множество всех тензорных полей типа $(r, 0)$ для любого r от нуля до бесконечности. Под тензорным полем типа $(0, 0)$ будем понимать гладкие функции на многообразии M . Это множество мы обозначим $\mathfrak{T}_*(M)$. Складывать будем только тензорные поля одного типа, а умножение на гладкую функцию и тензорное умножение будет таким же как в курсе Анализ на многообразиях. Эти операции вводят в множестве $\mathfrak{T}_*(M)$ структуру алгебры, а операции сложения и умножения на гладкую функцию определяют структуру $C^\infty(M)$ -модуля каждому из множеств $\mathfrak{T}_r^0(M)$.

Если фиксировать r , то в множестве $\mathfrak{T}_r^0(M)$ тензорных полей типа $(r, 0)$ определено действие группы подстановок S_r порядка r . Напомним, что *подстановкой* называется таблица вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(r) \end{pmatrix},$$

где $\sigma(1), \dots, \sigma(r)$ – это числа $1, \dots, r$, поставленные в другом порядке. Каждая подстановка $\sigma \in S_r$ определяет отображение

$$\sigma : \mathfrak{T}_r^0(M) \rightarrow \mathfrak{T}_r^0(M),$$

по формуле

$$(\sigma t)(X_1, \dots, X_r) = t(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}).$$

Другими словами, подстановка σ переставляет аргументы у тензорного поля t . При этом говорят, что группа подстановок определяет действие на множестве тензорных полей $\mathfrak{T}_r^0(M)$.

Пример 1.1. Пусть даны две подстановки $\sigma, \tau \in S_r$. Тогда определена их композиция $\tau \circ \sigma$. Это подстановка из группы S_r . Она получается следующим образом: сначала числа от 1 до r переставляет подстановка σ , а затем, полученный набор чисел переставляет подстановка τ . Каждая из трех подстановок σ , τ и $\tau \circ \sigma$ определяет соответствующее отображение. Выясним, как связаны между собой эти отображения. Имеем для любого тензорного поля $t \in \mathfrak{T}_r^0(M)$

$$(\tau \circ \sigma)(t)(X_1, \dots, X_r) = t(X_{\tau \circ \sigma(1)}, \dots, X_{\tau \circ \sigma(r)}) = (\tau(t))(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = \sigma(\tau(t))(X_1, \dots, X_r).$$

Это равенство верно для любого набора векторных полей $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$, следовательно,

$$(\tau \circ \sigma)(t) = \sigma(\tau(t)).$$

Действие, удовлетворяющее такому закону композиции, называется *правым действием*. Также говорят, что группа подстановок S_r *действует на множестве тензорных полей $\mathfrak{T}_r^0(M)$ справа*.

Определение 1.1. Тензорное поле $t \in \mathfrak{T}_r^0(M)$ называется *симметричным* (или *симметрическим*), если для любой подстановки $\sigma \in S_r$ имеем

$$\sigma(t) = t.$$

Тензорное поле $t \in \mathfrak{T}_r^0(M)$ называется *кососимметрическим*, если для любой подстановки $\sigma \in S_r$ имеем

$$\sigma(t) = \varepsilon(\sigma)t,$$

где $\varepsilon(\sigma)$ – индекс подстановки σ . Напомним, что знак подстановки вычисляется следующим образом: нужно найти количество пар $(i, j), i < j$ из верхней строки подстановки, для которых $\sigma(i) > \sigma(j)$. Если количество таких пар четно, то подстановка называется *четной* и ее индекс равен 1, а если – нечетно, то подстановка называется *нечетной* и ее индекс равен -1 .

Задача 1.1. Докажите, что тензорное поле t является кососимметричным тогда и только тогда, когда значение тензорного поля t меняется на противоположное при любой перестановке пары его аргументов.

Решение. Пусть t кососимметричен. Докажем, что его значение меняется на противоположное при перестановке первой пары аргументов. Для остальных случаев доказательство аналогично. Для подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r \\ 2 & 1 & 3 & \dots & r \end{pmatrix}$$

имеем

$$t(X_2, X_1, X_3, \dots, X_r) = (\sigma(t))(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r) = -1 \cdot t(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r).$$

Здесь мы воспользовались определением кососимметрического тензорного поля и нечетностью подстановки σ .

Обратно, пусть тензорное поле меняет свое значение на противоположное при любой перестановке двух его аргументов. Рассмотрим произвольную подстановку $\sigma \in S_r$. Как известно из алгебры, любая подстановка представима в виде композиции транспозиций, то есть подстановок, у которых меняются местами только два числа, остальные же числа остаются на своих местах. Если подстановка четная, то количество таких транспозиций четно, а если – нечетная, то – нечетно. Тогда для подстановки σ получим разложение в композицию транспозиций

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n.$$

Рассмотрим тензорное поле $\sigma(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma(t)(X_1, \dots, X_r) &= (\tau_1 \circ \dots \circ \tau_n)(t)(X_1, \dots, X_r) = \tau_n(\dots(\tau_1(t))\dots)(X_1, \dots, X_r) = \\ &= \tau_{n-1}(\dots(\tau_1(t))\dots)(X_{\tau_n(1)}, \dots, X_{\tau_n(r)}) = -\tau_{n-1}(\dots(\tau_1(t))\dots)(X_1, \dots, X_r) \end{aligned}$$

и так далее. Здесь мы воспользовались тем, что транспозиция переставляет два аргумента местами, а условие позволяет нам вернуть их на место, поставив знак минус. Количество минусов равно количеству транспозиций, следовательно, мы получим, что $\sigma(t) = -t$ для нечетной подстановки и $\sigma(t) = t$ для четной подстановки. Эти два случая объединяются в равенство $\sigma(t) = \varepsilon(\sigma)t$. Итак, тензорное поле t получилось кососимметрическим по определению. \square

Задача 1.2. Докажите, что тензорное поле t является симметричным тогда и только тогда, когда значение тензорного поля t не меняется при любой перестановке пары его аргументов.

Замечание 1.1. Будем говорить, что тензорное поле $t \in \mathfrak{T}_r^0(M)$ симметрично по первой паре аргументов, если

$$t(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r) = t(X_2, X_1, X_3, \dots, X_r),$$

где X_1, \dots, X_r – произвольные векторные поля из $\mathfrak{X}(M)$. Аналогичным образом определяется симметричность по любой паре аргументов.

Будем говорить, что тензорное поле $t \in \mathfrak{T}_r^0(M)$ кососимметрично по первой паре аргументов, если

$$t(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r) = -t(X_2, X_1, X_3, \dots, X_r),$$

где X_1, \dots, X_r – произвольные векторные поля из $\mathfrak{X}(M)$. Аналогичным образом определяется кососимметричность по любой паре аргументов.

Задача 1.3. Пусть на многообразии M фиксирована локальная карта (U, φ) . Убедитесь, что симметричность тензорного поля по первым двум аргументам (по остальным парам индексов аналогично) в компонентах имеет вид

$$t_{i_1 i_2 i_3 \dots i_r} = t_{i_2 i_1 i_3 \dots i_r}. \quad (1.1)$$

При этом говорят, что тензорное поле симметрично по первой паре индексов.

Запишите условие кососимметричности тензорного поля по первым двум аргументам в компонентах.

Обозначим множество всех симметричных тензорных полей многообразия M через $\mathcal{S}_r(M)$, а множество всех кососимметричных тензорных полей – через $\Lambda_r(M)$. Очевидно, что эти множества замкнуты относительно операций сложения и умножения на гладкую функцию, а значит, являются подмодулями $C^\infty(M)$ -модуля $\mathfrak{T}_r^0(M)$. Элементы модуля $\Lambda_r(M)$ называются также *внешними r -формами* (или, короче, *r -формами*).

Напомним несколько фактов из теории проекторов (подробности можете посмотреть в файле `tenz alg.pdf`. Там вводятся проекторы для векторных пространств, но все тоже самое верно и в случае произвольного модуля). Пусть дан K -модуль V (буква K обозначает коммутативную ассоциативную алгебру с единицей. Из этой алгебры мы берем скаляры, на которые умножаем элементы из V). Тогда K -линейное

отображение $P : V \rightarrow V$ называется *проектором*, если $P \circ P = P$. В ряде задач удобнее пользоваться критерием проектора: условие $P \circ P = P$ равносильно условию $\forall a \in \text{Im } P \Rightarrow P(a) = a$, где $\text{Im } P$ – образ отображения P .

Если на модуле V задан проектор P , то этот модуль распадается в прямую сумму двух подмодулей – образа $\text{Im } P$ проектора P и ядра проектора P – $\text{Ker } P$, то есть $V = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$. Верно и обратное утверждение: если модуль V представим в виде прямой суммы своих подмодулей, то есть $V = A \oplus B$, то существует проектор $P : V \rightarrow V$, такой что $A = \text{Im } P$, $B = \text{Ker } P$. Наконец, отображение $Q = \text{id} - P$ также является проектором и называется *дополнительным проектором* для проектора P . Так как условие дополнителности обладает свойством симметричности, поэтому говорят, что проекторы P и Q *взаимно дополнительные*.

Договоримся K -линейное отображение $P : V \rightarrow V$ называть также *эндоморфизмом* модуля V . Хотя в этом термине нет подсказки о скалярах, на которые умножаются элементы из V , зато он красиво звучит.

Вернемся к подмодулям $\mathcal{S}_r(M)$ и $\Lambda_r(M)$. Определим два отображения

$$\text{Sym} : \mathfrak{T}_r^0(M) \rightarrow \mathcal{S}_r(M); \quad \text{Alt} : \mathfrak{T}_r^0(M) \rightarrow \Lambda_r(M)$$

формулами

$$\text{Sym}(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(t); \quad \text{Alt}(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) \sigma(t). \quad (1.2)$$

Задача 1.4. Докажите, что введенные отображения определены корректно, то есть $\text{Sym}(t) \in \mathcal{S}_r(M)$, $\text{Alt}(t) \in \Lambda_r(M)$. Докажите, что эти отображения действительно являются проекторами. Будут ли они взаимно дополнительными? (Подробное доказательство для случая векторного пространства проведено в файле `tenz alg.pdf`. Переведите его на случай модуля тензорных полей.)

Отображения Sym и Alt называются *эндоморфизмами (операторами) симметризации и альтернирования* соответственно.

Пример 1.2. Вычислим компоненты тензорного поля $\text{Sym}(t)$, где $t \in \mathfrak{T}_2^0(M)$. Фиксируем локальную карту (U, φ) и рассмотрим натуральный базис $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$. Тогда по определению компонент тензора получим

$$(\text{Sym}(t))_{ij} = \text{Sym}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{2} \left(t \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + t \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) = \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{ji}).$$

Обычно компоненты тензорного поля $\text{Sym}(t)$ обозначают с помощью круглых скобок следующим образом: $t_{(ij)}$. Тогда полученная формула примет вид

$$t_{(ij)} = \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{ji}).$$

Задача 1.5. Пусть $t \in \mathfrak{T}_2^0(M)$. Обозначим компоненты тензорного поля $\text{Alt}(t)$ в натуральном базисе через $t_{[ij]}$. Докажите, что

$$t_{[ij]} = \frac{1}{2} (t_{ij} - t_{ji}).$$

Задача 1.6. Докажите формулы

$$t_{(ijk)} = \frac{1}{6} (t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij} + t_{jik} + t_{kji} + t_{ikj}); \quad t_{[ijk]} = \frac{1}{6} (t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij} - t_{jik} - t_{kji} - t_{ikj}),$$

где $t \in \mathfrak{T}_3^0(M)$, а через $t_{(ijk)}$ и $t_{[ijk]}$ обозначены компоненты тензорных полей $\text{Sym}(t)$ и $\text{Alt}(t)$ соответственно.

Замечание 1.2. Операции симметризации и альтернирования можно определить не только для всего тензорного поля, но и для какой-либо группы его аргументов. Например, определим операцию альтернирования для первых трех аргументов тензорного поля t типа $(5, 0)$. Наиболее наглядно ее определение в компонентах. Пусть фиксирована локальная карта. Тогда

$$t_{[ijk]tp} = \frac{1}{3!} (t_{ijktp} + t_{jkpitp} + t_{kijtp} - t_{jiktp} - t_{kjpitp} - t_{ikjtp}). \quad (1.3)$$

Принцип обозначения компонент альтернированного тензорного поля тот же, что и при определении альтерниации для всего тензорного поля. Коэффициент $\frac{1}{3!}$ определяется количеством аргументов (индексов), по которым проводится альтернирование.

Аналогичным образом определяется операция симметризации тензорного поля по нескольким аргументам.

Определение симметричности и кососимметричности тензорного поля переносится на случай, когда рассматривается только часть его аргументов. Например, тензорное поле t типа $(5, 0)$ называется *симметричным по первым трем аргументам*, если его значение не меняется при любой перестановке этих

аргументов. Это тензорное поле называется *кососимметрическим по первым трем аргументам* если оно меняет значение на противоположное при нечетной перестановке этих аргументов и не меняет значения при их четной перестановке. Если фиксировать локальную карту на многообразии M , то аналогично (1.1) эти определения можно записать в компонентах. При этом мы будем говорить о симметричности и кососимметричности по первым трем индексам.

Замечание 1.3. Операции симметризации и альтернирования определяются аналогичным образом для тензорных полей типа $(0, r)$.

Кроме того, можно определить операции симметризации и альтернирования по нескольким одноименным аргументам (то есть либо берем векторные поля, либо 1-формы) для тензорных полей типа (r, s) . Например, симметризация по двум первым аргументам 1-формам (по двум первым верхним индексам) для тензорного поля t типа $(3, 4)$ задается формулой

$$t_{ijk}^{(pt)mq} = \frac{1}{2!}(t_{ijk}^{ptmq} + t_{ijk}^{tpmq}).$$

Обозначим через $\Lambda_*(M)$ множество всех кососимметрических тензорных полей из $\Lambda_r(M)$ для всех r от нуля до бесконечности. Под $\Lambda_0(M)$ будем понимать множество гладких функций многообразия M . В множестве $\Lambda_*(M)$ уже введены операции сложения и умножения на гладкую функцию (они превращают это множество в $C^\infty(M)$ -модуль), а оператор альтернирования поможет нам определить в этом множестве операцию умножения, которая превратит его в алгебру. Полученная алгебра называется *внешней алгеброй* многообразия M или *алгеброй Грассмана гладкого многообразия M* .

Определение 1.2. Отображение

$$\wedge : \Lambda_r(M) \times \Lambda_s(M) \rightarrow \Lambda_{r+s}(M),$$

заданное формулой

$$\omega \wedge \theta = \frac{(r+s)!}{r!s!} \text{Alt}(\omega \otimes \theta) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma) \sigma(\omega \otimes \theta), \quad (1.4)$$

называется *операцией внешнего умножения*. (Для написания последнего равенства мы воспользовались формулой (1.2).)

Очевидно, что определение корректно, то есть применяя операцию внешнего умножения к двум внешним формам, мы получим внешнюю форму.

Так как 0-формами мы называли гладкие функции, то $f \wedge \omega = f\omega$, то есть внешнее умножение функции и формы совпадает с умножением функции (как скаляра) на форму (как элемент модуля). В частности, $f \wedge \omega = \omega \wedge f$.

Задача 1.7. Докажите, что операция внешнего умножения обладает свойствами

- 1) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$; 2) $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3$;
- 3) $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$,

где в каждом из случаев омега принадлежат подходящим $\Lambda_r(M)$. В частности, из свойства 3) следует $C^\infty(M)$ -линейность операции внешнего умножения, то есть

$$(f\omega_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (f\omega_2) = f(\omega_1 \wedge \omega_2).$$

Пример 1.3. Докажем, что для 1-форм операция внешнего умножения антикоммутативна, то есть

$$\omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega, \quad (1.5)$$

где $\omega, \theta \in \Lambda_1(M) \equiv \mathfrak{X}^*(M)$. В частности, для 1-формы ω получим

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

Действительно, по определению операции внешнего умножения для любой пары векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ получим

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta(X, Y) &= \frac{2!}{1!1!} \text{Alt}(\omega \otimes \theta)(X, Y) = \frac{2!}{1!1!} \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) (\sigma(\omega \otimes \theta))(X, Y) = (\omega \otimes \theta)(X, Y) - (\omega \otimes \theta)(Y, X) = \\ &= \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что в группе S_2 содержится две подстановки: четная подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

и нечетная подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично рассуждая получим, что

$$\theta \wedge \omega(X, Y) = \theta(X)\omega(Y) - \theta(Y)\omega(X).$$

Сравнивая полученные равенства убеждаемся в истинности формулы (1.5).

Если положить в доказанной формуле $\omega = \theta$, получим

$$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega,$$

то есть $\omega \wedge \omega = 0$.

Замечание 1.4. В примере мы вывели формулу, которая неоднократно будет использоваться в дальнейшем

$$\omega \wedge \theta(X, Y) = \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X), \quad (1.6)$$

где ω и θ – 1-формы.

Модуль $\Lambda_r(M)$ в общем случае не обладает базисом (также как и модуль векторных полей, модуль дифференциальных 1-форм и модуль тензорных полей типа (r, s)). Но если взять его сужение на область локальной карты, то возникнет базис. Он строится следующим образом. Для локальной карты существует натуральный базис 1-форм (dx^1, \dots, dx^n) . Тогда система форм

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}), \quad i_1 < \dots < i_r,$$

будет базисом модуля $\Lambda_r(U)$ (доказательство полностью аналогично доказательству соответствующего утверждения из файла `tenz alg.pdf`). В таком базисе координаты r -формы ω (то есть коэффициенты ее разложения по данному базису) совпадают с ее компонентами (то есть ее значениями на векторных полях натурального базиса) (доказательство аналогично доказательству из файла `tenz alg.pdf`, но результат получается другой из-за другого определения операции внешнего умножения – коэффициента $\frac{(r+s)!}{r!s!}$), то есть

$$\omega_{i_1 \dots i_r} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right). \quad (1.7)$$

Пример 1.4. Покажем, что для 2-формы Ω ее координаты относительно базиса $\{dx^i \wedge dx^j (i < j)\}$ совпадают с ее компонентами $\Omega_{ij} = \Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$.

2-форма Ω является тензорным полем типа $(2,0)$, следовательно, может быть разложена по базису $\{dx^i \otimes dx^j\}$ модуля тензорных полей типа $(2,0)$. При этом координаты формы Ω относительно этого базиса совпадают с ее компонентами относительно натурального базиса (это доказывается аналогично доказательству в курсе тензорной алгебры), то есть

$$\Omega = \Omega_{ij} dx^i \otimes dx^j; \quad \Omega_{ij} = \Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Применим оператор альтернирования Alt к этому равенству. Так как форма является кососимметрическим тензорным полем, то есть принадлежит образу эндоморфизма альтернирования, получим $Alt(\Omega) = \Omega$. В силу линейности эндоморфизма альтернирования функции Ω_{ij} выносятся за знак альтернации и суммы разбиваются. Тогда применив определение операции внешнего умножения (1.4), получим

$$\Omega = \Omega_{ij} \frac{1!1!}{2!} dx^i \wedge dx^j.$$

Заметим, что здесь индексы i и j принимают всевозможные значения. Чтобы получить разложение 2-формы по базису $\{dx^i \wedge dx^j (i < j)\}$, то есть базисные формы упорядочены по номерам, представим имеющееся разложение в виде двух сумм

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_{ij} \frac{1!1!}{2!} dx^i \wedge dx^j &= \frac{1}{2} \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j (i < j) + \frac{1}{2} \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j (i > j) = \frac{1}{2} \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j (i < j) + \\ &+ \frac{1}{2} \Omega_{ji} dx^j \wedge dx^i (j > i) = \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j (i < j). \end{aligned}$$

Во второй группе слагаемых мы переобозначили индексы суммирования i и j , воспользовались кососимметричностью компонент Ω_{ij} и антикоммутативностью внешнего произведения 1-форм.

Итак, в разложении 2-формы Ω по базису 2-форм мы получили те же компоненты Ω_{ij} .

Задача 1.8. Докажите, что для 3-формы выполняется утверждение аналогичное утверждению предыдущего примера.

Задача 1.9. Докажите, что для $\omega \in \Lambda_r(M)$ и $\theta \in \Lambda_s(M)$ имеем

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega.$$

Указание. Фиксируйте локальную карту и рассмотрите разложение формы $\omega \wedge \theta$ по локальному базису $(r+s)$ -форм.

§1.2. Оператор внешнего дифференцирования.

Пусть дано гладкое n -мерное многообразие M . Рассмотрим его алгебру Грассмана $\Lambda_*(M)$. Напомним, что в этой алгебре определены операции сложения, умножения на гладкую функцию и операция внешнего умножения. Определим в ней еще одну операцию $d : \Lambda_*(M) \rightarrow \Lambda_*(M)$, которая каждой внешней r -форме $\omega \in \Lambda_r(M)$, $r = 1, \dots$ ставит в соответствие $(r + 1)$ -форму по формуле

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{r+1})) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1}). \quad (1.8)$$

Эта операция называется *операцией внешнего дифференцирования*, а отображение d называется *оператором внешнего дифференцирования*. Результат действия оператора d на внешнюю форму называется *внешним дифференциалом* этой формы. Напомним, что квадратными скобками обозначается коммутатор векторных полей (см. курс Анализ на многообразиях). Если $r = 0$, то определим отображение $d : \Lambda_0(M) \equiv C^\infty(M) \rightarrow \Lambda_1(M)$ по формуле

$$df(X) = X(f), \quad f \in C^\infty(M). \quad (1.9)$$

Нам нужно доказать корректность определения, то есть убедиться в том, что отображение $d\omega$ является полилинейным и кососимметрическим. Для случая $r = 0$ корректность очевидна. Мы проведем доказательство для двух частных случаев. В основном с ними приходится встречаться при написании диссертаций.

Пример 1.5. Докажем корректность определения в случае $r = 1$. В этом случае формула (1.8) примет вид

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]), \quad (1.10)$$

где ω – 1-форма, X, Y – произвольные векторные поля из $\mathfrak{X}(M)$. Обратите внимание, что здесь векторные поля выступают как дифференцирования алгебры гладких функций.

Нам нужно доказать линейность отображения $d\omega$ по двум аргументам. Мы докажем линейность по первому аргументу (линейность по второму аргументу доказывается аналогично). Разделим свойство линейности на две части: аддитивность и однородность.

Пусть X, Y, Z – произвольные векторные поля. Тогда

$$d\omega(X + Y, Z) = (X + Y)(\omega(Z)) - Z(\omega(X + Y)) - \omega([X + Y, Z]) = X(\omega(Z)) + Y(\omega(Z)) - Z(\omega(X)) - Z(\omega(Y)) - \omega([X, Z]) - \omega([Y, Z]) = d\omega(X, Z) + d\omega(Y, Z).$$

Здесь мы воспользовались определением суммы двух векторных полей, аддитивностью векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций и аддитивностью коммутатора векторных полей.

Докажем однородность относительно умножения на гладкую функцию. Пусть X, Y – произвольные векторные поля из $\mathfrak{X}(M)$, f – произвольная гладкая функция на M . Тогда

$$d\omega(fX, Y) = (fX)(\omega(Y)) - Y(\omega(fX)) - \omega([fX, Y]) = fX(\omega(Y)) - Y(f\omega(X)) - fY(\omega(X)) - \omega(f[X, Y]) - Y(f)X = f(d\omega)(X, Y).$$

Здесь мы воспользовались формулой для коммутатора векторных полей

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X,$$

которая была доказана в курсе Анализ на многообразиях. Также мы использовали $C^\infty(M)$ -линейность 1-формы и правило Лейбница.

Докажем, что $d\omega$ принадлежит модулю $\Lambda_2(M)$, то есть является внешней 2-формой. Для этого нужно доказать, что значение $d\omega$ меняет знак на противоположный при любой перестановке пары аргументов. Так как у $d\omega$ только два аргумента, нам достаточно доказать, что $d\omega(X, Y) = -d\omega(Y, X)$, где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Имеем

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) = -(Y(\omega(X)) - X(\omega(Y)) - \omega([Y, X])) = -d\omega(Y, X).$$

Здесь мы воспользовались антикоммутативностью скобки Ли.

Итак, мы показали, что для любой 1-формы ω ее внешний дифференциал является внешней 2-формой.

Задача 1.10. Покажите, что для любой 2-формы Ω ее внешний дифференциал вычисляется по формуле

$$d\Omega(X, Y, Z) = X(\Omega(Y, Z)) - Y(\Omega(X, Z)) + Z(\Omega(X, Y)) - \Omega([X, Y], Z) + \Omega([X, Z], Y) - \Omega([Y, Z], X).$$

Аналогично примеру 1.5 покажите, что отображение $d\Omega$ является $C^\infty(M)$ -линейным по каждому аргументу и, кроме того, является кососимметричным тензорным полем (согласно задаче 1.1 для этого достаточно показать, что тензорное поле $d\Omega$ меняет знак при перестановке любой пары аргументов).

Задача 1.11. Постарайтесь доказать корректность определения внешнего дифференциала в общем случае.

Мы перейдем к изучению свойств оператора внешнего дифференцирования.

Теорема 1.1. *Оператор внешнего дифференцирования обладает следующими свойствами:*

$$(d1) \quad d(\Lambda_r(M)) \subset \Lambda_{r+1}(M), \quad r = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(d2) \quad d \circ d = 0;$$

$$(d3) \quad d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta, \quad \omega \in \Lambda_r(M), \quad \theta \in \Lambda_*(M).$$

Доказательство. Свойство (d1) следует непосредственно из определения (а точнее из доказательства корректности определения).

Докажем свойство (d2) для 1-формы ω . Так как $d(d\omega)$ – 3-форма, имеем согласно формуле (1.10)

$$\begin{aligned} d(d\omega)(X, Y, Z) &= X(d\omega(Y, Z)) - Y(d\omega(X, Z)) + Z(d\omega(X, Y)) - d\omega([X, Y], Z) + d\omega([X, Z], Y) - d\omega([Y, Z], X) = \\ &= X(Y(\omega(Z)) - Z(\omega(Y)) - \omega([Y, Z])) - Y(X(\omega(Z)) - Z(\omega(X)) - \omega([X, Z])) + Z(X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])) - \\ &= -[X, Y](\omega(Z)) + Z\omega([X, Y]) + \omega([X, Y], Z) + [X, Z](\omega(Y)) - Y(\omega([X, Z]) - \omega([X, Z], Y)) - [Y, Z](\omega(X)) + X(\omega([Y, Z]) + \\ &+ \omega([Y, Z], X)) = 0 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тождеством Якоби для скобки Ли векторных полей. Общий случай доказывается аналогичным образом. Постарайтесь провести рассуждения самостоятельно.

Наконец, посмотрим на принцип доказательства свойства (d3). Мы также как и предыдущее свойство не будем доказывать его в общем виде, а посмотрим частный случай $\omega, \theta \in \Lambda_1(M)$, то есть докажем, что для 1-форм ω и θ имеем место равенство

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta.$$

Используя формулы (1.4) и (1.2), получим для левой части (d3)

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \theta)(X, Y, Z) &= X(\omega \wedge \theta(Y, Z)) - Y(\omega \wedge \theta(X, Z)) + Z(\omega \wedge \theta(X, Y)) - \omega \wedge \theta([X, Y], Z) + \omega \wedge \theta([X, Z], Y) - \\ &= -\omega \wedge \theta([Y, Z], X) = X(\omega(Y)\theta(Z) - \omega(Z)\theta(Y)) - Y(\omega(X)\theta(Z) - \omega(Z)\theta(X)) + Z(\omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X)) - \\ &= -\omega([X, Y])\theta(Z) + \omega(Z)\theta([X, Y]) + \omega([X, Z])\theta(Y) - \omega(Y)\theta([X, Z]) - \omega([Y, Z])\theta(X) + \omega(X)\theta([Y, Z]) \end{aligned}$$

Применяя правило Лейбница к первым трем слагаемым, а затем группируя слагаемые и применяя формулу (1.10), получим

$$d(\omega \wedge \theta)(X, Y, Z) = d\omega(X, Y)\theta(Z) + d\omega(Y, Z)\theta(X) + d\omega(Z, X)\theta(Y) - \omega(X)d\theta(Y, Z) - \omega(Y)d\theta(Z, X) - \omega(Z)d\theta(X, Y). \quad (1.11)$$

Рассмотрим правую часть равенства (d3). Применяя формулу (1.4), получим

$$\begin{aligned} (d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta)(X, Y, Z) &= \frac{1}{2!} (d\omega \otimes \theta(X, Y, Z) + d\omega \otimes \theta(Y, Z, X) + d\omega \otimes \theta(Z, X, Y) - d\omega \otimes \theta(Y, X, Z) - d\omega \otimes \theta(Z, Y, X) - \\ &= -d\omega \otimes \theta(X, Z, Y) - \omega \otimes d\theta(X, Y, Z) - \omega \otimes d\theta(Y, Z, X) - \omega \otimes d\theta(Z, X, Y) + \omega \otimes d\theta(Y, X, Z) + \omega \otimes d\theta(Z, Y, X) + \\ &+ \omega \otimes d\theta(X, Z, Y)) \end{aligned}$$

Используя определение тензорного умножения и кососимметричность 2-форм $d\omega$ и $d\theta$, получим в точности (1.11). \square

Замечание 1.5. Полное доказательство теоремы 1.1 можно найти в первом томе монографии Кобаяси, Номидзу Основы дифференциальной геометрии. Правда, принцип доказательства там иной нежели мы рассмотрели. Кроме того, формулы, задающие операцию внешнего умножения и оператор внешнего дифференцирования, имеют другие коэффициенты.

Задача 1.12. Докажите формулу (d3) а) для функции и 1-формы; б) для функции и 2-формы.

Пример 1.6. При построении натурального базиса в модуле $\mathfrak{X}^*(U)$ локальной карты (U, φ) мы ввели в рассмотрение 1-формы $dx^i = x^i \circ r_\varphi$, где r_φ – реперное отображение карты (U, φ) , $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – отображение, ставящее в соответствие набору из n вещественных чисел его i -й элемент. Здесь dx^i только обозначение. Выясним как оно связано с оператором внешнего дифференцирования. Рассмотрим функцию

$x^i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда из определения тензорного поля как дифференцирования алгебры гладких функций (см. Анализ на многообразиях) и формулы (1.9) получим

$$d(x^i \circ \varphi)(X) = \frac{\partial(x^i \circ \varphi)}{\partial x^j} X^j = \delta_j^i dx^j(X) = dx^i(X),$$

где (dx^1, \dots, dx^n) – натуральный базис модуля $\mathfrak{X}^*(U)$, X – произвольное векторное поле из $\mathfrak{X}(U)$. Таким образом, мы получаем, что 1-формы dx^i натурального базиса – это внешние дифференциалы функций $x^i \circ \varphi$.

Задача 1.13. Докажите, что в локальной карте (U, φ) имеет место формула

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

для любой гладкой на M функции f . В левой части этого равенства стоит сужение 1-формы df на область локальной карты.

Пример 1.7. Пусть на многообразии M фиксирована связность ∇ без кручения (см. Анализ на многообразиях). Тогда для любой 1-формы ω определен ковариантный дифференциал $\nabla\omega$. Это тензорное поле типа $(2, 0)$. Выясним как связаны между собой тензорные поля $\nabla\omega$ и $d\omega$.

Напомним, что ковариантный дифференциал 1-формы определяется по формуле

$$(\nabla\omega)(X, Y) = \nabla_Y(\omega)X,$$

где ∇_X – оператор ковариантного дифференцирования, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля. Оператор ковариантного дифференцирования удовлетворяет правилу Лейбница, а значит, применяя оператор ∇_Y к функции $\omega(X)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, получим

$$Y(\omega(X)) = \nabla_Y(\omega)X + \omega(\nabla_Y X). \quad (1.12)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\nabla_Y(f) = Y(f)$ для любой гладкой функции f на многообразии M . Меняя X и Y местами в формуле (1.12), получим

$$X(\omega(Y)) = \nabla_X(\omega)Y + \omega(\nabla_X Y). \quad (1.13)$$

Вычитая из (1.13) формулу (1.12), получим

$$X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X + \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X). \quad (1.14)$$

Здесь мы воспользовались линейностью 1-формы ω . Так как связность ∇ без кручения, то есть ее тензор кручения тождественно равен нулю, то

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в (1.14) и учитывая формулу (1.10), получим

$$d\omega(X, Y) = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X \quad (1.16)$$

или в других обозначениях

$$d\omega = -2Alt(\nabla\omega).$$

Задача 1.14. Получите формулу, связывающую внешний дифференциал $d\Omega$ 2-формы Ω и ковариантный дифференциал $\nabla\Omega$ этой формы. Здесь ∇ – произвольная связность без кручения.

Ответ: $d\Omega(X, Y, Z) = \nabla_X(\Omega)(Y, Z) + \nabla_Y(\Omega)(Z, X) + \nabla_Z(\Omega)(X, Y)$.

Пример 1.8. Найдём компоненты 2-формы $d\omega$ в натуральном базисе, если известны компоненты $\{\omega_i\}$ формы ω .

По определению компонент и формуле (1.10) получим

$$(d\omega)_{ij} = d\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) - \omega \left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \right) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что коммутатор векторных полей натурального базиса равен нулю (см. Анализ на многообразиях).

Задача 1.15. Выразите компоненты $(d\Omega)_{ijk}$ 3-формы $d\Omega$ через компоненты Ω_{ij} 2-формы Ω .

Ответ: $(d\Omega)_{ijk} = \frac{\partial \Omega_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x^k}$.

§1.3. Дифференциал и антиувлечение гладкого отображения.

3.1. Пусть даны два гладких многообразия M и N размерностей n и m соответственно. Напомним, что отображение

$$\phi : M \rightarrow N$$

называется *гладким*, если для любой пары соответствующих точек $p \in M$ и $\phi(p) \in N$ существует пара локальных карт (U, φ) и (V, ψ) , содержащих соответственно эти точки, такая что отображение

$$\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

является гладким отображением областей евклидовых пространств.

В точке $p \in M$ определено касательное пространство $T_p(M)$ к многообразию M , а в точке $\phi(p)$ определено касательное пространство $T_{\phi(p)}(N)$ к многообразию N . Оказывается, что гладкое отображение ϕ многообразий порождает отображение указанных касательных пространств, а именно, возникает отображение

$$(\phi_*)_p : T_p(M) \rightarrow T_{\phi(p)}(N),$$

которое задается формулой

$$(\phi_*)_p(\xi)(f) = \xi(f \circ \phi), \quad (1.17)$$

где $\xi \in T_p(M)$ – произвольный вектор, $f \in C^\infty(N)$ – произвольная функция. Построенное отображение называется *дифференциалом отображения ϕ в точке p* .

Замечание 1.6. Здесь касательный вектор рассматривается как инфинитазимальное дифференцирование (см. курс Анализ на многообразиях). Следовательно, чтобы доказать корректность определения дифференциала отображения в точке, нужно показать, что отображение $(\phi_*)_p(\xi) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ является инфинитазимальным дифференцированием, то есть \mathbb{R} -линейно и удовлетворяет правилу Лейбница. Проведите рассуждения самостоятельно.

Предложение 1.1. *Отображение $(\phi_*)_p$ является \mathbb{R} -линейным отображением.*

Доказательство. Докажем однородность. Аддитивность доказывается аналогично (докажите самостоятельно).

Пусть $\xi \in T_p(M)$ – произвольный вектор, $\lambda \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Имеем

$$(\phi_*)_p(\lambda\xi)(f) = (\lambda\xi)(f \circ \phi) = \lambda(\xi(f \circ \phi)) = (\lambda(\phi_*)_p(\xi))(f).$$

Откуда получаем

$$(\phi_*)_p(\lambda\xi) = \lambda(\phi_*)_p(\xi).$$

□

Предложение 1.2. *Пусть даны гладкие многообразия M, N, L и дана пара гладких отображений*

$$\phi : M \rightarrow N; \quad \psi : N \rightarrow L.$$

Тогда для любой точки $p \in M$, для которой определена композиция $\psi \circ \phi$ имеем

$$(\psi_*)_{\phi(p)} \circ (\phi_*)_p = ((\psi \circ \phi)_*)_p.$$

Доказательство. По определению дифференциала отображения для любого вектора $\xi \in T_p(M)$ и любой функции $f \in C^\infty(L)$ имеем

$$((\psi_*)_{\phi(p)} \circ (\phi_*)_p \xi)(f) = ((\phi_*)_p \xi)(f \circ \psi) = \xi(f \circ (\psi \circ \phi)) = (((\psi \circ \phi)_*)_p \xi)(f).$$

□

Пример 1.9. Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M \rightarrow N$ гладких многообразий. Покажем, что для любой точки $p \in M$

$$((\phi_*)_p)^{-1} = ((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)}. \quad (1.18)$$

Чтобы доказать соотношение (1.18), нам нужно показать, что

$$((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)} \circ (\phi_*)_p = (\phi_*)_p \circ ((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)} = id.$$

Докажем первое равенство. Второе докажите самостоятельно. Пусть $\xi \in T_p(M)$ – произвольный касательный вектор, f – произвольная гладкая функция на M . С учетом предложения 1.2 имеем

$$(((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)} \circ (\phi_*)_p \xi)(f) = \xi(f \circ \phi^{-1} \circ \phi) = \xi(f).$$

Так как равенство верно для любой функции и любого вектора, мы получаем требуемый результат.

Замечание 1.7. Пример 1.9 показывает, что в случае, когда отображение $\phi : M \rightarrow N$ является диффеоморфизмом, дифференциал $(\phi_*)_p$ отображения ϕ имеет обратное отображение. Будем обозначать его $((\phi_*)_p)^{-1} = (\phi^*)_{\phi(p)} : T_{\phi(p)}(N) \rightarrow T_p(M)$ и называть *антиувлечением касательных векторов*.

Найдем формулу для вычисления дифференциала отображения в паре соответствующих локальных карт. Пусть дано отображение $\phi : M \rightarrow N$, фиксируем точку $p \in M$. Пусть (U, φ) – локальная карта с координатами (x^1, \dots, x^n) в окрестности точки p , а (V, ψ) – локальная карта с координатами (y^1, \dots, y^m) в окрестности точки $\phi(p)$. Найдем значения отображения $(\phi_*)_p$ на векторах натурального базиса касательного пространства $T_p(M)$ карты (U, φ) . Имеем для любой $f \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned} (\phi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (f) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f \circ \phi) \equiv \frac{\partial (f \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} = \frac{\partial ((f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}))}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} = \\ &= \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial y^j} \Big|_{\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(p)} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\phi(p)} (f). \end{aligned}$$

Здесь мы применили правило дифференцирования сложной функции и учли, что отображение $\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}$ областей евклидовых пространств задается функциями $y^j = y^j(x^1, \dots, x^n)$, $j = 1, \dots, m$. Итак, для векторов натуральных базисов касательных пространств $T_p(M)$ и $T_{\phi(p)}(N)$ мы получили соотношение

$$(\phi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\phi(p)}. \quad (1.19)$$

Здесь $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right)$ – матрица Якоби отображения ϕ в точке p .

Пусть теперь $\xi \in T_p(M)$ – произвольный касательный вектор. Тогда раскладывая его по векторам натурального базиса $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ и используя формулу (1.19), получим

$$(\phi_*)_p \xi = (\phi_*)_p \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \xi^i (\phi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\phi(p)}.$$

Здесь мы также воспользовались \mathbb{R} -линейностью дифференциала отображения ϕ . Итак, мы получаем, что в соответствующих локальных картах отображение $(\phi_*)_p$ задается формулой

$$(\phi_*)_p \xi = \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\phi(p)}. \quad (1.20)$$

Как мы знаем, на касательные векторы мы можем смотреть не только как на инфинитезимальные дифференцирования, но и как на классы гладких соприкасающихся путей. Запишем дифференциал гладкого отображения, используя описание касательных векторов как классов эквивалентности гладких путей.

Пусть $\xi = [\gamma] \in T_p(M)$ – произвольный касательный вектор. Рассмотрим все отображения вида $\phi \circ \gamma : I \rightarrow N$. Очевидно, что все такие гладкие пути имеют одинаковые значения в точке 0 и одинаковые первые производные в нуле. Следовательно, все они принадлежат одному классу эквивалентности гладких соприкасающихся в точке $\phi(p)$ путей, то есть образуют касательный вектор из касательного пространства $T_{\phi(p)}(N)$. Обозначим этот вектор через η , то есть $\eta = [\phi \circ \gamma]$. В результате мы получим соответствие $\xi \rightarrow \eta$, которое обозначим через τ . Наша ближайшая задача – доказать, что отображение τ совпадает с отображением $(\phi_*)_p$. Для этого нам нужно показать, что $\eta = (\phi_*)_p \xi$.

Пусть касательный вектор ξ в локальной карте (U, φ) имеет координаты ξ^i , а вектор η в локальной карте (V, ψ) имеет координаты η^i . Напомним, что координаты касательных векторов определяются по формуле

$$\begin{aligned} \xi^i &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x^i(t) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x^i \circ \varphi \circ \gamma(t); \\ \eta^i &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} y^i(t) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} y^i \circ \psi \circ \phi \circ \gamma(t). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \eta &= \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\phi(p)} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} y^i \circ \psi \circ \phi \circ \gamma(t) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\phi(p)} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (y^i \circ \psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma(t)) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\phi(p)} = \\ &= \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(p)} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x^j \circ \varphi \circ \gamma(t) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\phi(p)} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(p)} \xi^j \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\phi(p)} \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с формулой (1.20), убеждаемся, что $\eta = (\phi_*)_p \xi$. Обратите внимание, что в полученном равенстве и формуле (1.20) индексы суммирования обозначены по-разному, но переобозначив $i \rightarrow j$ и $j \rightarrow i$ в одной из формул (индексы суммирования могут обозначаться любой буквой), мы получим полное совпадение формул.

Договоримся обозначать касательный вектор

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x^i \circ \varphi \circ \gamma(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

через

$$\xi = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t). \quad (1.21)$$

В этих обозначениях дифференциал $(\phi_*)_p$ запишется в следующем виде

$$(\phi_*)_p \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t) \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi \circ \gamma(t). \quad (1.22)$$

Здесь мы использовали то, что $(\phi_*)_p \xi = \eta$.

Пример 1.10. Пусть на n -мерном гладком многообразии фиксирована локальная карта (U, φ) . Найдем образы векторных полей натурального базиса этой карты при отображении $(\varphi_*)_p$.

Рассмотрим вектор $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ как класс эквивалентности соприкасающихся путей $[\gamma]$. Как мы видели в курсе Анализ на многообразиях этому классу принадлежит путь γ , который в локальной карте задается уравнениями $x^i = x_0^i + \delta_j^i t$, где $i, j = 1, \dots, n$. Чтобы найти образ вектора $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, нам нужно найти вектор $\eta_j = [\varphi \circ \gamma]$, то есть записать его уравнения в карте многообразия \mathbb{R}^n . Так как на \mathbb{R}^n локальная карта (\mathbb{R}^n, id) , то в ней отображение $id \circ \varphi \circ \gamma$ имеет вид $x^i = x_0^i + \delta_j^i t$. Дифференцируя эти уравнения по t и находя значения полученных производных в нуле, мы убеждаемся, что у вектора η координаты в натуральном базисе карты (\mathbb{R}^n, id) имеют вид (δ_j^i) . Это вектор ε_j стандартного базиса \mathbb{R}^n . Итак, мы получаем, что

$$(\varphi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \varepsilon_i.$$

Пример 1.11. Пусть на n -мерном гладком многообразии M фиксирована локальная карта (U, φ) . Рассмотрим реперное отображение $r_\varphi : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Напомним, что оно каждому касательному вектору ставит в соответствие набор его координат в натуральном базисе. Докажем, что реперное отображение в точке p совпадает с дифференциалом картирующего отображения φ в этой же точке, то есть

$$r_\varphi = (\varphi_*)_p. \quad (1.23)$$

Имеем с учетом примера 1.10

$$(\varphi_*)_p(\xi) = (\varphi_*)_p \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \xi^i \varepsilon_i = (\xi^1, \dots, \xi^n) = r_\varphi(\xi).$$

где $\xi \in T_p(M)$. Здесь мы воспользовались линейностью дифференциала отображения ϕ .

3.2. Пусть даны два гладких многообразия M и N размерностей n и m соответственно и дано гладкое отображение $\phi : M \rightarrow N$. Фиксируем точку $p \in M$ и рассмотрим r -ковектор α , принадлежащий векторному пространству $\Lambda_r(T_p(M))$. Определим отображение

$$\phi_{\phi(p)}^* : \Lambda_r(T_{\phi(p)}(N)) \rightarrow \Lambda_r(T_p(M))$$

по формуле

$$\phi_{\phi(p)}^*(\alpha)(\xi_1, \dots, \xi_r) = \alpha((\phi_*)_p \xi_1, \dots, (\phi_*)_p \xi_r), \quad (1.24)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_r \in T_{\phi(p)}(N)$. Отображение $\phi_{\phi(p)}^*$ называется *антиувлечением* r -ковекторов в точке $\phi(p)$.

Из \mathbb{R} -линейности дифференциала отображения следует, что отображение $\phi_{\phi(p)}^*(\alpha)$ является \mathbb{R} -линейным по каждому аргументу, то есть представляет из себя r -ковектор, следовательно, введенное определение антиувлечения отображения корректно.

Задача 1.16. Пусть $\phi : M \rightarrow N$ – диффеоморфизм. Докажите, что

$$(\phi_{\phi(p)}^*)^{-1} = (\phi^{-1})_p^*.$$

Указание. Воспользуйтесь идеей доказательства и результатом примера 1.9.

Замечание 1.8. Из задачи 1.16 следует, что отображение антиувлечения r -ковекторов в случае, когда ϕ – диффеоморфизм, имеет обратное отображение. Будем обозначать его $(\phi_{\phi(p)}^*)^{-1} = (\phi_*)_p : \Lambda_r(T_p(M)) \rightarrow \Lambda_r(T_{\phi(p)}(N))$ и называть *отображением увлечения r -ковекторов*.

3.3. Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M \rightarrow N$ гладких многообразий. Тогда для любой точки $p \in M$ мы можем определить отображение

$$(\phi_*)_p : \mathfrak{T}_r^s(T_p(M)) \rightarrow \mathfrak{T}_r^s(T_{\phi(p)}(N))$$

по формуле

$$(\phi_*)_p(t)(\xi_1, \dots, \xi_r, u^1, \dots, u^s) = t(\phi_{\phi(p)}^* \xi_1, \dots, \phi_{\phi(p)}^* \xi_r, \phi_{\phi(p)}^* u^1, \dots, \phi_{\phi(p)}^* u^s),$$

где t – произвольный тензор в точке p многообразия M , $\xi_1, \dots, \xi_r \in T_{\phi(p)}(N)$ – произвольные касательные векторы, $u^1, \dots, u^s \in T_{\phi(p)}^*(N)$. Будем называть построенное отображение *увлечением тензоров типа* (r, s) .

Аналогичным образом построим отображение *антиувлечения тензоров типа* (r, s) , а именно, отображение

$$\phi_{\phi(p)}^* : \mathfrak{T}_r^s(T_{\phi(p)}(N)) \rightarrow \mathfrak{T}_r^s(T_p(M))$$

по формуле

$$\phi_{\phi(p)}^*(t)(\xi_1, \dots, \xi_r, u^1, \dots, u^n) = t((\phi_*)_p \xi_1, \dots, (\phi_*)_p \xi_r, (\phi_*)_p u^1, \dots, (\phi_*)_p u^s),$$

где t – произвольный тензор в точке $\phi(p)$ многообразия N , $\xi_1, \dots, \xi_r \in T_{\phi(p)}(N)$ – произвольные касательные векторы, $u^1, \dots, u^s \in T_{\phi(p)}^*(N)$ – произвольные ковекторы.

§1.4. ϕ -связанные векторные поля. Антиувлечение r -форм.

4.1. Пусть даны два гладких многообразия M и N размерностей n и m соответственно и дано гладкое отображение $\phi : M \rightarrow N$.

Определение 1.3. Векторные поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y \in \mathfrak{X}(N)$ называются ϕ -связанными, если для любой гладкой функции $f \in C^\infty(N)$ имеем

$$X(f \circ \phi) = Y(f) \circ \phi. \quad (1.25)$$

Теорема 1.2. Векторные поля X и Y ϕ -связаны тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in M$ имеем

$$(\phi_*)_p X_p = Y_{\phi(p)}.$$

Доказательство. Пусть f – произвольная гладкая функция на многообразии N . Тогда для любой точки $p \in M$ имеем

$$X(f \circ \phi)(p) = Y(f) \circ \phi(p) \Leftrightarrow X_p(f \circ \phi) = Y_{\phi(p)}(f) \Leftrightarrow (\phi_*)_p X_p(f) = Y_{\phi(p)}(f).$$

Здесь мы воспользовались определением векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций (см. курс Анализ на многообразия) и формулой (1.17) из определения дифференциала отображения. \square

В силу теоремы 1.2 ϕ -связанные векторные поля X и Y принято обозначать $Y = \phi_* X$. При этом векторное поле Y называется *увлечением* векторного поля X при отображении ϕ .

Предложение 1.3. Пусть даны векторные поля $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Обозначим через Y_1, Y_2 векторные поля на N , ϕ -связанные с векторными полями X_1, X_2 соответственно, то есть $Y_1 = \phi_* X_1$ и $Y_2 = \phi_* X_2$. Тогда

$$[Y_1, Y_2] = \phi_* [X_1, X_2],$$

где квадратные скобки, как всегда, обозначают коммутатор векторных полей (скобка Ли).

Доказательство. По определению 1.3 имеем

$$X_1(f \circ \phi) = Y_1(f) \circ \phi; \quad X_2(f \circ \phi) = Y_2(f) \circ \phi.$$

Тогда по определению скобки Ли получим

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ \phi) &= X_1(X_2(f \circ \phi)) - X_2(X_1(f \circ \phi)) = X_1(Y_2(f) \circ \phi) - X_2(Y_1(f) \circ \phi) = Y_1(Y_2(f)) \circ \phi - Y_2(Y_1(f)) \circ \phi = \\ &= [Y_1, Y_2](f) \circ \phi. \end{aligned}$$

Откуда по определению 1.3 получим требуемую формулу. \square

Замечание 1.9. Предложение 1.3 можно сформулировать и другим образом. Пусть $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля, причем существуют ϕ -связанные с ними векторные поля ϕ_*X_1 и ϕ_*X_2 . Тогда существует векторное поле $\phi_*[X_1, X_2]$, которое ϕ -связано с векторным полем $[\phi_*X_1, \phi_*X_2]$, причем

$$\phi_*[X_1, X_2] = [\phi_*X_1, \phi_*X_2]. \quad (1.26)$$

Условие существования векторных полей ϕ_*X_1 и ϕ_*X_2 здесь существенно. Действительно, так как отображение ϕ не обязано быть инъективным, оно может две разные точки p_1 и p_2 из многообразия M перевести в одну точку q многообразия N . Тогда в точке q будут определены два вектора с помощью отображения $(\phi_*)_{p_1}$ и $(\phi_*)_{p_2}$. Эти векторы в общем случае различны и какой брать в ϕ -связанное векторное поле не понятно.

Задача 1.17. Пусть даны гладкие отображения $\phi : M \rightarrow N$ и $\psi : N \rightarrow L$. Докажите, что для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$, для которого определены векторные поля $(\psi \circ \phi)_*X$ и $\psi_* \circ \phi_*X$, имеет место соотношение

$$(\psi \circ \phi)_*(X) = \psi_* \circ \phi_*(X).$$

Решение. Воспользуемся определением ϕ -связанных векторных полей:

$$((\psi \circ \phi)_*X)(f) \circ (\psi \circ \phi) = X((f \circ \psi) \circ \phi) = (\phi_*X)(f \circ \psi) \circ \phi = (\psi_*(\psi_*X))(f) \circ \psi \circ \phi.$$

Откуда получаем требуемое равенство. □

4.2. Пусть $\phi : M \rightarrow N$ – гладкое отображение.

Определение 1.4. Пусть $\omega \in \Lambda_r(N)$, $r = 1, \dots$ – произвольная r -форма. Тогда на многообразии M определена r -форма $\phi^*(\omega)$ следующей формулой

$$\phi^*(\omega)(X_1, \dots, X_r) = \omega(\phi_*X_1, \dots, \phi_*X_r) \circ \phi,$$

где $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля. Форма $\phi^*\omega$ называется *антиувлечением* формы ω .

Для функции $f \in C^\infty(N)$ как гладкой 0-формы положим по определению

$$\phi^*f = f \circ \phi.$$

Задача 1.18. Пусть даны гладкие отображения $\phi : M \rightarrow N$ и $\psi : N \rightarrow L$. Докажите, что

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*.$$

Замечание 1.10. Определение 1.4 сформулировано для r -формы, рассматриваемой как полилинейное отображение. Если мы будем рассматривать форму как сечение векторного расслоения тензоров типа $(r, 0)$, то определение антиувлечения запишется в виде

$$(\phi^*\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_r) = \omega_{\phi(p)}((\phi_*)_p\xi_1, \dots, (\phi_*)_p\xi_r),$$

где $p \in M$ – произвольная точка, $\xi_1, \dots, \xi_r \in T_p(M)$ – произвольные касательные векторы. Для получения этой формулы мы воспользовались заданием тензорного поля типа (r, s) как полилинейного отображения (см. Анализ на многообразиях) и теоремой 1.2. Из полученной формулы легко видеть, что антиувлечение r -формы ω и антиувлечение r -ковектора (см. § 1.3.) связаны следующим соотношением

$$(\phi^*\omega)_p = \phi_{\phi(p)}^*(\omega_{\phi(p)}). \quad (1.27)$$

Теорема 1.3. *Отображение антиувлечения обладает следующими свойствами*

$$\begin{aligned} 1) \phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \phi^*(\omega_1) \wedge \phi^*(\omega_2); \\ 2) \phi^*(d\omega) &= d(\phi^*\omega), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где ω, ω_1 – произвольные r -формы, ω_2 – произвольная s -форма.

Доказательство. Проверим первую формулу. Воспользуемся определениями внешнего умножения, альтернации (см. Анализ на многообразиях) и антиувлечения.

$$\begin{aligned} \phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, \dots, X_{r+s}) &= (\omega_1 \wedge \omega_2)(\phi_*X_1, \dots, \phi_*X_{r+s}) \circ \phi = \left(\frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)(\omega_1 \otimes \omega_2)(\phi_*X_{\sigma(1)}, \dots, \phi_*X_{\sigma(r+s)}) \right) \circ \phi = \\ &= \left(\frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma) \omega_1(\phi_*X_{\sigma(1)}, \dots, \phi_*X_{\sigma(r)}) \omega_2(\phi_*X_{\sigma(r+1)}, \dots, \phi_*X_{\sigma(r+s)}) \right) \circ \phi. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
(\phi^*\omega_1) \wedge (\phi^*\omega_2)(X_1, \dots, X_{r+s}) &= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)(\phi^*\omega_1) \otimes (\phi^*\omega_2)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}) = \\
&= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)(\phi^*\omega_1)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)})(\phi^*\omega_2)(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}) = \\
&= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)(\omega_1(\phi_*X_{\sigma(1)}, \dots, \phi_*X_{\sigma(r)}) \circ \phi)(\omega_2(\phi_*X_{\sigma(r+1)}, \dots, \phi_*X_{\sigma(r+s)}) \circ \phi) = \\
&= \left(\frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\omega_1(\phi_*X_{\sigma(1)}, \dots, \phi_*X_{\sigma(r)})\omega_2(\phi_*X_{\sigma(r+1)}, \dots, \phi_*X_{\sigma(r+s)}) \right) \circ \phi
\end{aligned}$$

Чтобы доказать второе равенство, докажем сначала вспомогательную формулу.

$$X((\phi^*\omega)(Y_1, \dots, Y_r)) = (\phi_*X)(\omega(\phi_*Y_1, \dots, \phi_*Y_r)) \circ \phi, \quad (1.29)$$

где $\omega \in \Lambda_r(N)$, $X, Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля.

По определению отображения антиувлечения и ϕ -связанных векторных полей получим

$$X((\phi^*\omega)(Y_1, \dots, Y_r)) = X(\omega(\phi_*Y_1, \dots, \phi_*Y_r) \circ \phi) = (\phi_*X)(\omega(\phi_*Y_1, \dots, \phi_*Y_r)) \circ \phi.$$

Наконец, докажем второе равенство из утверждения теоремы. По определению внешнего дифференциала формы (1.8), формуле (1.29) и определению отображения антиувлечения получим

$$\begin{aligned}
d(\phi^*\omega)(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i((\phi^*\omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) + \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\phi^*\omega)([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (\phi_*X_i)(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) \circ \phi + \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(\phi_*[X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, \phi_*X_{r+1}) \circ \phi.
\end{aligned}$$

Здесь символом \hat{X}_i обозначены отсутствующие аргументы. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\phi^*(d\omega)(X_1, \dots, X_{r+1}) &= (d\omega)(\phi_*X_1, \dots, \phi_*X_{r+1}) \circ \phi = \left(\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (\phi_*X_i)(\omega(\phi_*X_1, \dots, \phi_*\hat{X}_i, \dots, \phi_*X_{r+1})) \circ \phi + \right. \\
&\left. + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\phi_*X_i, \phi_*X_j], \dots, \phi_*\hat{X}_i, \dots, \phi_*\hat{X}_j, \dots, \phi_*X_{r+1}) \right) \circ \phi.
\end{aligned}$$

Наконец, чтобы убедиться, что мы получили одно и то же, воспользуемся предложением 1.3. Теорема полностью доказана. \square

Задача 1.19. Проведите доказательство теоремы 1.3 в случаях 1-формы и 2-формы.

Замечание 1.11. Аналогичным образом можно ввести понятие отображения антиувлечения для всех тензорных полей типа $(r, 0)$. При этом будет выполняться равенство

$$\phi^*(t_1 \otimes t_2) = \phi^*t_1 \otimes \phi^*t_2,$$

где $t_1 \in \mathfrak{T}_r^0(N)$, $t_2 \in \mathfrak{T}_s^0(N)$ – произвольные тензорные поля.

4.3. Пусть гладкое отображение $\phi : M \rightarrow N$, в частности, является диффеоморфизмом. Так как диффеоморфизм, в частности, является биекцией, для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ существует ϕ -связанное с ним векторное поле ϕ_*X (см. замечание 1.9). При этом отображение $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ является биекцией (и даже изоморфизмом вещественных векторных пространств). Следовательно, для него существует обратное отображение

$$\phi_*^{-1} : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

которое мы будем обозначать ϕ^* и называть *отображением антиувлечения векторных полей*.

Аналогичным образом определяется отображение

$$\phi_* = (\phi^*)^{-1} : \Lambda_r(M) \rightarrow \Lambda_r(N).$$

Оно называется *отображением увлечения r -форм*. Наконец, определяется отображение

$$\phi_* : \mathfrak{T}_r^s(M) \rightarrow \mathfrak{T}_r^s(N)$$

по формуле

$$\phi_*(t)(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) = t(\phi^* X_1, \dots, \phi^* X_r, \phi^* \omega^1, \dots, \phi^* \omega^s) \circ \phi^{-1}.$$

Это отображение называется *отображением увлечения тензорных полей*. Отображение

$$\phi^* : \mathfrak{T}_r^s(N) \rightarrow \mathfrak{T}_r^s(M),$$

определенно формулой

$$\phi^*(t)(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) = t(\phi_* X_1, \dots, \phi_* X_r, \phi_* \omega^1, \dots, \phi_* \omega^s) \circ \phi$$

называется *отображением антиувлечения тензорных полей* при диффеоморфизме ϕ .

Нетрудно показать, что отображения увлечения и антиувлечения тензорных полей являются изоморфизмами тензорных алгебр многообразий M и N .

§1.5. Подмногообразия гладкого многообразия.

Возьмем следующую теорему без доказательства из курса математического анализа.

Теорема 1.4. Пусть $\phi : N \rightarrow M$ – гладкое отображение, $p \in N$ – произвольная точка. Отображение

$$(\phi_*)_p : T_p(N) \rightarrow T_{\phi(p)}(M)$$

является изоморфизмом линейных пространств тогда и только тогда, когда существует открытая окрестность U_p точки p в многообразии N и открытая окрестность $V_{\phi(p)}$ точки $\phi(p)$ в многообразии M , такие что сужение отображения ϕ на U_p

$$\phi|_{U_p} : U_p \rightarrow V_{\phi(p)}$$

является диффеоморфизмом открытых подмногообразий.

Определение 1.5. Гладкое отображение $\phi : N \rightarrow M$ называется *регулярным в точке $p \in N$* , если его дифференциал $(\phi_*)_p$ невырожден в этой точке, то есть ядро отображения $(\phi_*)_p$ нулевое. Отображение ϕ называется *регулярным*, если оно регулярно в каждой точке из N .

Если записать отображение $(\phi_*)_p$ в паре соответствующих карт, то мы увидим, что отображение $(\phi_*)_p$ регулярно тогда и только тогда, когда якобиан этого отображения невырожден.

Пара (N, ϕ) называется *погруженным в M подмногообразием*, если отображение ϕ регулярно. При этом отображение ϕ называется *погружением* или *иммерсией*.

Пара (N, ϕ) называется *подмногообразием в M* , если отображение ϕ регулярно и инъективно.

Пара (N, ϕ) называется *вложенным в M подмногообразием*, если отображение ϕ регулярно, инъективно и открыто. При этом отображение ϕ называется *вложением*.

§1.6. Распределения и интегрируемость.

Пусть M – n -мерное гладкое многообразие.

Распределением на M называется подмодуль D модуля гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$. Распределение D называется *r -мерным*, если на многообразии M существует атлас, в каждой карте (U, φ) которого сужение $D|_U = \{X|_U, X \in D\}$ имеет базис из r векторных полей, причем в каждой точке из U вектора этих векторных полей линейно независимы. Если таким базисом обладает все распределение D , то оно называется *параллелизуемым*. Многообразие M называется *параллелизуемым*, если параллелизуем модуль $\mathfrak{X}(M)$.

Задание r -мерного распределения на многообразии M равносильно заданию семейства r -мерных векторных подпространств

$$\{D_p \subset T_p(M) \mid \dim D_p = r\},$$

такого, что в каждой карте (U, φ) некоторого атласа существует система (X_1, \dots, X_r) гладких векторных полей на многообразии U , причем векторные подпространства D_p являются линейными оболочками значений этих векторных полей в точке $p \in U$, то есть

$$D_p = \mathcal{L}((X_1)_p, \dots, (X_r)_p).$$

Эти подпространства называются *интегральными элементами распределения*, карты указанного атласа называются *допустимыми картами* распределения D , а система (X_1, \dots, X_r) – *локальным базисом* распределения D .

Кораспределением на M называется подмодуль \mathbf{C} модуля $\mathfrak{X}^*(M)$. Кораспределение называется r -*мерным*, если на многообразии M существует атлас, в каждой карте (U, φ) которого сужение $\mathbf{C}|_U = \{\omega|_U, U \in \mathbf{C}\}$ имеет базис из r 1-форм $(\omega^1, \dots, \omega^r)$, причем в каждой точке $p \in U$ система ковекторов $((\omega^1)_p, \dots, (\omega^r)_p)$ является линейно независимой.

Пример 1.12. Пусть D – распределение на M . Рассмотрим множество \mathbf{C}_D 1-форм ω , таких что $\omega(X) = 0$ для любого $X \in D$. Легко видеть, что это множество замкнуто относительно операций сложения и умножения на гладкую функцию, а значит, является подмодулем модуля $\mathfrak{X}^*(M)$, то есть является кораспределением на M . Это кораспределение называется *кораспределением, ассоциированным распределению D* .

Теорема 1.5. Пусть дано r -мерное распределение D . Тогда, ассоциированное ему кораспределение \mathbf{C}_D имеет размерность $n - r$, где n – размерность многообразия M .

Доказательство. Так как распределение D имеет размерность r , то существует локальный базис (E_1, \dots, E_r) этого распределения для каждой карты (U, φ) некоторого атласа многообразия M . Дополним этот базис до базиса $(E_1, \dots, E_r, E_{r+1}, \dots, E_n)$ модуля $\mathfrak{X}(U)$. Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ – дуальный базис модуля $\mathfrak{X}^*(U)$. Рассмотрим произвольную 1-форму $\omega \in \mathfrak{X}^*(U)$. Тогда ее можно разложить по базису 1-форм

$$\omega = a_i \omega^i, \quad a_i = \omega(E_i) \in C^\infty(U), \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда $\omega \in \mathbf{C}_D$ тогда и только тогда, когда $\omega(X) = 0$ для любого векторного поля $X \in D$, в частности, для векторных полей базиса D получим

$$a_\alpha = \omega(E_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, r.$$

Итак, каждая форма $\omega \in \mathbf{C}_D$ имеет вид

$$\omega = a_{r+1} \omega^{r+1} + \dots + a_n \omega^n. \quad (1.30)$$

По определению кораспределения (замкнутость относительно операций сложения и умножения на функцию) любая 1-форма вида (1.30) принадлежит кораспределению \mathbf{C}_D . Итак, мы показали, что кораспределение \mathbf{C}_D состоит из форм вида (1.30). Так как формы $(\omega^{r+1}, \dots, \omega^n)$ линейно независимы, они образуют локальный базис модуля \mathbf{C}_D , а значит, его размерность равна $n - r$. \square

Локальный базис ассоциированного кораспределения называется *системой Пфаффа* r -мерного распределения.

Каждое кораспределение \mathbf{C} на многообразии M порождает идеал $\mathfrak{I}(\mathbf{C})$ алгебры Грассмана $\Lambda(M)$, а именно

$$\mathfrak{I}(\mathbf{C}) = \left\{ \sum_{i=1}^N \omega_i \wedge \Omega_i, \quad \omega_i \in \mathbf{C}, \Omega_i \in \Lambda(M) \right\}.$$

Аннулятором распределения D называется множество

$$\text{Ann } D = \{ \Omega \in \Lambda(M) \mid \Omega(X_1, \dots, X_N) = 0; X_1, \dots, X_N \in D \}.$$

Теорема 1.6. Пусть D – r -мерное распределение на многообразии M , \mathbf{C}_D – ассоциированное кораспределение. Тогда аннулятор распределения D совпадает с идеалом, порожденным ассоциированным распределением \mathbf{C}_D , то есть

$$\text{Ann } D = \mathfrak{I}(\mathbf{C}_D).$$

Доказательство. Пусть $\Omega \in \mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)$ – произвольная форма. Пусть для определенности это s -форма. Тогда по определению идеала, порожденного кораспределением, Ω является конечной суммой слагаемых вида $\omega \wedge \Theta$, где $\omega \in \mathbf{C}_D$. Вычислим значение форм $\omega \wedge \Theta$ на произвольном наборе аргументов $X_1, \dots, X_s \in D$.

$$\begin{aligned} \omega \wedge \Theta(X_1, \dots, X_s) &= \frac{1}{1!(s-1)!} \sum_{\sigma \in S_s} \varepsilon(\sigma) (\omega \otimes \Theta)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)}) = \\ &= \frac{1}{1!(s-1)!} \sum_{\sigma \in S_s} \varepsilon(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}) \Theta(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(s)}) = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением ассоциированного кораспределения, а именно, тем, что $\omega(X) = 0$ для любого $X \in D$. Тогда и сумма форм вида $\omega \wedge \Theta$ обращается в нуль на любом наборе аргументов из

D , следовательно, $\Omega(X_1, \dots, X_s) = 0$ для любых $X_1, \dots, X_s \in D$. Итак, мы получили, что $\Omega \in \text{Ann } D$ по определению.

Обратно, пусть $\Omega \in \text{Ann } D$ – произвольная s -форма. Выберем локальный базис (E_1, \dots, E_n) модуля $\mathfrak{X}(M)$ так, чтобы первые r векторных полей были локальным базисом распределения D . Рассмотрим дуальный базис $(\omega^1, \dots, \omega^n)$. Тогда формы $\omega^{r+1}, \dots, \omega^n$ будут являться формами Пфаффа распределения D , то есть будут являться базисом кораспределения \mathbf{C}_D .

Разложим s -форму Ω по каноническому базису $(\omega^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\alpha_s})$, $\alpha_1 < \dots < \alpha_s$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_s = 1, \dots, n$. Среди слагаемых полученной суммы будут слагаемые, которые содержат хотя бы одну форму из системы Пфаффа $\omega^{r+1}, \dots, \omega^n$ и будут слагаемые, которые не содержат ни одной такой формы. Мы сгруппируем слагаемые названных видов в две скобки

$$\Omega|_U = \Omega_{i_1 \dots i_r} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_s} + \Theta_{a\alpha_1 \dots \alpha_{s-1}} \omega^a \wedge \omega^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\alpha_{s-1}},$$

где $i_1, \dots, i_s = 1, \dots, r$, $a = r+1, \dots, n$. Тогда форма Ω представима в виде

$$\Omega|_U = \Omega_{i_1 \dots i_r} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_s} + \Theta|_U,$$

где Θ – s -форма, принадлежащая идеалу $\mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)$ (см. определение идеала, порожденного кораспределением).

Так как по доказанному $\mathfrak{I}(\mathbf{C}_D) \subset \text{Ann } D$, получим, что форма $\Omega_{i_1 \dots i_r} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_s}$ также принадлежит аннулятору распределения $D|_U$, следовательно, $\Omega_{i_1 \dots i_s} = \Omega(E_{i_1}, \dots, E_{i_s}) = 0$ для любого набора индексов, пробегающих значения от 1 до r , а значит, $\Omega = \Theta$, следовательно, принадлежит идеалу $\mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)$. \square

Идеал \mathfrak{I} из алгебры Грассмана $\Lambda(M)$ называется *дифференциальным идеалом*, если $d(\mathfrak{I}) \subset \mathfrak{I}$, то есть для любой формы $\omega \in \Lambda(M)$ ее внешний дифференциал $d\omega$ принадлежит идеалу \mathfrak{I} .

Замечание 1.12. Как мы знаем, множество всех гладких векторных полей образует (бесконечномерное) векторное пространство. В нем определена операция коммутирования (скобка Ли). При этом говорят, что векторное пространство векторных полей многообразия является *алгеброй Ли*. Подалгеброй Ли алгебры Ли векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ называется любое векторное подпространство D из $\mathfrak{X}(M)$, которое замкнуто относительно скобки Ли, то есть для любых $X, Y \in D$ их коммутатор также принадлежит D .

Распределение D называется *инволютивным*, если D – подалгебра Ли алгебры Ли векторных полей $\mathfrak{X}(M)$, то есть для любых векторных полей $X, Y \in D$ их коммутатор $[X, Y]$ также принадлежит D .

Теорема 1.7. *Распределение D инволютивно тогда и только тогда, когда идеал, порожденный ассоциированным распределением \mathbf{C}_D , является дифференциальным идеалом, то есть*

$$d(\mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)) \subset \mathfrak{I}(\mathbf{C}_D).$$

Доказательство. Пусть D – инволютивное распределение на M . Нам нужно доказать, что идеал $\mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)$ является дифференциальным. В силу теоремы 1.6 нам достаточно доказать, что

$$d(\mathbf{C}_D) \subset \text{Ann } D.$$

(Действительно, если $\Omega \in \mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)$, то ее можно представить в виде суммы слагаемых вида $\omega \wedge \Theta$, где $\omega \in \mathbf{C}_D$, $\Theta \in \Lambda(M)$. Когда мы будем дифференцировать, получим $d(\omega \wedge \Theta) = d\omega \wedge \Theta - \omega \wedge d\Theta$. Откуда мы видим, что форма $d(\omega \wedge \Theta)$ будет принадлежать идеалу $\mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)$ тогда и только тогда, когда форма $d\omega$ представима в виде слагаемых вида $\omega \wedge \Theta$, а значит, она принадлежит $\mathfrak{I}(\mathbf{C}_D) = \text{Ann } D$.)

Пусть $\omega \in \mathbf{C}_D$ – произвольная 1-форма. Тогда по формуле (1.10) получим

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) = 0$$

для любых $X, Y \in D$. Здесь мы воспользовались тем, что $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ (определение кораспределения, ассоциированного распределению D) и тем, что $[X, Y] \in D$ (инволютивность распределения D). Таким образом, $d\omega \in \text{Ann } D = \mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)$.

Обратно, пусть $d(\mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)) \subset \mathfrak{I}(\mathbf{C}_D)$. Как мы видели это условие равносильно условию $d(\mathbf{C}_D) \subset \text{Ann } D$. Нам нужно доказать, что для любых векторных полей $X, Y \in D$ их коммутатор $[X, Y]$ также принадлежит D .

Для любой 1-формы $\omega \in \mathbf{C}_D$ и любых векторных полей $X, Y \in D$ имеем

$$0 = d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]).$$

В частности, это равенство верно для форм ω^a , $a = r+1, \dots, n$ Пфаффа распределения D , то есть

$$\omega^a([X, Y]) = 0.$$

Так как формы Пфаффа принадлежат дуальному базису, то $\omega^a([X, Y])$ – это a -е координаты $a = r+1, \dots, n$ векторного поля $[X, Y]$. Тогда векторное поле раскладывается только по векторным полям (E_1, \dots, E_r) , которые являются локальным базисом распределения D , следовательно, принадлежит ему. Итак, распределение D инволютивно по определению. \square

Предложение 1.4. Пусть $\{\omega^a\}$, $a, b = r+1, \dots, n$ – система Пфаффа r -мерного распределения D . Тогда распределение D инволютивно в том и только в том случае, когда существуют 1-формы $\omega_b^a \in \Lambda_1(U)$, такие что

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b, \quad (1.31)$$

где как всегда U – область карты, на которой определена данная система Пфаффа.

Уравнения (1.31) называются *структурными уравнениями распределения D* .

Пусть D – r -мерное распределение на многообразии M . Подмногообразие N многообразия M называется *интегральным многообразием распределения D* , если $\mathfrak{X}(N) \subset D|_N$ и называется *интегральным многообразием максимальной размерности*, если $\mathfrak{X}(N) = D|_N$. Распределение называется *вполне интегрируемым*, если через каждую точку многообразия M проходит интегральное многообразие максимальной размерности.

В заключение сформулируем без доказательства еще одну теорему.

Теорема 1.8. (Фробениуса). Распределение на гладком многообразии вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оно инволютивно.

§1.7. Локальные потоки на многообразиях.

Простейшими примерами распределений служат одномерные распределения. Рассмотрим их в качестве примера.

Пусть D – одномерное распределение на n -мерном многообразии M .

Теорема 1.9. Любое одномерное распределение инволютивно.

Доказательство. Пусть $X, Y \in D$ – произвольные векторные поля одномерного распределения D . Фиксируем точку $p \in M$ и рассмотрим карту (U, φ) , в которой определен локальный базис данного распределения. Так как распределение одномерно, то локальный базис состоит из одного векторного поля, которое мы обозначим e . Тогда для векторных полей X, Y мы получим разложение по этому базису

$$X|_U = fe, \quad Y|_U = ge, \quad f, g \in C^\infty(U).$$

По свойствам коммутатора векторных полей (см. Анализ на многообразиях) получим

$$[X, Y]|_U = [X|_U, Y|_U] = [fe, ge] = f[e, ge] - (ge)(f)e = f(g[e, e] + e(g)e) - ge(f)e = (fe(g) - ge(f))e.$$

Очевидно, что $[X, Y]|_U \in D|_U$. В частности, $[X, Y]_p \in D_p$, а значит, $[X, Y] \in D$. Итак, мы доказали, что D инволютивно по определению. \square

Из теоремы 1.9 и теоремы Фробениуса получим

Следствие 1.1. Любое одномерное распределение вполне интегрируемо.

Фиксируем на многообразии M векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$. Точка $p \in M$ называется *особой точкой* векторного поля X , если $X_p = 0$.

Множество всех не особых точек векторного поля X является открытым множеством (так как векторное поле X как сечение гладко, а значит, и непрерывно). Обозначим это множество M_0 . Оно является открытым подмногообразием многообразия M (и имеет ту же размерность, что и M). Назовем его *неособым подмногообразием*. Векторное поле X задает на неособом подмногообразии M_0 одномерное распределение

$$D = \{fX | f \in C^\infty(M)\}.$$

По следствию 1.1 это распределение вполне интегрируемо, то есть через каждую точку p многообразия M_0 проходит одномерное подмногообразие (то есть кривая $\gamma : I \rightarrow M_0$), модуль векторных полей (локально одномерный) которого совпадает с распределением $D|_{\gamma(I)}$. Кривая γ называется *интегральной кривой распределения D* .

Пример 1.13. Рассмотрим интегральные кривые $\gamma : I \rightarrow M_0$ распределения D . Из определения интегрального многообразия следует, что касательные векторы этих кривых в точках p принадлежат интегральным элементам D_p распределения D . Оказывается, что среди таких кривых есть кривая, касательный вектор в каждой точке которой совпадает с касательным вектором X_p , задаваемым векторным полем X . Такая кривая называется *интегральной кривой векторного поля X* . Доказать это утверждение нам поможет математический анализ. Чтобы принять его помощь, мы должны как всегда уйти в локальные карты.

Пусть (U, φ) – локальная карта на многообразии M_0 с координатами (x^1, \dots, x^n) в окрестности некоторой фиксированной точки $p \in M_0$. Пусть в этой карте точка p имеет координаты (x_0^1, \dots, x_0^n) , то есть $\varphi(p) = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Разложим векторное поле X по натуральному базису этой карты

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $X^i = X^i(x^1, \dots, x^n)$ – гладкие на U функции, которые в каждой точке q выдают координаты вектора X_q . Потребуем от кривой γ , чтобы она проходила через точку p , причем точке p соответствовало значение параметра $t = 0$, то есть $\gamma(0) = p$. Кроме того, в каждой точке $q \in \gamma(I) \cap U$ касательный вектор к кривой γ должен совпадать с вектором X_q . Эти два условия нужно записать через координаты в локальной карте. Пусть кривая γ в локальной карте задается параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t)$. Тогда первое условие примет вид:

$$x^i(0) = x_0^i.$$

Запишем второе условие в координатах. Возьмем произвольную точку q и вычислим в ней координаты ξ^i касательного вектора к кривой γ в этой точке. Пусть точке q соответствует значение параметра $t = \tau$. Тогда

$$\xi^i = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} x^i(t).$$

Так как точка q изменяется, то обычно условие $t = \tau$ не пишут, а записывают так

$$\xi^i(t) = \frac{d}{dt} x^i(t).$$

Левая часть этого равенства говорит нам, что мы двигаемся по кривой γ и касательный вектор к ней меняется при этом движении. Как он меняется, говорит правая часть равенства.

Вспомним, что для записи второго условия, нам нужно потребовать, чтобы касательный вектор ξ в каждой точке q совпадал с вектором X_q . Это требование примет вид

$$\frac{d}{dt} x^i(t) = X^i(x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

Обычно в этом равенстве t не пишут. Тогда объединяя оба требования, мы получим

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1, \dots, x^n) \\ x^i(0) = x_0^i. \end{cases} \quad (1.32)$$

Тогда наша задача формулируется следующим образом: существует ли решение системы (1.32) и если да, то единственно ли оно. Математический анализ дает ответ: система (1.32) является задачей Коши и она всегда имеет единственное решение.

Нетрудно показать, что кривая γ не зависит от выбора локальной карты. Тогда на язык геометрии ответ математического анализа переводится так: для каждой точки $p \in M_0$ и каждого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ существует окрестность точки p , такая что в ней существует интегральная кривая векторного поля X .

Пример 1.13 приводит нас к формулировке следующей теоремы.

Теорема 1.10. *Задание векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ на гладком многообразии M равносильно заданию гладкого отображения*

$$\Phi_X : M \times (-t(p), t(p)) \rightarrow M,$$

где $(-t(p), t(p))$ – некоторый интервал вещественной прямой \mathbb{R} , $p \in M$ – произвольная точка. Отображение Φ_X однозначно определяется свойствами

$$\Phi_X(p, 0) = p; \quad \frac{d}{dt} \Phi_X(p, t) = X_{\Phi_X(p, t)}. \quad (1.33)$$

Здесь p – произвольная фиксированная точка.

Доказательство. Пусть дано векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$. Как мы видели в примере 1.13 оно определяет (независимо от выбора локальной карты) в окрестности каждой точки p кривую γ . Если фиксирована локальная карта (U, φ) в окрестности точки p , то кривая γ в этой карте задается параметрическими уравнениями $x^i = x^i(t)$. Обозначим ε_i стандартный базис в \mathbb{R}^n . Тогда положим по определению

$$\Phi_X(p, t) = \varphi^{-1}(x^i(t)\varepsilon_i), \quad (1.34)$$

где $p \in U$ – произвольная точка, параметр t принимает значения в интервале, для которого задача Коши имеет решение. Мы возьмем часть этого интервала вида $(-t(p), t(p))$. Упоминание точки p в обозначении этого интервала показывает, что он зависит от начальной точки, в окрестности которой мы работаем.

В силу теоремы о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных условий вектор-функция $x(t)$ гладко зависит от переменных (x_0^1, \dots, x_0^n) , а значит, отображение Φ_X гладко зависит от всех аргументов.

Докажем, что построенное отображение (1.34) удовлетворяет свойствам (1.33). Имеем

$$\Phi(p, 0) = \varphi^{-1}(x^i(0)\varepsilon_i) = \varphi^{-1}(x_0^1, \dots, x_0^n) = p.$$

Таким образом, первое условие выполняется. Проверим второе условие. Фиксируем произвольное τ и вычислим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=\tau} \Phi_X(p, t) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=\tau} \varphi^{-1}(x^i(t)\varepsilon_i) = \varphi_*^{-1} \frac{d}{dt} \Big|_{t=\tau} (x^i(t)\varepsilon_i) = \varphi_*^{-1} \left(\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=\tau} x^i(t) \right) \varepsilon_i \right) = \\ &= \varphi_*^{-1}(X^i(x^1(\tau), \dots, x^n(\tau))\varepsilon_i) = r_\varphi^{-1}(X^1(x^1(\tau), \dots, x^n(\tau)), \dots, X^n(x^1(\tau), \dots, x^n(\tau))) = X_{\Phi_X(p, \tau)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами (1.22), (1.32) и (1.23).

Так как соотношения (1.33) являются бескоординатным аналогом задачи Коши, а задача Коши однозначно определяет вектор-функцию $\gamma(t)$, то условия (1.33) однозначно определяют отображение Φ_X .

Пусть теперь дано отображение Φ_X , удовлетворяющее условиям (1.33). Покажем, что эти условия позволяют однозначно определить значение векторного поля X в каждой точке p . Имеем

$$X_p = X_{\Phi(p, 0)} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_X(p, t).$$

Таким образом, векторное поле X однозначно определяется по отображению Φ_X . \square

Отображение $\Phi_X : M \times (-t(p), t(p)) \rightarrow M$, построенное выше, называется *локальным потоком*, порожденным векторным полем X .

Как мы доказали, если Φ_X – локальный поток на многообразии M , то фиксируя точку $p \in M$ мы получим гладкую кривую (интегральную кривую векторного поля X с началом в точке p)

$$\gamma(t) : (-t(p), t(p)) \rightarrow M,$$

определяемую формулой

$$\gamma(t) = \Phi_X(p, t).$$

Из теоремы 1.10 следует, что эта кривая однозначно определяется условиями

$$1) \gamma(0) = p; \quad 2) \frac{d\gamma(t)}{dt} = X_{\gamma(t)}. \quad (1.35)$$

Локальные потоки обладают следующими свойствами

Теорема 1.11. *Во введенных обозначениях*

$$\begin{aligned} 1) \Phi_X(\Phi_X(p, t_1), t_2) &= \Phi_X(p, t_1 + t_2); \\ 2) \Phi_{cX}(p, t) &= \Phi_X(p, ct) \end{aligned}$$

для всех $t_1, t_2, t, c \in \mathbb{R}$, для которых имеют смысл обе части тождеств.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $p \in M$.

1) Зафиксируем число t_1 и положим $t_2 = t$. Введем обозначения

$$\alpha(t) = \Phi_X(\Phi_X(p, t_1), t); \quad \beta(t) = \Phi_X(p, t_1 + t).$$

Докажем, что оба отображения удовлетворяют условиям (1.35). Так как условия (1.35) однозначно определяют интегральную кривую, из этого мы получим, что $\alpha(t) = \beta(t)$, а значит, выполняется первое тождество.

Проверяем условия (1.35). Имеем

$$\alpha(0) = \Phi_X(\Phi_X(p, t_1), 0) = \Phi_X(p, t_1) = \beta(0),$$

то есть начало у каждой из кривых одно и то же $\Phi_X(p, t_1)$.

Для второго условия имеем

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \Phi_X(\Phi_X(p, t_1), t) = X_{\Phi_X(\Phi_X(p, t_1), t)} = X_{\alpha(t)},$$

то есть $\alpha(t)$ – интегральная кривая векторного поля X . С другой стороны, обозначим $t + t_1 = \tau$. Тогда

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{d\beta(\tau(t))}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau} \Phi_X(p, \tau) = X_{\Phi_X(p, \tau)} = X_{\beta(t)},$$

то есть $\beta(t)$ – интегральная кривая того же векторного поля X . Итак, $\alpha(t) = \beta(t)$. Теперь отпускаем точку p и получаем требуемое равенство.

Второе тождество доказывается аналогично (докажите самостоятельно. Здесь будет начало в точке p и векторное поле cX). \square

Теорема 1.12. Пусть $X \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольное векторное поле, $\varphi : M \rightarrow M$ – диффеоморфизм. Тогда

$$\Phi_{\varphi_* X}(p, t) = \varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, t).$$

Доказательство. Принцип доказательства такой же как и в теореме 1.11. Фиксируем произвольную точку $p \in M$ и обозначим левую и правую части доказываемого тождества $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ соответственно. Имеем

$$\alpha(0) = \Phi_{\varphi_* X}(p, 0) = p; \quad \beta(0) = \varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, 0) = \varphi \circ \varphi^{-1}p = p.$$

Итак, начала у интегральных кривых $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ совпадают. Докажем, что они являются интегральными кривыми одного и того же векторного поля. Имеем

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \frac{d}{dt} \Phi_{\varphi_* X}(p, t) = (\varphi_* X)_{\Phi_{\varphi_* X}(p, t)} = (\varphi_* X)_{\alpha(t)}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt} \beta(t) = \frac{d}{dt} \varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, t) = \varphi_* \frac{d}{dt} \Phi_X(\varphi^{-1}p, t) = \varphi_* (X_{\Phi_X(\varphi^{-1}p, t)}) = (\varphi_* X)_{\varphi \circ \Phi_X(\varphi^{-1}p, t)} = (\varphi_* X)_{\beta(t)}.$$

Здесь мы воспользовались теоремой 1.2. Таким образом, $\alpha(t) = \beta(t)$. Отпускаем точку p и получаем требуемое тождество. \square

Пусть Φ_X – локальный поток, порожденный векторным полем X . Фиксируем вещественное число t_0 и определим отображение

$$F_{t_0} : M_{t_0} \rightarrow M$$

по формуле

$$F_{t_0}(p) = \Phi_X(p, t_0),$$

где $M_{t_0} = \{p \in M \mid |t(p)| > |t_0|\}$. Нетрудно видеть, что M_{t_0} – открытое подмногообразие в M и отображение F_{t_0} гладко.

По теореме 1.10 и теореме 1.11 получим

$$1) F_0 = id; \quad 2) F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2},$$

причем последнее равенство справедливо при всех вещественных t_1, t_2 , для которых имеют смысл обе части равенства. В частности, из этого следует, что для каждого отображения F_{t_0} существует обратное $(F_{t_0})^{-1} = F_{-t_0}$. Таким образом, отображение F_{t_0} диффеоморфизмом открытого подмногообразия.

Семейство $\{F_t\}$, $t \in \mathbb{R}$ диффеоморфизмов открытых подмногообразий M_t называется *локальной группой диффеоморфизмов* многообразия M .

Особый интерес представляет случай, когда существует такое число t_0 , что $M_{t_0} = M$. В этом случае можно доказать, что отображение Φ_X определено на всем многообразии $M \times \mathbb{R}$. При этом отображение Φ_X называется *глобальным потоком* на многообразии M . Интегральные траектории векторного поля X определены на всей числовой прямой \mathbb{R} . Такие векторные поля называются *полными*, а локальные группы диффеоморфизмов, которые они порождают называются *глобальными группами диффеоморфизмов*.

Замечание 1.13. Вообще говоря, на многообразии могут существовать как полные, так и не полные векторные поля. Но если многообразии компактно, то любое векторное поле на нем полно.

С помощью локальной группы диффеоморфизмов, мы можем выяснить геометрический смысл определения векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций

Теорема 1.13. Пусть M – гладкое многообразие, $X \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольное векторное поле, $\{F_t\}$ – соответствующая локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M . Тогда для любой гладкой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем

$$X(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \circ F_t - f).$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $p \in M$. Пусть (U, φ) – локальная карта в окрестности точки p с координатами (x^1, \dots, x^n) . Имеем

$$\begin{aligned} X(f)(p) &= X_p(f) = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p (X_p)^i = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} \equiv \left. \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1}(x^1(t), \dots, x^n(t))) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1}(x^i(t)\varepsilon_i)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \Phi_X(p, t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ F_t(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \circ F_t(p) - f \circ F_0(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \circ F_t(p) - f(p)) \end{aligned}$$

и это верно для любой точки $p \in M$. В третьем равенстве этой цепочки мы воспользовались определением касательного вектора как класса соприкасающихся путей и в качестве представителя этого класса мы выбрали интегральную кривую векторного поля X , проходящую через точку p . Она действительно находится в этом классе соприкасающихся путей, так как в точке p касательный вектор к интегральной кривой совпадает с вектором X_p . Также здесь мы воспользовались определением координат вектора в карте, правилом дифференцирования сложной функции, формулой (1.34) и определением производной. \square

§1.8. Дифференцирование Ли.

Основная трудность построения инвариантного дифференциального исчисления на многообразии заключается в невозможности внутренним образом отождествить касательные пространства к многообразию в различных его точках, а следовательно, внутренним образом определить параллельный перенос геометрических объектов из одной точки многообразия в другую. Эту трудность можно обойти, фиксируя на многообразии некоторые дополнительные структуры. В курсе Анализ на многообразиях мы в качестве такой структуры брали связность. Здесь мы посмотрим простейшую возможность такого рода, а именно фиксируем на многообразии векторное поле X и опишем способ переноса геометрических объектов из одной точки в другую.

Определение 1.6. Пусть M – гладкое многообразие, X – векторное поле на M , $\{F_t\}$ – соответствующая ему локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M , T – тензорное поле типа (r, s) на M . Производной Ли тензорного поля T в направлении векторного поля X называется тензорное поле $\mathcal{L}_X T$ на M , которое в каждой точке $p \in M$ определяется по формуле

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((F_{-t})_* T_{F_t(p)} - T_p). \quad (1.36)$$

Напомним, что звездочка обозначает операцию увлечения тензора (в той точке, в которой определен тензор) под действием диффеоморфизма F_{-t} (см. § 1.4.).

Оператор $\mathcal{L}_X : \mathfrak{T}(M) \rightarrow \mathfrak{T}(M)$, сопоставляющий тензорному полю T тензорное поле $\mathcal{L}_X T$ называется оператором дифференцирования Ли в направлении векторного поля X .

Оператор дифференцирования Ли похож на оператор ковариантного дифференцирования, который мы рассматривали в курсе Анализ на многообразиях. Доказательства всех свойств дифференцирования Ли аналогичны доказательствам для ковариантного дифференцирования, поэтому мы не будем их приводить здесь. Перечислим только необходимые нам в дальнейшем результаты.

Теорема 1.14. Пусть X – векторное поле на многообразии M . Тогда

- 1) $\mathcal{L}_X T \in \mathfrak{T}_r^s(M)$, $\forall T \in \mathfrak{T}_r^s(M)$;
- 2) $C_{(b)}^{(a)} \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ C_{(b)}^{(a)}$;
- 3) $\mathcal{L}_X(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{L}_X T_2)$; $T_1 \in \mathfrak{T}_r^s(M)$; $T_2 \in \mathfrak{T}_p^q(M)$;
- 4) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;
- 5) $\mathcal{L}_X f = X(f)$, $f \in C^\infty(M)$.

Замечание 1.14. Перечисленные в теореме 1.14 свойства оператора дифференцирования Ли позволяют вычислить производную Ли для любого тензорного поля. Кроме того, эти свойства являются определяющими для оператора дифференцирования Ли, то есть любое дифференцирование алгебры тензорных полей, удовлетворяющее этим свойствам, совпадает с дифференцированием Ли.

Пример 1.14. В качестве примера найдем производную Ли для 1-формы ω . Для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ имеем

$$\omega(Y) = \omega_i Y^i = (\omega \otimes Y)_i^i = C_{(1)}^{(1)}(\omega \otimes Y).$$

Получаем тождество

$$\omega(Y) = C_{(1)}^{(1)}(\omega \otimes Y). \quad (1.37)$$

Применим к нему оператор дифференцирования Ли \mathcal{L}_X и воспользуемся свойствами из теоремы 1.14.

$$X(\omega(Y)) = C_{(1)}^{(1)}(\mathcal{L}_X\omega) \otimes Y + C_{(1)}^{(1)}\omega \otimes (\mathcal{L}_XY)$$

Опять воспользуемся формулой (1.37), чтобы перейти от сверток к упрощенному виду.

$$X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega([X, Y]).$$

Итак, мы получаем

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]).$$

Запишем полученное тождество в координатах. Фиксируем локальную карту, разложим векторное поле X по натуральному базису, а вместо векторного поля Y подставим $\frac{\partial}{\partial x^j}$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X\omega)_i &= (\mathcal{L}_X\omega) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = X \left(\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) - \omega \left(\left[X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \right) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j - \omega \left(X^j \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] - \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j + \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \omega_j. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] = 0$. Итак, получаем

$$(\mathcal{L}_X\omega)_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j + \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \omega_j.$$

Задача 1.20. Вычислите производную Ли для эндоморфизма L . Запишите полученное тождество в компонентах.

$$\text{Ответ: } (\mathcal{L}_XL)(Y) = [X, L(Y)] - L([X, Y]); (\mathcal{L}_XL)_j^t = \frac{\partial L_j^t}{\partial x^k} X^k - L_j^k \frac{\partial X^t}{\partial x^k} + L_k^t \frac{\partial X^k}{\partial x^j}.$$

Замечание 1.15. Если мы определим для тензорного поля $T \in \mathfrak{T}_r^s(M)$ отображение \mathcal{L} по формуле

$$(\mathcal{L}T)(X, X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) = (\mathcal{L}_XT)(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s),$$

то в отличие от случая ковариантного дифференцирования, мы не получим тензорного поля типа $(r+1, s)$, так как введенное отображение не будет $C^\infty(M)$ линейным по аргументу X .

Замечание 1.16. Выясните, будет ли отображение \mathcal{L} из замечания 1.15 аддитивным, \mathbb{R} -линейным по аргументу X ?

Указание: начните исследование с векторных полей.

Для решения следующего ряда задач, нам потребуется еще одно определение.

Определение 1.7. Пусть дано нечетномерное гладкое многообразие M . Тройка тензорных полей (Φ, η, ξ) на M , где Φ – эндоморфизм модуля гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$, η – 1-форма, ξ – векторное поле на M , которая удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= -id + \eta \otimes \xi; \\ \eta(\xi) &= 1; \\ \Phi(\xi) &= 0; \\ \eta \circ \Phi &= 0; \end{aligned} \tag{1.38}$$

называется *почти контактной структурой* на M . Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная структура, называется *почти контактным многообразием*.

Задача 1.21. Пусть ∇ – связность без кручения на почти контактной многообразии M . Докажите, что

$$(\mathcal{L}_\xi\Phi)(X) = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi) + (\nabla_{\Phi X}(\eta)\xi)\xi. \tag{1.39}$$

Запишите это тождество в компонентах.

Решение. Напомним сведения из курса Анализ на многообразиях, касающиеся связности без кручения. Мы знаем, что это связность, для которой тензор кручения тождественно равен нулю, следовательно,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0. \tag{1.40}$$

Кроме того, оператор ковариантного дифференцирования удовлетворяет правилу Лейбница, перестановочен со свертками и на функции действует по формуле $\nabla_X f = X(f)$. Применяя эти свойства легко получить следующую формулу (мы уже получали ее в курсе Анализ на многообразиях)

$$\nabla_X(\Phi Y) = \nabla_X(\Phi)(Y) + \Phi(\nabla_X Y). \quad (1.41)$$

Напомним ее вывод. По определению эндоморфизма ΦY – это векторное поле. С помощью тензорных операций оно выражается следующим образом (если забыли, то посчитайте как в курсе Анализ на многообразиях через компоненты)

$$\Phi Y = C_{(1)}^{(2)}(\Phi \otimes Y). \quad (1.42)$$

Применим к этому равенству оператор ∇_X .

$$\nabla_X(\Phi Y) = C_{(1)}^{(2)}(\nabla_X(\Phi \otimes Y + \Phi \otimes \nabla_X Y)) = C_{(1)}^{(2)}(\nabla_X(\Phi) \otimes Y) + C_{(1)}^{(2)}(\Phi \otimes \nabla_X Y) = \nabla_X(\Phi)(Y) + \Phi(\nabla_X Y).$$

Перейдем теперь от воспоминаний к нашей задаче. Принцип действия с производной Ли такой же как с ковариантной производной. Поэтому опять нашей печкой, от которой танцуем, является равенство (1.42). Теперь мы применяем к нему оператор дифференцирования Ли и пользуемся перестановочностью со сверткой и правилом Лейбница.

$$(\mathcal{L}_\xi \Phi X) = C_{(1)}^{(2)}((\mathcal{L}_\xi \Phi) \otimes X + \Phi \otimes \mathcal{L}_\xi X) = C_{(1)}^{(2)}(\mathcal{L}_\xi(\Phi) \otimes X) + C_{(1)}^{(2)}(\Phi \otimes \mathcal{L}_\xi X) = \mathcal{L}_\xi(\Phi)(X) + \Phi([\xi, X]).$$

Здесь мы также использовали то, что $\mathcal{L}_\xi X = [\xi, X]$. В результате получаем

$$[\xi, \Phi X] = (\mathcal{L}_\xi \Phi)(X) + \Phi([\xi, X]). \quad (1.43)$$

Применяя в (1.43) формулу (1.40), избавимся от скобок Ли.

$$\nabla_\xi(\Phi X) - \nabla_{\Phi X} \xi = (\mathcal{L}_\xi \Phi)(X) + \Phi(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi).$$

Подставим в это равенство (1.41) с нужными нам аргументами.

$$\nabla_\xi(\Phi)X + \Phi(\nabla_\xi X) - \nabla_{\Phi X} \xi = (\mathcal{L}_\xi \Phi)(X) + \Phi(\nabla_\xi X) - \Phi(\nabla_X \xi).$$

Здесь мы также воспользовались аддитивностью эндоморфизма Φ . Таким образом, получаем

$$\nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X} \xi = (\mathcal{L}_\xi \Phi)(X) - \Phi(\nabla_X \xi). \quad (1.44)$$

Нам осталось избавиться от слагаемых $-\nabla_{\Phi X} \xi$ и $\Phi(\nabla_X \xi)$. Для этого запишем условие $\Phi(\xi) = 0$ из определения почти контактной структуры с помощью тензорных операций

$$C_{(1)}^{(2)}(\Phi \otimes \xi) = 0$$

и применим к нему оператор ∇_X . Опуская, знакомые нам промежуточные выкладки, получим

$$\nabla_X(\Phi)\xi + \Phi(\nabla_X \xi) = 0. \quad (1.45)$$

Из этого равенства сразу же выражается слагаемое $\Phi(\nabla_X \xi) = -\nabla_X(\Phi)\xi$. Чтобы получить соотношение для второго слагаемого, во-первых, заменим в равенстве (1.45) $X \rightarrow \Phi X$.

$$\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi(\nabla_{\Phi X} \xi) = 0,$$

во-вторых, подействуем на полученное соотношение эндоморфизмом Φ и применим первое условие из определения почти контактной структуры.

$$\Phi(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi) - \nabla_{\Phi X} \xi + \eta(\nabla_{\Phi X} \xi)\xi = 0.$$

Наконец, применяя оператор $\nabla_{\Phi X}$ к тождеству (второе условие из определения почти контактной структуры)

$$\eta(\xi) = 1 \Leftrightarrow C_{(1)}^{(1)}(\eta \otimes \xi) = 1,$$

получим

$$\nabla_{\Phi X}(\eta)\xi + \eta(\nabla_{\Phi X} \xi) = 0.$$

Собирая последние тождества вместе, мы получим выражение для второго слагаемого

$$\nabla_{\Phi X} \xi = \Phi(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi) - (\nabla_{\Phi X}(\eta)\xi)\xi.$$

Теперь подставим оба слагаемые в (1.44) и окончательно получим соотношение (1.39).

Наконец, в компонентах оно примет вид

$$(\mathcal{L}_\xi \Phi)_k^i = \Phi_{k,j}^i \xi^j - \Phi_{j,k}^i \xi^j - \Phi_j^i \Phi_{r,t}^j \Phi_k^t \xi^r + \eta_{j,t} \Phi_k^t \xi^j \xi^i.$$

□

Задача 1.22. Пусть ∇ – связность без кручения на почти контактном многообразии M . Докажите, что

$$(\mathcal{L}_\xi \eta)(X) = \nabla_\xi(\eta)X - \nabla_X(\eta)\xi.$$

Запишите это тождество в компонентах.

Решение. Начнем работать с производной Ли. Применим к функции $\eta(X)$ оператор дифференцирования Ли \mathcal{L}_ξ и воспользуемся правилом Лейбница (здесь мы уже мысленно заменяем $\eta(X)$ на $C_{(1)}^{(1)}(\eta \otimes \xi)$ и после дифференцирования возвращаемся обратно).

$$\mathcal{L}_\xi(\eta(X)) = (\mathcal{L}_\xi \eta)(X) + \eta(\mathcal{L}_\xi X).$$

Далее, пользуемся свойствами 4) и 5) из теоремы 1.14.

$$\xi(\eta(X)) = (\mathcal{L}_\xi \eta)(X) + \eta([\xi, X]).$$

Используя (1.40), избавляемся от скобки Ли

$$\xi(\eta(X)) = (\mathcal{L}_\xi \eta)(X) + \eta(\nabla_\xi X) - \eta(\nabla_X \xi). \quad (1.46)$$

Чтобы выразить левую часть равенства (1.46) через ковариантные производные, применим оператор ковариантного дифференцирования ∇_ξ к функции $\eta(X)$.

$$\xi(\eta(X)) = \nabla_\xi(\eta)X + \eta(\nabla_\xi X)$$

и подставим то, что получилось, в (1.46).

$$\nabla_\xi(\eta)X + \eta(\nabla_\xi X) = (\mathcal{L}_\xi \eta)(X) + \eta(\nabla_\xi X) - \eta(\nabla_X \xi)$$

или

$$\nabla_\xi(\eta)X = (\mathcal{L}_\xi \eta)(X) - \eta(\nabla_X \xi).$$

Нам осталось найти слагаемое $-\eta(\nabla_X \xi)$. Для этого применим оператор ∇_X к тождеству $\eta(\xi) = 1$. Получим

$$\nabla_X(\eta)\xi + \eta(\nabla_X \xi) = 0.$$

Тогда подставляя полученный результат в предпоследнюю формулу, получим требуемое тождество.

Наконец, в компонентах получим

$$(\mathcal{L}_\xi \eta)_i = \eta_{i,j} \xi^j - \eta_{j,i} \xi^j.$$

□

Задача 1.23. Пусть ∇ – связность без кручения на почти контактном многообразии M . Докажите, что

$$(\mathcal{L}_{\Phi X} \eta)(Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)Y + \eta(\nabla_Y(\Phi)X).$$

Запишите полученное тождество в компонентах.

Решение. Применим оператор дифференцирования Ли $\mathcal{L}_{\Phi X}$ к функции $\eta(Y)$.

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = (\mathcal{L}_{\Phi X} \eta)(Y) + \eta([\Phi X, Y]).$$

Воспользуемся тем, что связность не имеет кручения.

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = (\mathcal{L}_{\Phi X} \eta)(Y) + \eta(\nabla_{\Phi X} Y) - \eta(\nabla_Y(\Phi)X).$$

Используем правило Лейбница для ковариантного дифференцирования

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = (\mathcal{L}_{\Phi X} \eta)(Y) + \eta(\nabla_{\Phi X} Y) - \eta(\nabla_Y(\Phi)X) - \eta(\Phi(\nabla_Y X))$$

Так как по определению почти контактной структуры $\eta \circ \Phi = 0$, окончательно получим

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = (\mathcal{L}_{\Phi X} \eta)(Y) + \eta(\nabla_{\Phi X} Y) - \eta(\nabla_Y(\Phi)X)$$

Теперь применим к функции $\eta(Y)$ оператор ковариантного дифференцирования $\nabla_{\Phi X}$.

$$(\Phi X)(\eta(Y)) = \nabla_{\Phi X}(\eta)Y + \eta(\nabla_{\Phi X} Y)$$

Вычтем последнее тождество из предпоследнего.

$$(\mathcal{L}_{\Phi X} \eta)(Y) - \nabla_{\Phi X}(\eta)Y - \eta(\nabla_Y(\Phi)X) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, в компонентах получим

$$(\mathcal{L}_{\Phi X} \eta)_i = \eta_{i,j} \Phi_k^j X^k + \eta_k \Phi_{j,i}^k X^j.$$

□

Глава 2. Элементы теории групп Ли.

§2.1. Группы Ли.

Определение 2.1. *Группой Ли* называется гладкое многообразие G , множество точек которого наделено структурой (абстрактной) группы, причем групповая операция и операция взятия симметричного элемента являются гладкими.

Замечание 2.1. Нетрудно проверить, что условие гладкости групповых операций равносильно гладкости отображения $\varphi : G \times G \rightarrow G$, заданного формулой

$$\varphi(x, y) = x \cdot y^{-1}.$$

Это замечание позволит нам при работе с конкретными примерами групп Ли проверять гладкость не двух, а одного отображения.

Пример 2.1. Простейшим примером группы Ли может служить арифметическое векторное пространство

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}.$$

На \mathbb{R}^n мы уже построили структуру гладкого многообразия (см. курс Анализ на многообразиях). Из алгебры хорошо известно, что \mathbb{R}^n является (абстрактной) группой относительно операции сложения. Взятие симметричного элемента в данном случае называется взятием противоположного элемента.

Гладкое многообразие \mathbb{R}^n покрывается одной картой (\mathbb{R}^n, id) и в ней отображение φ (см. замечание 2.1) задается следующим образом

$$z^i = x^i - y^i,$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, $z = \varphi(x, y) = x - y$. Очевидно, что функции, задающие отображение φ являются гладкими, следовательно, гладкое многообразие \mathbb{R}^n , на котором операция $+$ определяет структуру абстрактной группы, является группой Ли.

Пример 2.2. Этот пример будет основным для нас. Пусть $M_{n,n}$ – полная матричная алгебра. Рассмотрим множество $n \times n$ - матриц с ненулевым определителем и обозначим это множество так.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{(g_{ij}) \in M_{n,n}, \det(g_{ij}) \neq 0\}.$$

Операция умножения матриц вводит в это множество структуру абстрактной группы. Взятие симметричного элемента называется здесь взятием обратного.

Так как полная матричная алгебра $M_{n,n}$ может быть отождествлена с арифметическим векторным пространством \mathbb{R}^{n^2} , то она имеет структуру гладкого многообразия. Множество $GL(n, \mathbb{R})$ является открытым подмножеством в \mathbb{R}^{n^2} , а значит, имеет индуцированную гладкую структуру из $M_{n,n}$. Итак, $GL(n, \mathbb{R})$ – гладкое многообразие, а именно, открытое подмногообразие в \mathbb{R}^{n^2} .

Для доказательства того, что $GL(n, \mathbb{R})$ является группой Ли, нам осталось проверить гладкость групповой операции и гладкость взятия обратного. Для этого нужна локальная карта на $GL(n, \mathbb{R})$. Так как гладкая структура $GL(n, \mathbb{R})$ индуцирована \mathbb{R}^{n^2} , то все многообразие покрывается одной локальной картой $(GL(n, \mathbb{R}), id)$. Напомним, что для построения локальных карт индуцированной гладкой структуры нужно взять локальную карту \mathbb{R}^{n^2} и пересечь ее область с множеством $GL(n, \mathbb{R})$. Картирующее отображение получается из картирующего отображения карты на \mathbb{R}^{n^2} сужением на множество $GL(n, \mathbb{R})$ (см. курс Анализ на многообразиях).

Запишем в локальной карте операцию умножения матриц. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – произвольные матрицы из $GL(n, \mathbb{R})$. Тогда по правилу умножения матриц получим

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

где $(c_{ij}) = C = A \cdot B$. Очевидно, что полученные функции бесконечно дифференцируемы как по a_{ik} , так и по b_{kj} , а значит, операция умножения является гладкой.

По правилу вычисления элементов h_{ij} обратной матрицы A^{-1} для матрицы $A = (a_{ij})$, известного из алгебры, получим

$$h_{ij} = \frac{1}{\det A} A_{ji},$$

где A_{ji} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} . Так как определитель $\det A$ и алгебраические дополнения A_{ji} являются многочленами элементов матрицы A , полученные функции являются бесконечно дифференцируемыми по a_{ij} , следовательно, отображение взятия обратного элемента является гладким.

Итак, мы показали, что множество $GL(n, \mathbb{R})$ является группой Ли. Она называется *полной линейной группой порядка n* .

Пример 2.3. Рассмотрим множество

$$O(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}), g \cdot g^T = I_n\},$$

где g^T – транспонированная матрица (строки матрицы g являются столбцами матрицы g^T), $I_n = (\delta_j^i)$ – единичная матрица порядка n . Это множество также является группой Ли и называется *ортогональной группой порядка n* .

Группа Ли

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{g \in O(n, \mathbb{R}), \det g = 1\}$$

называется *специальной ортогональной группой порядка n* .

Пример 2.4. Пусть дано n -мерное векторное пространство V . Рассмотрим множество всех \mathbb{R} -линейных отображений $L : V \rightarrow V$. Это множество обозначается $End V$ и называется *алгеброй эндоморфизмов* векторного пространства V (структуру ассоциативной алгебры с единицей в этом множестве задают стандартные операции сложения отображений, умножения отображения на вещественное число и операция композиции). В этом множестве выделяется подмножество обратимых линейных отображений. Оно обозначается $Aut V$ и называется *группой автоморфизмов* векторного пространства V . Структура абстрактной группы задается операцией композиции.

Оказывается, что на множестве $Aut V$ существует и структура группы Ли. Так как $Aut V$ является векторным пространством, то на нем определена стандартная гладкая структура векторного пространства, а значит, $Aut V$ – гладкое многообразие. Если фиксировать в V базис, то операция композиции и взятия обратного элемента сведется к умножению матриц и взятию обратной матрицы, соответственно. Эти операции гладкие, а значит, $Aut V$ является группой Ли.

§2.2. Алгебры Ли.

Определение 2.2. (Вещественной) *алгеброй Ли* называется (вещественное) векторное пространство \mathfrak{g} , в котором фиксирована бинарная билинейная операция

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$$

называемая *операцией коммутирования* или *коммутатором* и обладающая свойствами

- 1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (антикоммутативность);
- 2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (тождество Якоби),

где $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Пример 2.5. Модуль гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ гладкого многообразия M относительно скобки Ли является алгеброй Ли.

Пример 2.6. Всякое вещественное векторное пространство V является алгеброй Ли относительно коммутатора, заданного формулой $[X, Y] = 0$, $X, Y \in V$. Такая алгебра Ли называется *абелевой алгеброй Ли*.

Пример 2.7. Полная матричная алгебра $M_{n,n}$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования, заданной формулой

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A, \tag{2.1}$$

где $A, B \in M_{n,n}$, точка обозначает обычное матричное умножение. Эта алгебра Ли называется *полной матричной алгеброй Ли*.

Пример 2.8. Обозначим множество всех линейных отображений вещественного векторного пространства V обозначим через $End V$. Это вещественное векторное пространство относительно сложения отображений и умножения на вещественное число. В этом множестве также может быть введена операция коммутирования по формуле

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f,$$

где $f, g \in End V$, \circ – композиция отображений. Эта операция превращает векторное пространство $End V$ в алгебру Ли.

Пусть G – группа Ли. Будем групповую операцию G как абстрактной группы обозначать либо точкой, либо писать две буквы рядом. При этом будем называть эту операцию умножением.

Фиксируем произвольный элемент $g \in G$. Операция умножения в группе G определяет два отображения

$$L_g : G \rightarrow G; \quad R_g : G \rightarrow G$$

по формулам

$$L_g(h) = gh; \quad R_g(h) = hg, \quad h \in G$$

соответственно. Так как операция умножения гладкая, то введенные отображения также являются гладкими. Они называются *отображением левого сдвига* и *отображением правого сдвига на элемент g* , соответственно.

Теорема 2.1. *Отображения L_g и R_g обладают следующими свойствами:*

- 1) $L_g \circ L_h = L_{gh}$;
- 2) $R_g \circ R_h = R_{hg}$;
- 3) L_g, R_g являются диффеоморфизмами,

где $g, h \in G$ – произвольные элементы.

Доказательство. Докажем первое тождество (второе докажете самостоятельно). Для любого элемента $p \in G$ по определению отображения левого сдвига получим

$$L_g \circ L_h(p) = L_g(hp) = g(hp) = (gh)p = L_{gh}(p).$$

Здесь мы также воспользовались ассоциативностью операции умножения в группе G .

Докажем, что L_g является диффеоморфизмом. Для этого достаточно доказать, что $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. Существование обратного показывает, что L_g биекция, а то, что обратное отображение само является левым сдвигом показывает, что оно является гладким. Имеем

$$(L_{g^{-1}} \circ L_g)(h) = L_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}(gh) = h.$$

Это верно для любого элемента $h \in G$, следовательно, $L_{g^{-1}} \circ L_g = id$. Аналогично доказывается, что $L_g \circ L_{g^{-1}} = id$. Таким образом, получим $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. \square

Так как L_g является диффеоморфизмом, для любого векторного поля X на G существует L_g -связанное с ним векторное поле (см. § 1.4.) $(L_g)_*X \in \mathfrak{X}(G)$.

Векторное поле $X \in \mathfrak{X}(G)$ называется *левоинвариантным*, если оно совпадает с L_g -связанным с ним векторным полем для любого элемента $g \in G$, то есть

$$(L_g)_*X = X, \quad \forall g \in G.$$

Теорема 2.2. *Совокупность \mathfrak{g} всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли G образует вещественное векторное пространство, канонически изоморфное касательному пространству $T_e(G)$ к группе Ли G в единице e этой группы. В частности, $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.*

Доказательство. Так как \mathfrak{g} является подмножеством вещественного векторного пространства $\mathfrak{X}(G)$ гладких векторных полей группы Ли G , то нам достаточно доказать, что \mathfrak{g} замкнуто относительно операций сложения своих элементов и умножения на вещественное число. Это легко следует из \mathbb{R} -линейности отображения увлечения векторных полей (см. § 1.4.).

Построим изоморфизм $\beta : \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$ вещественных векторных пространств. Зададим отображение β формулой

$$\beta(X) = X_e, \quad X \in \mathfrak{g},$$

то есть каждому левоинвариантному векторному полю X (оно рассматривается как гладкое сечение касательного расслоения) поставим его значение в единице e группы G . Из определения суммы и произведения на число гладких сечений (см. курс Анализ на многообразиях) легко видеть, что β является гомоморфизмом:

$$\beta(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X + \mu Y)_e = (\lambda X + \mu Y)(e) = \lambda X_e + \mu Y_e = \lambda \beta(X) + \mu \beta(Y),$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Инъективность β следует из того, что ядро гомоморфизма β нулевое. В самом деле, пусть $X \in \ker \beta$. Тогда $\beta(X) = X_e = 0$. Так как X – левоинвариантное (L_g -связано с самим собой), то согласно теореме 1.2 получим

$$((L_g)_*)_e X_e = X_{L_g(e)} = X_g.$$

С другой стороны, так как дифференциал $((L_g)_*)_e$ отображения является \mathbb{R} -линейным (см. предложение 1.1), получим

$$((L_g)_*)_e X_e = ((L_g)_*)_e(0) = 0.$$

Итак, значение векторного поля X в любой точке $g \in G$ равно нулю, то есть $X_g = 0$ для любой точки $g \in G$. Следовательно, равно нулю само векторное поле X . Итак, мы показали, что ядро отображения β нулевое.

Покажем, что отображение β сюръективно. Пусть $\xi \in T_e(G)$ – произвольный касательный вектор. Построим семейство векторов

$$X = \{X_g \in T_g(G), X_g = ((L_g)_*)_e \xi\}. \quad (2.2)$$

В результате мы получим отображение $X : G \rightarrow TG$, где TG – тотальное пространство касательного расслоения. Чтобы доказать, что X является (гладким) векторным полем на многообразии G , нам нужно проверить, что в паре соответствующих карт это отображение задается гладкими функциями. Напомним, что первые n функций гладки тривиальным образом ($y^i = x^i$), $i = 1, \dots, n$, а вторые n функций $y^{j+n} = X^j(x^1, \dots, x^n)$, $j = 1, \dots, n$ суть координаты касательных векторов X_g . Для них и нужно доказать гладкую зависимость от координат (x^1, \dots, x^n) точки g .

Фиксируем локальную карту (U, φ) в окрестности единицы e группы Ли G , причем пусть e имеет в этой карте координаты $(0, \dots, 0)$. Предположим, что элемент g принадлежит области U . Пусть операция умножения в карте (U, φ) задается функциями

$$z^i = \mu^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, x^1, \dots, x^n),$$

где $i = 1, \dots, n$. Здесь $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ – координаты первого сомножителя, (x^1, \dots, x^n) – координаты второго сомножителя, через (z^1, \dots, z^n) обозначены координаты произведения. Так как операция умножения является гладкой, функции z^i имеют частные производные любого порядка по переменным $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n$.

Обозначим координаты точки g в данной карте через (x_0^1, \dots, x_0^n) . Так как точка g у нас зафиксирована, это набор из n вещественных чисел. Тогда отображение левого сдвига L_g будет задаваться функциями

$$z^i = \mu^i(x_0^1, \dots, x_0^n, x^1, \dots, x^n),$$

где переменными будут являться только x^1, \dots, x^n . Тогда дифференциал отображения $((L_g)_*)_e$ будет задаваться матрицей Якоби (см. (1.19))

$$\left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} \right) \Big|_e = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} \right) (x_0^1, \dots, x_0^n, 0, \dots, 0).$$

Следовательно, если вектор ξ имеет в локальной карте (U, φ) координаты (ξ^1, \dots, ξ^n) (это вещественные числа), то координаты $(X_g)^i(x_0^1, \dots, x_0^n)$ вектора X_g будут выражаться по формуле

$$(X_g)^i(x_0^1, \dots, x_0^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} \right) (x_0^1, \dots, x_0^n, 0, \dots, 0) \xi^j.$$

Теперь отпустим точку g . Тогда ее координаты будут меняться. В связи с этим сотрем нули в обозначении ее координат. Тогда получим функции

$$X^i(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} \right) (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) \xi^j.$$

Эти функции являются гладкими.

Напомним, что мы предполагали, что точка g принадлежит окрестности единицы. Пусть теперь точка h принадлежит некоторой карте (V, ψ) , не содержащей единицу. Из определения системы векторов X имеем

$$X_h = ((L_h)_*)_e \xi = ((L_h)_*)_e ((L_{g^{-1}})_*)_g X_g = ((L_{hg^{-1}})_*)_g X_g.$$

Тогда если в фиксированной точке $g(g^1, \dots, g^n) \in V$ вектор X_g уже построен, то в произвольной точке $h \in V$ аналогично предыдущему получим

$$X^i(h) = (X_h)^i(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} \right) (x^1, \dots, x^n, g^1, \dots, g^n) (X_g)^j.$$

Они являются гладкими функциями.

Итак, мы показали, что координаты векторов X_g семейства (2.2) гладко зависят от координат точки g , а значит, X является (гладким) векторным полем. Нам осталось показать, что оно является левоинвариантным. Фиксируем произвольную точку $g \in G$. Тогда для произвольной точки $h \in G$ имеем

$$((L_g)_*)_h X_h = ((L_g)_*)_h ((L_h)_*)_e \xi = ((L_g \circ L_h)_*)_e \xi = (L_{gh})_* \xi = X_{gh} = X_{L_g(h)}.$$

Здесь мы воспользовались предложением 1.2. Тогда по теореме 1.2 получим $(L_g)_* X = X$, то есть векторное поле X является левоинвариантным. \square

Замечание 2.2. Обратите внимание, что модуль всех гладких векторных полей $\mathfrak{X}(G)$ в общем случае не имеет глобального базиса (даже если брать коэффициенты разложения из алгебры гладких функций), а векторное пространство левоинвариантных векторных полей имеет глобальный базис (коэффициенты разложения по такому базису – вещественные числа). Примером такого базиса может служить, например, прообраз натурального базиса касательного пространства $T_e(G)$.

Теорема 2.3. Векторное пространство \mathfrak{g} левоинвариантных векторных полей является алгеброй Ли.

Доказательство. Так как левоинвариантные векторные поля принадлежат модулю гладких векторных полей $\mathfrak{X}(G)$, то для них определена скобка Ли (см. курс Анализ на многообразиях). Она удовлетворяет условиям \mathbb{R} -билинейности, антикоммутативности и тождеству Якоби. Следовательно, нам осталось проверить, что множество \mathfrak{g} замкнуто относительно скобки Ли. Имеем с учетом (1.26)

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь мы воспользовались левоинвариантностью векторных полей X и Y . □

Алгебра Ли \mathfrak{g} всех левоинвариантных полей группы Ли G называется *присоединенной алгеброй Ли* или *алгеброй Ли группы Ли G* .

Замечание 2.3. Структуру алгебры Ли можно ввести и в касательном пространстве $T_e(G)$ в единице группы. Для этого используем построенный в теореме 2.2 изоморфизм β векторных пространств \mathfrak{g} и $T_e(G)$. Для того чтобы $T_e(G)$ было алгеброй Ли, там не хватает коммутатора для касательных векторов этого пространства, то есть билинейного отображения

$$[\cdot, \cdot] : T_e(G) \times T_e(G) \rightarrow T_e(G),$$

удовлетворяющего свойству антикоммутативности и тождеству Якоби. Определим это отображение так. Для любых касательных векторов $\xi, \eta \in T_e(G)$ положим

$$[\xi, \eta] = \beta[\beta^{-1}\xi, \beta^{-1}\eta].$$

При этом отображение β^{-1} будет изоморфизмом алгебр Ли $T_e(G)$ и \mathfrak{g} , так как

$$\beta^{-1}[\xi, \eta] = [\beta^{-1}\xi, \beta^{-1}\eta].$$

Итак, мы видим, что алгебры Ли \mathfrak{g} и $T_e(G)$ изоморфны, а значит, могут быть отождествлены.

Векторное пространство \mathfrak{g} имеет дуальное векторное пространство \mathfrak{g}^* (см. курс Тензорная алгебра). Элементы \mathfrak{g}^* называются *формами Маурера-Картана*.

Задача 2.1. Докажите, что для форм Маурера-Картана имеет место формула

$$(L_g)^*\omega = \omega,$$

где $\omega \in \mathfrak{g}^*$, $g \in G$ – произвольный элемент. Напомним, что звездочка у отображения обозначает антиувлечение ковекторов (см. § 1.4.).

Следствие 2.1. Так как $((L_g)^*)^{-1} = (L_g)_*$ (см. § 1.4.), из задачи 2.1 получим

$$(L_g)_*\omega = \omega,$$

то есть формы Маурера-Картана являются *левоинвариантными*.

Замечание 2.4. Обратите внимание, что хотя формы Маурера-Картана мы называем формами, но умножать на гладкие функции не можем. Формы Маурера-Картана умножаются только на вещественные числа. При этом если мы будем действовать формой Маурера-Картана на левоинвариантное векторное поле, то в результате получим вещественное число! Это следует из того, что \mathfrak{g} является векторным пространством, а значит, на нем строятся тензоры как полилинейные отображения во множество вещественных чисел.

Далее, векторное пространство \mathfrak{g} стандартным образом (см. курс Тензорная алгебра) порождает тензорную алгебру $\mathfrak{T}(\mathfrak{g})$.

Задача 2.2. Докажите, что тензоры тензорной алгебры $\mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ являются *левоинвариантными*, то есть для любого $t \in \mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ и любого элемента $g \in G$ имеем

$$(L_g)_*t = t.$$

Здесь имеет место замечание, аналогичное замечанию 2.4, то есть, действуя левоинвариантными тензорными полями на набор аргументов из \mathfrak{g} и \mathfrak{g}^* , мы получим вещественное число.

Пусть дана группа Ли G размерности n и ее присоединенная алгебра Ли \mathfrak{g} . Напомним, что размерность \mathfrak{g} совпадает с размерностью G (теорема 2.2), а значит, равна n . Рассмотрим произвольный базис

(E_1, \dots, E_n) векторного пространства \mathfrak{g} . По определению алгебры Ли (замкнутость относительно операции коммутирования) левоинвариантное векторное поле $[E_i, E_j]$ должно принадлежать \mathfrak{g} для любых $i, j = 1, \dots, n$, а значит, его можно разложить по базису (E_1, \dots, E_n) , причем коэффициентами будут служить вещественные числа:

$$[E_i, E_j] = C_{ij}^k E_k. \quad (2.3)$$

Коэффициенты $\{C_{ij}^k\}$ называются *структурными константами алгебры Ли* \mathfrak{g} , а соотношения (2.3) называются *контравариантными структурными уравнениями группы Ли*.

Задача 2.3. Найдем закон преобразования структурных констант $\{C_{ij}^k\}$ при переходе от одного базиса (E_1, \dots, E_n) к другому базису $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$.

Решение. Отступая от многолетних традиций, обозначим матрицу перехода от базиса (E_1, \dots, E_n) к базису $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$ через $A = (A_j^i)$, $i, j = 1, \dots, n$, то есть

$$\tilde{E}_i = A_j^i E_j. \quad (2.4)$$

Так как мы работаем с векторным пространством, элементами матрицы A служат вещественные числа.

По определению структурных констант имеем

$$[\tilde{E}_i, \tilde{E}_j] = \tilde{C}_{ij}^k \tilde{E}_k.$$

Подставим в это равенство (2.4):

$$[A_i^k E_k, A_j^t E_t] = \tilde{C}_{ij}^k A_k^p E_p.$$

Так как коммутатор является \mathbb{R} -линейным отображением по каждому аргументу, учитывая (2.3), получим

$$A_i^k A_j^t C_{kt}^p E_p = \tilde{C}_{ij}^k A_k^p E_p.$$

В силу линейной независимости E_p получим

$$A_i^k A_j^t C_{kt}^p = \tilde{C}_{ij}^k A_k^p$$

или

$$\tilde{C}_{ij}^s = A_i^k A_j^t (A^{-1})_p^s C_{kt}^p.$$

Это тензорный закон преобразования. Как мы знаем из курса Тензорной алгебры, система чисел $\{C_{ij}^k\}$ задает тензор типа $(2,1)$ на векторном пространстве \mathfrak{g} . \square

Замечание 2.5. Напомним, что в § 1.2. мы ввели оператор внешнего дифференцирования d для алгебры Грассмана $\Lambda(M) \equiv \Lambda(\mathfrak{X}(M))$ гладкого многообразия M . Для алгебры Грассмана $\Lambda(\mathfrak{g})$ этот оператор "в лоб" не применим, так как он умеет дифференцировать $C^\infty(G)$ -линейные отображения вида

$$\Omega : \mathfrak{X}(G) \times \dots \times \mathfrak{X}(G) \rightarrow C^\infty(G),$$

а в алгебре Грассмана $\Lambda(\mathfrak{g})$ находятся \mathbb{R} -линейные отображения вида

$$\Omega : \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Мы поступим следующим образом: определим отображение $d : \Lambda(\mathfrak{g}) \rightarrow \Lambda(\mathfrak{g})$ по той же формуле (1.8), что и оператор внешнего дифференцирования. В нашем случае эта формула существенно упростится, так как результат действия формы из $\Lambda(\mathfrak{g})$ на наборе своих аргументов – это константа (вещественное число), а действие векторного поля на константе дает нуль. Тогда формула (1.8) примет вид

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1}),$$

где ω – r -ковектор, то есть элемент из $\Lambda_r(\mathfrak{g})$. В частности, для форм Маурера-Картана эта формула примет вид

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]), \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (2.5)$$

Нетрудно проверить, что введенное отображение d удовлетворяет всем свойствам, рассмотренным в § 1.2.. Поэтому мы будем это отображение также называть *оператором внешнего дифференцирования*.

Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ – дуальный базис для базиса (E_1, \dots, E_n) . По формулам (2.5), (2.3) получим

$$d\omega^k(E_i, E_j) = -\omega^k([E_i, E_j]) = -\omega^k(C_{ij}^m E_m) = -C_{ij}^m \omega^k(E_m) = -C_{ij}^m \delta_m^k = -C_{ij}^k.$$

Итак, мы получили, что компоненты 2-формы $d\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{T}_2^0(\mathfrak{g})$ равны $-C_{ij}^k$. Как мы знаем из курса Тензорной алгебры в векторном пространстве $\mathfrak{T}_2^0(\mathfrak{g})$ существует канонический базис $\{\omega^i \otimes \omega^j\}$. Он хорош тем, что коэффициенты разложения тензоров из $\mathfrak{T}_2^0(\mathfrak{g})$ по этому базису совпадают с их компонентами, то есть

$$d\omega^k = -C_{ij}^k \omega^i \otimes \omega^j.$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор альтернации Alt . Тогда согласно формулам (1.2) и (1.4) получим

$$d\omega^k = -C_{ij}^k Alt(\omega^i \otimes \omega^j) = -\frac{1!1!}{2!} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

Следовательно,

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j. \quad (2.6)$$

Эти уравнения называются *ковариантными структурными уравнениями Маурера-Картана* или, просто, *уравнениями Маурера-Картана группы Ли G* .

§2.3. Полная линейная группа.

В качестве примера общих понятий, изложенных в § 2.2., рассмотрим полную линейную группу $GL(n, \mathbb{R})$. Мы найдем ее алгебру Ли и вычислим уравнения Маурера-Картана.

Мы уже знаем, что группа Ли $GL(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием размерности n^2 . Ее атлас состоит из одной локальной карты $(GL(n, \mathbb{R}), \varphi)$, где картирующее отображение $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ ставит в соответствие каждой матрице $A = (a_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ в соответствие набор ее элементов, выписанных в строку (например, берем строки матрицы A и записываем их в одну строку). Так как координат в этой карте n^2 , их удобнее обозначать через (g_j^i) , где $i, j = 1, \dots, n$, верхний индекс обозначает номер строки, а нижний – номер столбца в матрице. Тогда координатные функции, которые ставят в соответствие матрице ее (i, j) -й элемент будем обозначать теми же символами

$$g_j^i : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; \quad g_j^i(A) = a_j^i.$$

Обозначим алгебру Ли группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$ через $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и докажем, что она изоморфна полной матричной алгебре Ли $M_{n,n}$. Для этого нам нужно построить изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и $M_{n,n}$.

Зададим отображение

$$\varkappa : T_e(GL(n, \mathbb{R})) = T_e(M_{n,n}) \rightarrow M_{n,n}$$

по формуле

$$(a_j^i) = (\xi(g_j^i)) \equiv ((dg_j^i)_e(\xi)), \quad (2.7)$$

где $\xi \in T_e(GL(n, \mathbb{R}))$ – произвольный элемент, a_j^i – элементы матрицы $A = \varkappa(\xi)$, $e = I_n$ – единичная матрица. Это отображение линейно, так как

$$\varkappa(\lambda\xi + \mu\eta) = ((\lambda\xi + \mu\eta)(g_j^i)) = \lambda(\xi(g_j^i)) + \mu(\eta(g_j^i)) = \lambda\varkappa(\xi) + \mu\varkappa(\eta),$$

где $\xi, \eta \in T_e(M_{n,n})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то есть \varkappa является гомоморфизмом.

Докажем биективность отображения \varkappa . Пусть $\xi \in \ker \varkappa$ – произвольный элемент из ядра отображения \varkappa . Тогда ему соответствует нулевая матрица

$$0 = \varkappa(\xi) = (\xi(g_j^i)),$$

то есть $\xi(g_j^i) = (dg_j^i)_e(\xi) = 0$ для любых $i, j = 1, \dots, n$. Так как $(dg_j^i)_e$ – ковекторы натурального базиса (см. пример 1.6), мы получаем, что все координаты вектора ξ равны нулю, то есть $\xi = 0$. Таким образом, отображение \varkappa является инъективным.

Сюръективность отображения \varkappa следует из того, что размерности векторных пространств $T_e(M_{n,n})$ и $M_{n,n}$ равны.

Итак, мы показали, что построенное отображение \varkappa будет изоморфизмом векторных пространств. Тогда отображение

$$\gamma = \varkappa \circ \beta : \mathfrak{g} \rightarrow M_{n,n}$$

будет изоморфизмом векторных пространств $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ и $M_{n,n}$.

Нам осталось показать, что отображение γ будет изоморфизмом алгебр Ли, то есть будет сохранять коммутатор, то есть

$$\gamma[X, Y] = [\gamma(X), \gamma(Y)], \quad X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Для этого нам потребуются вспомогательные формулы.

Лемма 2.1. Пусть $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$, $Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Тогда в принятых обозначениях

$$1) g_j^i \circ L_g = \sum_{k=1}^n g_k^i(g) g_j^k; \quad 2) Y(g_j^i) = \sum_{k=1}^n g_k^i Y_e(g_j^k).$$

Доказательство. Так как $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$, они являются матрицами. Применим правило умножения матриц

$$(g_j^i \circ L_g)(h) = g_j^i(gh) = \sum_{k=1}^n g_k^i(g) g_j^k(h).$$

В силу произвола в выборе элемента h получим первую формулу. Тогда, учитывая ее, получим

$$(Y(g_j^i))(g) = Y_g(g_j^i) = (((L_g)_*)_e)(Y_e)(g_j^i) = Y_e(g_j^i \circ L_g) = Y_e\left(\sum_{k=1}^n g_k^i(g) g_j^k\right) = \sum_{k=1}^n g_k^i(g) Y_e(g_j^k).$$

Здесь мы воспользовались определением векторного поля как дифференцирования алгебры гладких функций (см. курс Анализ на многообразиях), левоинвариантностью векторного поля Y и определением дифференциала отображения. Так как это равенство верно для любого элемента $g \in G$, то получим требуемое соотношение. \square

Теорема 2.4. Отображение $\gamma : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow M_{n,n}$ является изоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство. Заметим, что $\gamma(X)$ – это матрица. Обозначим ее элементы через $\gamma(X)_j^i$. Напомним, что первый индекс обозначает номер строки, а второй – номер столбца. Тогда из определения отображения γ получим

$$\gamma(X)_j^i = (\varkappa(X_e))_j^i = X_e(g_j^i).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \gamma([X, Y])_j^i &= [X, Y]_e(g_j^i) = ([X, Y](g_j^i))(e) = ((X \circ Y - Y \circ X)(g_j^i))(e) = (X(Y(g_j^i)) - Y(X(g_j^i)))(e) = \\ &= X_e(Y(g_j^i)) - Y_e(X(g_j^i)) = X_e\left(\sum_{k=1}^n g_k^i Y_e(g_j^k)\right) - Y_e\left(\sum_{k=1}^n g_k^i X_e(g_j^k)\right) = \sum_{k=1}^n (X_e(g_k^i) Y_e(g_j^k) - Y_e(g_k^i) X_e(g_j^k)) = \\ &= \sum_{k=1}^n \gamma(X)_k^i \gamma(Y)_j^k - \sum_{k=1}^n \gamma(Y)_k^i \gamma(X)_j^k = ((\gamma(X) \cdot \gamma(Y)) - \gamma(Y) \gamma(X))_j^i = [\gamma(X), \gamma(Y)]_j^i, \end{aligned}$$

Итак, отображение γ сохраняет коммутатор, следовательно, является изоморфизмом алгебр Ли. \square

Пример 2.9. Обозначим $\{e_j^i\}$ стандартный базис матричной алгебры $M_{n,n}$. В матрице e_j^i на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит единица, а на остальных местах стоят нули. Напомним, что атлас на гладком многообразии $GL(n, \mathbb{R})$ состоит из одной карты с координатами (g_j^i) . Картирующее отображение этой карты каждой матрице ставит в соответствие совокупность элементов этой матрицы, выписанных в одну строчку. Тогда натуральный базис этой карты будет $\left\{ \frac{\partial}{\partial g_j^i} \right\}$. Найдем образы векторов $\left\{ \frac{\partial}{\partial g_j^i} \Big|_e \right\}$ при отображении \varkappa .

Используем формулу (2.7):

$$\varkappa \left(\frac{\partial}{\partial g_j^i} \Big|_e \right)_\ell = (dg_\ell^k)_e \left(\frac{\partial}{\partial g_j^i} \Big|_e \right) = \delta_\ell^i \delta_j^k = (e_j^i)_\ell^k,$$

то есть $\varkappa \left(\frac{\partial}{\partial g_j^i} \Big|_e \right) = e_j^i$.

Вычислим уравнения Маурера-Картана группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. Фиксируем в полной матричной алгебре $M_{n,n}$ стандартный базис $\{e_j^i\}$, $i, j = 1, \dots, n$, состоящий из матриц e_j^i , у которых на пересечении j -й строки и i -го столбца стоит 1, а все остальные компоненты нулевые. В виде равенства это запишется в виде

$$(e_j^i)_\ell^k = \delta_\ell^i \delta_j^k.$$

Здесь индекс k обозначает номер строки, а индекс ℓ – номер столбца.

Этот базис порождает базис $E_j^i = \gamma^{-1}(e_j^i)$ в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Обозначим дуальный базис через $\{\omega_j^i\}$. Он характеризуется тем, что

$$\omega_\ell^k(E_j^i) = \delta_\ell^i \delta_j^k.$$

Запишем уравнения Маурера-Картана в нашем случае. Вспомним их общий вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c,$$

где $a, b, c = 1, \dots, n = \dim G$. В этих уравнениях есть один свободный индекс a , который нумерует уравнения, а также есть два индекса суммирования b, c , которые говорят о принадлежности коэффициента C_{bc}^a соответствующему произведению $\omega^b \wedge \omega^c$. В нашем случае каждая форма нумеруется двумя индексами. Тогда свободными будут два индекса, нумерующие уравнения. Они будут стоять у форм $d\omega$ и у коэффициентов C . Также нам потребуются индексы для суммирования по две штуки на каждую ω . Эти индексы должны также присутствовать в коэффициенте C и показывать, что по ним происходит суммирование. В результате получим

$$d\omega_j^i = -\frac{1}{2}C_{jkr}^{ilt}\omega_\ell^k \wedge \omega_t^r. \quad (2.8)$$

Структурные константы C_{jkr}^{ilt} определяются уравнениями

$$[E_k^\ell, E_r^t]C_{qkr}^{plt}E_p^q.$$

Поддействуем на обе части этого уравнения изоморфизмом γ^{-1} . Так как γ^{-1} – изоморфизм алгебр Ли, получим

$$[e_k^\ell, e_r^t] = C_{qkr}^{plt}e_p^q \quad (2.9)$$

(см. формулу (2.3)). Найдем из этих уравнений структурные константы. Для этого вычислим компоненты матриц, стоящих в левой и правой частях этого равенства. Расписываем левую часть равенства (2.9).

$$[e_k^\ell, e_r^t]^i = (e_k^\ell)_p^i (e_r^t)_j^p - (e_r^t)_p^i (e_k^\ell)_j^p = \delta_p^\ell \delta_k^i \delta_j^t \delta_r^p - \delta_p^t \delta_r^i \delta_j^\ell \delta_k^p = \delta_r^\ell \delta_k^i \delta_j^t - \delta_k^t \delta_r^i \delta_j^\ell.$$

Расписываем правую часть равенства (2.9).

$$\left(C_{qkr}^{plt}e_p^q\right)_j^i = C_{qkr}^{plt}\delta_j^q \delta_p^i = C_{jkr}^{ilt}.$$

Итак, мы получили

$$C_{jkr}^{ilt} = \delta_r^\ell \delta_k^i \delta_j^t - \delta_k^t \delta_r^i \delta_j^\ell.$$

Наконец, подставим полученный результат в (2.8):

$$d\omega_j^i = -\frac{1}{2}(\delta_r^\ell \delta_k^i \delta_j^t - \delta_k^t \delta_r^i \delta_j^\ell)\omega_\ell^k \wedge \omega_t^r = -\frac{1}{2}(\omega_r^i \wedge \omega_j^r - \omega_j^t \wedge \omega_t^i) = -\omega_r^i \wedge \omega_j^r.$$

Мы заменили индекс суммирования t во втором слагаемом на индекс r и привели подобные. Итак, уравнения Маурера-Картана для полной линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ в стандартном базисе $E_j^i = \gamma^{-1}(e_j^i)$ имеют вид

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k.$$

Замечание 2.6. Нетрудно показать, что алгебра эндоморфизмов $End V$ векторного пространства V является алгеброй Ли группы Ли автоморфизмов $Aut V$ этого векторного пространства относительно операции коммутирования, заданной формулой

$$[L_1, L_2] = L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1, \quad L_1, L_2 \in End V.$$

Для этого нужно фиксировать базис в V . Тогда элементы из группы $Aut V$ могут быть отождествлены с матрицами группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$, а элементы из $End V$ с матрицами полной матричной алгебры $M_{n,n}$. Откуда следует, что алгебра эндоморфизмов является присоединенной алгеброй Ли группы Ли $Aut V$.

§2.4. Гомоморфизмы групп Ли и алгебр Ли.

Определение 2.3. Отображение $\varphi : G \rightarrow H$ групп Ли называется *гомоморфизмом групп Ли*, если

- (1) отображение φ является гладким;
- (2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in G$.

В частности, если группа H является группой Ли автоморфизмов $Aut V$ некоторого векторного пространства V , то гомоморфизм групп Ли называется *линейным представлением группы Ли G* . Гомоморфизм групп Ли, являющийся диффеоморфизмом, называется *изоморфизмом групп Ли*. Изоморфизм группы Ли на себя называется *автоморфизмом группы Ли*.

Определение 2.4. Отображение $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ алгебр Ли называется *гомоморфизмом алгебр Ли*, если

- (1) отображение ϕ является линейным;

$$(2) \phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Гомоморфизм алгебр Ли, являющийся биекцией, называется *изоморфизмом алгебр Ли*.

Если алгебра Ли \mathfrak{h} является алгеброй эндоморфизмов $End V$ некоторого векторного пространства V , то гомоморфизм алгебр Ли ϕ называется *линейным представлением алгебры Ли \mathfrak{g}* .

Пусть $\varphi : G \rightarrow H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда

$$\varphi(e) = \tilde{e},$$

где e – единица группы Ли G , \tilde{e} – единица группы Ли H . Этот результат мы можем взять из алгебры (свойство гомоморфизма абстрактных групп). Тогда дифференциал $(\varphi_*)_e$ отображения φ является линейным отображением касательных пространств $T_e(G)$ и $T_{\tilde{e}}(H)$ (см. § 1.3.). Это отображение задает \mathbb{R} -линейное отображение присоединенных алгебр Ли

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

по формуле

$$\phi = (\tilde{\beta})^{-1} \circ (\varphi_*)_e \circ \beta, \quad (2.10)$$

где $\beta : \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$, $\tilde{\beta} : \mathfrak{h} \rightarrow T_{\tilde{e}}(H)$ – изоморфизмы векторных пространств, построенные в теореме 2.2.

Записав формулу (2.10) в виде

$$\tilde{\beta} \circ \phi = (\varphi_*)_e \circ \beta,$$

получим, что отображение ϕ однозначно задается формулой

$$(\phi(X))_{\tilde{e}} = (\varphi_*)_e(X_e), \quad X \in \mathfrak{g}. \quad (2.11)$$

Теорема 2.5. Пусть G и H – группы Ли с алгебрами Ли \mathfrak{g} и \mathfrak{h} соответственно. Пусть $\varphi : G \rightarrow H$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда

- (1) для любого левоинвариантного поля $X \in \mathfrak{g}$ векторные поля X и $\phi(X)$ являются φ -связанными;
- (2) $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство. Из определения гомоморфизма групп Ли получим, что для любых элементов $g, h \in G$ имеет место равенство

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h).$$

Откуда получим, что

$$\varphi(L_g(h)) = L_{\varphi(g)}(\varphi(h)).$$

Так как это верно для любого $h \in G$, получим

$$\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi, \quad \forall g \in G. \quad (2.12)$$

Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле на группе Ли G . Нам нужно доказать, что векторные поля X и $\tilde{X} \equiv \phi(X)$ будут φ -связанными. Согласно теореме 1.2 нам нужно доказать для этого, что

$$\tilde{X}_{\varphi(g)} = (\varphi_*)_g X_g.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\varphi(g)} &= ((L_{\varphi(g)})_*)_e \tilde{X}_{\tilde{e}} = ((L_{\varphi(g)})_*)_e (\varphi_*)_e X_e = ((L_{\varphi(g)} \circ \varphi)_*)_e (X_e) = ((\varphi \circ L_g)_*)_e (X_e) = (\varphi_*)_g \circ ((L_g)_*)_e (X_e) = \\ &= (\varphi_*)_g (X_g) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались левоинвариантностью векторного поля $\tilde{X} \in \mathfrak{h}$, формулой (2.11), свойством композиции дифференциалов, формулой (2.12) и левоинвариантностью векторного поля $X \in \mathfrak{g}$. Итак, мы показали, что векторные поля $X \in \mathfrak{g}$ и $\phi(X) \in \mathfrak{h}$ являются φ -связанными.

Далее, нам нужно показать, что линейное отображение ϕ присоединенных алгебр \mathfrak{g} и \mathfrak{h} будет гомоморфизмом алгебр Ли. Здесь осталось доказать, что ϕ сохраняет коммутатор, то есть

$$\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Как мы доказали, векторные поля X и ϕX являются φ -связанными, то есть $\phi X = \varphi_* X$. Аналогично для векторного поля Y . Тогда согласно предложению 1.3 векторное поле $[\phi X, \phi Y]$ будет φ -связано с векторным полем $[X, Y]$, то есть

$$[\phi X, \phi Y] = \varphi_* [X, Y].$$

С другой стороны, как показано выше, векторное поле $[X, Y]$ φ -связано с векторным полем $\phi[X, Y]$, то есть

$$\phi[X, Y] = \varphi_* [X, Y].$$

Откуда получаем требуемое соотношение. □

§2.5. Подгруппы Ли. Однопараметрические подгруппы Ли и экспоненциальное отображение.

5.1. Пусть $\varphi : H \rightarrow G$ – гомоморфизм групп Ли. Пара (H, φ) называется *подгруппой Ли* группы Ли G , если она является подмногообразием гладкого многообразия G , то есть отображение φ является регулярным и инъективным.

Определение 2.5. Пусть \mathfrak{g} – алгебра Ли. Векторное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Ли* алгебры Ли \mathfrak{g} , если оно замкнуто относительно коммутатора, то есть для любых элементов $X, Y \in \mathfrak{h}$ имеем $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Пример 2.10. Пусть (H, φ) – подгруппа Ли группы Ли G . Докажем, что отображение

$$\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$$

их присоединенных алгебр Ли является изоморфизмом алгебр Ли \mathfrak{h} и $\phi(\mathfrak{h})$. Так как отображение φ регулярно (то есть его дифференциал в каждой точке инъективен), отображение ϕ , связанное с отображением φ_* по формуле (2.11), также будет инъективным, следовательно, будет являться биекцией на образ. Кроме того, в теореме 2.5 мы доказали, что оно будет гомоморфизмом алгебр Ли. Итак, отображение ϕ является изоморфизмом алгебр Ли.

5.2. *Однопараметрической подгруппой* группы Ли G называется гомоморфизм групп Ли $g : \mathbb{R} \rightarrow G$, где $(\mathbb{R}, +)$ – аддитивная группа Ли, построенная в примере 2.1.

Другими словами, гладкое отображение $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ называется однопараметрической подгруппой группы Ли G , если для любых вещественных чисел t_1, t_2 имеем

$$g(t_1 + t_2) = g(t_1)g(t_2).$$

Замечание 2.7. Так как однопараметрическая подгруппа $g(t)$ является, в частности, гомоморфизмом абстрактных групп $(\mathbb{R}, +)$ и (G, \cdot) , то она переводит нейтральный элемент в нейтральный, то есть $g(0) = e$.

Лемма 2.2. Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – ненулевое левоинвариантное векторное поле на группе Ли G . Тогда порожденный им локальный поток Φ_X на гладком многообразии G (см. § 1.7.) обладает следующими свойствами

- (1) $\Phi_X(\Phi_X(a, t_1), t_2) = \Phi_X(a, t_1 + t_2)$;
- (2) $\Phi_{\lambda X}(a, t) = \Phi_X(a, \lambda t)$;
- (3) $\Phi_X(b \cdot a, t) = b \cdot \Phi_X(a, t)$,

где $a, b \in G$, $\lambda, t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Первые два свойства суть общие свойства локальных потоков, которые были доказаны в теореме 1.11.

Докажем третье свойство. Рассмотрим интегральную кривую $g(t) = \Phi_X(a, t)$ векторного поля X с началом в точке $a \in G$ и кривую $L_b g(t)$. Докажем, что кривая $L_b g(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \gamma(t) = X_{\gamma(t)}; \\ \gamma(0) = b \cdot a. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{d}{dt} L_b g(t) = (L_b)_* \frac{dg(t)}{dt} = (L_b)_*(X_{g(t)}) = X_{L_b g(t)}.$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.22); тем, что $g(t)$ является интегральной кривой векторного поля X ; левоинвариантностью векторного поля X и теоремой 1.2. Обратите внимание, что мы не ставим у дифференциала отображения точку, в которой он берется. Это связано с громоздкостью такой записи. Везде, где стоит дифференциал, берется та точка, в которой определен стоящий далее вектор.

Кроме того, очевидно, $L_b g(0) = b \cdot g(0) = b \cdot a$. С другой стороны, кривая $\tilde{g}(t) = \Phi_X(b \cdot a, t)$ является интегральной кривой того же поля X с началом в точке $b \cdot a$. Следовательно, кривые $L_b g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ совпадают, то есть $b \cdot \Phi_X(a, t) = \Phi_X(b \cdot a, t)$. \square

Теорема 2.6. Всякое левоинвариантное векторное поле на группе Ли полно. При этом его интегральная кривая с началом в единице группы является однопараметрической подгруппой.

Доказательство. Пусть дано левоинвариантное векторное поле $X \in \mathfrak{g}$, где \mathfrak{g} – алгебра Ли группы Ли G . Нам нужно доказать, что локальный поток Φ_X , определяемый этим векторным полем определен на всем многообразии $G \times \mathbb{R}$ (см. § 1.7.). Для этого мы сначала определим локальный поток в некоторой окрестности единицы и для некоторого интервала для t , а затем, определим его для всех t и левыми сдвигами разнесем по всей группе G .

Пусть определен локальный поток $\Phi(e, t)$ для точек некоторой окрестности e и для значений t в некотором интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Покажем, что этот поток можно определить для любого t из этого интервала и любого элемента $a \in G$. Действительно, по третьему свойству из леммы 2.2 получим

$$\Phi_X(a, t) = a \cdot \Phi_X(e, t).$$

Так как определена правая часть равенства, определена и левая часть равенства.

Покажем теперь, что локальный поток можно определить для любого вещественного числа t . Опять воспользуемся леммой 2.2. Очевидно, что для любого t существует такое натуральное число n , что число $\frac{t}{n}$ будет принадлежать интервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$, а значит, для $\frac{t}{n}$ локальный поток будет определен. Тогда

$$\Phi_X(a, t) = \Phi_X(a, n \cdot \frac{t}{n}) = \Phi_X(e, \underbrace{\frac{t}{n} + \dots + \frac{t}{n}}_{n \text{ раз}}) = \Phi_X(\dots (\Phi_X(a, \frac{t}{n}), \frac{t}{n}) \dots).$$

Каждый локальный поток в скобках правой части равенства определен, следовательно, определен и локальный поток в левой части равенства.

Итак, отображение Φ_X определено на многообразии $G \times \mathbb{R}$, а значит, векторное поле X полно.

Обозначим $g(t) = \Phi_X(e, t)$ – это интегральная кривая векторного поля X с началом в точке e . Нам нужно доказать, что она является однопараметрической подгруппой группы Ли G . Во-первых, заметим, что это отображение вида $g : \mathbb{R} \rightarrow G$, определенное на всей числовой прямой. Во-вторых, имеем

$$g(t_1 + t_2) = \Phi_X(e, t_1 + t_2) = \Phi_X(\Phi_X(e, t_1), t_2) = \Phi_X(e, t_1) \cdot \Phi_X(e, t_2) = g(t_1) \cdot g(t_2).$$

Здесь мы воспользовались свойствами (1) и (3) леммы 2.2, то есть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G по определению. \square

Теорема 2.7. *Всякая однопараметрическая подгруппа группы Ли является интегральной кривой некоторого левоинвариантного векторного поля на этой группе Ли с началом в единице группы.*

Доказательство. Пусть $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы Ли G . По сути это гладкая кривая, а значит, имеет смысл говорить о касательных векторах к этой кривой в ее точках. Пусть

$$\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(t)$$

касательный вектор к $g(t)$ в точке $g(0) = e$ (см. замечание 2.7 и договоренность (1.21)). На касательный вектор ξ в единице группы G мы можем подействовать изоморфизмом β^{-1} (см. теорему 2.2) и получить левоинвариантное векторное поле $X \in \mathfrak{g}$, то есть $X = \beta^{-1}(\xi)$. Докажем, что $g(t)$ является интегральной кривой векторного поля X . Имеем для произвольного фиксированного вещественного числа t_1

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} g(t) &= \left. \frac{d}{d(t-t_1)} \right|_{t-t_1=0} g((t-t_1)+t_1) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} g(\tau+t_1) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} g(t_1) \cdot g(\tau) = ((L_{g(t_1)})_*)_e \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} g(\tau) = \\ &= ((L_{g(t_1)})_*)_e \xi = X_{g(t_1)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением однопараметрической подгруппы, формулой (1.22) и левоинвариантностью векторного поля X (то есть тем, что $X_g = ((L_g)_*)_e \xi$).

Итак, кривая $g(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} g(t) = X_{g(t)}; \\ g(0) = e, \end{cases}$$

следовательно, она будет интегральной кривой построенного левоинвариантного векторного поля X . \square

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством \mathfrak{g} левоинвариантных векторных полей на группе Ли G и множеством однопараметрических подгрупп группы Ли G . Оно сопоставляет каждому элементу $X \in \mathfrak{g}$ однопараметрическую подгруппу $g(t)$, являющуюся интегральной кривой этого векторного поля с началом в единице группы. Эта однопараметрическая подгруппа однозначно определена условиями

$$1) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(t) = X_e; \quad 2) g(0) = e. \quad (2.13)$$

Элемент X присоединенной алгебры Ли \mathfrak{g} группы Ли G , порождающий однопараметрическую подгруппу указанным образом, называется *генератором* этой однопараметрической подгруппы.

Определение 2.6. Пусть G – группа Ли, \mathfrak{g} – ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей. Экспоненциальным отображением называется отображение

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G,$$

определяемое соотношением

$$\exp X = \Phi(e, 1).$$

Теорема 2.8. Всякая однопараметрическая подгруппа $g(t)$ группы Ли G с генератором $X \in \mathfrak{g}$ допускает представление

$$g(t) = \exp(tX).$$

Доказательство. Учитывая свойство (2) леммы 2.2, получим

$$g(t) = \Phi_X(e, t) = \Phi_{tX}(e, 1) = \exp(tX).$$

□

Следующую теорему мы примем без доказательства.

Теорема 2.9. Отображение $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ является гладким отображением относительно канонической гладкой структуры векторного пространства на \mathfrak{g} . Более того, существует окрестность $U_0(\mathfrak{g})$ нуля в алгебре Ли \mathfrak{g} и окрестность $U_e(G)$ единицы в группе Ли G , такие что экспоненциальное отображение \exp будет диффеоморфизмом этих окрестностей.

Окрестности $U_0(\mathfrak{g})$ и $U_e(G)$ из теоремы 2.9 называются нормальными окрестностями.

Нам потребуется еще одна теорема из теории групп Ли, которую мы примем без доказательства.

Теорема 2.10. Пусть $\varphi : H \rightarrow G$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\phi = \varphi_*|_{\mathfrak{h}}} & \mathfrak{g} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G, \end{array}$$

где \mathfrak{g} и \mathfrak{h} – алгебры Ли групп Ли G и H соответственно.

В частности, если $\varphi : G \rightarrow G$ – гомоморфизм группы Ли G на себя, то коммутативную диаграмму можно записать в виде

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ \phi.$$

Глава 3. Главные расслоения.

§3.1. Действие группы на многообразии.

Говорят, что группа (абстрактная) G действует на множестве M слева, если задан гомоморфизм

$$\varphi : G \rightarrow G_M$$

в группу G_M преобразований множества M , то есть выполняется соотношение

$$\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h), \quad g, h \in G.$$

Аналогичным образом, говорят, что группа G действует на множестве M справа, если задан антигомоморфизм

$$\varphi : G \rightarrow G_M$$

в группу G_M преобразований множества M , то есть выполняется соотношение

$$\varphi(gh) = \varphi(h) \circ \varphi(g), \quad g, h \in G.$$

Предложение 3.1. Задание гомоморфизма φ равносильно заданию отображения $\Phi : G \times M \rightarrow M$, обладающего свойствами

- 1) $\Phi(e, m) = m$;
- 2a) $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(gh, m)$ для левого действия;
- 2b) $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(hg, m)$ для правого действия;

Доказательство. Рассмотрим случай левого действия (правое действие рассматривается аналогичным образом). Пусть дано левое действие группы G на множестве M , то есть задан гомоморфизм φ . Зададим отображение Φ формулой

$$\Phi(g, m) = \varphi_g(m), \quad g \in G, m \in M.$$

Докажем, что отображение Φ обладает требуемыми свойствами. Во-первых, $\Phi(e, m) = \varphi_e(m)$. По свойству гомоморфизма групп имеем $\varphi_e = id$, а значит, $\Phi(e, m) = m$ и первое свойство доказано. Во-вторых, имеем

$$\Phi(g, \Phi(h, m)) = \varphi_g \circ \varphi_h(m) = \varphi_{gh}(m) = \Phi(gh, m).$$

Здесь мы воспользовались определением левого действия. Итак, отображение Φ обладает обоими свойствами.

Обратно, пусть задано отображение Φ , удовлетворяющее указанным свойствам. Тогда определим отображение $\varphi : G \rightarrow G_M$ по формуле

$$\varphi(g)(m) \equiv \varphi_g(m) = \Phi(g, m),$$

то есть по той же самой формуле, но прочитанной справа налево. Проверим, что отображение φ является гомоморфизмом (абстрактных) групп. Имеем

$$\varphi_{gh}(m) = \Phi(gh, m) = \Phi(g, \Phi(h, m)) = \varphi_g \circ \varphi_h(m).$$

Здесь мы воспользовались вторым свойством отображения Φ . □

Отображение Φ называется *действием группы G на множестве M* , а гомоморфизм φ называется *представлением группы G на множестве M* .

Если представление φ инъективно, то оно называется *точным*, а соответствующее действие называется *эффективным*.

Пример 3.1. Пусть $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Это группа относительно операции умножения комплексных чисел. Множество G можно изобразить как окружность с центром в некоторой фиксированной точке O , которая принята за начало системы координат. Обозначим плоскость, в которой лежит эта окружность, через σ .

Рассмотрим множество поворотов плоскости σ на всевозможные направленные углы вокруг точки O . Это группа. Обозначим ее G_σ^R . Очевидно, что группа поворотов G_σ^R является подгруппой группы G_σ преобразований плоскости σ .

Построим отображение $\varphi : G \rightarrow G_\sigma$ следующим образом. Пусть $z \in G$ – произвольное комплексное число. Его можно представить в виде $z = e^{i\psi}$, где $-\pi < \psi \leq \pi$. Тогда комплексному числу $z = e^{i\psi}$ поставим в соответствие поворот R_O^ψ вокруг точки O на угол ψ . Докажем, что отображение φ задает левое (одновременно являющееся и правым) действие группы G на множестве точек плоскости σ . Для комплексных чисел $z_1 = e^{i\psi_1}, z_2 = e^{i\psi_2} \in G$ имеем

$$\varphi(z_1 z_2) = \varphi(e^{i(\psi_1 + \psi_2)}) = R_O^{\psi_1 + \psi_2} = R_O^{\psi_1} \circ R_O^{\psi_2}.$$

Итак, отображение φ является гомоморфизмом, следовательно, задает левое действие. Почему действие будет также и правым?

Проверим, будет ли это действие эффективным. Для этого нам нужно проверить, будет ли гомоморфизм φ инъективным. Пусть $z = e^{i\psi} \in Ker \varphi$, то есть $\varphi(z) = id \equiv R_O^0$. Тогда $\psi = 0$ и $z = 1$. Итак, отображение φ является инъективным, а действие группы G эффективным.

Замечание 3.1. В случае эффективного действия группы G элемент $g \in G$ можно отождествлять с его образом φ_g . Тогда можно записать, что $(gh)m = g(hm)$ для левого действия и $(gh)m = h(gm)$ для правого действия. Здесь $g, h \in G, m \in M$. Отметим, что для правого действия удобнее принять запись $\varphi_g(m) = mg$. Тогда условие антигомоморфности отображение φ будет записано в виде $m(gh) = (mg)h$. Чем и обусловлено название "правое действие".

Говорят, что группа G действует на множестве M *транзитивно*, если для любых элементов $x, y \in M$ существует элемент $g \in G$, такой что $\varphi_g(x) = y$.

Пример 3.2. Действие группы G из примера 3.1 не является транзитивным. Действительно, рассмотрим две точки плоскости σ , принадлежащие различным концентрическим окружностям с центром в точке O . Тогда не существует поворота, переводящего одну точку во вторую.

Пример 3.3. Возьмем в качестве G группу \mathbb{R}^2 с операцией сложения. В качестве множества M возьмем множество точек плоскости σ и фиксируем на ней аффинную систему координат. Тогда отображение φ , ставящее в соответствие каждой паре чисел (a, b) параллельный перенос на вектор с координатами (a, b) в базисе фиксированной системы координат будет задавать левое (и одновременно правое действие) группы

\mathbb{R}^2 на множестве точек плоскости σ (докажите самостоятельно). Это действие будет транзитивным, так как для любых двух точек x, y плоскости существует параллельный перенос, переводящий одну точку во вторую. Возьмем координаты вектора этого параллельного переноса. Это будет элемент g группы \mathbb{R}^2 , для которого $\varphi_g(x) = y$. Таким образом, группа \mathbb{R}^2 действует на плоскости транзитивно.

Говорят, что группа G действует на множестве M *свободно*, если из того, что для элемента $g \in G$ существует точка $t \in M$, такая что $\varphi_g t = t$, следует $g = e$. Как всегда e – единица группы.

Замечание 3.2. Определение эффективного действия мы можем сформулировать в другом виде: действие называется эффективным, если для элемента $g \in G$ и любого элемента $t \in M$ равенство $\varphi_g t = t$ влечет $g = e$.

Сравнивая определения эффективного и свободного действия, получаем, что любое свободное действие эффективно.

Обратное, вообще говоря, не верно. Действие из примера 3.1 является эффективным, но не свободным, так как точка O является неподвижной точкой не только тождественного преобразования.

Пусть группа G действует на множестве M . Тогда любая точка $t \in M$ порождает отображение

$$\sigma_m : G \rightarrow M,$$

сопоставляя каждому элементу $g \in G$ точку

$$\sigma_m(g) = \varphi_g(m).$$

Определение 3.1. Образ отображения σ_m называется *орбитой* точки t относительно действия группы G и обозначается $Orb(m)$.

Пример 3.4. В примере 3.1 орбитами группы G будут концентрические окружности с центром в точке O .

Задача 3.1. Докажите, что $Orb(m) = M$ тогда и только тогда, когда действие транзитивно.

Лемма 3.1. Если действие свободно, то отображение $\sigma_m : G \rightarrow M$ является биекцией на соответствующую орбиту.

Доказательство. Нам нужно доказать инъективность отображения σ_m . Пусть для некоторых точек $g_1, g_2 \in G$ имеем $\sigma_m(g_1) = \sigma_m(g_2)$. Тогда согласно определению отображения σ_m получим

$$\varphi_{g_1}(m) = \varphi_{g_2}(m). \quad (3.1)$$

Так как действие свободно, а значит, эффективно, гомоморфизм φ инъективен, следовательно, обратим. Умножим обе части равенства 3.1 слева на $\varphi_{g_2}^{-1} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$. Так как $\varphi_{g_2}^{-1} = \varphi_{g_2^{-1}}$, получим $\varphi_{g_2^{-1}} \circ \varphi_{g_1}(m) = m$. По определению левого действия это равносильно $\varphi_{g_2^{-1}g_1}(m) = m$. Так как действие свободно, $g_2^{-1}g_1 = e$, то есть $g_1 = g_2$.

Итак, мы показали, что для свободного действия отображение $\sigma_m : G \rightarrow Orb(m)$ является биекцией. \square

Из леммы непосредственно следует

Теорема 3.1. Если группа G действует на множестве M свободно, то M распадается в дизъюнктивное объединение орбит, находящихся в биективном соответствии с группой G . \square

Пример 3.5. Рассмотрим группу G из примера 3.1 и множество точек плоскости σ без точки O . Тогда на множестве $\sigma \setminus \{O\}$ группа G действует свободно и это множество распадается в дизъюнктивное объединение концентрических окружностей с центром в точке O . Каждая такая окружность является орбитой действия группы G .

Определение 3.2. Пусть G – группа Ли, φ – ее гомоморфизм как абстрактной группы в группу $Diff M$ диффеоморфизмов гладкого многообразия M . Говорят, что G *гладко действует на многообразии M* , если действие $\Phi : G \times M \rightarrow M$ является гладким отображением.

Пример 3.6. Пусть G – r -мерная группа Ли, $\varphi : G \rightarrow Aut V$ – ее представление, то есть гомоморфизм в группу Ли $Aut V$ некоторого n -мерного линейного пространства V .

Фиксируем локальную карту (U, ψ) на группе Ли G с координатами (x^1, \dots, x^r) , а также глобальную карту на V , порожденную базисом $b = (e_1, \dots, e_n)$. Этот базис порождает базис, а значит и глобальную карту в векторном пространстве $\mathfrak{X}_1^1(V)$ тензоров типа $(1,1)$, а именно, базис $(e_j^i = e^i \otimes e_j)$. Здесь как всегда (e^1, \dots, e^n) – дуальный базис для b .

В этой паре карт гомоморфизм φ задается гладкими функциями (по определению гомоморфизма групп Ли § 2.4.)

$$t_j^i = t_j^i(x^1, \dots, x^r); \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда действие $\Phi : G \times V \rightarrow V$ группы G на векторном пространстве V задается в этих картах уравнениями

$$\tilde{X}^i = t_j^i(x^1, \dots, x^r) X^j,$$

где (X^1, \dots, X^n) – координаты вектора $X \in V$ в базисе b . Следовательно, отображение Φ является гладким, так как существуют непрерывные частные производные по переменным x^1, \dots, x^r и X^1, \dots, X^n .

Вывод: всякое линейное представление группы Ли порождает ее гладкое действие в соответствующем линейном пространстве.

Особенно важным частным случаем линейного представления группы Ли является так называемое *присоединенное представление*. Здесь в качестве векторного пространства берется ее алгебра Ли \mathfrak{g} .

Пример 3.7. Пусть G – группа Ли, \mathfrak{g} – ее алгебра Ли, то есть множество левоинвариантных векторных полей на группе G . Группа Ли G действует на себя слева посредством так называемых *внутренних автоморфизмов*. Именно, любой элемент $a \in G$ порождает отображение $A_a : G \rightarrow G$ по формуле

$$A_a(x) = axa^{-1}, \quad x \in G.$$

Это отображение является гомоморфизмом, так как

$$A_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = A_a(x)A_a(y), \quad x, y \in G.$$

Более того, $A_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$, где L_a – это левый сдвиг на элемент a , $R_{a^{-1}}$ – правый сдвиг на элемент a^{-1} . Тогда отображение A_a будет диффеоморфизмом как композиция таковых (см. теорему 2.1). Следовательно, отображение A_a является изоморфизмом группы Ли G .

Далее, имеем для любых $a, b \in G$

$$A_a \circ A_b(x) = A_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = A_{ab}(x), \quad x \in G.$$

Тогда отображение $A : G \rightarrow \text{Aut}(G) \subset G_G$, определенное формулой

$$A(g) = A_g$$

является гомоморфизмом групп. Так как групповые операции гладки, отображение A будет гладким, следовательно, отображение A является представлением группы Ли G на себе. Само действие $\Phi : G \times G \rightarrow G$ задается формулой

$$\Phi(g, x) = A_g(x) = gxg^{-1}.$$

Пусть $g \in G$ – фиксированный элемент и $A_g : G \rightarrow G$ – внутренний автоморфизм. Его дифференциал $((A_g)_*)_e : T_e(G) \rightarrow T_e(G)$ в единице e группы будет изоморфизмом касательных пространств (см. теорема 1.4). Тогда отображение

$$\text{Ad}(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$$

будет автоморфизмом алгебры Ли \mathfrak{g} , где $\beta : \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$ – канонический изоморфизм (см. теорему 2.2). Определим отображение

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$$

по формуле $\text{Ad}(g) = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta$. Это отображение будет гомоморфизмом групп Ли. Действительно,

$$\text{Ad}(gh) = \beta^{-1} \circ ((A_{gh})*)_e \circ \beta = \beta^{-1} \circ ((A_g \circ A_h)_*)_e \circ \beta = \beta^{-1} \circ ((A_g)_*)_e \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ ((A_h)_*)_e \circ \beta = \text{Ad}(g) \circ \text{Ad}(h).$$

Таким образом, отображение Ad является линейным представлением группы G на ее алгебре Ли. Это представление называется *присоединенным представлением* группы Ли.

Рассмотрим дифференциал отображения Ad в единице e группы G :

$$(\text{Ad}_*)_e : T_e(G) \rightarrow T_{id}(\text{Aut } \mathfrak{g}).$$

Касательное пространство $T_{id}(\text{Aut } \mathfrak{g})$ изоморфно алгебре Ли группы Ли $\text{Aut } \mathfrak{g}$. Канонический изоморфизм обозначим $\tilde{\beta}$. Как мы знаем (см. замечание 2.6), алгебра Ли группы Ли $\text{Aut } \mathfrak{g}$ – это алгебра эндоморфизмов $\text{End } \mathfrak{g}$. Таким образом, определено отображение

$$\text{ad} = \tilde{\beta}^{-1} \circ (\text{Ad}_*)_e \circ \beta : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}.$$

Можно показать, что это отображение является гомоморфизмом алгебр Ли, а значит, линейным представлением алгебры Ли \mathfrak{g} на себе (см. определение 2.4). Это представление также называется *присоединенным представлением*.

Кроме того, имеет место формула

$$ad_X Y = [X, Y],$$

где $X, Y \in \mathfrak{g}$, $ad_X = ad(X) \in End \mathfrak{g}$, квадратные скобки обозначают коммутатор левоинвариантных векторных полей в алгебре Ли \mathfrak{g} .

Пример 3.8. Пусть V – n -мерное вещественное векторное пространство. Обозначим через \mathfrak{B} множество всех базисов V . На этом множестве определено действие группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. Именно, пусть $b = (e_1, \dots, e_n) \in \mathfrak{B}$ – произвольный базис. Положим для любого элемента $g \in GL(n, \mathbb{R})$

$$\varphi_g(b) = \Phi(g, b) = (g_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, g_n^{i_n} e_{i_n}).$$

В силу невырожденности матрицы g , векторы $\varepsilon_i = g_i^j e_j$ будут линейно независимы, а значит, будут образовывать базис в V . Следовательно, $\varphi_g(b) \in \mathfrak{B}$. Очевидно, что отображение φ_g – биекция, то есть преобразование множества \mathfrak{B} , то есть $\varphi_g \in G_{\mathfrak{B}}$.

Выясним, какое это действие: правое или левое. Пусть $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$ – произвольные элементы. Тогда

$$\varphi_h \circ \varphi_g(b) = \varphi_h(\varphi_g(e_1, \dots, e_n)) = \varphi_h(g_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, g_n^{i_n} e_{i_n}) = (h_1^{j_1} g_{j_1}^{i_1} e_{i_1}, \dots, h_n^{j_n} g_{j_n}^{i_n} e_{i_n}) \quad (3.2)$$

По правилу записи матрицы перехода от одного базиса к другому (именно ею является матрица g) верхний индекс обозначает номер координаты вектора нового базиса. Эти координаты записываются в столбец матрицы перехода, следовательно, верхний индекс нумерует строки матрицы g . Тогда нижний индекс нумерует столбцы. Вернемся к последнему базису в 3.2. По правилу умножения матриц (строка на столбец) в первом сомножителе должны меняться номера столбцов, то есть нижние индексы. В нашем случае первой матрицей является матрица g , а вторым сомножителем является матрица h . Возвращаясь к цепочке равенств 3.2, получим

$$\varphi_h \circ \varphi_g(b) = ((gh)_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, (gh)_n^{i_n} e_{i_n}) = \varphi_{gh}(b).$$

Итак, $\varphi_h \circ \varphi_g = \varphi_{gh}$, то есть действие правое.

Так как для любых двух базисов всегда существует матрица перехода от одного к другому, то действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ является транзитивным. Кроме того, оно свободно, так как только единичная матрица не меняет базис.

Действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ позволяет ввести на множестве \mathfrak{B} базисов векторного пространства V структуру гладкого многообразия и превратить действие Φ в гладкое действие на гладком многообразии \mathfrak{B} .

Чтобы построить гладкую структуру на \mathfrak{B} нам потребуется внести туда топологию и построить атлас. Начнем с карт атласа. Фиксируем базис $b_0 \in \mathfrak{B}$. Тогда возникает отображение

$$\sigma_{b_0} : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{B},$$

определенное формулой $\sigma_{b_0}(g) = \varphi_g(b_0)$, то есть каждой матрице g оно ставит в соответствие базис, в которых переходит b_0 под действием этой матрицы. Очевидно, что это биекция, следовательно, существует обратное отображение $\psi = \sigma_{b_0}^{-1}$, которое сопоставляет каждому базису $b \in \mathfrak{B}$ матрицу перехода $C(b_0, b)$ от базиса b_0 к базису b . Внесем во множество \mathfrak{B} топологию, потребовав, чтобы отображение ψ было гомеоморфизмом, то есть открытыми множествами в \mathfrak{B} назовем полные прообразы открытых множеств в $GL(n, \mathbb{R})$ при отображении ψ . Можно показать, что эта топология не зависит от выбора базиса b_0 , то есть если выбрать другой фиксированный базис β_0 , то множество множеств, открытых в смысле отображения $\sigma_{\beta_0}^{-1}$, будет совпадать с множеством множеств, открытых в смысле отображения $\sigma_{b_0}^{-1}$.

Тогда пара (\mathfrak{B}, ψ) будет глобальной картой на топологическом пространстве \mathfrak{B} . Эта карта каждому базису ставит в соответствие матрицу перехода от базиса b_0 к нему. Это n^2 вещественных чисел, следовательно, размерность многообразия \mathfrak{B} будет n^2 .

Легко видеть, что глобальные карты, определяемые базисами b_0 и β_0 , гладко связаны, а значит, определяют одну и ту же гладкую структуру. Итак, мы построили гладкую структуру на множестве базисов \mathfrak{B} .

Покажем, что относительно этой гладкой структуры действие группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$ будет гладким. Фиксируем глобальную карту (\mathfrak{B}, ψ) , порожденную базисом b_0 . Нам нужно убедиться, что функции, задающие отображение

$$\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$$

в картах $(GL(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{B}, id \times \psi)$ и (\mathfrak{B}, ψ) , являются бесконечно дифференцируемыми функциями по всем аргументам. Рассмотрим произвольный базис $b \in \mathfrak{B}$. Пусть в карте (\mathfrak{B}, ψ) он имеет координаты $(x_j^i) = X$.

Это матрица перехода от базиса b_0 к базису b . Для любого элемента $g \in GL(n, \mathbb{R})$ обозначим координаты базиса $\Phi(g, b) \equiv bg$ в карте (\mathfrak{B}, ψ) через $(\tilde{x}_j^i) = \tilde{X}$. Это матрица перехода от базиса b_0 к базису bg . Тогда

$$\tilde{X} = \psi(bg) = C(b_0, bg) = C(b_0, b)g = Xg.$$

Переходя к элементам матриц, получим

$$\tilde{x}_j^i = x_k^i g_j^k.$$

В этих формулах переменными являются как x_k^i , так и g_j^k . Очевидно, что правые части формул имеют частные производные любого порядка, следовательно, отображение Φ гладко.

Итак, группа Ли $GL(n, \mathbb{R})$ гладко, свободно и транзитивно действует на n^2 -мерном гладком многообразии \mathfrak{B} .

Пример 3.9. Пусть X – полное векторное поле без особенностей на гладком многообразии M (например, левоинвариантное векторное поле на группе Ли, либо векторное поле на любом компактном многообразии). Задание такого векторного поля равносильно заданию глобальной однопараметрической группы диффеоморфизмов $\{F_t\}$ многообразия или глобального потока $\Phi_X(p, t) = F_t(p)$ (см. § 1.7.). При этом $\Phi_X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ – гладкое отображение и $F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2}$. Следовательно, глобальный поток задает гладкое действие (оно будет и левым и правым, так как группа Ли \mathbb{R} коммутативна) группы \mathbb{R} на многообразии M . Это действие не транзитивно (для многообразий размерности большей 1). Орбитами этого действия будут интегральные кривые векторного поля X .

Пусть на многообразии M действует группа Ли G . Это действие порождает на многообразии M отношение эквивалентности: будем говорить, что точки $x, y \in M$ эквивалентны, если существует элемент $g \in G$, такой что $y = \varphi_g(x)$. Очевидно, что элементы фактормножества по этому отношению эквивалентности являются орбитами действия группы Ли G . Полученное фактормножество обозначается $Orb(M)$. Если действие группы Ли гладкое, то на этом множестве вводится фактортопология. Однако, гладкой структуры на нем, вообще говоря, не индуцируется. Имеет место лишь следующее

Предложение 3.2. Пусть группа Ли G гладко действует на многообразии M . Тогда проекция

$$\pi : M \rightarrow Orb(M)$$

является непрерывным открытым отображением.

Доказательство. Напомним, что фактортопология определяется следующим образом. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, на котором введено отношение эквивалентности R . Тогда в фактормножестве $X/R = \{D_\alpha\}$ топология вводится следующим образом. Подмножество $V \subset \{D_\alpha\}$ называется открытым тогда и только тогда, когда объединение $\cup D_\alpha$, $D_\alpha \in V$, рассматриваемых как подмножества в X , открыто в пространстве (X, τ) .

Напомним, что отображение $f : X \rightarrow Y$ топологических пространств называется непрерывным, если полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества $V \subset Y$ открыт в X .

Сравнивая определение непрерывного отображения и определение фактортопологии, мы убеждаемся, что отображение π непрерывно.

Докажем, что отображение π открыто, то есть образом любого открытого множества является открытое множество. Пусть $U \subset M$ – открытое множество. Надо доказать, что $\pi(U)$ является открытым множеством в $Orb(M)$, то есть (по определению фактортопологии) $\pi^{-1}(\pi(U))$ открыто в M . Но

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{p \in U} Orb p = \cup_{g \in G} \varphi_g U.$$

Так как φ_g – диффеоморфизм (см. определение 3.2), а U – открытое множество, то $\varphi_g U$ открыто, следовательно, открыто в M и объединение таких множеств. \square

§3.2. Фундаментальные векторные поля.

Пусть группа Ли G действует справа на гладком многообразии P . Обозначим соответствующее действие $\Phi : P \times G \rightarrow G$. Как обычно обозначим \mathfrak{g} алгебру Ли группы Ли G .

Определим отображение

$$\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P),$$

где $\mathfrak{X}(P)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии P , следующим образом. Пусть $p \in P$ – произвольная фиксированная точка. Тогда действие группы Ли G индуцирует отображение

$$\sigma_p : G \rightarrow P$$

по формуле $\sigma_p(g) = \varphi_g(p) = \Phi(p, g) \equiv pg$ (см. определение 3.1). Напомним, что образом этого отображения являются орбиты действия Φ . Если $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле, $g(t)$ – соответствующая однопараметрическая подгруппа (см. § 2.5.), то определяется отображение

$$\Psi(p, t) = \sigma_p(\exp tX) \equiv \Phi(\exp tX, p). \quad (3.3)$$

Отображение Ψ является потоком на многообразии P , причем глобальным, так как однопараметрическая подгруппа определена для любого $t \in \mathbb{R}$. Этот поток порождает полное векторное поле X^b по формуле (см. конец доказательства теоремы 1.10)

$$(X^b)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi(p, t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_p(\exp tX). \quad (3.4)$$

Тогда положим $\lambda(X) = X^b$.

Так как отображение Ψ гладкое, то векторное поле X^b гладко зависит от точки p , и следовательно, является гладким векторным полем. Кроме того,

$$(X^b)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_p(\exp tX) = ((\sigma_p)_*)_e \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp tX = ((\sigma_p)_*)_e X_e.$$

Здесь мы воспользовались формулами (1.22) и (2.13). Откуда получаем, что

$$(\lambda(X))_p = ((\sigma_p)_*)_e X_e. \quad (3.5)$$

Предложение 3.3. *Отображение λ является гомоморфизмом вещественных векторных пространств \mathfrak{g} и $\mathfrak{X}(P)$.*

Доказательство. Это следует из того, что дифференциал гладкого отображения является \mathbb{R} -линейным отображением (см. предложение 1.1). \square

Замечание 3.3. Также можно доказать, то отображение λ является гомоморфизмом алгебр Ли, то есть

$$\lambda[X, Y] = [\lambda X, \lambda Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Итак, мы доказали, что гладкое действие группы Ли G на многообразии P индуцирует гомоморфизм алгебр Ли $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P)$. Образ этого гомоморфизма есть конечномерная подалгебра Ли $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{X}(P)$, элементы которой называются *фундаментальными векторными полями* на многообразии P . Алгебра Ли \mathfrak{f} называется *алгеброй Ли фундаментальных векторных полей* на многообразии P .

Заметим, что алгебра Ли \mathfrak{f} порождает $C^\infty(P)$ -модуль $\mathcal{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$, который является подмодулем модуля $\mathfrak{X}(P)$ гладких векторных полей на многообразии P .

Замечание 3.4. Подробно тензорное произведение модулей вводилось в курсе Тензорная алгебра (глава 2). Напомним, что это такое и зачем это нужно. В алгебре Ли \mathfrak{f} определена операция умножения только на вещественные числа. На функции из $C^\infty(P)$ умножать векторные поля из \mathfrak{f} не можем, так как эта операция выведет нас за рамки \mathfrak{f} . Хотя в данном случае имеет смысл говорить о произведении функции и векторного поля из \mathfrak{f} , так как оно является векторным полем из $\mathfrak{X}(P)$, в котором такое произведение определено.

Чтобы каждый раз не выходить во все множество $\mathfrak{X}(P)$ при умножении фундаментального векторного поля на гладкую функцию, мы поступим следующим образом. Рассмотрим множество конечных формальных сумм вида

$$X = f_1 X_1 + \dots + f_N X_N,$$

где N – не фиксированное натуральное число, $f_1, \dots, f_N \in C^\infty$, $X_1, \dots, X_N \in \mathfrak{f}$. Это множество обозначается $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$. Структура $C^\infty(P)$ -модуля в этом множестве вводится с помощью операции сложения

$$X + Y = f_1 X_1 + \dots + f_N X_N + \tilde{f}_1 \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{f}_N \tilde{X}_N,$$

а операция умножения на гладкую функцию $f \in C^\infty(P)$ определяется так

$$fX = (ff_1)X_1 + \dots + (ff_N)X_N.$$

Чтобы выполнялись аксиомы модуля, нам нужны будут следующие договоренности:

1. Порядок слагаемых в формальной сумме не важен;
2. $f_1 X + f_2 X = (f_1 + f_2)X$, $f_1, f_2 \in C^\infty(P)$, $X \in \mathfrak{f}$;
3. $fX_1 + fX_2 = f(X_1 + X_2)$, $f \in C^\infty(P)$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{f}$.

Итак, мы построили $C^\infty(P)$ -подмодуль $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$ в модуле $\mathfrak{X}(P)$. На его элементы мы можем при необходимости смотреть не только как на формальные суммы, но и "вычислять" эту формальную сумму, входящие туда векторные поля как элементы из $\mathfrak{X}(P)$.

Теорема 3.2. *Если группа Ли G действует на многообразии P эффективно, то гомоморфизм λ является мономорфизмом, в частности, алгебра Ли \mathfrak{f} изоморфна алгебре Ли \mathfrak{g} . Более того, если G действует свободно на P , то ненулевые фундаментальные векторные поля не имеют особых точек, то есть нигде не обращаются в нуль.*

Доказательство. 1) Пусть G действует эффективно на многообразии P . Надо доказать, что $\ker \lambda = \{0\}$. Пусть $X \in \ker \lambda$, то есть $\lambda(X) = 0$. Тогда соответствующая локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем λX , тривиальна, то есть $F_t = id$ для любого вещественного t . Тогда $F_t(p) = \varphi_{\exp tX} = id$. А так как действие эффективно, то $\exp tX = e$ для любого вещественного t , то есть

$$X_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp tX = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e = 0,$$

то есть $X_e = 0$, то есть $X = \beta^{-1}(X_e) = 0$. Здесь мы использовали канонический изоморфизм $\beta : \mathfrak{g} \rightarrow T_e(G)$. Итак, мы показали, что $\ker \lambda = \{0\}$, следовательно, гомоморфизм λ является мономорфизмом.

2) Пусть группа G действует на многообразии P свободно. По определению имеем, что из существования точки $p \in P$, такой что $\varphi_g(p) = p$, следует $g = e$. Пусть точка $p \in P$, такая что $X_p^\flat = 0$. Отсюда следует, что p является неподвижной точкой однопараметрической группы диффеоморфизмов $\{F_t\}$, то есть

$$F_t(p) = \varphi_{\exp tX}(p) = p.$$

Так как действие свободно, $\exp tX = e$. Откуда, как и выше, получаем $X = 0$. \square

Теорема 3.3. *Пусть группа Ли G гладко действует справа на многообразии P . Тогда для любого $g \in G$ следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad(g^{-1})} & \mathfrak{g} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathfrak{f} & \xrightarrow{(\varphi_g)_*} & \mathfrak{f} \end{array}$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{g}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле, $X^\flat = \lambda X \in \mathfrak{f}$ – соответствующее фундаментальное векторное поле на многообразии P . Оно порождает глобальный поток $\Psi : P \times \mathbb{R} \rightarrow P$ по формуле $\Psi(p, t) = \varphi_{\exp tX}(p)$. Пусть $g \in G$ – произвольный элемент. Ему отвечает диффеоморфизм $\varphi_g : P \rightarrow P$. Из теоремы 1.12 следует, что увлеченному им векторному полю $(\varphi_g)_* X^\flat$ отвечает поток

$$\Psi_{(\varphi_g)_* X^\flat}(p, t) = \varphi_g \circ \Psi_{X^\flat}(\varphi_g^{-1}(p), t) = \varphi_g \circ \varphi_{\exp tX} \circ \varphi_g^{-1}(p) = \varphi_{g^{-1}(\exp tX)g}(p) = \varphi_{A_{g^{-1}}(\exp tX)}(p).$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.3), определением 3.1 отображения σ_p , определением правого действия (§ 3.1.) и определением внутреннего автоморфизма (пример 3.7).

Итак, векторному полю $(\varphi_g)_* X^\flat$ отвечает поток, порожденный однопараметрической подгруппой $A_{g^{-1}}(\exp tX)$. В частности, векторное поле $(\varphi_g)_* X^\flat$ будет фундаментальным, то есть $(\varphi_g)_* X^\flat = \lambda(Y)$, где Y – генератор этой подгруппы, то есть

$$Y_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_{g^{-1}}(\exp tX) = ((A_{g^{-1}})_*)_e \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp tX = ((A_{g^{-1}})_*)_e X_e = ((A_{g^{-1}})_*)_e \beta(X).$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.13), формулой (1.22) и примером 3.7.

Применим отображение β^{-1} к крайним частям последней цепочки равенств.

$$Y = Ad(g^{-1})(X).$$

Здесь мы также воспользовались определением отображения $Ad(g)$ из примера 3.7. Следовательно,

$$(\varphi_g)_* \lambda(X) = (\varphi_g)_* X^\flat = \lambda Y = \lambda(Ad(g^{-1})X),$$

где $X \in \mathfrak{g}$, то есть

$$(\varphi_g)_* \circ \lambda = \lambda \circ Ad(g^{-1}). \quad (3.6)$$

\square

§3.3. Главные расслоения.

Главным расслоением называется четверка (P, M, G, π) , где P – гладкое многообразие, G – группа Ли, гладко и свободно действующая на многообразии P , M – пространство орбит $Orb_G P$, являющееся гладким многообразием, $\pi : P \rightarrow M$ – гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке $p \in P$ ее орбиту. При этом должно выполняться так называемое *свойство локальной тривиальности* главного расслоения, а именно, многообразие M должно допускать открытое покрытие \mathcal{U} , которое называется *покрытием локальной тривиальности*, такое что для любого элемента U этого покрытия существует гладкое отображение

$$F_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow G,$$

удовлетворяющее двум свойствам

$$(F1) \quad F_U(pg) = F_U(p)g, \quad p \in P, \quad g \in G;$$

(F2) отображение

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G,$$

заданное формулой

$$\psi_U(p) = (\pi(p), F_U(p))$$

является диффеоморфизмом.

Многообразие P называется *тотальным пространством расслоения*, группа Ли G называется *структурной группой*, многообразие M называется *базой расслоения*, отображение π называется *естественной проекцией*, отображение ψ_U называется *диффеоморфизмом локальной тривиальности*, элементы из покрытия локальной тривиальности называются *областями локальной тривиальности*.

Полный прообраз точки $m \in M$ относительно естественной проекции π называется *слоем* над точкой m .

Пример 3.10. Рассмотрим четверку (P, M, G, p_1) , где M – гладкое многообразие, G – группа Ли, $P = M \times G$ – декартово произведение гладких многообразий, $p_1 : M \times G \rightarrow M$ – проекция на первый сомножитель, задаваемая формулой $p_1(m, g) = m$.

Группа Ли G действует на многообразии P справа по формуле

$$(m, g)h = (m, gh), \quad (m, g) \in P, \quad h \in G.$$

Покажите самостоятельно, что это гладкое, свободное, правое действие.

Орбиты этого действия есть классы вида

$$(m, g)G = \cup_{h \in G} (m, g)h = \cup_{h \in G} (m, gh) = \cup_{g \in G} (m, g) \equiv (m, G).$$

Этот класс мы можем отождествить с точкой $m \in M$, то есть $M = Orb_G P$.

В силу этого отождествления естественная проекция

$$\pi : P \rightarrow M,$$

задаваемая формулой $\pi(p) = Orb_G p = (m, G)$ канонически отождествляется с отображением p_1 .

В качестве покрытия локальной тривиальности выберем покрытие, состоящее из единственного элемента $\mathcal{U} = \{M\}$. При этом положим

$$F_U(p) = F_U((m, g)) = g \equiv p_2(p),$$

то есть отображение F_U является проекцией на второй сомножитель. Оно, очевидно, гладкое. Проверим выполнение свойств (F1) и (F2):

$$F_U(ph) = F_U((m, g)h) = p_2((m, gh)) = gh = F_U(p)h.$$

Таким образом, (F1) выполняется. Далее,

$$\psi_U(p) = \psi_U((m, g)) = (\pi(p), F_U(p)) = (p_1(p), p_2(p)) = (m, g) = p,$$

то есть отображение ψ_U является тождественным, а следовательно, является диффеоморфизмом.

Итак, мы доказали, что четверка (P, M, p_1, G) является главным расслоением. Оно называется *тривиальным главным расслоением*.

Определение 3.3. Пусть даны два главных расслоения $\mathcal{B}_1 = (P_1, M, \pi_1, G_1)$ и $\mathcal{B}_2 = (P_2, M, \pi_2, G_2)$. Гомоморфизмом расслоения \mathcal{B}_1 в расслоение \mathcal{B}_2 называется пара (f, ρ) , где

$$f : P_1 \rightarrow P_2$$

гладкое отображение,

$$\rho : G_1 \rightarrow G_2$$

гомоморфизм групп Ли. При этом должны выполняться условия

1. отображение f послойно, то есть $\pi_1 = \pi_2 \circ f$;
2. отображение f согласовано с действиями структурных групп, то есть для любой точки $p \in P_1$ любого элемента $g \in G_1$ имеем $f(pg) = f(p)\rho(g)$.

В частности, если (P_1, f) является подмногообразием в P_2 , а (G_1, ρ) – подгруппой группы Ли G_2 , то расслоение \mathcal{B}_1 называется подрасслоением расслоения \mathcal{B}_2 .

Если f – диффеоморфизм, ρ – изоморфизм групп Ли, то пара (f, ρ) называется *изоморфизмом* или *эквивалентностью* главных расслоений \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 .

Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение. Гладкое отображение

$$s : M \rightarrow P$$

называется (*гладким*) *сечением* расслоения \mathcal{B} , если $\pi \circ s = id$.

Имеет место теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема 3.4. *Главное расслоение допускает сечение тогда и только тогда, когда оно эквивалентно тривиальному.*

Замечание 3.5. Пусть дано главное расслоение (P, M, π, G) . Нетрудно показать, что для любой области U локальной тривиальности четверка $(\pi^{-1}(U), U, \pi|_{\pi^{-1}(U)}, G)$ будет главным расслоением. Из свойств (F1) и (F2) следует, что это главное расслоение эквивалентно тривиальному расслоению $(U \times G, U, p_1, G)$ (изоморфизмом будет пара (ψ_U, id)). В частности, получаем, что любое главное расслоение допускает локальные сечения, а именно, сечения над любой областью локальной тривиальности.

§3.4. Структурные уравнения главного расслоения.

4.1. Гладкое отображение $\varphi : M \rightarrow N$ называется *иммерсией*, если для любой точки $p \in M$ дифференциал этого отображения $(\varphi_*)_p$ инъективен, то есть $ker(\varphi_*)_p = \{0\}$.

Гладкое отображение $\varphi : M \rightarrow N$ называется *субмерсией*, если для любой точки $p \in M$ дифференциал этого отображения $(\varphi_*)_p$ сюръективен, то есть ранг отображения $(\varphi_*)_p$ равен размерности многообразия N .

Пример 3.11. Можно доказать, что если (P, M, π, G) – главное расслоение, то отображение π является субмерсией.

Пусть (P, M, π, G) – главное расслоение. Обозначим $\mathfrak{X}_\pi(P)$ векторное пространство векторных полей на P , π -связанных с векторными полями на M (см. § 1.4). Такие векторные поля называются *проектируемыми*.

$$\mathfrak{X}_\pi(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) | \exists Y \in \mathfrak{X}(M), \pi_* X = Y\}.$$

Легко видеть, что множество проектируемых векторных полей несет структуру вещественного векторного пространства. Тогда возникает \mathbb{R} -линейное отображение $\pi_* : \mathfrak{X}_\pi(P) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Обозначим его ядро через \mathcal{V} . Тогда на многообразии P определено распределение

$$\mathcal{V} = C^\infty(P) \otimes \tilde{\mathcal{V}}$$

(см. замечание 3.4).

Распределение \mathcal{V} называется *вертикальным* распределением на многообразии P , а векторные поля, принадлежащие ему, называются *вертикальными векторными полями*.

Так как естественная проекция главного расслоения является субмерсией, получим

$$\dim \mathcal{V}_p = \dim \tilde{\mathcal{V}}_p = \dim ker \pi_* = \dim T_p P - rg(\pi_*)_p = \dim P - \dim M.$$

Итак, вертикальное распределение состоит из $\dim P - \dim M$ -мерных площадок \mathcal{V}_p , которые являются касательными пространствами к слою в точке p . Чтобы доказать это, посмотрим на вертикальное распределение с иной точки зрения.

Напомним, что группа G действует справа на многообразии P и это действие порождает гомоморфизм $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Образ этого гомоморфизма мы обозначили \mathfrak{f} и назвали вещественным пространством фундаментальных векторных полей на P . Так как группа G действует эффективно (и более того, свободно), $\dim \mathfrak{f} = \dim \mathfrak{g}$. Так как G действует свободно, ненулевые векторные поля в \mathfrak{f} не имеют особенностей (см. теорему 3.2), то есть не обращаются в нуль ни в одной точке многообразия P . В частности, если (X_1, \dots, X_r) – базис \mathfrak{g} , то (X_1^b, \dots, X_r^b) – базис \mathfrak{f} , так как гомоморфизм λ является изоморфизмом.

Более того, так как векторные поля (X_1^b, \dots, X_r^b) не имеют особенностей, они образуют базис распределения $\mathcal{F} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$.

Действительно, пусть

$$Y = \sum_{i=1}^N f^i Y_i \in \mathcal{F} \quad (3.7)$$

произвольный элемент (см. замечание 3.4). Если разложить каждый элемент Y_i по базису (X_1^b, \dots, X_r^b) и подставить в (3.7), то получим разложение для Y по базису (X_1^b, \dots, X_r^b) .

Оказывается, что распределения \mathcal{V} и \mathcal{F} совпадают (этот факт мы также примем без доказательства).

В частности, из этого следует, что $\mathcal{V} = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$ и

$$\mathcal{V}_p = (C^\infty(P))_p \otimes \mathfrak{f}_p = \mathfrak{f}_p = T_p(Orb_G p).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(\lambda X)_p = ((\sigma_p)_*)_e X_e \in T_p(Orb_G p)$.

Предложение 3.4. *Вертикальное распределение инволютивно, а значит, вполне интегрируемо. Его интегральные многообразия максимальной размерности являются подмногообразиями вида (G, σ_p) .*

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{V}$. Тогда по определению вертикального распределения имеем $\pi_* X = 0$, $\pi_* Y = 0$. По свойству отображения увлечения имеем

$$\pi_*[X, Y] = [\pi_* X, \pi_* Y] = 0,$$

то есть вертикальное распределение инволютивно. По теореме Фробениуса оно вполне интегрируемо. По определению интегрального многообразия (см. § 1.6.) пары (G, σ_p) будут интегральными многообразиями максимальной размерности этого распределения, так как \mathcal{F}_p – касательное пространство к $\sigma_p(G) = Orb_G(p)$ в точке p и $\mathcal{F}_p = \mathcal{V}_p$. \square

Пример 3.12. Рассмотрим круговую цилиндрическую поверхность. Это главное расслоение, где P – цилиндрическая поверхность, M – окружность, которая получается при пересечении P с плоскостью, перпендикулярной образующим, π ставит в соответствие каждой точке $p \in P$ точку пересечения окружности M и прямолинейной образующей, проходящей через точку p . Группа Ли G – это \mathbb{R} с операцией сложения. Легко видеть, что это тривиальное главное расслоение.

Вертикальными векторными полями на цилиндрической поверхности будут поля, такие что их вектора в каждой точке параллельны прямолинейной образующей, проходящей через эту точку.

4.2. Прежде чем приступить к выводу структурных уравнений, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3.2. *Пусть D – r -мерное распределение на гладком n -мерном многообразии M . Тогда любой (локальный) базис распределения D можно дополнить до локального базиса модуля $\mathfrak{X}(M)$.*

Доказательство. Имеем, для любой точки $p \in M$ существует окрестность U_p и набор векторных полей $(E_1, \dots, E_r) \subset \mathfrak{X}(U_p)$, который служит базисом модуля $D|_{U_p}$. Фиксируем точку $p \in M$. Пусть в некоторой окрестности U этой точки задан базис (E_1, \dots, E_r) модуля $D|_U$. Тогда $((E_1)_p, \dots, (E_r)_p)$ – линейно независимая система векторов (определение локального базиса распределения § 1.6.). Дополним ее векторами ξ_{r+1}, \dots, ξ^n до базиса пространства $T_p(M)$. Тогда существуют векторные поля $(E_{r+1}, \dots, E_n) \subset \mathfrak{X}(U)$, такие что их значения в точке p равны соответственно векторам ξ_{r+1}, \dots, ξ^n (см. курс Анализ на многообразиях). По непрерывности эти векторные поля будут линейно независимы в каждой точке окрестности U (в случае необходимости мы можем сузить эту окрестность U). Тогда система векторных полей (E_1, \dots, E_n) будет искомым локальным базисом модуля $\mathfrak{X}(M)$. \square

Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, \mathcal{V} – его вертикальное распределение. Договоримся, что индексы a, b, c, d, \dots пробегает значения от 1 до $r = \dim G$; индексы i, j, k, l, \dots пробегает значения от $r+1$ до $r+n$, где $n = \dim M$; индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, пробегает значения от 1 до $r+n = \dim P$.

Фиксируем базис (E_1, \dots, E_r) в алгебре Ли \mathfrak{g} группы Ли G . Пусть $(\sigma^1, \dots, \sigma^r)$ – дуальный базис. Уравнения Картана структурной группы G имеют вид (см. (2.6))

$$d\sigma^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \sigma^b \wedge \sigma^c.$$

Так как $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{f}$ – изоморфизм, векторные поля (E_1^b, \dots, E_r^b) образуют базис векторного пространства \mathfrak{f} фундаментальных векторных полей, а также распределения $\mathcal{F} = \mathcal{V}$. Согласно лемме 3.2 мы можем дополнить этот базис до локального базиса модуля $\mathfrak{X}(P)$ гладкими векторными полями $Y_{r+1}, \dots, Y_{r+n} \in \mathfrak{X}(U)$, то есть для любой точки $p \in P$ существует окрестность U и набор гладких векторных полей $Y_{r+1}, \dots, Y_{r+n} \in \mathfrak{X}(U)$, такой что

$$(E_1^b|_U \equiv Y_1, \dots, E_r^b|_U \equiv Y_r, Y_{r+1}, \dots, Y_{r+n})$$

базис модуля $\mathfrak{X}(U)$. Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^{r+n})$ – дуальный базис. Тогда формы $\{\omega^\alpha \otimes \omega^\beta\}$ (где α и β пробегает всевозможные значения) образуют локальный базис модуля тензорных полей типа (2,0). В частности, 2-формы $d\omega^\alpha$ (как тензорные поля типа (2,0)) раскладываются по этому базису, а именно,

$$d\omega^\alpha = R_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \otimes \omega^\gamma, \quad (3.8)$$

где $R_{\beta\gamma}^\alpha = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma)$ – компоненты 2-формы $d\omega^\alpha$ в данном базисе. Здесь мы воспользовались тем, что компоненты тензора типа (2,0) относительно базиса (Y_α) совпадают с ее координатами относительно базиса $\{\omega^\alpha \otimes \omega^\beta\}$.

Применим оператор альтернирования Alt к обеим частям равенства (3.8). Так как форма $d\omega^\alpha$ является кососимметрической, $Alt(d\omega^\alpha) = d\omega^\alpha$. В силу линейности Alt функции $R_{\beta\gamma}^\alpha$ можно вынести за знак альтерниации и воспользоваться определением операции внешнего умножения (1.4). Получим

$$d\omega^\alpha = R_{\beta\gamma}^\alpha Alt(\omega^\beta \otimes \omega^\gamma) = R_{\beta\gamma}^\alpha \frac{1!1!}{2!} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma.$$

Итак, мы получаем

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2} R_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma; \quad R_{\beta\gamma}^\alpha = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma). \quad (3.9)$$

Докажем, что формы $\{\omega^i\}$ образуют систему Пфаффа вертикального распределения \mathcal{V} (см. § 1.6.), то есть для любого векторного поля из вертикального распределения значение формы ω^i на нем равно нулю. Действительно, разложим векторное поле X по базису (Y_α) : $X = X^\alpha Y_\alpha = X^\alpha E_a^\alpha + X^i Y_i$. Тогда

$$X \in \mathcal{V} \Leftrightarrow X = X^\alpha E_a^\alpha \Leftrightarrow X^i = 0 \Leftrightarrow \omega^i(X) = 0.$$

Так как вертикальное распределение вполне интегрируемо (предложение 3.4), по предложению 1.4 существуют локально определенные 1-формы ω_j^i , такие что

$$d\omega^i = \omega_k^i \wedge \omega^k. \quad (3.10)$$

С другой стороны, выпишем из уравнений (3.9) те, для которых индекс α меняется от $r+1$ до $r+n$, то есть $\alpha = i$:

$$d\omega^i = \frac{1}{2} R_{\beta\gamma}^i \omega^\beta \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2} R_{b\gamma}^i \omega^b \wedge \omega^\gamma + \frac{1}{2} R_{j\gamma}^i \omega^j \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2} R_{bc}^i \omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2} R_{bk}^i \omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2} R_{jc}^i \omega^j \wedge \omega^c + \frac{1}{2} R_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k. \quad (3.11)$$

Здесь мы учли следующее: индекс суммирования β пробегает сначала значения от 1 до r . Эта сумма коротко обозначается с помощью индекса b , а затем индекс β пробегает значения от $r+1$ до $r+n$. Эту группу слагаемых мы записали с помощью индекса j . Другими словами, сумму по индексу β мы разбили на две скобки. В одной индекс суммирования обозначили b , а в другой – j . Аналогично мы поступили и с индексом γ в каждом из получившихся слагаемых.

Рассмотрим пару слагаемых и переобозначим индексы суммирования $c \rightarrow b$ и $j \rightarrow k$ во втором слагаемом. Мы это можем сделать, так как эти пары индексов пробегают одно и то же множество значений:

$$\frac{1}{2} R_{bk}^i \omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2} R_{jc}^i \omega^j \wedge \omega^c = \frac{1}{2} R_{bk}^i \omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2} R_{kb}^i \omega^k \wedge \omega^b = \frac{1}{2} R_{bk}^i \omega^b \wedge \omega^k + \frac{1}{2} R_{bk}^i \omega^b \wedge \omega^k = R_{bk}^i \omega^b \wedge \omega^k$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью коэффициентов $R_{\beta\gamma}^\alpha$ по нижним индексам:

$$R_{\beta\gamma}^\alpha = d\omega^\alpha(Y_\beta, Y_\gamma) = -d\omega^\alpha(Y_\gamma, Y_\beta) = -R_{\gamma\beta}^\alpha \quad (3.12)$$

и свойством антикоммутативности внешнего произведения 1-форм (1.5). С учетом приведенных подобных слагаемых, (3.11) примет вид

$$d\omega^i = \frac{1}{2} R_{bc}^i \omega^b \wedge \omega^c + (R_{bk}^i + \frac{1}{2} R_{jk}^i) \omega^k$$

Сравнивая полученное равенство с (3.10), получим

$$\frac{1}{2} R_{bc}^i \omega^b \wedge \omega^c = 0.$$

Заметим, что в левой части этого равенства 2-формы $\omega^b \wedge \omega^c$ не являются линейно независимыми, так как 1-формы в них не упорядочены по номерам. Чтобы упорядочить 1-формы, воспользуемся формулой, полученной в курсе Тензорная алгебра $t_{ij}\omega^i \wedge \omega^j = 2!t_{[ij]}\omega^i \wedge \omega^j (i < j)$:

$$2! \frac{1}{2} R_{[bc]}^i \omega^b \wedge \omega^c (b < c) = 0.$$

Теперь в левой части равенства стоит линейная комбинация линейно независимых базисных 2-форм. Пользуемся определением линейной независимости и получаем $R_{[bc]}^i = 0$. В силу кососимметричности функций R_{bc}^i (см. формулу (3.12)) получим

$$R_{[bc]}^i = \frac{1}{2}(R_{bc}^i - R_{cb}^i) = \frac{1}{2}(R_{bc}^i + R_{bc}^i) = R_{bc}^i.$$

Итак, мы получили, что $R_{bc}^i = 0$, то есть

$$d\omega^i = \omega_k^i \wedge \omega^k \equiv (R_{bk}^i \omega^b + \frac{1}{2} R_{jk}^i \omega^j) \wedge \omega^k.$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *первой группой структурных уравнений главного расслоения*.

Рассмотрим оставшиеся уравнения из (3.9) (индекс α пробегает значения от 1 до r , следовательно может быть обозначен буквой a):

$$d\omega^a = \frac{1}{2} R_{\beta\gamma}^a \omega^\beta \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2} R_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + (R_{bk}^a \omega^b + \frac{1}{2} R_{jk}^a \omega^j) \wedge \omega^k$$

Обозначим $R_{bk}^a \omega^b + \frac{1}{2} R_{jk}^a \omega^j = \omega_k^a$. Тогда полученное равенство примет вид

$$d\omega^a = \frac{1}{2} R_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + \omega_k^a \wedge \omega^k. \quad (3.13)$$

В этих уравнениях мы можем уточнить значения коэффициентов R_{bc}^a . Оказывается, что это с точностью до знака структурные константы группы Ли G , то есть

$$R_{bc}^a = -C_{bc}^a. \quad (3.14)$$

Напомним, что мы ввели обозначения: (E_a) – базис алгебры Ли \mathfrak{g} , (σ^a) – дуальный базис, $(E_a^b \equiv Y_a, Y_i)$ – локальный базис $\mathfrak{X}(P)$, (ω^a, ω^i) – дуальный базис для базиса $(E_a^b \equiv Y_a, Y_i)$.

Рассмотрим отображение антиувлечения для ковекторов (см. формулу (1.24))

$$\lambda^* : \mathfrak{f}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

Здесь мы воспользовались тем, что левоинвариантные векторные поля на многообразии P образуют векторное пространство \mathfrak{g} , а значит, дуальное к нему векторное пространство \mathfrak{g}^* будет векторным пространством ковекторов (оно состоит из форм Маурера-Картана). Напомним, что это отображение задается формулой

$$(\lambda^* \omega)(X) = \omega(\lambda X), \quad \omega \in \mathfrak{f}^*, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Докажем, что $\lambda^*(\omega^a) = \sigma^a$.

Действительно,

$$\lambda^*(\omega^a)(E_b) = \omega^a(\lambda E_b) = \omega^a(E_b^b) = \delta_b^a,$$

то есть формы $\lambda^*(\omega^a)$ образуют дуальный базис для (E_a) , следовательно, совпадают с формами σ^a .

С учетом этого получим

$$\begin{aligned} R_{bc}^a &= d\omega^a(E_b^b, E_c^b) = E_b^b(\omega^a(E_c^b)) - E_c^b(\omega^a(E_b^b)) - \omega^a([E_b^b, E_c^b]) = -\omega^a([E_b^b, E_c^b]) = -\omega^a([\lambda E_b, \lambda E_c]) = \\ &= -\omega^a(\lambda[E_b, E_c]) = -\lambda^* \omega^a([E_b, E_c]) = -\sigma^a(C_{bc}^h E_h) = -C_{bc}^h \delta_h^a = -C_{bc}^a. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.10); тем, что \mathfrak{g} является векторным пространством, а значит, действие ковектора из \mathfrak{g}^* на векторе из \mathfrak{g} – это вещественное число. Действие векторного поля на этом числе есть нуль. Далее мы использовали замечание 3.3, структурные уравнения группы Ли (2.3).

Тогда с учетом (3.14) из (3.13) получим

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + \omega_k^a \wedge \omega^k$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *второй группой структурных уравнений главного расслоения*. Первая и вторая группы структурных уравнений называются *полной группой структурных уравнений главного расслоения*:

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j \\ d\omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + \omega_k^a \wedge \omega^k \end{cases} \quad (3.15)$$

§3.5. Связности в главных расслоениях.

5.1. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, \mathcal{V} – его вертикальное распределение. Напомним, что проектором K -модуля V называется K -линейное отображение $P : V \rightarrow V$, такое что $P^2 = P$. Условие $P^2 = P$ из определения проектора эквивалентно следующему условию: для любого $X \in \text{Im } P$ имеем $P(X) = X$. Отображение $Q = \text{id} - P$ также является проектором и называется *дополнительным проектором*. Задание на K -модуле V проектора P равносильно распадению этого модуля в прямую сумму ядра и образа этого проектора, то есть $V = \ker P \oplus \text{Im } P$. Подробности можно посмотреть в курсе Тензорная алгебра (файл `tenz alg.pdf`).

Проектор $C^\infty(P)$ -модуля $\mathfrak{X}(P)$ на подмодуль \mathcal{V} называется *вертикальным проектором*.

Говорят, что $C^\infty(P)$ -линейное отображение F модуля $\mathfrak{X}(P)$ *инвариантен* относительно действия структурной группы, если для любого элемента $g \in G$ имеем

$$(\varphi_g)_* \circ F = F \circ (\varphi_g)_*.$$

Здесь $(\varphi_g)_*$ – отображение увлечения векторных полей. Оно определено, так как φ_g является диффеоморфизмом (см. § 1.4.).

Замечание 3.6. Так как группа G действует на P справа, в дальнейшем будем обозначать $\varphi_g = R_g$. Таким образом,

$$R_g(p) = \varphi_g(p) = pg = \Phi(p, g).$$

Лемма 3.3. *Вертикальное распределение \mathcal{V} инвариантно относительно действия структурной группы, то есть $(R_g)_*\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ для любого $g \in G$. Кроме того, фундаментальные векторные поля переходят в фундаментальные векторные поля при действии структурной группы.*

Доказательство. 1) Докажем сначала, что фундаментальные векторные поля под действием структурной группы переходят в фундаментальные векторные поля.

Пусть X^b – произвольное фундаментальное векторное поле. Тогда получим

$$(R_g)_*X^b = (R_g)_*(\lambda X) = \lambda(\text{Ad}(g^{-1})X).$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.6). Так как $\text{Ad}(g^{-1})X \in \mathfrak{g}$, векторное поле $(R_g)_*X^b = \lambda(\text{Ad}(g^{-1})X)$ является фундаментальным

2) Рассмотрим произвольное вертикальное векторное поле $X \in \mathcal{V}$. Фиксируем в \mathcal{V} базис (E_1^b, \dots, E_r^b) , состоящий из фундаментальных векторных полей. Тогда векторное поле X можно разложить по этому базису

$$X = f^a E_a^b.$$

Нам нужно вычислить $(R_g)_*X = (R_g)_*(f^a E_a^b)$. Для этого нужно научиться выносить функцию за знак отображения увлечения. Фиксируем произвольную точку $p \in P$ и рассмотрим значение векторного поля $(R_g)_*(fX)$ в этой точке, где f – гладкая функция, $X \in \mathfrak{X}(P)$ – произвольное векторное поле. Воспользуемся теоремой 1.2:

Заметим, что

$$\begin{aligned} ((R_g)_*(fX))_p &= ((R_g)_*)_{R_{g^{-1}}(p)}(fX)_{R_{g^{-1}}(p)} = f(R_{g^{-1}}(p))((R_g)_*)_{R_{g^{-1}}(p)}X_{R_{g^{-1}}(p)} = f \circ R_{g^{-1}}(p)((R_g)_*X)_p = \\ &= ((f \circ R_{g^{-1}})(R_g)_*X)(p). \end{aligned}$$

Итак, мы получили вспомогательную формулу "однородности" отображения увлечения

$$(R_g)_*(fX) = (f \circ R_{g^{-1}})(R_g)_*X \tag{3.16}$$

Вернемся к доказательству инвариантности вертикального распределения, используя формулу (3.16).

$$(R_g)_*X = (R_g)_*(f^a E_a^b) = (f^a \circ R_{g^{-1}})(R_g)_*E_a^b.$$

Заметим, что $(f^a \circ R_{g^{-1}})$ – гладкие функции на P , $(R_g)_*E_a^b$ – фундаментальные векторные поля по доказанному в первом пункте. Таким образом, векторное поле $(R_g)_*X$ является линейной комбинацией фундаментальных векторных полей с коэффициентами – гладкими функциями, то есть является вертикальным векторным полем. \square

5.2. *Связностью* в главном расслоении \mathcal{B} называется вертикальный проектор, инвариантный относительно действия структурной группы. Другими словами, $C^\infty(P)$ -линейное отображение $\Pi : \mathfrak{X}(P) \rightarrow \mathfrak{X}(P)$ называется связностью, если выполняются следующие условия:

1. $\Pi^2 = \Pi$;
2. $Im \Pi = \mathcal{V}$;
3. для любого $g \in G$ имеем $(R_g)_* \circ \Pi = \Pi \circ (R_g)_*$.

Рассмотрим еще два эквивалентных способа задания связности.

Пусть $\Pi_{\mathcal{V}}$ – вертикальный проектор, $\Pi_{\mathcal{H}} = id - \Pi_{\mathcal{V}}$ – дополнительный проектор. Распределение $\mathcal{H} = ker \Pi_{\mathcal{V}} = Im \Pi_{\mathcal{H}}$ называется *псевдогоризонтальным распределением*, а проектор $\Pi_{\mathcal{H}}$ называется *псевдогоризонтальным проектором*.

В частности, если $\Pi_{\mathcal{V}}$ является связностью, проектор $\Pi_{\mathcal{V}}$ инвариантен относительно действия группы G , то есть $(R_g)_* \circ \Pi_{\mathcal{V}} = \Pi_{\mathcal{V}} \circ (R_g)_*$. Тогда и дополнительный ему проектор $\Pi_{\mathcal{H}}$ будет инвариантен относительно действия этой группы. Действительно,

$$(R_g)_* \circ \Pi_{\mathcal{H}} = (R_g)_* \circ (id - \Pi_{\mathcal{V}}) = id \circ (R_g)_* - \Pi_{\mathcal{V}} \circ (R_g)_* = \Pi_{\mathcal{H}} \circ (R_g)_*.$$

Следовательно, распределение $\mathcal{H} = Im \Pi_{\mathcal{H}}$ будет инвариантно относительно действия структурной группы G . Действительно, для любого элемента $X \in \mathcal{H}$ и любого элемента $g \in G$ имеем

$$(R_g)_* X = (R_g)_*(\Pi_{\mathcal{H}} X) = \Pi_{\mathcal{H}}((R_g)_* X) \in Im \Pi_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}.$$

Здесь мы воспользовались альтернативным условием из определения проектора (см. начало параграфа) и инвариантностью проектора $\Pi_{\mathcal{H}}$ относительно действия группы.

Таким образом, задание связности в главном расслоении определяет распределение, дополнительное к вертикальному и инвариантное относительно действия структурной группы.

Обратно, пусть модуль $\mathfrak{X}(P)$ распадается в прямую сумму двух подмодулей вертикального распределения \mathcal{V} и некоторого распределения \mathcal{H} , инвариантного относительно действия структурной группы G . Покажем, что при этом на главном расслоении однозначно определяется связность, то есть вертикальный проектор, инвариантный относительно действия структурной группы.

Так как модуль $\mathfrak{X}(P)$ представим в виде суммы своих подмодулей \mathcal{V} и \mathcal{H} , то, как мы знаем, однозначно определяется проектор (обозначим его $\Pi_{\mathcal{V}}$), образ которого совпадает с вертикальным распределением \mathcal{V} . Для доказательства того, что проектор $\Pi_{\mathcal{V}}$ является связностью, нужно показать, что он инвариантен относительно действия структурной группы.

В самом деле, пусть $X \in \mathfrak{X}(P)$ – произвольный элемент. Тогда он однозначно представим в виде $X = X_{\mathcal{V}} + X_{\mathcal{H}}$, где $X_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$, $X_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$. По условию для любого элемента $g \in G$ имеем $(R_g)_* X_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$. Тогда для любого $X \in \mathfrak{X}(P)$ имеем

$$\Pi_{\mathcal{V}} \circ (R_g)_* X = \Pi_{\mathcal{V}}((R_g)_*(X_{\mathcal{V}} + X_{\mathcal{H}})) = \Pi_{\mathcal{V}}((R_g)_* X_{\mathcal{V}}) = (R_g)_* X_{\mathcal{V}} = (R_g)_*(\Pi_{\mathcal{V}} X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что отображение увлечения и проектор являются линейными отображениями; $\Pi_{\mathcal{V}}((R_g)_* X) = 0$, так как образ проектора $\Pi_{\mathcal{V}}$ совпадает с ядром дополнительного проектора $\Pi_{\mathcal{H}}$. Далее мы использовали лемму 3.3 и альтернативное условие из определения проектора. Итак, вертикальный проектор инвариантен относительно действия структурной группы, следовательно, является связностью. Тем самым, мы доказали

Теорема 3.5. *Задание связности в главном расслоении $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ равносильно заданию распределения $\mathcal{H} \subset \mathfrak{X}(P)$, такого что*

1. $\mathfrak{X}(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$;
2. для любого элемента $g \in G$ имеем $(R_g)_* \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. \square

Распределение \mathcal{H} , дополнительное к вертикальному и инвариантное относительно действия структурной группы, называется *горизонтальным распределением*.

Оказывается, связность допускает еще одно определение. Отметим, что изоморфизм $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{f}$ индуцирует изоморфизм $C^\infty(P)$ -модулей

$$\Lambda = id \otimes \lambda : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f} = \mathcal{F} = \mathcal{V}, \quad (3.17)$$

который задается формулой

$$\Lambda\left(\sum_{k=1}^N f^k X_k\right) = \sum_{k=1}^N f^k \lambda(X_k), \quad f^k \in C^\infty(P), \quad X_k \in \mathfrak{g}.$$

Определение тензорного произведения см. в замечании 3.4. Тогда определен гомоморфизм $\theta : \mathfrak{X}(P) \rightarrow C^\infty(P) \otimes_{\mathfrak{g}} C^\infty(P)$ -модулей по формуле

$$\theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi, \quad (3.18)$$

где Π – связность в главном расслоении \mathcal{B} . Этот гомоморфизм называется *формой связности*.

Замечание 3.7. Пусть K – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, V – K -модуль. Тензором типа (r, s) со значениями в K -модуле \mathcal{A} называется отображение

$$t : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{раз}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{раз}} \rightarrow \mathcal{A},$$

K -линейное по каждому аргументу.

В частности, если K – вещественная алгебра, W – N -мерное вещественное векторное пространство, тензор t типа (r, s) со значениями в модуле $\mathcal{A} = K \otimes W$ называют *тензором со значениями в векторном пространстве W* .

Выясним, как тензоры со значениями в векторном пространстве связаны с "обычными" тензорами, то есть K -линейными отображениями в алгебру K .

Фиксируем базис $b = (e_1, \dots, e_N)$ в W , (e^1, \dots, e^N) – дуальный базис. Так же как в § 3.4. доказывается, что b будет базисом модуля $K \otimes W = \mathcal{A}$. Коэффициентами разложения будут элементы из K , причем эти коэффициенты просто стоят рядом с векторами из W , умножать их на векторы мы не умеем. Для ковекторов $e^a : W \rightarrow K$ мы также можем определить отображения (обозначим той же буквой) $e^a : \mathcal{A} \rightarrow K$ по формуле $e^a = id \times e^a$. Это обозначает, что отображение $e^a : \mathcal{A} \rightarrow K$ беря формальную сумму из произведений элемента из K и вектора из W , разбивает ее на слагаемые и на элемент из K действует тождественным преобразованием, а на вектор из W действует ковектором e^a .

Рассмотрим произвольный тензор t типа (r, s) со значениями в векторном пространстве W . Тогда его значение на наборе векторов X_i из V и ковекторов $u^j, i, j = 1, \dots, n = \dim V$ из V^* будет элементом из \mathcal{A} . Разложим этот элемент по базису b и обозначим коэффициенты разложения через $t^a(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s)$. Легко видеть, что это отображения вида

$$t^a : V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^* \rightarrow K$$

K -линейные по каждому аргументу, так как

$$t^a(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = e^a(t(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s)),$$

то есть "обычные" тензоры. Тогда тензор t со значениями в W может быть записан в следующем виде

$$t(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) = t^a(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s) e_a$$

или, подчеркивая, что умножать элементы $t^a(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s)$ из K на векторы $e_a \in W$ мы не умеем, пишут

$$t = t^a \otimes e_a.$$

Тензоры t^a (обычные, со значениями в модуле K) называются *тензорными компонентами* тензора t в базисе b из векторного пространства W .

Если взять другой базис $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ в векторном пространстве W и обозначить матрицу перехода от базиса b к базису β через C , то нетрудно показать, что тензорные компоненты тензора t будут преобразовываться по формуле

$$\tilde{t}^a = (C^{-1})^a_b t^b,$$

где $\{\tilde{t}^a\}$ – тензорные компоненты тензора t в базисе β .

Согласно замечанию 3.7 мы получаем, что форма связности является 1-формой со значениями в алгебре Ли \mathfrak{g} . Рассмотрим свойства формы связности.

Замечание 3.8. В ближайших рассуждениях мы часто будем использовать элементы модуля $C^\infty(P) \otimes_{\mathfrak{g}}$ (см. замечание 3.4). Напомним, что по определению тензорного произведения модулей, он состоит из конечных формальных сумм вида

$$X = f^1 X_1 + \dots + f^N X_N, \quad f^i \in C^\infty(P), \quad X_i \in \mathfrak{g}, \quad (3.19)$$

где N – натуральное не фиксированное число. Функции f^i и левоинвариантные векторные поля X_i просто стоят рядом. Умножать одно на другое мы не умеем. Чтобы подчеркнуть, что умножения гладкой функции на P и левоинвариантного векторного поля (определенного на группе Ли G) нет, мы будем писать между функцией и векторным полем знак тензорного умножения: $f \otimes X$. В этих обозначениях равенство (3.19) примет вид

$$X = f^1 \otimes X_1 + \dots + f^N \otimes X_N.$$

В (3.17) мы определили отображение $\Lambda = id \otimes \lambda$. Отметим, что в отличие от отображения $id \times \lambda$ отображение Λ умеет разбивать суммы, а отображение $id \times \lambda$ умеет действовать только на одно слагаемое.

Предложение 3.5 . Во введенных обозначениях $\theta \circ \Lambda = id$. В частности, $\theta \circ \lambda = 1 \otimes id$.

Доказательство. Так как $\lambda(X) \in \mathcal{V}$ для любого элемента $X \in \mathfrak{g}$, по определению формы связности получим

$$\theta \circ \Lambda(1 \otimes X) = \Lambda^{-1} \circ \Pi \circ \Lambda(1 \otimes X) = \Lambda^{-1} \circ \Pi(\lambda(X)) = \Lambda^{-1}(\lambda(X)) = \Lambda^{-1} \circ \Lambda(1 \otimes X) = 1 \otimes X.$$

Здесь 1 обозначает гладкую на P функцию, которая каждой точке из P ставит в соответствие число 1. Также мы воспользовались тем, что $\lambda(X) \in \mathcal{V}$, следовательно, $\Pi(\lambda(X)) = \lambda(X)$. Итак, мы показали, что

$$\theta \circ \Lambda(1 \otimes X) = 1 \otimes X. \quad (3.20)$$

Теперь рассмотрим произвольный элемент $Y = f^k \otimes X_k \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$. С учетом (3.20) и $C^\infty(P)$ -линейности отображений θ и Λ получим

$$\theta \circ \Lambda(Y) = \theta \circ \Lambda(f^k \cdot 1 \otimes X_k) = f^k \theta \circ \Lambda(1 \otimes X) = f^k \cdot 1 \otimes X_k = f^k \otimes X_k = Y.$$

Кроме того, для любого $X \in \mathfrak{g}$ имеем

$$\theta \circ \lambda(X) = \Lambda^{-1}(\Pi(\lambda(X))) = \Lambda^{-1}(\lambda(X)) = \Lambda^{-1}(1 \otimes \lambda(X)) = \Lambda^{-1} \circ \Lambda(1 \otimes X) = 1 \otimes id(X).$$

□

Следствие 3.1. Имеем $\theta(fX^b) = f \otimes X$, где $X \in \mathfrak{g}$, $f \in C^\infty(P)$.

Доказательство. Действительно,

$$\theta(fX^b) = \theta(f\lambda(X)) = \theta \circ \Lambda(f \otimes X) = f \otimes X.$$

Здесь мы воспользовались определением отображения Λ (см. (3.17)).

□

Присоединенное представление Ad структурной группы на алгебре Ли \mathfrak{g} (см. пример 3.7) индуцирует представление этой группы на $C^\infty(P)$ -модуле $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$, которое мы будем обозначать теми же символами Ad . Именно,

$$Ad(g)(f^k \otimes X_k) = (f^k \circ R_g) \otimes Ad(g)X_k, \quad f^k \otimes X_k \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}, \quad g \in G. \quad (3.21)$$

Покажем, что $Ad(g_1 g_2) = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)$, то есть введенное отображение Ad будет гомоморфизмом групп. Имеем

$$\begin{aligned} Ad(g_1 g_2)(f^k \otimes X_k) &= (f^k \circ R_{g_1 g_2}) \otimes Ad(g_1 g_2)(X_k) = ((f^k \circ R_{g_2}) \circ R_{g_1}) \otimes (Ad(g_1) \circ Ad(g_2)(X_k)) = \\ &= Ad(g_1) ((f^k \circ R_{g_2}) \otimes (Ad(g_2)(X_k))) = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)(f^k \otimes X_k). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением правого действия. Итак, мы показали, что Ad является гомоморфизмом, а значит, представлением на модуле $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$.

Теорема 3.6. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, θ – форма связности на \mathcal{B} . Тогда следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(P) & \xrightarrow{(R_g)_*} & \mathfrak{X}(P) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad(g^{-1})} & C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \end{array}$$

или $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (R_g)_*$. Это свойство называется эквивариантностью формы связности.

Доказательство. Доказательство теоремы разобьем на три части.

1) Пусть $X_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ – произвольное векторное поле. Докажем, что для него выполняется требуемое тождество. Имеем

$$\theta \circ (R_g)_*(X_{\mathcal{H}}) = \Lambda^{-1} \circ \Pi((R_g)_*(X_{\mathcal{H}})) = 0.$$

Здесь мы воспользовались теоремой 3.5 и тем, что $\mathcal{H} = \ker \Pi$.

С другой стороны,

$$Ad(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathcal{H}}) = Ad(g^{-1}) \circ \Lambda^{-1} \circ \Pi(X_{\mathcal{H}}) = 0.$$

Здесь мы использовали также, что $X_{\mathcal{H}} \in \ker \Pi$ (это следует из определений вертикального проектора и горизонтального распределения).

2) Пусть $X_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$. Тогда фиксируем базис (E_1, \dots, E_r) в алгебре Ли \mathfrak{g} и рассмотрим базис (E_1^b, \dots, E_r^b) в вертикальном распределении \mathcal{V} , где $E_a^b = \lambda(E_a)$. Следовательно, любое вертикальное векторное поле (то есть векторное поле из \mathcal{V}) можно разложить по этому базису: $X_{\mathcal{V}} = f^a E_a^b$, $f^a \in C^\infty(P)$, $a = 1, \dots, r$.

Используя формулу (3.16), получим

$$\begin{aligned}\theta \circ (R_g)_* X_{\mathcal{V}} &= \theta \circ (R_g)_*(f^a E_a^b) = \theta \left((f^a \circ R_{g^{-1}})(R_g)_* E_a^b \right) = \theta \left((f^a \circ R_{g^{-1}})((R_g)_* \lambda(E_a)) \right) = \\ &= \theta \left((f^a \circ R_{g^{-1}})(\lambda \circ \text{Ad}(g^{-1})(E_a)) \right) = (f^a \circ R_{g^{-1}})(\theta \circ \lambda \circ \text{Ad}(g^{-1})(E_a)) = (f^a \circ R_{g^{-1}})(1 \otimes \text{Ad}(g^{-1})(E_a)) = \\ &= \text{Ad}(g^{-1})(f^a \otimes E_a) = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \theta \circ \Lambda(f^a \otimes E_a) = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \theta(f^a E_a^b) = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathcal{V}}).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.6), $C^\infty(P)$ -линейностью формы связности, предложением 3.5, формулой (3.21).

3) Рассмотрим общий случай $X \in \mathfrak{X}(P)$. Тогда раскладывая $X = X_{\mathcal{H}} + \mathfrak{X}_{\mathcal{V}}$ и применяя пункты 1), 2) и линейность отображений, получим

$$\theta \circ (R_g)_*(X) = \theta \circ (R_g)_*(X_{\mathcal{H}}) + \theta \circ (R_g)_*(X_{\mathcal{V}}) = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathcal{H}}) + \text{Ad}(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathcal{V}}) = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \theta(X).$$

□

Теорема 3.7. *Задание связности в главном расслоении $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ равносильно заданию 1-формы θ на пространстве расслоения со значениями в алгебре Ли структурной группы, обладающей свойствами:*

1. $\theta \circ \Lambda = \text{id}$; в частности, $\theta(fX^b) = f \otimes X$;
2. $\text{Ad}(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ (R_g)_*$, где $f \in C^\infty(P)$, $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$.

Доказательство. 1) Если проектор Π – связность на \mathcal{B} , то по доказанному 1-форма $\theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi$ обладает требуемыми свойствами.

2) Обратно, пусть форма θ , заданная на многообразии P обладает указанными свойствами. Нам нужно построить связность на \mathcal{B} , а именно, проектор на вертикальное распределение \mathcal{V} , инвариантный относительно действия структурной группы. Зададим отображение

$$\Pi : \mathfrak{X}(P) \rightarrow \mathcal{V}$$

по формуле $\Pi = \Lambda \circ \theta$. Очевидно, что оно $C^\infty(P)$ -линейно как композиция таковых. Далее,

$$\Pi^2 = (\Lambda \circ \theta) \circ (\Lambda \circ \theta) = \Lambda \circ \theta = \Pi.$$

Здесь мы воспользовались первым свойством θ из условия теоремы. Таким образом, построенное отображение Π является проектором.

Покажем, что образом проектора Π совпадает с вертикальным распределением \mathcal{V} . Очевидно, что для любого $X \in \mathfrak{X}(P)$ получим $\Pi(X) \in \mathcal{V}$, так как $\Lambda : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{V}$. Докажем, что отображение Π сюръективно, что и будет означать совпадение образа проектора Π и вертикального распределения \mathcal{V} . Имеем, по первому свойству формы θ из условия теоремы $\theta(\Lambda(X)) = X$, то есть для любого $X \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$ существует прообраз $(\Lambda(X))$ при отображении θ , то есть θ – сюръективно. Отображение Λ сюръективно по определению (так как сюръективно отображение $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{f}$). Тогда сюръективно и отображение Π . Итак, отображение Π является проектором на вертикальное распределение \mathcal{V} .

Нам осталось показать, что этот проектор инвариантен относительно действия структурной группы. Для этого достаточно показать, что его псевдогоризонтальное распределение $\mathcal{H} = \ker \Pi$ инвариантно относительно действия структурной группы (см. теорему 3.5).

Пусть $X_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ – произвольный элемент, $g \in G$. Тогда

$$\Pi \circ (R_g)_* X_{\mathcal{H}} = \Lambda \circ \theta \circ (R_g)_* X_{\mathcal{H}} = \Lambda \circ \text{Ad}(g^{-1}) \circ \theta(X_{\mathcal{H}}) = 0,$$

так как $\ker \Pi = \ker \theta$. Следовательно, $\Pi \circ (R_g)_* X_{\mathcal{H}} \in \ker \Pi = \mathcal{H}$. Значит, Π – связность. При этом ее форма связности

$$\Lambda^{-1} \circ \Pi = \Lambda^{-1} \circ \Lambda \circ \theta = \theta$$

совпадает с исходной формой θ . □

§3.6. Горизонтальный лифт.

6.1. В дальнейшем нам потребуется следующее предложение, которое мы примем без доказательства.

Предложение 3.6. *Пусть $\Pi_{\mathcal{V}}$ – вертикальный проектор в главном расслоении $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$, \mathcal{H} – соответствующее псевдогоризонтальное распределение. Тогда для любой точки $p \in P$ отображение*

$$(\pi_*)_p|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)}(M)$$

является изоморфизмом линейных пространств.

Теорема 3.8. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение, $\mathcal{H} \subset \mathfrak{X}(P)$ – (псевдо)горизонтальное распределение на P . Тогда для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ существует единственное векторное поле $Y \in \mathcal{H}$ π -связанное с векторным полем X , то есть $\pi_* Y = X$ (см. § 1.4.).

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольное векторное поле. Согласно предложению 3.6 для любой точки $p \in P$ существует единственный вектор $Y_p \in \mathcal{H}_p$, такой что

$$(\pi_*)_p Y_p = X_{\pi(p)}.$$

Следовательно, на многообразии P однозначно определено семейство векторов $Y = \{Y_p | p \in P\}$. Можно показать, что это семейство векторов определяет на P гладкое векторное поле. Тогда Y будет искомым. \square

Рассмотрим главное расслоение $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ и фиксируем на нем связность, то есть вертикальный проектор $\Pi_{\mathcal{V}}$, инвариантный относительно действия структурной группы. Пусть \mathcal{H} – горизонтальное распределение на многообразии P , X – произвольное векторное поле на многообразии M . Векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(P)$, однозначно определяемое условиями

$$1) \quad \pi_* Y = X; \quad 2) \quad Y \in \mathcal{H},$$

называется *горизонтальным лифтом* или *горизонтальным поднятием* векторного поля X и обозначается X^\sharp .

В силу теоремы 3.8 для каждого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ существует и единственен горизонтальный лифт X^\sharp . Горизонтальные лифты векторных полей с базы расслоения можно охарактеризовать как проектируемые горизонтальные векторные поля.

Рассмотрим свойства горизонтальных лифтов.

Теорема 3.9. Горизонтальный лифт X^\sharp произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ инвариантен относительно действия структурной группы, то есть для любого элемента $g \in G$ имеем

$$(R_g)_* X^\sharp = X^\sharp.$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что векторное поле $(R_g)_* X^\sharp$ является горизонтальным лифтом векторного поля X . Чтобы воспользоваться для этого определением горизонтального лифта, нам нужно показать, что векторное поле $(R_g)_* X^\sharp$, во-первых, горизонтально, а, во-вторых, что оно π -связано с векторным полем X .

Напомним, что горизонтальное распределение \mathcal{H} является ядром связности $\Pi_{\mathcal{V}}$. Тогда с учетом инвариантности связности (вертикального проектора $\Pi_{\mathcal{V}}$) относительно действия структурной группы имеем

$$\Pi_{\mathcal{V}}((R_g)_* X^\sharp) = (R_g)_*(\Pi_{\mathcal{V}} X^\sharp) = (R_g)_*(0) = 0,$$

так как векторное поле X^\sharp горизонтально, то есть принадлежит ядру вертикального проектора $\Pi_{\mathcal{V}}$.

Таким образом, мы получили, что векторное поле $(R_g)_* X^\sharp$ принадлежит ядру проектора $\Pi_{\mathcal{V}}$, следовательно, горизонтально.

Вычислим $\pi_*((R_g)_* X^\sharp)$. Из определения главного расслоения следует, что $\pi \circ (R_g) = \pi$. Тогда

$$\pi_* \circ (R_g)_* = \pi_*.$$

Используя эту формулу, получим

$$\pi_*((R_g)_* X^\sharp) = \pi_* X^\sharp = X.$$

По определению мы получаем, что векторное поле $(R_g)_* X^\sharp$ является π -связанным с векторным полем X .

Объединяя оба результата, получаем, что $(R_g)_* X^\sharp$ есть горизонтальный лифт векторного поля X , что и требовалось доказать. \square

Теорема 3.10. Для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ имеем

$$\Pi_{\mathcal{H}}([X^\sharp, Y^\sharp]) = [X, Y]^\sharp,$$

где $\Pi_{\mathcal{H}} = id - \Pi_{\mathcal{V}}$ – горизонтальный проектор (дополнительный к вертикальному), $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Доказательство. Очевидно, что в обеих частях равенства стоят горизонтальные векторные поля. Осталось доказать, что они являются лифтами одного и того же векторного поля $[X, Y]$ из $\mathfrak{X}(M)$, то есть $\pi_* \circ \Pi_{\mathcal{H}}([X^\sharp, Y^\sharp]) = [X, Y]$. Имеем

$$\pi_* \circ \Pi_{\mathcal{H}}([X^\sharp, Y^\sharp]) = \pi_* \circ (id - \Pi_{\mathcal{V}})([X^\sharp, Y^\sharp]) = [\pi_* X^\sharp, \pi_* Y^\sharp] = [X, Y].$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\Pi_{\mathcal{V}}([X^\sharp, Y^\sharp]) \in \mathcal{V} = \ker \pi_*$ (см. § 3.4.) и свойство увлеченных векторных полей (см. замечание 1.9). \square

6.2. Если на главном расслоении \mathcal{B} фиксирована связность, то возникает отображение

$$\sharp : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(P),$$

сопоставляющий каждому векторному полю $X \in \mathfrak{X}(M)$ его горизонтальный лифт X^\sharp .

Покажем, что отображение \sharp является \mathbb{R} -линейным отображением, то есть гомоморфизмом векторных пространств $\mathfrak{X}(M)$ и $\mathfrak{X}(P)$. Для этого нужно проверить выполнение двух равенств

$$X^\sharp + Y^\sharp = (X + Y)^\sharp; \quad \lambda X^\sharp = (\lambda X)^\sharp,$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля, λ – произвольное вещественное число. Доказательство этих равенств аналогично доказательству теоремы 3.9 (проведите самостоятельно).

Так как отображение

$$\sharp : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(P)$$

гомоморфизм векторных пространств, он однозначно расширяется до гомоморфизма $C^\infty(P)$ -модулей

$$\natural : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(P)$$

по формуле $\natural(f^k \otimes X_k) = f^k X_k^\sharp$, $f^k \in C^\infty(P)$, $X_k \in \mathfrak{X}(M)$, то есть $\natural = id \otimes \sharp$.

Из доказанного следует, что

$$\pi_* \circ \natural(1 \otimes X) = X; \quad \pi_* \circ \sharp = id, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Предложение 3.7. Гомоморфизм \sharp является мономорфизмом.

Доказательство. Пусть $X \in \ker \sharp$, то есть $\sharp X = 0$. Следовательно, $\pi \circ \sharp(X) = 0$, то есть $id(X) = 0$, то есть $X = 0$. \square

Следствие 3.2. Из этого следует, что $\ker \natural = \{0\}$, так как $\ker \natural C^\infty(P) \otimes \ker \sharp$, а значит, гомоморфизм \natural является мономорфизмом.

Предложение 3.8. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение с фиксированной в нем связностью и \mathcal{H} – соответствующее горизонтальное распределение. Тогда отображение

$$\sharp : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathcal{H}$$

является изоморфизмом векторных пространств. Здесь $\mathfrak{X}_\pi(P)$ – модуль проектируемых векторных полей. В частности, $Im \sharp = \mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathcal{H}$.

Доказательство. По определению горизонтального лифта имеем $\sharp \circ \pi_*|_{\mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathcal{H}} = id$. Кроме того, как мы видели $\pi_* \circ \sharp = id$. Откуда получим, что $\sharp^{-1} = \pi_*|_{\mathfrak{X}_\pi(P) \cap \mathcal{H}}$, то есть оно \mathbb{R} -линейно и допускает обратное, то есть является изоморфизмом векторных пространств. \square

Теорема 3.11. Пусть X – горизонтальное векторное поле. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) X – горизонтальный лифт некоторого векторного поля с базы расслоения;
- 2) X – проектируемо;
- 3) X инвариантно относительно действия структурной группы.

Доказательство. 1) Пусть X – лифт некоторого векторного поля Y с базы, то есть $X = Y^\sharp$. По определению оно проектируемо, так как $\pi_* X = Y$, а в соответствии с замечанием 3.9 оно инвариантно относительно действия структурной группы. Итак, из 1) следует 2) и 3).

2) Пусть X – проектируемо. Тогда $X \in Im \sharp$, так как по условию X – горизонтально. Следовательно, существует векторное поле $Y \in \mathfrak{X}(M)$, такое что $X = Y^\sharp$, то есть горизонтальный лифт. Тогда по доказанному X инвариантно относительно действия структурной группы. Итак, из 2) следует 1) и 3).

3) Пусть X инвариантно относительно действия структурной группы. Пусть $p, q \in P$ – произвольные точки, такие что $\pi(p) = \pi(q)$. Тогда по определению главного расслоения (транзитивность действия группы на слоях) существует элемент $g \in G$ такой, что $q = pg$, а значит,

$$(\pi_*)_q X_q = (\pi_*)_q (((R_g)_*)_p X_p) = ((\pi \circ R_g)_*)_p X_p = (\pi_*)_p X_p.$$

Здесь мы воспользовались инвариантностью векторного поля X относительно действия структурной группы, то есть $X_q = X_{R_g(p)} = ((R_g)_*)_p X_p$. Итак, векторное поле X проектируемо, а значит, является горизонтальным лифтом. \square

Лемма 3.4. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение с фиксированной связностью, \mathcal{H} – соответствующее горизонтальное распределение. Тогда любой горизонтальный вектор $X_p \in \mathcal{H}_p$ можно достроить до горизонтального лифта некоторого поля с базы расслоения.

Доказательство. Обозначим $m = \pi(p)$, $Y_m = (\pi_*)_p X_p$. Достроим вектор Y_m до векторного поля $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда Y^\sharp будет искомым векторным полем. В силу единственности горизонтального лифта $(Y^\sharp)_p = X_p$. \square

Предложение 3.9 . Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение с фиксированной связностью, \mathcal{H} – соответствующее горизонтальное распределение. Тогда гомоморфизм $\natural : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{H}$ является изоморфизмом $C^\infty(P)$ -модулей.

Доказательство. Согласно следствию 3.2 гомоморфизм \natural является мономорфизмом. Далее, из леммы 3.4 следует, что распределение на P , являющееся образом гомоморфизма \natural , определяет в любой точке $p \in P$ площадку, совпадающую с \mathcal{H}_p . Но распределение \mathcal{H} также образует в любой точке $p \in P$ такую же площадку. Следовательно, $Im \natural = \mathcal{H}$. Итак, отображение \natural является изоморфизмом. \square

Теорема 3.12. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение. Тогда $\mathfrak{X}(P) = C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P)$ или, как говорят, $C^\infty(P)$ -модуль $\mathfrak{X}(P)$ является $C^\infty(P)$ -расширением векторного пространства проектируемых векторных полей $\mathfrak{X}(P)$.

Доказательство. Фиксируем связность в главном расслоении \mathcal{B} . Пусть \mathcal{H} – ее горизонтальное распределение. Очевидно, что разложение $\mathfrak{X}(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ индуцирует разложение $\mathfrak{X}_\pi(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}_\pi$. Следовательно,

$$C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P) = C^\infty(P) \otimes (\mathcal{V} \oplus \mathcal{H}_\pi) = C^\infty(P) \otimes \mathcal{V} \oplus C^\infty(P) \otimes \mathcal{H}_\pi = \mathcal{V} \oplus C^\infty(P) \otimes \mathcal{H}_\pi.$$

Здесь мы воспользовались тем, что вертикальное распределение \mathcal{V} является $C^\infty(P)$ -модулем. Так как гомоморфизм $\natural : \mathfrak{X}(M) \rightarrow H_\pi$ является изоморфизмом векторных пространств, а значит, гомоморфизм $\natural : C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(P) \otimes H_\pi$ является изоморфизмом $C^\infty(P)$ -модулей. Согласно предложению 3.7 образом этого изоморфизма является распределение \mathcal{H} и, значит, $C^\infty(P) \otimes \mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}$. Откуда

$$C^\infty(P) \otimes \mathfrak{X}_\pi(P) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} = \mathfrak{X}(P).$$

\square

Замечание 3.9. Теорема 3.12 позволяет построить локальный базис в $\mathfrak{X}(P)$, состоящий из проектируемых векторных полей. В следующем параграфе мы будем использовать базис, первая часть которого состоит из фундаментальных векторных полей (это поля π -связанные с нулевым векторным полем на базе), а вторая часть базиса состоит из горизонтальных лифтов векторных полей натурального базиса с базы расслоения).

§3.7. Структурные уравнения связности. Теорема Картана-Лаптева.

7.1. Примем без доказательства важную теорему.

Теорема 3.13. Пусть $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ – главное расслоение со связной структурной группой. Тогда псевдогоризонтальное распределение $\mathcal{H} \subset \mathfrak{X}(P)$ является горизонтальным тогда и только тогда, когда

$$[\lambda \mathfrak{g}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H},$$

где \mathfrak{g} – алгебра Ли структурной группы G . Другими словами, псевдогоризонтальное распределение \mathcal{H} будет горизонтальным (то есть будет задавать связность) тогда и только тогда коммутатор любого фундаментального векторного поля и векторного поля из псевдогоризонтального распределения \mathcal{H} принадлежит \mathcal{H} .

Замечание 3.10. Связность структурной группы существенна в доказательстве достаточности из теоремы 3.13. Необходимость может быть доказана без нее. Это будет существенно при выводе второй группы структурных уравнений связности.

Вернемся к изучению структурных уравнений главного расслоения (см. § 3.4.). Напомним, что если фиксировать базис (E_1, \dots, E_r) алгебры Ли \mathfrak{g} , то фундаментальные векторные поля $(E_1^\flat, \dots, E_r^\flat)$ образует базис векторного пространства фундаментальных векторных полей \mathfrak{f} , а также базис распределения $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f} = \mathcal{F} = \mathcal{V}$. Этот базис мы дополняли до локального базиса $\mathfrak{X}(P)$. Если на многообразии P фиксирована связность (или, более обще, псевдогоризонтальное распределение), то в качестве дополнительных векторных полей можно взять горизонтальные лифты векторных полей базы, образующих локальный базис модуля $\mathfrak{X}(M)$. Например, можно взять горизонтальные лифты векторных полей натурального базиса:

$$E_{r+1} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^\sharp, \quad \dots, \quad E_{r+n} = \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^\sharp.$$

Назовем полученный базис

$$(E_1^b, \dots, E_r^b, E_{r+1}, \dots, E_{r+n}) \quad (3.22)$$

базисом, адаптированным связности или, более обще, базисом, адаптированным псевдогоризонтальному распределению, короче, СА-базисом.

Напомним, что индексы $a, b, c, d = 1, \dots, r$, индексы $i, j, k, \ell = r + 1, \dots, r + n$, а индексы $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, r + n$.

Пусть $(\omega^1, \dots, \omega^{r+n})$ – дуальный базис.

Лемма 3.5. *1-формы $(\omega^1, \dots, \omega^r)$ образуют систему Пфаффа распределения (псевдо)горизонтального распределения \mathcal{H} .*

Доказательство. Рассмотрим произвольное векторное поле $X \in \mathfrak{X}(P)$. Имеем

$$X = X^a E_a^b + X^i E_i = \omega^a(X) E_a^b + \omega^i(X) E_i.$$

Тогда

$$X \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \omega^a(X) = 0.$$

□

Согласно (3.15) вторая группа структурных уравнений главного расслоения имеет вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + \omega_j^a \wedge \omega^j,$$

где $\omega_j^a = R_{bj}^a \omega^b + \frac{1}{2} R_{kj}^a \omega^k$. Благодаря связности (а именно, выбору дополнения к базису в горизонтальном распределении эти уравнения можно еще больше упростить. А именно, с учетом теоремы 3.13 получим

$$R_{bj}^a = d\omega^a(E_b^b, E_j) = E_b^b \omega^a(E_j) - E_j \omega^a(E_b^b) - \omega^a([E_b^b, E_j]) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\omega^a(E_j) = \delta_j^a$, $\omega^a(E_b^b) = \delta_b^a$ и $[E_b^b, E_j] \in \mathcal{H}$, а значит, по лемме 3.5 $\omega^a([E_b^b, E_j]) = 0$. Итак, при фиксации связности вторая группа структурных уравнений приняла вид

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2} R_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j. \quad (3.23)$$

Обратно, пусть $R_{bj}^a = 0$. Тогда для любого фундаментального векторного поля $X^b \in \mathfrak{f}$ и любого горизонтального векторного поля $Y_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ имеем

$$\begin{aligned} \omega^a([X^b, Y_{\mathcal{H}}]) &= -d\omega^a(X^b, Y_{\mathcal{H}}) + X^b(\omega^a(Y_{\mathcal{H}})) - Y_{\mathcal{H}}(\omega^a(X^b)) = -d\omega^a(X^b, Y_{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c(X^b, Y_{\mathcal{H}}) - \\ &- \frac{1}{2} R_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j(X^b, Y_{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2} C_{bc}^a (\omega^b(X^b) \omega^c(Y_{\mathcal{H}}) - \omega^b(Y_{\mathcal{H}}) \omega^c(X^b)) - \frac{1}{2} R_{ij}^a (\omega^i(X^b) \omega^j(Y_{\mathcal{H}}) - \omega^i(Y_{\mathcal{H}}) \omega^j(X^b)) = 0 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что \mathfrak{f} векторное пространство, а значит результат действия формы (так как это линейное отображение векторного пространства, то форма является ковектором) на векторном поле (аналогично это вектор) будет вещественное число. Тогда действие вектора на вещественном числе (то есть на постоянной функции) равно нулю. Еще одно слагаемое $\omega^a(Y_{\mathcal{H}})$ обнуляется согласно лемме 3.5. Также мы воспользовались (3.23). Наконец, использовали формулу (1.6) и то, что формы (ω^i) образуют систему Пфаффа вертикального распределения (см § 3.4).

Замечание 3.11. Уравнения (3.23) выведены без предположения связности структурной группы.

Обратное утверждение, а именно, то что \mathcal{H} является горизонтальным распределением при выполнении (3.23), требует предположения связности структурной группы.

Тем самым нами доказана

Теорема 3.14. *(Картана-Лаптева) Псевдогоризонтальное распределение на пространстве главного расслоения $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ является горизонтальным (то есть определяет связность тогда и только тогда, когда его система Пфаффа (ω^a) удовлетворяет дифференциальным уравнениям*

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2} R_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j \quad \square$$

Замечание 3.12. В теореме Картана-Лаптева структурная группа G предполагается связной, иначе берется сужение расслоения на связную компоненту группы G .

Соотношения

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega_j^i \wedge \omega^j \\ d\omega^a &= -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2} R_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j \end{aligned} \quad (3.24)$$

называются *структурными уравнениями Картана* или *структурными уравнениями связности* (первой и второй группой соответственно).

7.2. Запишем структурные уравнения связности в инвариантном виде. Пусть $X \in \mathfrak{X}(P)$ – произвольное векторное поле. Тогда мы можем разложить его по CA -базису (3.22)

$$X = X^a E_a^b + X^i E_i.$$

Пусть θ – форма связности на \mathcal{B} . Тогда по определению формы связности (см. (3.18)). Тогда

$$\theta(X) = \Lambda^{-1} \circ \Pi(X^a E_a^b + X^i E_i) = \Lambda^{-1}(X^a E_a^b) = X^a \otimes \lambda^{-1}(E_a^b) = X^a \otimes E_a = \omega^a(X) \otimes E_a \equiv \omega^a \otimes E_a(X).$$

Здесь мы воспользовались тем, что Π – проектор на вертикальное распределение, а значит, на горизонтальных векторных полях дает нуль; определением $\Lambda = id \otimes \lambda$. Напомним, что (E_a) – базис алгебры Ли \mathfrak{g} . Последнее равенство в цепочке мы положили по определению. Итак, мы получили

$$\theta = \omega^a \otimes E_a,$$

то есть формы $\{\omega^a\}$ являются тензорными компонентами формы связности θ (см. замечание 3.7).

Далее, положим по определению

$$d\theta = d\omega^a \otimes E_a.$$

Можно показать, что форма $d\theta$ не зависит от выбора базиса (E_a) , а значит, определена корректно.

Составим формальные суммы из второй группы структурных уравнений (3.24)

$$d\omega^a \otimes E_a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c \otimes E_a + \frac{1}{2} R_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a.$$

С учетом определения структурных констант $C_{bc}^a E_a = [E_b, E_c]$ получим

$$d\theta = -\frac{1}{2} \omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c] + \frac{1}{2} R_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a.$$

Обозначим

$$\omega^b \wedge \omega^c \otimes [E_b, E_c] = [\theta, \theta]; \quad \frac{1}{2} R_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a = \Phi. \quad (3.25)$$

Тогда с учетом этих обозначений вторая группа структурных уравнений запишется в виде

$$d\theta = -\frac{1}{2} [\theta, \theta] + \Phi,$$

где $\Phi = \frac{1}{2} R_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j \otimes E_a$ – 2-форма на многообразии P со значениями в алгебре Ли \mathfrak{g} . Она называется *формой кривизны связности*. Связность в главном расслоении называется *плоской*, если форма кривизны связности тождественно равна нулю.

Теорема 3.15. *Связность на главном расслоении является плоской тогда и только тогда, когда ее горизонтальное распределение \mathcal{H} вполне интегрируемо.*

Доказательство. Согласно второй группе структурных уравнений (3.24) связность в главном расслоении является плоской тогда и только тогда, когда

$$d\omega^a = \left(-\frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \right) \wedge \omega^c,$$

Согласно предложению 1.4 это означает, что система Пфаффа (ω^a) горизонтального распределения инволютивна, а значит, по теореме Фробениуса \mathcal{H} вполне интегрируемо. \square

r -форма $\omega \in \Lambda_r(P)$ на многообразии P называется *горизонтальной*, если она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов вертикален.

Предложение 3.10. *Форма $\omega \in \Lambda_r(P)$ горизонтальна тогда и только тогда, когда*

$$\Pi_{\mathcal{H}}^* \omega = \omega,$$

где отображение $(\Pi_{\mathcal{H}}^* \omega)(X_1, \dots, X_r) = \omega(\Pi_{\mathcal{H}}(X_1), \dots, \Pi_{\mathcal{H}}(X_r))$, $\Pi_{\mathcal{H}}$ – проектор на псевдогоризонтальное распределение, дополнительный к проектору $\Pi_{\mathcal{V}}$ на вертикальное распределение.

Доказательство. Пусть r -форма ω горизонтальна. Тогда для любых векторных полей $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(P)$ имеем

$$\omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(\Pi_{\mathcal{H}} X_1 + \Pi_{\mathcal{V}} X_1, \dots, \Pi_{\mathcal{H}} X_r + \Pi_{\mathcal{V}} X_r) = \omega(\Pi_{\mathcal{H}} X_1, \dots, \Pi_{\mathcal{H}} X_r) = \Pi_{\mathcal{H}}^* \omega(X_1, \dots, X_r). \quad (3.26)$$

Здесь мы воспользовались линейностью формы ω и тем, что она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов вертикален ($\Pi_{\mathcal{V}} X_i$ – вертикальные векторные поля).

Обратно, пусть $\Pi_{\mathcal{H}}^* \omega = \omega$. Рассмотрим векторные поля X_1, \dots, X_r , где X_1 – вертикальное векторное поле. Тогда

$$\omega(X_1, \dots, X_r) = \Pi_{\mathcal{H}}^* \omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(\Pi_{\mathcal{H}} X_1, \Pi_{\mathcal{H}} X_2, \dots, \Pi_{\mathcal{H}} X_r) = \omega(0, \Pi_{\mathcal{H}} X_2, \dots, \Pi_{\mathcal{H}} X_r) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что значение r -формы на наборе аргументов, среди которых хотя бы один нулевой, равно нулю. \square

Пусть на главном расслоении $\mathcal{B} = (P, M, \pi, G)$ фиксирована связность. r -форма ω называется *вертикальной*, если она обращается в нуль, если хотя бы один из ее аргументов горизонтален.

Задача 3.2. Докажите, что r -форма ω является вертикальной тогда и только тогда, когда $\Pi_{\mathcal{H}}^* \omega = 0$.

Замечание 3.13. Свойство формы быть горизонтальной – внутреннее свойство главного расслоения, а свойство формы быть вертикальной зависит от выбора связности.

Лемма 3.6. q -форма ω на многообразии P горизонтальна тогда и только тогда, когда в CA -базисе (E_a, E_i) она имеет вид

$$\omega = a_{i_1 \dots i_q} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_q}, \quad (3.27)$$

где (ω^a, ω^i) – базис дуальный для базиса (E_a, E_i) .

Доказательство. Пусть имеет место соотношение (3.27). Напомним, что координаты формы (то есть коэффициенты разложения в (3.27)) совпадают с компонентами этой формы в CA -базисе, то есть

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \omega(E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_q}),$$

где $\alpha = 1, \dots, r + n$. В силу (3.27), коэффициенты, у которых хотя бы один индекс принимает значения от 1 до r , то есть индекс вида a , равны нулю. Следовательно, $\omega(E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_q})$, где хотя бы одно $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ принимает значение от 1 до r равно нулю.

Рассмотрим набор векторных полей X_1, \dots, X_q и предположим, что X_1 вертикальное векторное поле, то есть оно раскладывается $X_1 = X_1^a E_a$, $a = 1, \dots, r$. Тогда

$$\omega(X_1^{a_1} E_{a_1}, X_2^{a_2} E_{a_2} + X_2^{i_2} E_{i_2}, \dots, X_r^{a_r} E_{a_r} + X_r^{i_r} E_{i_r}) = X_1^{a_1} \dots \omega(E_{a_1}, \dots) + \dots$$

Здесь мы раскрыли суммы по линейности. Тогда в каждом слагаемом будет сомножитель вида $\omega(E_a, \dots)$. Он обращается в нуль, а значит, и вся сумма равна нулю.

Обратно, пусть форма ω горизонтальна. Тогда

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \omega(E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_s}) = 0,$$

если хотя бы один из аргументов вертикален, то есть хотя бы один из индексов принимает значения от 1 до r . \square

Пример 3.13. Форма кривизны связности Φ является горизонтальной. Точнее ее тензорные компоненты являются горизонтальными формами в силу леммы 3.6 и определения формы кривизны (3.25).

Форма связности θ является вертикальной. Действительно, по определению формы связности (3.18) имеем

$$\theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi,$$

где Π – вертикальный проектор. Так как $\ker \Pi = \mathcal{H}$, для любого горизонтального векторного поля $X_{\mathcal{H}}$ имеем $\theta(X_{\mathcal{H}}) = 0$.

§3.8. Задачи к главе.

Задача 3.3. Пусть дана круговая цилиндрическая поверхность (см. пример 3.12). Как мы видели, его вертикальное распределение состоит из векторных полей, касательные векторы которых параллельны прямолинейным образующим этой цилиндрической поверхности. Базисом вертикального распределения является система фундаментальных векторных полей (в данном случае – это одно векторное поле). Докажите, что фундаментальное векторное поле на цилиндре не может иметь стрелки торчащие в разные стороны. Используя этот факт, покажите, что вертикальное распределение не совпадает с векторным пространством фундаментальных векторных полей (чтобы получить знак равенства, нужно взять тензорное произведение $C^\infty(P) \otimes \mathfrak{f}$).

Задача 3.4. На круговой цилиндрической поверхности задано отображение двумерного касательного векторного пространства в каждой точке цилиндрической поверхности на вертикальное распределение. Указать соответствующее горизонтальное распределение.

Задача 3.5. Для круговой цилиндрической поверхности в каждой ее точке даны прямые, которые пересекают прямолинейные образующие под одним и тем же углом. Будет ли множество векторов, параллельное такой прямой, образовывать горизонтальную площадку некоторой связности? Если эти прямые будут гладко поворачиваться?

Глава 4. Главное расслоение вещественных реперов.

§4.1. Главное расслоение вещественных реперов.

1.1. Пусть M – n -мерное гладкое многообразие, $m \in M$ – произвольная точка. Рассмотрим касательное пространство $T_m(M)$ и фиксируем в нем базис (e_1, \dots, e_n) . Тогда совокупность $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ называется *линейным репером* многообразия M с вершиной в точке m (или просто *репером*), а базис (e_1, \dots, e_n) называется *базисной частью линейного репера* или просто *базисом репера*. Линейный репер, базисная часть которого является натуральным базисом, будем называть *натуральным репером*.

Обозначим $BM = \{(m, e_1, \dots, e_n), m \in M\}$ множество всех реперов во всех точках многообразия M . Наша ближайшая задача доказать, что четверка $(BM, M, GL(n, \mathbb{R}), \pi)$, где $\pi : BM \rightarrow M$ – отображение, ставящее каждому реперу p его вершину m , является главным расслоением (см. § 3.3.).

Мы должны доказать выполнимость всех требований определения главного расслоения. Начнем с действия группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве (пока в этом множестве нет даже структуры топологического пространства). Напомним, что задание действия группы G на множестве P равносильно заданию отображения $\Phi : G \times P \rightarrow P$, удовлетворяющее двум условиям:

$$\Phi(e, m) = m; \quad \Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(hg, m),$$

где e – единица группы G , $g, h \in G$ – произвольные элементы, $m \in P$ – произвольный репер. Задаем отображение Φ в нашем случае:

$$\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \times BM \rightarrow BM$$

каждому реперу $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in BM$ и каждой матрице $g \in GL(n, \mathbb{R})$ ставит в соответствие репер $q = (m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ с той же вершиной m и базисной частью $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, для которой матрица g является матрицей перехода от базиса (e_1, \dots, e_n) к базису $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Другими словами, $\varepsilon_i = g_i^j e_j$, где (g_i^j) – элементы матрицы g . Мы видим, что действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве BM сводится к действию этой группы на множестве базисов векторного пространства $T_m(M)$. Как мы доказали в примере 3.8 это правое свободное действие. О гладкости этого действия мы пока ничего не можем сказать, так как на множестве BM нет гладкой структуры и пока мы отложим этот вопрос. Займемся орбитами построенного действия. Возьмем произвольный репер $p \in BM$ и применим к нему все элементы группы $GL(n, \mathbb{R})$. Очевидно, что мы получим все возможные реперы с вершиной в точке m , то есть орбитами действия группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве реперов BM являются множества всевозможных реперов с общей вершиной. Каждую такую орбиту мы можем отождествить с вершиной реперов, принадлежащий ей, то есть многообразию M может быть отождествлено с множеством орбит действия группы $GL(n, \mathbb{R})$ на множестве BM .

Построим гладкую структуру на BM , используя гладкую структуру на M . Пусть (U, φ) – произвольная гладкая карта на M с координатами (x^1, \dots, x^n) . Зададим отображение

$$F_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}),$$

положив $F_U(p) = g$, где g – матрица перехода от базиса натурального репера

$$p_0 = \left(m, e_1^0 = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_m, \dots, e_n^0 = \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_m \right)$$

к базису репера p , то есть элемент $g \in GL(n, \mathbb{R})$ однозначно определяющийся из уравнения $p_0 g = p$.

Теперь естественным образом определяется отображение

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(n, \mathbb{R})$$

по формуле $\psi_U(p) = (\pi(p), F_U(p))$.

Лемма 4.1. *Отображение ψ_U является биекцией.*

Доказательство. Пусть $\psi_U(p_1) = \psi_U(p_2)$ для некоторых реперов $p_1, p_2 \in BM$. Тогда, в частности, $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, а значит, вершины этих реперов совпадают. Далее, $F_U(p_1) = F_U(p_2)$, следовательно совпадают матрицы перехода от базисной части этих реперов к натуральному реперу, а значит, совпадают и сами базисы. Итак, $p_1 = p_2$, следовательно, отображение ψ_U инъективно.

Это отображение также и сюръективно, так как для любой пары $(m, g) \in U \times GL(n, \mathbb{R})$ можно построить репер $p = (m, g^{i_1} e_{i_1}^0, \dots, g^{i_n} e_{i_n}^0)$, который будет прообразом этой пары. \square

Теперь внесем во множество BM топологию, потребовав, чтобы отображение ψ_U было гомеоморфизмом. Иначе говоря, базой топологии на BM служит система множеств $\psi_U^{-1}(V_1 \times V_2)$, где $V_1 \subset U$ – открытое подмножество в топологии многообразия M , $V_2 \subset GL(n, \mathbb{R})$ – открытое подмножество в топологии группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. Тогда BM превратится в топологическое пространство. Из определения построенной топологии легко следует, что в ней отображение $\pi : BM \rightarrow M$ будет непрерывным. Действительно, для любого открытого множества $U \subset M$ его полный прообраз $\pi^{-1}(U) = \psi_U^{-1}(U \times GL(n, \mathbb{R}))$ будет открыт как прообраз открытого множества при гомеоморфизме.

Теперь переходим к построению карт на топологическом пространстве BM . Пусть $p \in BM$ – произвольная точка. Пусть (U, φ) – локальная карта на многообразии M в окрестности точки $m = \pi(p)$. Рассмотрим пару (W, χ) , где $W = \pi^{-1}(U)$ (это открытое множество, так как π непрерывно), $\chi : W \rightarrow \mathbb{R}^{n^2+n}$ – отображение, заданное формулой $\chi(p) = (\varphi \circ \pi(p), g_j^i \circ F_U(p)) \equiv (\varphi \times g_j^i) \circ \psi_U$, где $g_j^i : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ – функции, ставящие в соответствие матрице (g_j^i) ее элемент из i -й строки и j -го столбца. Отображение χ является гомеоморфизмом как композиция таковых. Тогда пара (W, χ) является локальной картой в топологическом пространстве BM . Ее координаты (y^i, y_j^i) задаются формулами

$$y^i = x^i \circ \pi; \quad y_j^i = g_j^i \circ F_U$$

Докажем, что построенные карты на BM гладко связаны. Пусть $(\tilde{W}, \tilde{\chi})$ – другая локальная карта в окрестности точки p с координатами $(\tilde{y}^i, \tilde{y}_j^i)$. Пусть ей соответствует локальная карта $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ с координатами $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ в окрестности точки $m = \pi(p)$. Тогда $\tilde{y}^i = \tilde{x}^i \circ \pi$, $\tilde{y}_j^i = g_j^i \circ \tilde{F}_U$. Заметим, что отображение

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$$

является диффеоморфизмом евклидовых пространств, поскольку эти карты гладко связаны. Пусть этот диффеоморфизм задается уравнениями $\tilde{x}^i = \alpha^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим отображение

$$\tilde{\chi} \circ \chi^{-1} : \chi(W \cap \tilde{W}) \rightarrow \tilde{\chi}(W \cap \tilde{W}).$$

Получим формулы, задающие это отображение и убедимся, что они гладкие. Имеем

$$\tilde{y}^i = \tilde{x}^i \circ \pi = \alpha^i(x^1, \dots, x^n) \circ \pi = \alpha^i(x^1 \circ \pi, \dots, x^n \circ \pi) = \alpha^i(y^1, \dots, y^n).$$

Это гладкое отображение как композиция таковых.

Далее, обозначим $C = (C_k^i)$ матрицу перехода от натурального репера второй карты к натуральному реперу первой карты, то есть $p_0 = \tilde{p}_0 C$. Тогда

$$\tilde{y}_j^i(p) = g_j^i \circ \tilde{F}_U(p) = g_j^i \circ \tilde{F}_U(p_0 g) = g_j^i \circ \tilde{F}_U(\tilde{p}_0 C g) = g_j^i(C g) = C_k^i g_j^k = C_k^i g_j^k(g) = C_k^i g_j^k(F_U(p)) = C_k^i y_j^k(p)$$

Итак, формулы перехода от первой ко второй карте имеют вид

$$\tilde{y}^i = \alpha^i(y^1, \dots, y^n); \quad \tilde{y}_j^i = C_k^i y_j^k.$$

Это гладкие функции. Они обратимы, причем обратные функции также являются гладкими. Таким образом, мы построили гладкую структуру на BM , превратив это множество в гладкое многообразие размерности $n^2 + n$.

Заметим, что относительно построенной гладкой структуры отображения π и F_U являются гладкими, так как задаются формулами $x^i = y^i$, $g_j^i = y_j^i$, $i, j = 1, \dots, n$.

Далее, нам нужно показать, что группа Ли $GL(n, \mathbb{R})$ гладко действует на многообразии BM . Заметим, что в построенных картах действие группы Ли

$$((y^i, y_j^i), g_j^i) \rightarrow (\tilde{y}^i, \tilde{y}_j^i)$$

задается уравнениями $\tilde{y}^i = y^i$, $\tilde{y}_j^i = y_k^i g_j^k$, где g_j^i по-прежнему функции, ставящие в соответствие матрице $g \in GL(n, \mathbb{R})$ ее элемент из i -й строки j -го столбца. Действительно, пусть $\tilde{p} = p h$. Тогда так как $p = p_0 g$, $\tilde{p} = p_0 \tilde{g}$, то

$$\tilde{p} = p h = (p_0 g) h = p_0 (g h),$$

то есть $\tilde{g} = g h$. Элементы матриц \tilde{g} , g , h – это \tilde{y}_j^i , y_j^i , $g_j^i(h) \equiv g_j^i$, откуда получим требуемые формулы. Итак, функции, задающие действие группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$, гладкие.

Нам осталось доказать, что $F_U(p g) = F_U(p) g$, $p \in BM$, $g \in GL(n, \mathbb{R})$. Обозначим $h = F_U(p)$. Это означает, что $p_0 h = p$, где p_0 – натуральный репер в точке $m = \pi(p)$. Тогда

$$p g = (p_0 h) g = p_0 (h g).$$

В силу определения отображения F_U получим $h g = F_U(p g)$, то есть $F_U(p) g = F_U(p g)$.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что совокупность $\mathcal{B}(M) = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ образует главное расслоение с базой M , естественной проекцией π , структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$ и тотальным пространством расслоения BM . Это главное расслоение называется *главным расслоением реперов над многообразием M* .

1.2. Пусть M – n -мерное гладкое многообразие, $m \in M$ – произвольная точка, $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ – произвольный репер в точке m . Тогда репер p можно отождествить с линейным изоморфизмом (реперным отображением) $p: \mathbb{R}^n \rightarrow T_m(M)$, действующим по формуле

$$p((x^1, \dots, x^n)) = x^i e_i.$$

Замечание 4.1. В курсе Анализ на многообразиях мы построили реперное отображение r_φ , которое определялось локальной картой (U, φ) гладкого многообразия M . Это отображение является частным случаем реперного отображения, введенного в данном параграфе, а именно, это реперное отображение (в смысле этого параграфа), определенное в каждой точке $m \in U$ натуральным репером p_0 с вершиной в этой точке.

Аналогично рассуждениям в курсе Анализ на многообразиях можно доказать (докажите самостоятельно), что реперное отображение является биекцией и, более того, изоморфизмом векторных пространств.

Лемма 4.2. (о реперах) При указанном отождествлении правое действие Φ группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$ на многообразии M определяется формулой

$$\Phi(p, g) \equiv pg = p \circ g.$$

Доказательство. Пусть $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ – произвольный элемент из BM , $g = (g_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$. Тогда

$$\Phi(p, g) = (m, g_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, g_n^{i_n} e_{i_n}).$$

И значит, если репер pg рассматривать как линейный изоморфизм, то

$$(pg)((x^1, \dots, x^n)) = x^i (g_j^i e_j).$$

С другой стороны,

$$p \circ g((x^1, \dots, x^n)) = p(g_j^1 x^j, \dots, g_j^n x^j) = g_j^i x^j e_i.$$

Здесь под записью $g((x^1, \dots, x^n))$ понимается умножение матрицы g на столбец (x^1, \dots, x^n) . Итак, $pg = p \circ g$. \square

§4.2. Форма смещения.

Пусть $\mathcal{B}(M) = (BM, M, GL(n, \mathbb{R}), \pi)$ – главное расслоение вещественных реперов. В каждой точке $p \in BM$ тотального пространства расслоения определим отображение

$$\omega_p: T_p(BM) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

по формуле $\omega_p(\xi) = p^{-1} \circ (\pi_*)_p(\xi)$, где $\xi \in T_p(BM)$. Так как дифференциал гладкого отображения и реперное отображения являются \mathbb{R} -линейными, таковым будет и отображение ω_p . Тогда формула

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) = p^{-1} \circ (\pi_*)_p(X_p), \quad X \in \mathfrak{X}(BM),$$

определяет $C^\infty(BM)$ -линейное отображение $\omega: \mathfrak{X}(BM) \rightarrow C^\infty(BM) \otimes \mathbb{R}^n$. Согласно замечанию 3.7 это отображение является 1-формой со значениями в векторном пространстве \mathbb{R}^n . Эта форма называется *формой смещения*. Если в \mathbb{R}^n фиксировать базис (ε_i) , например, стандартный базис, то для каждого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(BM)$ элемент $\omega(X) \in C^\infty(BM) \otimes \mathbb{R}^n$ можно представить в виде $\omega(X) = \omega^i(X) \varepsilon_i$, где $\omega^i(X) \in C^\infty(BM)$. Тогда $\omega^i: \mathfrak{X}(BM) \rightarrow C^\infty(BM)$ – $C^\infty(BM)$ -линейные отображения, то есть обычные 1-формы на многообразии BM . Это тензорные компоненты формы смещения относительно базиса $(\varepsilon_i) \subset \mathbb{R}^n$. Итак,

$$\omega = \omega^i \otimes \varepsilon_i.$$

Можно показать, форма смещения является гладкой, то есть ее компоненты в натуральном базисе каждой локальной карты на BM суть гладкие функции.

Теорема 4.1. Форма смещения ω обладает следующими свойствами:

1. ω горизонтальная форма, то есть обращается в нуль на любом вертикальном векторном поле;
2. $(R_g)^* \omega = g^{-1} \circ \omega$, $g \in GL(n, \mathbb{R})$.

Доказательство. По определению вертикального векторного поля X (см. § 3.4.) получим $\pi_* X = 0$. Тогда первое утверждение теоремы будет следовать из определения формы смещения.

Для доказательства второго утверждения вспомним формулу из замечания 3.9: $\pi \circ R_g = \pi$. Имеем

$$\begin{aligned} ((R_g)^* \omega)_p X &= ((R_g)^*_{pg} \omega_{pg})(X) = \omega_{pg}(((R_g)_*)_p X) = (pg)^{-1} \circ (\pi_*)_{pg}(((R_g)_*)_p X) = g^{-1} \circ p^{-1} \circ ((\pi \circ R_g)_*)_p(X) = \\ &= g^{-1} \circ \omega_p(X), \quad X \in T_p(BM). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.27), определением антиувлечения ковекторов (1.24) и определением формы смещения. \square

Пусть на расслоении вещественных реперов $\mathcal{B}(M)$ фиксирована связность и пусть \mathcal{H} – ее горизонтальное распределение. Фиксируем вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольный репер $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ из BM . Тогда $p(\xi) \in T_m(M)$. Здесь мы рассматриваем репер как реперное отображение (см. определение перелеммой 4.2). Рассмотрим горизонтальный лифт (§ 3.6.) вектора $p(\xi)$, то есть вектор $(X_\xi)_p \in T_p(BM)$, такой что $(\pi_*)_p(X_\xi)_p = p(\xi)$. Этот вектор существует и единственен в силу предложения 3.6. Таким образом, мы получаем векторное поле X_ξ на многообразии BM . Нетрудно показать, что оно будет гладким. Векторное поле X_ξ называется *базисным векторным полем*, порожденным вектором $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Предложение 4.1. *Векторное поле $X \in \mathfrak{X}(BM)$ является базисным векторным полем тогда и только тогда, когда $\omega(X) = \xi$ – фиксированный вектор в \mathbb{R}^n , ω – форма смещения. Другими словами, векторное поле $X \in \mathfrak{X}(BM)$ является базисным тогда и только тогда, когда существует $\xi \in \mathbb{R}^n$, такой что для любой точки $p \in BM$ имеем $\omega_p(X_p) = \xi$.*

Доказательство. По определению формы смещения для любой точки $p \in BM$ и любого базисного векторного поля X_ξ имеем $(\pi_*)_p(X_\xi)_p = p(\xi)$. Применим к обеим частям этого равенства отображение p^{-1} (обратное к реперному отображению). Тогда получим $\omega_p((X_\xi)_p) = \xi$. Это верно для любой точки p , следовательно, $\omega(X_\xi) = \xi$.

Обратно, пусть для некоторого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(BM)$ верно равенство $\omega(X) = \xi$. Докажем, что оно будет базисным. Распишем данное равенство для произвольной точки $p \in BM$. Получим $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) = \xi$. По определению формы смещения получим $p^{-1} \circ (\pi_*)_p X_p = \xi$ и, применив к обеим частям реперное отображение p , получим определение базисного векторного поля $(\pi_*)_p X_p = p(\xi)$. По определению это означает, что X является базисным векторным полем. \square

Предложение 4.2. *Базисные векторные поля принадлежат горизонтальному распределению \mathcal{H} .*

Доказательство. Это непосредственно следует из определения горизонтального лифта и базисного векторного поля. \square

Теорема 4.2. *Совокупность \mathfrak{b} всех базисных векторных полей на многообразии BM образует n -мерное векторное пространство ($n = \dim M$), а сужение формы смещения ω на горизонтальное распределение задает естественный изоморфизм $\omega : \mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{R}^n$ векторных пространств. При этом $(R_g)_* X_\xi = X_{g^{-1}\xi}$.*

Доказательство. Пусть ω – форма смещения. Рассмотрим ее сужение на множество \mathfrak{b} базисных векторных полей и докажем, что это сужение является биекцией. Пусть X – произвольное базисное векторное поле. Тогда согласно предложению 4.1 существует единственный элемент $\xi \in \mathbb{R}^n$, такой что $\omega(X) = \xi$. Этот элемент поставим в соответствие базисному векторному полю X . Пусть Y – другое базисное векторное поле и ему соответствует элемент η . Предположим, что $\omega(X) = \omega(Y)$, то есть $(\pi_*)_p(X_p) = (\pi_*)_p(Y_p)$. Так как векторы X_p и Y_p горизонтальны и отображение $(\pi_*)_p|_{\mathcal{H}_p}$ является изоморфизмом, в частности, биекцией (см. предложение 3.6), векторы X_p и Y_p совпадают для любой точки $p \in BM$. Тогда $X = Y$ и мы доказали, что $\omega|_{\mathfrak{b}}$ является инъективным отображением. Сюръективность следует из определения базисного векторного поля. Итак, отображение $\omega|_{\mathfrak{b}}$ является биекцией. С помощью этого отображения мы введем структуру векторного пространства в множество базисных векторных полей, а именно,

$$X_\xi + Y_\eta = \omega^{-1}(\omega(X_\xi + Y_\eta)); \quad \lambda X_\xi = \omega^{-1}(\lambda \omega(X_\xi)),$$

где λ – произвольное вещественное число. Такое определение структуры векторного пространства в \mathfrak{b} превращает биекцию ω в изоморфизм векторных пространств.

Чтобы доказать требуемое равенство, заметим, что для любой точки $p \in BM$ отображение $\omega_p : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ будет биекцией как композиция биекций $(\pi_*)_p|_{\mathcal{H}_p}$ и p^{-1} . Тогда отображение $\omega|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow C^\infty(BM) \otimes \mathbb{R}^n$ будет также биекцией. Обратите внимание, что множеством значений отображения $\omega|_{\mathcal{H}}$ уже является не \mathbb{R}^n , так как в случае произвольного горизонтального векторного поля (отличного от базисного) для различных точек $p \in BM$ мы будем получать различные n -ки вещественных чисел.

Далее, по определению антиувлечения получим

$$\omega((R_g)_* X_\xi) = ((R_g)^* \omega)(X_\xi) = g^{-1} \circ \omega(X_\xi) = g^{-1} \xi = \omega(X_{g^{-1}\xi}).$$

Здесь мы воспользовались теоремой 4.1 и предложением 4.1. Так как $\omega|_{\mathcal{H}}$ биекция и горизонтальное распределение связности инвариантно относительно правых сдвигов (при правых сдвигах горизонтальные векторные поля переходят в горизонтальные), получим требуемое равенство. \square

Теорема 4.3. *Пусть M – n -мерное гладкое многообразие, \mathcal{H} – горизонтальное распределение некоторой связности на BM . Тогда $C^\infty(BM) \otimes \mathfrak{b} = \mathcal{H}$. В частности, горизонтальное распределение \mathcal{H} параллелизуемо, то есть допускает глобальный базис из необращающихся в нуль векторных полей. При этом $C^\infty(BM) \otimes (\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{b}) = \mathfrak{X}(BM)$.*

Доказательство. В силу теоремы 4.2 любой базис $(\xi_1, \dots, \xi_n) \subset \mathbb{R}^n$ порождает базис $(E_{\xi_1} \equiv E_1, \dots, E_{\xi_n} \equiv E_n) \subset \mathfrak{b}$. Более того, базисные векторные поля не обращаются в нуль ни в одной точке многообразия BM . Действительно, если предположить, что в какой-либо точке $p \in BM$ базисное векторное поле X_ξ обращается в нуль, то согласно предложению 4.1 получим

$$\xi = \omega(E_\xi)(p) = \omega_p((E_\xi)_p) = 0,$$

что противоречит выбору базиса в \mathbb{R}^n .

Как мы знаем, горизонтальное распределение \mathcal{H} является n -мерным, то есть для каждой точки $p \in BM$ площадка \mathcal{H}_p является n -мерным векторным пространством. Так как базисные векторные поля горизонтальны и не равны нулю в любой точке многообразия BM , система векторов $((E_1)_p, \dots, (E_n)_p)$ образует базис площадки \mathcal{H}_p . Рассмотрим произвольное горизонтальное векторное поле X . Тогда для любой фиксированной точки $p \in BM$ имеем $X_p = X^i(p)(E_i)_p$, где $X^i(p)$ – некоторые вещественные числа. Теперь отпустим точку p . Мы получим разложение для векторного поля X , а именно, $X = X^i(p)E_i$, где $X^i(p)$ – некоторые функции. Эти функции с необходимостью будут гладкими, так как $X^i(p) = \omega^i(X)$, где (ω^i) – дуальный базис для базиса (E_i) . Итак, мы показали, что любое горизонтальное векторное поле раскладывается по базисным векторным полям с коэффициентами, являющимися гладкими функциями, а значит, $(X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_n})$ является базисом горизонтального распределения \mathcal{H} и $\mathcal{H} = C^\infty(BM) \otimes \mathfrak{b}$.

Таким образом, $C^\infty(BM)$ модуль \mathcal{H} параллелизуем.

С другой стороны, как мы доказали, вертикальное распределение \mathcal{V} допускает глобальный базис, состоящий из фундаментальных векторных полей (X_1^b, \dots, X_n^b) . Тогда, объединяя два построенных базиса, мы получим базис модуля $\mathfrak{X}(BM) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} = C^\infty(BM) \otimes (\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{b})$. \square

Следствие 4.1. Пространство расслоения реперов над любым гладким многообразием параллелизуемо. Напомним, что многообразие называется *параллелизуемым*, если его модуль векторных полей допускает глобальный базис. Здесь мы исходим из того, что любое главное расслоение допускает связность.

§4.3. Структурные уравнения главного расслоения реперов.

3.1. Следующую очень важную теорему, носящую название обобщенной леммы Картана, мы применим без доказательства.

Теорема 4.4. (*обобщенная лемма Картана*) Пусть $\Lambda(V)$ – внешняя алгебра свободного модуля V с конечным числом N образующих (в качестве V мы часто будем рассматривать модуль $\mathfrak{X}(BM)$ гладких векторных полей на тотальном пространстве главного расслоения реперов). Уравнения

$$\theta_a \wedge \omega^a = 0,$$

где $a = 1, \dots, n$, θ_a – внешние формы произвольной степени r , ω^a – линейно независимые 1-формы, которые можно дополнить до базиса модуля V^* , выполняются тогда и только тогда, когда $\theta_a = \theta_{ab} \wedge \omega^b$, где $\{\theta_{ab}\}$ – некоторые $(r-1)$ -формы, такие что $\theta_{ab} \wedge \omega^a \wedge \omega^b = 0$.

Сформулируем также без доказательства два следствия из обобщенной леммы Картана (их доказательства не сложны и читатель может доказать их самостоятельно).

Следствие 4.2. В частности, если θ_a – 2-формы, то $\theta_{[ab]} = A_{abc} \omega^c$, где $\{A_{abc}\}$ – подходящие скаляры, кососимметричные по первым двум индексам.

Следствие 4.3. (лемма Картана) В принятых обозначениях уравнения $\theta_a \wedge \omega^a = 0$, где $a = 1, \dots, n$, θ_a – 1-формы, ω^a – линейно независимые 1-формы, которые можно дополнить до базиса V^* , выполняются тогда и только тогда, когда $\theta_a = A_{ab} \omega^b$, где $\{A_{ab}\}$ – подходящие скаляры, причем $A_{ab} = A_{ba}$.

3.2. Переходим к главному расслоению вещественных реперов $\mathcal{B}(M) = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$. Фиксируем на многообразии M локальную карту (U, φ) с координатами (x^1, \dots, x^n) . Обозначим $W = \pi^{-1}(U)$ – область канонической локальной карты пространства расслоения с координатами (y^i, y_j^i) , где $y^i = x^i \circ \pi$, $y_j^i = g_j^i \circ F_U$ (см. § 4.1.).

Пусть (e_j^i) – стандартный базис полной матричной алгебры $M_{n,n}$, то есть базис состоящий из матриц, у которых $(e_j^i)_\ell^k = \delta_\ell^i \delta_j^k$. Этому базису соответствует стандартный базис $b = (E_j^i)$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, где $E_j^i = \beta^{-1} \circ \varkappa^{-1}(e_j^i)$ (см. § 2.3., § 2.2.). Этому базису отвечает базис вертикального распределения \mathcal{V} , состоящий из фундаментальных векторных полей

$$\mathcal{E}_j^i = (E_j^i)^b.$$

Рассмотрим область $W = \pi^{-1}(U)$ канонической карты главного расслоения реперов. Построим связность на главном расслоении $(W, U, GL(n, \mathbb{R}), \pi|_W)$. Для этого рассмотрим тривиальное главное расслоение $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, GL(n, \mathbb{R}), p_1)$, где $p_1 : U \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow U$ – проекция на первый сомножитель

(см. пример 3.10). Действие группы здесь определяется следующим образом: $R_h((m, g)) = (m, R_h(g)) \equiv (id \times R_h)((m, g))$, где в левой части равенства R_g обозначает действие группы на многообразии, а в правой те же символы обозначают правый сдвиг на группе Ли.

Касательное пространство $T_{(m,g)}(U \times GL(n, \mathbb{R}))$ в любой точке $(m, g) \in U \times GL(n, \mathbb{R})$ представимо в виде прямой суммы

$$T_{(m,g)}(U \times GL(n, \mathbb{R})) = T_m(M) \oplus T_g(GL(n, \mathbb{R})),$$

где под $T_m(M)$ мы понимаем $T_m(M) \times \{0\}$, а под $T_g(GL(n, \mathbb{R})) - \{0\} \times T_g(GL(n, \mathbb{R}))$.

Слой $(p_1)^{-1}(m) = \{(m, g), g \in GL(n, \mathbb{R})\}$ отождествляется с группой $GL(n, \mathbb{R})$, так как точка m фиксирована, а элемент g пробегает всю группу $GL(n, \mathbb{R})$. Так как вектора вертикальных площадок суть касательные векторы к слою расслоения, вертикальные площадки $\mathcal{V}_{(m,g)}$ отождествляются с векторными пространствами $T_g(GL(n, \mathbb{R}))$. Тогда в качестве горизонтальных площадок $\mathcal{H}_{(m,g)}$ можно взять касательные пространства $T_m(M)$. Они будут инвариантны, так как для любого элемента $(X, Y) \in T_m(M) \oplus T_g(GL(n, \mathbb{R}))$ имеем

$$((R_h)_*)_{(m,g)}(X, Y) = ((id_*)_{(m,0) \equiv m} X, ((R_h)_*)_{(0,g) \equiv g} Y) = (X, ((R_h)_*)_g Y).$$

Откуда получаем, что для любого элемента $(X, 0) \in T_m(M)$ имеем $((R_h)_*)_{(m,g)}(X, 0) = (X, 0)$ для любой точки (m, g) , а значит, векторные поля из $T_m(M) \equiv T_m(M) \times \{0\}$ являются инвариантными относительно действия структурной группы $GL(n, \mathbb{R})$. Таким образом, мы определили инвариантное, дополнительное к вертикальному распределение, которое будет определять связность на главном расслоении $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, GL(n, \mathbb{R}), p_1)$. С помощью построенной связности на тривиальном расслоении мы зададим связность на расслоении $(W, U, GL(n, \mathbb{R}), \pi|_W)$ с помощью диффеоморфизма $\psi_U : W = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(n, \mathbb{R})$. Эта связность называется *тривиальной связностью*.

Пусть $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in W$ – произвольная точка. Нам нужно определить в ней горизонтальную площадку. Пусть $\mathcal{H}_p = \psi_U^{-1}(T_m(M) \times \{0\})$. Тогда для любого элемента $Z = ((\psi_U^{-1})_*)_{(m,g)}(X, 0) \in \mathcal{H}_p$ и любого фиксированного элемента $g \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем

$$((R_g)_*)_p(Z) = ((R_g)_*)_p((\psi_U^{-1})_*)_{(m,h)}(X, 0) = (R_g \circ \psi_U^{-1})_{(m,h)}(X, 0) = ((R_g)_*)_{(m,h)}(X, 0) = (X, 0).$$

Здесь сначала R_g означает действие на расслоении $(W, U, GL(n, \mathbb{R}), \pi|_W)$, а затем, действие на расслоении $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, GL(n, \mathbb{R}), p_1)$. Таким образом, площадки \mathcal{H}_p инвариантны относительно действия структурной группы, а значит, являются горизонтальными. Итак, мы получили связность в расслоении $(W, U, GL(n, \mathbb{R}), \pi|_W)$.

Тогда, фиксируя эту связность и стандартный базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ в \mathbb{R}^n , мы получим систему базисных векторных полей $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$, где для краткости обозначено $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{\varepsilon_i}$. Эта система векторных полей определена локально (для каждой области W) и является базисом горизонтального распределения \mathcal{H} .

Таким образом, мы получили базис $(\mathcal{E}_j^i, \mathcal{E}_k^i)$ модуля $\mathfrak{X}(W)$. В нем векторные поля \mathcal{E}_j^i определены глобально, а векторные поля \mathcal{E}_k^i определены локально на W . Пусть (ω_j^i, ω^k) – дуальный базис. Напомним, что индексы i, j, k, \dots принимают значения от 1 до $n = \dim M$.

Найдем координаты 1-форм ω_j^i в натуральном базисе (dy_j^i, dy^k) карты (W, χ) . Обозначим $(\pi_j^i) \subset \mathfrak{gl}^*(n, \mathbb{R})$ базис дуальный базису (E_j^i) . Тогда $\{(\pi_j^i)_e\}$ будет базисом, дуальным базису

$$(E_j^i)_e = \varkappa^{-1}(e_j^i) = \left. \frac{\partial}{\partial g_j^i} \right|_e$$

(см. пример 2.9), а значит,

$$(\pi_j^i)_e = (dg_j^i)_e. \quad (4.1)$$

Лемма 4.3. *Имеем $\pi_j^i = \tilde{g}_k^i dg_j^k$, где $\tilde{g}_k^i = g_k^i(g^{-1}) \equiv (g^{-1})_k^i$ – функции на многообразии $GL(n, \mathbb{R})$, которые каждой матрице g ставят в соответствие элемент i -ой строки j -го столбца из матрицы g^{-1} .*

Доказательство. Так как формы π_j^i составляют двойственный базис для базиса (E_j^i) алгебры Ли $GL(n, \mathbb{R})$, они являются левоинвариантными, то есть для любого фиксированного элемента $g \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем $L_g^* \pi_j^i = \pi_j^i$ для любого $g \in GL(n, \mathbb{R})$, где L_g – диффеоморфизм левого сдвига, определяемый формулой $L_g(h) = gh$, $h \in GL(n, \mathbb{R})$ (см. § 2.2.). Тогда, в частности, в точке $e \in GL(n, \mathbb{R})$ – единице группы, получим

$$(L_g^* \pi_j^i)_e = (\pi_j^i)_e. \quad (4.2)$$

Применим формулу (1.27) из § 1.4.

$$(\phi^* \omega)_p = \phi_{\phi(p)}^* \omega_{\phi(p)}$$

к левой части равенства (4.2). Получим

$$(L_g^*)_g(\pi_j^i)_g = (\pi_j^i)_e.$$

Подействуем на обе части этого равенства отображением $(L_g^*)^{-1} = L_{g^{-1}}^* : T_e(GL(n, \mathbb{R})) \rightarrow T_g(GL(n, \mathbb{R}))$. Тогда с учетом равенства (4.1)

$$(\pi_j^i)_g = L_{g^{-1}}^*(\pi_j^i)_e = L_{g^{-1}}^*(dg_j^i)_e. \quad (4.3)$$

Чтобы разобраться с правой частью полученного равенства, докажем ряд вспомогательных формул. Пусть $X_g \in T_g(GL(n, \mathbb{R}))$ – произвольный вектор. Тогда с учетом определения антиувлечения ковекторов $((\phi^*u)(\xi) = u(\phi_*\xi))$, дифференциала функции $(df(X) = X(f))$

$$(L_{g^{-1}}^*(dg_j^i)_e)(X_g) = (dg_j^i)_e(((L_{g^{-1}})_*)_g X_g) = (((L_{g^{-1}})_*)_g X_g)(g_j^i) = X_g(g_j^i \circ L_{g^{-1}}) \quad (4.4)$$

Заметим, что для любого $h \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем

$$g_j^i \circ L_{g^{-1}}(h) = g_j^i(g^{-1}h) = g_k^i(g^{-1})h_j^k = \tilde{g}_k^i g_j^k(h).$$

Напомним, что матрица g , а значит, и матрица g^{-1} у нас фиксированы, следовательно, \tilde{g}_k^i суть вещественные числа. Тогда, продолжая цепочку равенств (4.4), получим

$$(L_{g^{-1}}^*(dg_j^i)_e)(X_g) = X_g(g_j^i \circ L_{g^{-1}}) = X_g(\tilde{g}_k^i g_j^k) = d(\tilde{g}_k^i g_j^k)_g(X_g).$$

Так как это верно для любого вектора X_g , имеем

$$L_{g^{-1}}^*(dg_j^i)_e = d(\tilde{g}_k^i g_j^k)_g = \tilde{g}_k^i (dg_j^k)_g.$$

С учетом (4.3) из этого равенства получаем, что для любой фиксированной точки $g \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем

$$(\pi_j^i)_g = \tilde{g}_k^i (dg_j^k)_g.$$

Теперь отпускаем точку g . Тогда вещественные числа \tilde{g}_k^i превращаются в функции взятия i, k -го элемента матрицы, обратной матрице g , и имеем

$$\pi_j^i = \tilde{g}_k^i dg_j^k. \quad (4.5)$$

□

Лемма 4.4. Пусть $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ – произвольный элемент, $F_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ – гладкое отображение, ставящее каждому реперу $p \in \pi^{-1}(U)$ матрицу перехода от базиса натурального репера к базису репера p . Тогда

$$(F_U)_*((X|_W)^b) = X|_{F_U(W)}.$$

Доказательство. Обозначим $g(t) = \exp(tX)$ – однопараметрическую подгруппу, соответствующую левоинвариантному векторному полю X . Тогда по определению главного расслоения получим

$$F_U(pg(t)) = F_U(p)g(t).$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$, получим

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_U(pg(t)) = ((F_U)_*)_p \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} pg(t) = ((F_U)_*)_p X_p^b.$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.22) и определением фундаментального векторного поля (3.4).

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_U(p)g(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{F_U(p)}(g(t)) = ((L_{F_U(p)})_*)_e \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t) = ((L_{F_U(p)})_*)_e X_e = X_{F_U(p)}.$$

Здесь мы также воспользовались формулой (1.22), формулой (2.13) и левоинвариантностью векторного поля X (см. § 2.2.).

Итак, мы получили, что

$$((F_U)_*)_p X_p^b = X_{F_U(p)}.$$

Это верно для любой точки $p \in W$, что и требовалось доказать. □

Согласно лемме 4.4 имеем

$$(F_U)_*(\mathcal{E}_j^i) = E_j^i.$$

Тогда

$$(F_U)^*\pi_j^i = \omega_j^i, \quad (4.6)$$

где (π_j^i) – дуальный базис для базиса (E_j^i) алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Действительно,

$$(F_U)^* \pi_j^i(\mathcal{E}_\ell^k) = \pi_j^i((F_U)_* \mathcal{E}_\ell^k) = \pi_j^i(E_\ell^k) = \delta_\ell^i \delta_j^k.$$

По критерию (см. курс Тензорная алгебра) это означает, что формы $(F_U)^* \pi_j^i$ образуют дуальный базис для базиса (\mathcal{E}_ℓ^k) вертикального распределения \mathcal{V} .

Наконец, применим отображение F_U^* к равенству (4.5). В левой части мы получим ω_j^i согласно (4.6). Вычислим правую часть, используя то, что $\phi^*(f) = f \circ \phi$, $\phi^* \circ d = d \circ \phi^*$ и $y_j^i = g_j^i \circ F_U$.

$$F_U^*(\tilde{g}_k^i dg_j^k) = (\tilde{g}_k^i \circ F_U) d(g_j^k \circ F_U) = \tilde{y}_k^i dy_j^k,$$

где мы обозначили $\tilde{y}_k^i = \tilde{g}_k^i \circ F_U$ — это функции на W , которые каждому реперу из W сначала ставят в соответствие матрицу перехода от натурального репера к данному, затем берут обратную к этой матрице, и наконец, выделяют (i, k) -й элемент из полученной матрицы.

Итак, мы получили выражения для форм ω_j^i в локальной карте (W, χ) :

$$\omega_j^i = \tilde{y}_k^i dy_j^k. \quad (4.7)$$

Рассмотрим произведение функций $g_k^i \tilde{g}_j^k$. Для каждой точки $h \in GL(n, \mathbb{R})$ имеем

$$g_k^i \tilde{g}_j^k(h) = g_k^i(h) \tilde{g}_j^k(h) = h_k^i (h^{-1})_j^k = \delta_j^i(h),$$

где символ δ_j^i обозначает функции, которые каждой матрице $h \in GL(n, \mathbb{R})$ ставят в соответствие единицу при $i = j$ и нуль при $i \neq j$. Подействуем на полученное равенство отображением F_U^* : $(g_k^i \circ F_U)(\tilde{g}_j^k \circ F_U) = \delta_j^i \circ F_U$. Тогда

$$y_k^i \tilde{y}_j^k = \delta_j^i$$

Продифференцировав это тождество, получим

$$dy_k^i \tilde{y}_j^k + y_k^i d\tilde{y}_j^k = 0.$$

Подставив это соотношение в (4.7), получим

$$\omega_j^i = -y_j^r dy_r^i. \quad (4.8)$$

Итак, двухиндексные формы дуального базиса определяются координатными функциями локальной карты (4.7) и (4.8).

Выясним локальное строение 1-форм ω^k .

Теорема 4.5. *Формы (ω^i) суть тензорные компоненты $(\tilde{\omega}^i)$ формы смещения ω относительно стандартного базиса пространства \mathbb{R}^n .*

Доказательство. По определению тензорных компонент формы смещения имеем $\omega = \tilde{\omega}^i \otimes \varepsilon_i$. Тогда

$$(\tilde{\omega}^i)_p(\mathcal{E}_j)_p = (\omega_p(\mathcal{E}_{\varepsilon_j}))^i = (\varepsilon_j)^i = \delta_j^i.$$

Здесь мы воспользовались характеристическим свойством базисного векторного поля (см. предложение 4.1). С другой стороны, в силу горизонтальности формы смещения (см. теорему 4.1) она будет обращаться в нуль на вертикальных векторных полях, в частности, на фундаментальных векторных полях, то есть $\tilde{\omega}_p^i((\mathcal{E}_r^k)_p) = 0$. Значит, $(\tilde{\omega}_p^i)$ будут элементами дуального базиса для базиса $((\mathcal{E}_j^i)_p, (\mathcal{E}_k)_p)$ и это верно для любой точки p , то есть $\tilde{\omega}^i = \omega^i$. \square

Найдем координаты 1-форм ω^i в натуральном базисе (dy_j^i, dy^k) карты (W, χ) . Здесь нам также потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4.5. *Пусть $p = (t, e_1, \dots, e_n) \in W$ — произвольная точка, $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \right\}$ — часть натурального базиса карты (W, χ) в точке p , $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_m \right\}$ — натуральный базис соответствующей карты (U, φ) в точке t . Тогда*

$$(\pi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_m.$$

Доказательство. Напомним сведения из курса Анализ на многообразиях. Пусть на многообразии M дана локальная карта (U, φ) с координатами. Тогда в каждой точке $t \in U$ возникает система касательных векторов $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_m \right\}$, которая является базисом касательного пространства $T_m(M)$. Этот базис мы назвали

натуральным. Фиксируем произвольный индекс $i = 1, \dots, n$. Тогда касательный вектор $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_m$, рассматриваемый как класс эквивалентности соприкасающихся путей в точке m содержит путь γ , задаваемый в локальной карте (U, φ) уравнениями

$$\gamma : x^j = x_0^j + \delta_i^j t,$$

где $(x_0^1, \dots, x_0^n) = \varphi(m)$ – координаты точки m в карте (U, φ) , t – параметр.

Применим эту конструкцию для карт (W, χ) и (U, φ) главного расслоения реперов. Фиксируем точку p и индекс i . Тогда вектора $\left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_p$ и $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_m$ задаются путями γ_W и γ_U , соответственно

$$\gamma_W : \begin{cases} y^j = y_0^j + \delta_i^j t \\ y_k^j = (y_k^j)_0 \end{cases} ; \quad \gamma_U : x^j = x_0^j + \delta_i^j t,$$

где (x_0^j) – координаты точки m в карте (U, φ) , $(y_0^j, (y_k^j)_0)$ – координаты точки p в карте (W, χ) . Так как отображение $\pi : VM \rightarrow M$ в картах (W, χ) , (U, φ) задается уравнениями $x^j = y^j$, получим $\gamma_W = \gamma_U \circ \pi$. Тогда по определению дифференциала отображения (см. § 1.3.) в случае вектора, рассматриваемого как класс эквивалентности, получим требуемое соотношение. \square

Лемма 4.6. Пусть $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\} \right.$ – натуральный базис карты (W, χ) . Тогда векторные поля $\left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right.$ принадлежат вертикальному распределению.

Доказательство. Напомним, что векторное поле X , заданное на тотальном пространстве расслоения, называется вертикальным, если оно π -связано с нулевым векторным полем на базе M , то есть для любой точки p выполняется равенство $(\pi_*)_p X_p = 0$.

Фиксируем точку $p \in W$ и пару индексов i, j . Рассмотрим касательный вектор $\left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p$. Тогда в карте (W, χ) путь, принадлежащий этому вектору задается уравнениями

$$\gamma : \begin{cases} y^k = y_0^k \\ y_\ell^k = (y_\ell^k)_0 + \delta_j^k \delta_\ell^i t, \end{cases}$$

где $(y_0^k, (y_\ell^k)_0)$ – координаты точки p в карте (W, χ) . Так как отображение $\pi : VM \rightarrow M$ задается уравнениями $x^k = y^k$, образом пути γ будет множество точек из $U \subset M$, задаваемых уравнениями $x^k = y_0^k$. Это одна точка $\pi(p) = m$. Такой путь задает нулевой вектор, следовательно, $(\pi_*)_p \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p = 0$ для любой точки p . Таким образом, мы показали, что векторные поля $\left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right.$ вертикальны. \square

Лемма 4.7. В карте (W, χ) имеем

$$(\mathcal{E}_k)_p = y_k^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_p.$$

Доказательство. Так как \mathcal{E}_k является базисным векторным полем, согласно предложению 4.1 для любой точки $p \in W$ имеем $\omega_p((\mathcal{E}_k)_p) = \varepsilon_k$, где ω_p – значение формы смещения в точке $p = (m, e_1, \dots, e_n)$, ε_k – элемент стандартного базиса в \mathbb{R}^n . Тогда по определению формы смещения получим

$$(\pi_*)_p((\mathcal{E}_k)_p) = p(\varepsilon_k) = e_k = g_k^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_m = g_k^i \circ F_U(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_m = y_k^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_m. \quad (4.9)$$

Здесь g_k^i сначала обозначают элементы матрицы перехода от натурального базиса к базису (e_1, \dots, e_n) , а затем функции взятия i, k -го элемента.

Так как \mathcal{E}_k – горизонтальные векторные поля, $(\mathcal{E}_k)_p$ – горизонтальные вектора и они раскладываются только по векторам $\left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_p$ (согласно лемме 4.6 векторы $\left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p$ вертикальны). Тогда

$$(\mathcal{E}_k)_p = A_k^j \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p,$$

где A_k^j – некоторые вещественные числа, которые нужно найти. Для этого воспользуемся равенством (4.9). Имеем

$$(\pi_*)_p \left(A_k^j \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p \right) = y_k^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_m.$$

Тогда

$$(\pi_*)_p \left(A_k^j \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p \right) = A_k^j (\pi_*)_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p \right) = A_k^j \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_m.$$

Таким образом, получим

$$A_k^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_m = y_k^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_m,$$

следовательно, $A_k^j = y_k^j(p)$. Откуда и получаем требуемое утверждение. \square

Из доказанное леммы получим

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p = \tilde{y}_i^j(\mathcal{E}_j)_p.$$

Наконец, мы можем найти компоненты $(\omega^i)_k$ 1-форм ω^i в натуральном базисе. Имеем для любой точки $p \in W$

$$(\omega^i)_k(p) = \omega_p^i \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_p \right) = \omega_p^i(\tilde{y}_k^j(p)(\mathcal{E}_j)_p) = \tilde{y}_k^j(p)\delta_j^i = \tilde{y}_k^i(p).$$

Здесь мы воспользовались дуальностью частей базисов (\mathcal{E}_k) и (ω^i) . Так как полученное равенство верно для любой p , имеем $(\omega^i)_k = \tilde{y}_k^i$. Кроме того, так как 1-формы ω^i суть тензорные компоненты формы смещения относительно стандартного базиса \mathbb{R}^n и форма смещения является горизонтальной формой, то значения форм ω^i на вертикальных векторных полях $\frac{\partial}{\partial y_j^i}$ будут равны нулю. Тогда учитывая, что координаты 1-формы в дуальном базисе совпадают с ее компонентами, получим разложения 1-форм ω^i по натуральному базису 1-форм

$$\omega^i = \tilde{y}_j^i dy^j.$$

Продифференцируем это соотношение внешним образом и учтем формулы (4.8) (из этой формулы мы выразим $d\tilde{y}_j^i$)

$$d\omega^i = d\tilde{y}_j^i \wedge dy^j = -\tilde{y}_j^r \omega_r^i \wedge dy^j = -\omega_r^i \wedge (\tilde{y}_j^r dy^j) = -\omega_r^i \wedge \omega^r.$$

Итак, мы получили

$$d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j. \quad (4.10)$$

Эти соотношения называются *первой группой структурных уравнений* главного расслоения вещественных реперов.

Замечание 4.2. Обратим внимание, что в отличие от случая произвольного главного расслоения, формы ω_j^i определены однозначно.

Замечание 4.3. Если в качестве базиса матричной алгебры $M_{n,n}$ взять не (e_j^i) , а $(-e_j^i)$, то базис вертикального распределения будет $(-\mathcal{E}_j^i)$. Тогда дуальный базис вертикального распределения будет состоять из форм $(-\omega_j^i)$ и первая группа структурных уравнений примет вид

$$d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j. \quad (4.11)$$

Обе формы первой группы структурных уравнений используются в современных исследованиях. В дальнейшем мы будем использовать первый вид структурных уравнений, делая замечания по поводу вида тех или иных формул в случае второго вида структурных уравнений. Договоримся говорить, что мы "работаем в минусах" если используется первая группа структурных уравнений вида (4.10) и будем говорить, что мы "работаем в плюсах" если используется первая группа структурных уравнений вида (4.11).

Формы (ω_j^i, ω^k) образуют локальный базис модуля $\mathcal{X}(BM)$, который является дифференциальной алгеброй относительно операции внешнего дифференцирования. Чтобы иметь полную информацию об этой дифференциальной алгебре, нужно научиться дифференцировать любые дифференциальные формы любой степени, а для этого в силу свойств оператора внешнего дифференцирования, достаточно научиться дифференцировать базисные 1-формы, то есть формы ω_j^i и ω^k . Правило дифференцирования одноиндексных форм описаны в первой группе структурных уравнений. Чтобы найти формулу для дифференцирования двухиндексных форм, воспользуемся так называемой *процедурой дифференциального продолжения* первой группы структурных уравнений главного расслоения реперов.

Будем работать в минусах (в плюсах просчитайте самостоятельно). Продифференцируем внешним образом первую группу структурных уравнений (4.10).

$$0 = -d\omega_j^i \wedge \omega^j + \omega_j^i \wedge d\omega^j = -d\omega_j^i \wedge \omega^j - \omega_j^i \wedge \omega_k^j \wedge \omega^k.$$

Здесь мы воспользовались правилом внешнего дифференцирования внешнего произведения 1-форм из теоремы 1.1 и еще подставили первую группу структурных уравнений. Тогда

$$(d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_k^j) \wedge \omega^j = 0.$$

Обозначим $\Delta\omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k$ – это 2-формы, а ω^i – 1-формы. Тогда применима обобщенная лемма Картана (см. теорему 4.4 и следствие из нее), то есть существуют 1-формы (ω_{jk}^i) , локально определенные на многообразии BM , такие что

$$\Delta\omega_j^i = \omega_{jk}^i \wedge \omega^k$$

и $\omega_{[jk]}^i = A_{jkl}^i \omega^l$, где $\{A_{jkl}^i\}$ – локально определенные гладкие функции на многообразии BM . С учетом определения $\Delta\omega_j^i$ получим

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega_{jk}^i \wedge \omega^k.$$

Эти уравнения называются *второй группой структурных уравнений главного расслоения реперов*.

Итак, полная группа структурных уравнений главного расслоения реперов имеет вид

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j \\ d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega_{jk}^i \wedge \omega^k, \end{cases}$$

где $\omega_{[jk]}^i = A_{jkl}^i \omega^l$ и $\{A_{jkl}^i\}$ – локально определенная система гладких функций на многообразии BM .

В этих уравнениях содержится вся информация о дифференциальной алгебре главного расслоения реперов, а значит, и о геометрии этого расслоения, в частности, в них содержится вся информация о геометрии исходного многообразия M .

§4.4. Основная теорема тензорного анализа.

4.1. Пусть M – n -мерное гладкое многообразие. Фиксируем точку $m \in M$. Тогда на многообразии $\pi^{-1}(m)$ (это слой в главном расслоении реперов $\mathcal{B}(M)$ над точкой m) определены n функций $\{e_1, \dots, e_n\}$ со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$, а именно, функция e_i сопоставляет точке $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in \pi^{-1}(m)$ вектор e_i , $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что в канонической карте (W, χ) имеем

$$e_i(p) = y_i^j(p) e_j^0,$$

где $e_j^0 = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_m$ – векторы натурального репера, y_j^i – координаты в локальной карте (W, χ) (они являются элементами матрицы перехода от натурального базиса к базису репера p). Это функции гладкие, так как в локальных картах (W, χ) и $(T_m(M), r_\varphi)$ они задаются формулами $(e_i)^j = y_i^j$. Эти функции от переменных y^i, y_j^i бесконечно дифференцируемы.

Продифференцируем функцию e_i . Так как это функция со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$ (в результате мы получим 1-форму со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$), то правило дифференцирования выглядит так

$$de_i = dy_i^j \otimes e_j^0 = dy_i^j \otimes \tilde{y}_j^k e_k = \tilde{y}_j^k dy_i^j \otimes e_k = \omega_i^k \otimes e_k.$$

Здесь мы воспользовались линейностью операции тензорного умножения и формулой (??). Обратите внимание, что мы работаем в минусах. Итак,

$$de_i = \omega_i^k \otimes e_k.$$

Эта формула имеет смысл лишь на области $W = \pi^{-1}(U)$ локальной карты. Аналогично на области локальной карты W определены n функций $\{e^1, \dots, e^n\}$ со значениями в пространстве $T_m^*(M)$, которые сопоставляют каждому реперу $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ i -й ковектор дуального репера. Так как для ковектора натурального базиса и дуального базиса репера p связаны с помощью обратной матрицы, получаем

$$e^i(p) = \tilde{y}_j^i e_0^j, \quad (4.12)$$

где $e_0^j = dx^j \Big|_m$, $j = 1, \dots, n$ – ковекторы корепера, дуального натуральному реперу. Следовательно, отображение $(e^i \circ \chi^{-1})$ задается уравнениями $(e^i)_j = \tilde{y}_j^i$, то есть функции e^i являются гладкими. Дифференцируя соотношение (4.12), получим

$$de^i = d\tilde{y}_j^i \otimes y_j^k e^k = -\omega_k^i \otimes e^k.$$

Итак,

$$de^i = -\omega_k^i \otimes e^k.$$

4.2. Пусть t – тензорное поле типа (r, s) на многообразии M . Оно порождает семейство функций $\{t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}\}$ на многообразии BM по формуле

$$t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(p) = (t_{\pi(p)})(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s}), \quad (4.13)$$

где $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in BM$, (e^1, \dots, e^n) – дуальный базис для базиса (e_1, \dots, e_n) . Нетрудно видеть, что это гладкие функции.

Пусть, в частности, дано векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$, то есть тензорное поле типа $(0,1)$. Применим для него формулу (4.13). Тогда получим систему функций на BM следующего вида

$$X^i(p) = X_m(e^i).$$

Фиксируем точку $m \in M$. Тогда на многообразии $\pi^{-1}(m) \subset BM$ внутренним образом порождается функция

$$X_m : \pi^{-1}(m) \rightarrow T_m(M)$$

со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$ по формуле

$$X_m(p) = X^i(p)e_i(p),$$

где $p = (m, e_1, \dots, e_n) \in \pi^{-1}(m)$. Очевидно, что эта функция постоянная, так как ее значение в точке p равно значению векторного поля X как сечения касательного расслоения в точке $m = \pi(p)$. Применим к этой функции оператор внешнего дифференцирования. Здесь e_i рассматривается как функция.

$$0 = d(X_m) = dX^i(p) \otimes e_i + X^i(p)de_i = dX^i(p) \otimes e_i + X^i(p)\omega_j^i \otimes e_j = (dX^i(p) + X^j(p)\omega_j^i) \otimes e_i.$$

Теперь мы смотрим на выражение $(dX^i(p) + X^j(p)\omega_j^i) \otimes e_i$ как на форму со значениями в векторном пространстве $T_m(M)$. Она будет нулевой тогда и только тогда, когда ее тензорные компоненты $dX^i(p) + X^j(p)\omega_j^i$ равны нулю, то есть

$$dX^i(p) + X^j(p)\omega_j^i = 0$$

для каждой точки p из слоя $\pi^{-1}(m)$. В других обозначениях мы можем записать эту формулу так

$$(dX^i + X^j\omega_j^i)|_{\pi^{-1}(m)} = 0.$$

Напомним, что слои главного расслоения являются интегральными многообразиями вертикального распределения. Следовательно, формы $dX^i + X^j\omega_j^i$ принадлежат кораспределению $\mathbf{C}_{\mathcal{V}}$, ассоциированному вертикальному распределению, а значит, раскладываются по базисным формам ассоциированного кораспределения $\mathbf{C}_{\mathcal{V}}$, то есть по формам Пфаффа (ω^i) . С учетом этого в области W имеем

$$dX^i + X^j\omega_j^i = X^i_j\omega^j, \quad (4.14)$$

где $\{X^i_j\} \subset C^\infty(W)$ – некоторые подходящие функции.

Итак, мы доказали, что функции $\{X^i\}$, определенные на многообразии BM удовлетворяют дифференциальным уравнениям (4.14), где $\{X^i_j\} \subset C^\infty(W)$ – некоторая система подходящих функций, определенная на W .

Докажем обратное. Пусть на многообразии BM задана система гладких функций $\{X^i\}$, $i = 1, \dots, n$, которая в каждой канонической карте (W, χ) удовлетворяет системе уравнений (4.14). Фиксируем точку $m \in M$. Получим, что на подмногообразии $\pi^{-1}(m)$, которое задается уравнениями $\omega^i = 0$, $i = 1, \dots, n$, эти соотношения принимают вид $dX^i + X^j\omega_j^i = 0$. Подставим в это равенство соотношения (??):

$$dX^i + X^j\tilde{y}_k^i dy_j^k = 0.$$

Умножая обе части этого равенства на обратную матрицу (y_i^ℓ) , получим

$$y_i^\ell dX^i + X^j dy_j^\ell = 0 \Leftrightarrow d(y_j^\ell X^j) = 0.$$

Откуда следует, что $y_j^i X^j = const$, $i, j = 1, \dots, n$, а именно, $y_j^i X^j = X^i$. Это дает возможность корректно определить вектор $X_m \in T_m(M)$ по формуле $X_m = X^i(p)e_i$, где $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ – произвольная точка слоя $\pi^{-1}(m)$. Действительно, если $q = (m, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n) \in \pi^{-1}(m)$ – другая точка, то

$$X^i(q)\hat{e}_i = X^i(q)y_i^j(q)e_j^0 = X_0^j e_j^0.$$

С другой стороны,

$$X^i(p)e_i = X^i(p)y_i^j(p)e_j^0 = X_0^j e_j^0.$$

Таким образом, $X^i(q)\hat{e}_i = X^i(p)e_i$ и вектор X_m определен корректно.

Семейство векторов $X = \{X_m\}$ образуют гладкое векторное поле на многообразии M . В самом деле, фиксируем натуральное сечение (то есть сечение, которое ставит в соответствие каждой точке $m \in U$ натуральный репер в этой точке) $s : U \rightarrow VM$. Это локальное сечение. Оно существует в силу локальной тривиальности главного расслоения. Тогда компоненты векторного поля X в натуральном базисе имеют вид

$$\hat{X}^i(m) = X^i(p_0) = X^i \circ s(m),$$

то есть гладкие функции как композиция таковых. Следовательно, компоненты семейства векторов X являются гладкими функциями, а значит, X является гладким векторным полем. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4.6. *Задание векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ на гладком многообразии M равносильно заданию семейства гладких функций $\{X^i\}$ на пространстве расслоения вещественных реперов VM , удовлетворяющих уравнениям*

$$dX^i + X^j \omega_j^i = X^i_j \omega^j.$$

Аналогичным образом (докажите самостоятельно) доказывается следующая теорема.

Теорема 4.7. *Задание формы $\eta \in \mathfrak{X}^*(M)$ на гладком многообразии M равносильно заданию семейства гладких функций $\{\eta_i\}$ на пространстве расслоения вещественных реперов VM , удовлетворяющих уравнениям*

$$d\eta_i - \eta_j \omega_i^j = \eta_{ij} \omega^j,$$

где $\{\eta_{ij}\}$ – система подходящих гладких функций, определенная на каждой канонической карте (W, χ) .

Аналогичным образом, но более громоздкими рассуждениями доказывается основная теорема тензорного анализа.

Теорема 4.8. *Задание тензорного поля типа (r, s) на гладком многообразии M равносильно заданию системы гладких функций $\{t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}\}$ на многообразии VM , удовлетворяющий в любой координатной окрестности (W, χ) соотношениям*

$$dt_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + t_{i_1 \dots i_r}^{kj_2 \dots j_s} \omega_k^{j_1} + \dots + t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1}k} \omega_k^{j_s} - t_{ki_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \omega_{i_1}^k - \dots - t_{i_1 \dots i_{r-1}k}^{j_1 \dots j_s} \omega_{i_r}^k = t_{i_1 \dots i_r k}^{j_1 \dots j_s} \omega^k, \quad (4.15)$$

где $\{t_{i_1 \dots i_r k}^{j_1 \dots j_s}\}$ – подходящая система гладких функций в области W .

Замечание 4.4. Во-первых, еще раз напомним, что функции $\{t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}\}$, определенные на VM , в каждой точке $p = (m, e_1, \dots, e_n)$ суть компоненты тензора t_m в базисе (e_1, \dots, e_n) .

Во-вторых, выведенные формулы получены при проведении расчетов в минусах, то есть для структурных уравнений вида $d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j$. Если проводить вычисления в плюсах, то есть работать со структурными уравнениями $d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j$, то дифференциальные уравнения (4.15) будут выглядеть следующим образом

$$dt_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - t_{i_1 \dots i_r}^{kj_2 \dots j_s} \omega_k^{j_1} - \dots - t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1}k} \omega_k^{j_s} - t_{ki_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \omega_{i_1}^k + \dots + t_{i_1 \dots i_{r-1}k}^{j_1 \dots j_s} \omega_{i_r}^k = t_{i_1 \dots i_r k}^{j_1 \dots j_s} \omega^k,$$

то есть знаки меняются на противоположные. Запишите уравнения, которым будут удовлетворять функции для векторного поля и 1-формы в случае плюса в структурных уравнениях.

§4.5. Связности в главном расслоении вещественных реперов.

Пусть M – n -мерное гладкое многообразие, $\mathcal{B}(M)$ – главное расслоение вещественных реперов над M . Фиксируем на многообразии M локальную карту (U, φ) с координатами (x^1, \dots, x^n) и рассмотрим каноническую локальную карту (W, χ) на VM . Как мы видели в предыдущем параграфе в модуле $\mathfrak{X}(W)$ существует базис $b = (\mathcal{E}_j^i, \mathcal{E}_k)$, где $\mathcal{E}_j^i = (E_j^i)^b$ – фундаментальные векторные поля (базис вертикального распределения), \mathcal{E}_k – базисные векторные поля, порожденные стандартным базисом арифметического векторного пространства \mathbb{R}^n , (E_j^i) – стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ структурной группы $GL(n, \mathbb{R})$.

Вычислим форму тривиальной связности главного расслоения $(W, U, GL(n, \mathbb{R}), \pi|_W)$. Так как диффеоморфизм $\psi_U = (\pi, F_U)$, а значит, $\pi = p_1 \circ \psi_U$ и $F_U = p_2 \circ \psi_U$, где p_1 и p_2 – проекции на первый и второй сомножители соответственно, из леммы 4.4 получим

$$E_j^i = (F_U)_*(\mathcal{E}_j^i) = (p_2 \circ \psi_U)_*(\mathcal{E}_j^i); \quad E_k = \pi_*(\mathcal{E}_k) = (p_1 \circ \psi_U)_*(\mathcal{E}_k),$$

где E_k – новое обозначение – образ базисных векторных полей при отображении π_* . Итак, векторные поля (E_j^i, E_k) будут образом базиса b при диффеоморфизме ψ_U , то есть будут базисом модуля $\mathfrak{X}(U \times GL(n, \mathbb{R}))$.

В этом базисе связность тривиального расслоения $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, p_1, GL(n, \mathbb{R}))$ задается формой связности $\Theta = p_2^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j$. Действительно, для любого элемента $(X, 0)$ из горизонтального распределения связности на тривиальном расслоении имеем

$$\Theta((X, 0)) = (p_2^*(\pi_j^i))((X, 0))E_i^j = \pi_j^i((p_2)_*(X, 0))E_i^j = \pi_j^i(0)E_i^j = 0.$$

Так как $\Theta = \Lambda^{-1} \circ \Pi$, где Π – связность на тривиальном расслоении, Λ – изоморфизм, мы показали, что любой элемент горизонтального распределения принадлежит ядру Π . Обратно, пусть элемент (X, Y) принадлежит ядру связности Π . Нам нужно показать, что $Y = 0$, а значит, этот элемент имеет вид $(X, 0)$, то есть лежит в горизонтальном распределении. Имеем $\Theta((X, Y)) = 0$, так как (X, Y) из ядра Π , а значит, из ядра Θ . Тогда $p_2^*(\pi_j^i)((X, Y)) = 0$, а значит, $\pi_j^i((p_2)_*(X, Y)) = 0$ и $\pi_j^i(Y) = 0$. Это равенство верно для любой формы π_j^i . Так как эти формы образуют дуальный базис на $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, мы получаем, что для векторного поля Y все его координаты в базисе (E_j^i) равны нулю, то есть $Y = 0$, а значит, элемент (X, Y) принадлежит горизонтальному распределению.

Таким образом, мы показали, что построенное выше горизонтальное распределение тривиального главного расслоения и форма Θ относятся к одной и той же связности, то есть Θ действительно является формой связности.

Вернемся к главному расслоению реперов. Мы построили форму связности $\Theta = p_2^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j$ для тривиального расслоения $(U \times GL(n, \mathbb{R}), U, p_1, GL(n, \mathbb{R}))$. Тогда диффеоморфизм ψ_U переведет эту форму связности в форму связности расслоения $(W, U, \pi|_W, GL(n, \mathbb{R}))$:

$$\theta_U = \psi_U^* \Theta = \psi_U^* \circ p_2^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j = (p_2 \circ \psi_U)^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j = F_U^*(\pi_j^i) \otimes E_i^j = \omega_j^i \otimes E_i^j.$$

Итак, мы получили, что

$$\theta_U = \omega_j^i \otimes E_i^j,$$

то есть формы (ω_j^i) дуального базиса $(\mathcal{E}_j^i, \mathcal{E}_k)$, являются тензорными компонентами тривиальной связности главного расслоения реперов.

Лемма 4.8. Пусть (P, M, π, G) – произвольное главное расслоение, θ_1 и θ_2 – формы двух связностей на нем. Тогда форма $\zeta = \theta_1 - \theta_2$ является горизонтальной формой, то есть для любого вертикального векторного поля $X \in \mathcal{V}$ имеем $\zeta(X) = 0$.

Доказательство. Согласно предложению 3.5 имеем

$$\theta_1 \circ \Lambda = \theta_2 \circ \Lambda = id.$$

Тогда $(\theta_1 - \theta_2) \circ \Lambda = 0$. Так как $Im \Lambda = \mathcal{V}$, то для любого $X \in \mathcal{V}$ существует векторное поле $Y \in \mathcal{X}(P)$, такое что $\Lambda(Y) = X$. Следовательно, $(\theta_1 - \theta_2)(X) = 0$ для любого вертикального поля X . \square

С учетом доказанной леммы получим, что если в расслоении реперов $\mathcal{B}(M)$ фиксирована связность с формой θ , то в области W канонической локальной карты на многообразии BM формы $\theta_j^i - \omega_j^i$ являются горизонтальными (это тензорные компоненты двух связностей: с формой θ и тривиальной). Тогда они раскладываются по системе Пфаффа вертикального распределения $\{\omega^i\}$. В качестве элементов такой системы можно взять тензорные компоненты формы смещения. Другими словами, существуют такие функции $\{\gamma_{jk}^i\} \subset C^\infty(W)$, такие что

$$\theta_j^i - \omega_j^i = \gamma_{jk}^i \omega^k.$$

Выразим из этих соотношений омеги и подставим в первую группу структурных уравнений главного расслоения реперов (4.10) (мы работаем в минусах):

$$d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j = -\theta_j^i \wedge \omega^j + \gamma_{jk}^i \omega^k \wedge \omega^j = -\theta_j^i \wedge \omega^j - \gamma_{[jk]}^i \omega^j \wedge \omega^k.$$

Здесь для установки скобок альтернации мы воспользовались примером 7.3 из курса тензорной алгебры. Обозначим $-\gamma_{[jk]}^i = \frac{1}{2} S_{jk}^i$. Тогда первая группа структурных уравнений примет вид

$$d\omega^i = -\theta_j^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2} S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (4.16)$$

где $S_{jk}^i = -2\gamma_{[jk]}^i$, и называется (в этом виде) *первой группой структурных уравнений связности*.

Пусть в \mathbb{R}^n фиксирован стандартный базис (ε_i) . Тогда обозначим

$$\Omega = \frac{1}{2} S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \otimes \varepsilon_i.$$

Это 2-форма со значениями в \mathbb{R}^n . Можно показать, что она определена глобально на BM и, очевидно, является горизонтальной, то есть обращается в нуль, если хотя бы один ее аргумент вертикален. Эта форма называется *формой кручения связности*.

Напомним, что вторая группа структурных уравнений связности в произвольном главном расслоении имеет вид

$$d\theta^a = -\frac{1}{2}C_{bc}^a\theta^b \wedge \theta^c + R_{k\ell}^a\omega^k \wedge \omega^\ell,$$

где $\{\theta^a\}$ – тензорные компоненты формы связности θ . Эти уравнения были выведены без использования связности структурной группы, а значит, могут быть применены в случае полной линейной группы, которая не является связной. В случае главного расслоения реперов имеем (см. § 2.3.)

$$\theta^a = \theta_j^i; \quad \frac{1}{2}C_{bc}^a\theta^b \wedge \theta^c = -\theta_k^i \wedge \theta_j^k.$$

Обозначим коэффициенты $R_{k\ell}^a = \frac{1}{2}R_{jk\ell}^i$. Тогда вторая группа структурных уравнений связности главного расслоения реперов примет вид

$$d\theta_j^i = -\theta_k^i \wedge \theta_j^k + \frac{1}{2}R_{jk\ell}^i\omega^k \wedge \omega^\ell. \quad (4.17)$$

Обозначим $\Phi = \frac{1}{2}R_{jk\ell}^i\omega^k \wedge \omega^\ell \otimes E_j^i$. Это 2-форма со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ структурной группы. Можно показать, что эта форма определена глобально. Она является горизонтальной и называется *формой кривизны связности*.

Замечание 4.5. Если в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ вместо базиса (E_j^i) базис $(-E_j^i)$ (то есть базис получающийся из матриц $(-e_j^i)$ полной матричной алгебры $M_{n,n}$, то тензорные компоненты формы связности θ заменятся на формы $-\theta_j^i$, а формы ω_j^i заменятся на формы $-\omega_j^i$. При этом первая группа структурных уравнений главного расслоения реперов будет иметь вид $d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j$. Рассмотрим разность $-\theta_j^i + \omega_j^i$. Эта форма будет горизонтальной, следовательно раскладывается по одноиндексным омегам: $-\theta_j^i + \omega_j^i = \gamma_{jk}^i\omega^k$. Здесь коэффициенты γ_{jk}^i отличаются от прежних коэффициентов знаком. Выразим из этого равенства двухиндексные омеги и подставим в первую группу структурных уравнений главного расслоения реперов

$$d\omega^i = \theta_j^i \wedge \omega^j + \gamma_{jk}^i\omega^k \wedge \omega^j = \theta_j^i \wedge \omega^j - \gamma_{[jk]}^i\omega^j \wedge \omega^k = \theta_j^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2}S_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k,$$

где $\frac{1}{2}S_{jk}^i = -\gamma_{[jk]}^i$. Обратите внимание, что полученные здесь функции S_{jk}^i также знаком отличаются от соответствующих функций, полученных выше.

Для второй группы структурных уравнений заметим, что структурные константы C_{jpt}^{ikl} не изменятся, так как определяются соотношениями $[e_j^i, e_p^k] = C_{jpt}^{ikl}e_\ell^t$. Так как компоненты формы связности в таком базисе имеют вид $(-\theta_j^i)$ из второй группы структурных уравнений связности главного расслоения реперов получим $-d\theta_j^i = -\theta_k^i \wedge \theta_j^k + \frac{1}{2}R_{jk\ell}^i\omega^k \wedge \omega^\ell$ или

$$d\theta_j^i = \theta_k^i \wedge \theta_j^k + \frac{1}{2}\tilde{R}_{jk\ell}^i\omega^k \wedge \omega^\ell,$$

где $\frac{1}{2}\tilde{R}_{jk\ell}^i = -\frac{1}{2}R_{jk\ell}^i$. Знак волны мы будем в дальнейшем опускать. Опять видим, что компоненты формы кривизны поменяли знак.

Итак, вычисляя в плюсах, мы получили следующие две группы структурных уравнений связности

$$d\omega^i = \theta_j^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2}S_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k; \quad d\theta_j^i = \theta_k^i \wedge \theta_j^k + \frac{1}{2}R_{jk\ell}^i\omega^k \wedge \omega^\ell.$$

Обратите внимание, что хотя мы выводили эти уравнения в предположении, что базис алгебры Ли состоит из элементов $(-E_j^i)$ в структурных уравнениях стоят тензорные компоненты формы связности, определенные относительно базиса (E_j^i) . Это приводит к трудностям, хотя до 2000 года в диссертационных исследованиях использовалась именно эта форма структурных уравнений (в плюсах). В дальнейшем мы будем работать в минусах, а соответствующие результаты в плюсах рекомендуем читателю получать самостоятельно.

Проведем процедуру дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений связности. Для этого введем обозначения

$$\Omega^i = \frac{1}{2}S_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k; \quad \Phi_j^i = \frac{1}{2}R_{jk\ell}^i\omega^k \wedge \omega^\ell \quad (4.18)$$

для тензорных компонент форм кручения и кривизны связности. Тогда структурные уравнения связности примут вид

$$d\omega^i = -\theta_j^i \wedge \omega^j + \Omega^i; \quad d\theta_j^i = -\theta_k^i \wedge \theta_j^k + \Phi_j^i. \quad (4.19)$$

Продифференцируем внешним образом первое уравнение из (4.19):

$$0 = -d\theta_j^i \wedge \omega^j + \theta_j^i \wedge d\omega^j + d\Omega^i.$$

Подставим вместо $d\theta_j^i$ и $d\omega^j$ их выражения из (4.19), заменив во втором случае индекс i на индекс j :

$$0 = -(\theta_k^i \wedge \theta_j^k + \Phi_j^i) \wedge \omega^j + \theta_j^i \wedge (-\theta_k^j \wedge \omega^k + \Omega^j) + d\Omega^i.$$

Приведем подобные и учтем обозначения (4.18):

$$d\Omega^i - \Phi_j^i \wedge \omega^j + \theta_j^i \wedge \Omega^j = 0. \quad (4.20)$$

Продифференцируем внешним образом первое соотношение из (4.18):

$$\begin{aligned} 2d\Omega^i &= dS_{jk}^i \wedge (\omega^j \wedge \omega^k) + S_{jk}^i d(\omega^j \wedge \omega^k) = dS_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k + S_{jk}^i d\omega^j \wedge \omega^k - S_{jk}^i \omega^j \wedge d\omega^k = \\ &= dS_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k + S_{jk}^i (-\theta_\ell^j \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2} S_{\ell t}^j \omega^\ell \wedge \omega^t) \wedge \omega^k - S_{jk}^i \omega^j \wedge (-\theta_\ell^k \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2} S_{\ell t}^k \omega^\ell \wedge \omega^t) = \\ &= (dS_{jk}^i - S_{\ell k}^i \theta_j^\ell - S_{j\ell}^i \theta_k^\ell + S_{\ell t}^i S_{jk}^\ell \omega^t) \wedge \omega^j \wedge \omega^k. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что сначала дифференцируется внешнее произведение функции (0-формы) и 2-формы, а затем продифференцировали внешнее произведение двух 1-форм. Каждый раз мы пользовались теоремой (1.1). Далее, мы подставили первую группу структурных уравнений в их первоначальном виде (4.16), не забыв поменять свободный индекс (в первом случае на j , а во втором случае на k). При этом индексы суммирования нам также пришлось поменять. После раскрытия скобок мы видим, что в каждом слагаемом есть внешнее произведение одноиндексных омег. Сделаем у них индексы суммирования одинаковыми и вынесем за скобку (сделаем все индексы суммирования j и k). Внутри больших скобок мы привели подобные, воспользовавшись кососимметричностью S_{jk}^i по нижним индексам.

Умножим (4.20) на 2 и подставим полученное выражение для $2\Omega^i$ и обозначение (4.18) для Ω^i и Φ_j^i :

$$(dS_{jk}^i - S_{\ell k}^i \theta_j^\ell - S_{j\ell}^i \theta_k^\ell + S_{\ell t}^i S_{jk}^\ell \omega^t) \wedge \omega^j \wedge \omega^k - R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega^j + S_{k\ell}^j \theta_j^i \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

Опять здесь есть внешнее произведение двух одноиндексных омег и мы их вынесем за скобку. Но сначала сгруппируем слагаемые, которые очень напоминают основную теорему тензорного анализа 4.8 и введем для этой суммы обозначение:

$$\nabla S_{jk}^i = dS_{jk}^i - S_{\ell k}^i \theta_j^\ell - S_{j\ell}^i \theta_k^\ell + S_{\ell t}^i S_{jk}^\ell \omega^t \quad (4.21)$$

и подставим его в полученное равенство

$$(\nabla S_{jk}^i + S_{\ell t}^i S_{jk}^\ell \omega^t - R_{jkl}^i \omega^\ell) \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0.$$

Обозначим $(\nabla S_{jk}^i + S_{\ell t}^i S_{jk}^\ell \omega^t - R_{jkl}^i \omega^\ell) \wedge \omega^j = \Psi_k^i$. Это 2-форма. Тогда получим $\Psi_k^i \wedge \omega^k = 0$ и применима обобщенная лемма Картана (см. теорему 4.4), то есть существуют 1-формы θ_{kj}^i , такие что $\Psi_k^i = \theta_{kj}^i \wedge \omega^j$ и

$$\theta_{[kj]}^i = A_{kj\ell}^i \omega^\ell, \quad (4.22)$$

где $A_{kj\ell}^i$ – система подходящих функций, кососимметричная по индексам k и j . Вернемся к обозначению Ψ_k^i . Тогда получим

$$(\nabla S_{jk}^i + S_{\ell t}^i S_{jk}^\ell \omega^t - R_{jkl}^i \omega^\ell - \theta_{kj}^i) \wedge \omega^j = 0.$$

Теперь применима лемма Картана (см. следствие 4.3):

$$\nabla S_{jk}^i + S_{\ell t}^i S_{jk}^\ell \omega^t - R_{jkl}^i \omega^\ell - \theta_{kj}^i = B_{jkl}^i \omega^\ell, \quad (4.23)$$

где B_{jkl}^i – система подходящих функций.

Лемма 4.9. *Во введенных обозначениях $\nabla S_{[jk]}^i = S_{jk}^i$.*

Доказательство. Проальтернируем по индексам j и k соотношение (4.21):

$$\nabla S_{[jk]}^i = dS_{[jk]}^i - S_{\ell[k}^i \theta_{j]}^\ell - S_{[j|\ell}^i \theta_{k]}^\ell + S_{[jk]}^\ell \theta_\ell^i = dS_{jk}^i - \frac{1}{2} S_{\ell k}^i \theta_j^\ell + \frac{1}{2} S_{\ell j}^i \theta_k^\ell - \frac{1}{2} S_{j\ell}^i \theta_k^\ell + \frac{1}{2} S_{k\ell}^i \theta_j^\ell + S_{jk}^\ell \theta_\ell^i = \nabla S_{jk}^i.$$

Здесь мы использовали кососимметричность функций S_{jk}^i по паре нижних индексов. \square

Проальтернируем соотношения (4.23) по индексам j и k , учтем (4.22) и лемму 4.9. Тогда получим, что ∇S_{jk}^i выражается через одноиндексные омеги с некоторыми коэффициентами, которые мы обозначим S_{jkl}^i , а именно,

$$dS_{jk}^i - S_{\ell k}^i \theta_j^\ell - S_{j\ell}^i \theta_k^\ell + S_{jk}^\ell \theta_\ell^i = S_{jkl}^i \omega^\ell.$$

С учетом соотношений $\theta_j^i = \omega_j^i + \gamma_{jk}^i \omega^k$ из этих уравнений получим

$$dS_{jk}^i - S_{\ell k}^i \omega_j^\ell - S_{j\ell}^i \omega_k^\ell + S_{jk}^\ell \omega_\ell^i = \tilde{S}_{j k \ell}^i \omega^\ell.$$

Здесь мы слагаемые с одноиндексными омегами перенесли в правую часть равенства, вынесли за скобку и полученную в скобку сумму обозначили через $\tilde{S}_{j k \ell}^i$. Это функции определенные на координатных окрестностях W . С учетом основной теоремы тензорного анализа (см. теорему 4.8) из этого следует, что система функций $\{S_{jk}^i\} \subset C^\infty(BM)$ задает тензорное поле S типа (2,1) на многообразии M . Этот тензор называется *тензором кручения связности*.

Аналогичную процедуру дифференциального продолжения можно провести для второй группы структурных уравнений связности. Продифференцируем внешним образом вторую группу структурных уравнений связности (4.19)

$$0 = -d\theta_k^i \wedge \theta_j^k + \theta_k^i \wedge d\theta_j^k + d\Phi_j^i = -(-\theta_t^i \wedge \theta_k^t + \Phi_k^i) \wedge \theta_j^k + \theta_k^i \wedge (-\theta_t^k \wedge \theta_j^t + \Phi_j^k) + d\Phi_j^i = d\Phi_j^i - \Phi_k^i \wedge \theta_j^k + \theta_k^i \wedge \Phi_j^k. \quad (4.24)$$

После дифференцирования мы подставили вместо $d\theta_k^i$ и $d\theta_j^k$ выражения из второй группы структурных уравнений связности, изменив нужным образом свободные индексы (при этом следите, чтобы индексы суммирования не повторяли свободные индексы – их при необходимости также нужно поменять). Слагаемые с тремя двухиндексными тетами взаимно уничтожаются.

Далее, продифференцируем внешним образом вторые соотношения из обозначений (4.18):

$$2d\Phi_j^i = dR_{jk\ell}^i \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell + R_{jk\ell}^i d\omega^k \wedge \omega^\ell - R_{jk\ell}^i \omega^k \wedge d\omega^\ell = dR_{jk\ell}^i \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell + R_{jk\ell}^i (-\theta_t^k \wedge \omega^t + \frac{1}{2} S_{tr}^k \omega^t \wedge \omega^r) \wedge \omega^\ell - R_{jk\ell}^i \omega^k \wedge (-\theta_t^\ell \wedge \omega^t + \frac{1}{2} S_{tr}^\ell \omega^t \wedge \omega^r)$$

Здесь мы подставили первую группу структурных уравнений связности.

Подставим выражение для $d\Phi_j^i$ и обозначения (4.18) для Φ_j^i в равенство (4.24):

$$(dR_{jk\ell}^i - R_{tk\ell}^i \theta_j^t - R_{j t \ell}^i \theta_k^t - R_{j k t}^i \theta_\ell^t + R_{j k \ell}^i \theta_t^i) \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2} R_{jk\ell}^i S_{tr}^k \omega^t \wedge \omega^r \wedge \omega^\ell - \frac{1}{2} R_{jk\ell}^i S_{tr}^\ell \omega^k \wedge \omega^t \wedge \omega^r = 0.$$

Введем обозначение

$$\nabla R_{jk\ell}^i = dR_{jk\ell}^i - R_{tk\ell}^i \theta_j^t - R_{j t \ell}^i \theta_k^t - R_{j k t}^i \theta_\ell^t + R_{j k \ell}^i \theta_t^i$$

и вынесем две одноиндексные омеги за скобки. Для этого нужным образом переобозначим индексы суммирования.

$$(\nabla R_{jk\ell}^i + \frac{1}{2} R_{j r \ell}^i S_{tk}^r \omega^t - \frac{1}{2} R_{j k t}^i S_{\ell r}^t \omega^r) \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

Обозначим $\Psi_{j\ell}^i = (\nabla R_{jk\ell}^i + \frac{1}{2} R_{j r \ell}^i S_{tk}^r \omega^t - \frac{1}{2} R_{j k t}^i S_{\ell r}^t \omega^r) \wedge \omega^k$ и применим обобщенную лемму Картана (см. теорему 4.4):

$$\Psi_{j\ell}^i = \theta_{j\ell k}^i \wedge \omega^k, \quad \theta_{j[\ell k]}^i = A_{j\ell k r}^i \omega^r.$$

Тогда

$$(\nabla R_{jk\ell}^i + \frac{1}{2} R_{j r \ell}^i S_{tk}^r \omega^t - \frac{1}{2} R_{j k t}^i S_{\ell r}^t \omega^r - \theta_{j\ell k}^i) \wedge \omega^k = 0. \quad (4.25)$$

Аналогично лемме 4.9 доказывается, что из кососимметричности $R_{jk\ell}^i$ по двум последним индексам следует кососимметричность 1-форм $\nabla R_{jk\ell}^i$ по двум последним индексам. С учетом этого применим лемму Картана к (4.25) и проальтернируем полученное выражение по индексам ℓ и k (проделайте вычисления самостоятельно). Все получившиеся слагаемые кроме $\nabla R_{jk\ell}^i$ будут линейными комбинациями одноиндексных омег. Перенесем эти слагаемые в правую часть и обозначим их $R_{jk\ell t}^i \omega^t$, то есть

$$dR_{jk\ell}^i - R_{tk\ell}^i \theta_j^t - R_{j t \ell}^i \theta_k^t - R_{j k t}^i \theta_\ell^t + R_{j k \ell}^i \theta_t^i = R_{jk\ell t}^i \omega^t.$$

С учетом того, что $\theta_j^i = \omega_j^i + \gamma_{jk}^i \omega^k$, получим

$$dR_{jk\ell}^i - R_{tk\ell}^i \omega_j^t - R_{j t \ell}^i \omega_k^t - R_{j k t}^i \omega_\ell^t + R_{j k \ell}^i \omega_t^i = \tilde{R}_{jk\ell t}^i \omega^t.$$

По основной теореме тензорного анализа (см. теорему 4.8) из этого следует, что система функций $\{R_{jk\ell}^i\} \subset C^\infty(BM)$ задает тензорное поле типа (3,1) на многообразии M . Это тензорное поле называется *тензором кривизны связности*.

§4.6. Ковариантное дифференцирование.

Гладкое многообразие, для которого фиксирована связность в его главном расслоении реперов, называется *пространством аффинной связности*. На таком многообразии можно построить аппарат инвариантного дифференциального исчисления – основной аппарат современной геометрии.

Пусть M – n -мерное пространство аффинной связности, $\theta = \{\theta_j^i\}$ – форма связности. Пусть t – тензорное поле типа (r, s) на многообразии M . В соответствии с основной теоремой тензорного анализа (см. теорему 4.8), задание тензорного поля t равносильно заданию системы функций $\{t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}\}$ на многообразии BM , удовлетворяющие уравнениям

$$dt_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - t_{ki_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \omega_{i_1}^k - \dots - t_{i_1 \dots i_{r-1}k}^{j_1 \dots j_s} \omega_{i_r}^k + t_{i_1 \dots i_r}^{kj_2 \dots j_s} \omega_k^{j_1} + \dots + t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1}k} \omega_k^{j_s} = t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} \omega^k, \quad (4.26)$$

где $\{\omega_j^i\}$ – компоненты формы тривиальной связности, $\{t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s}\}$ – локально определенная система подходящих функций на многообразии BM . Напомним, что эти уравнения имеют смысл лишь в координатной окрестности W , так как эти формы имеют вид $\omega_j^i = \tilde{y}_k^i dy_j^k$. С другой стороны, мы знаем, что $\theta_j^i = \omega_j^i + \gamma_{jk}^i \omega^k$. Выразим двухиндексные омеги и подставим их в (4.26):

$$dt_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - t_{ki_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \theta_{i_1}^k - \dots - t_{i_1 \dots i_{r-1}k}^{j_1 \dots j_s} \theta_{i_r}^k + t_{i_1 \dots i_r}^{kj_2 \dots j_s} \theta_k^{j_1} + \dots + t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1}k} \theta_k^{j_s} = t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} \omega^k, \quad (4.27)$$

где $t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} = t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} - t_{pi_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \gamma_{i_1}^p - \dots + t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1}p} \gamma_{pk}^{j_s}$. Обозначим

$$t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - t_{ki_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \theta_{i_1}^k - \dots - t_{i_1 \dots i_{r-1}k}^{j_1 \dots j_s} \theta_{i_r}^k + t_{i_1 \dots i_r}^{kj_2 \dots j_s} \theta_k^{j_1} + \dots + t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1}k} \theta_k^{j_s} = \nabla t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}.$$

Тогда последние соотношения запишутся в виде

$$\nabla t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} \omega^k.$$

Заметим, что формы $\nabla t_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ глобально определены на многообразии BM , а формы $\{\omega^i\}$, будучи тензорными компонентами глобально определенной формы смещения, также глобально определены и линейно независимы в каждой точке многообразия BM . Тогда функции $t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s}$ также глобально определены на BM , то есть $t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} \in C^\infty(BM)$.

Проводя процедуру дифференциального продолжения соотношений (4.27), то есть дифференцируя их внешним образом и используя лемму Картана, получим соотношения вида

$$\nabla t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} = t_{i_1 \dots i_r, k, p}^{j_1 \dots j_s} \omega^p.$$

В силу основной теоремы тензорного анализа это означает, что система гладких функций $\{t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s}\}$ определяет тензорное поле типа $(r+1, s)$ на многообразии M , который называется *ковариантным дифференциалом тензорного поля t* относительно заданной связности. Будем обозначать ковариантный дифференциал тензорного поля t через ∇t .

Пример 4.1. Проведем процедуру дифференциального продолжения соотношений (4.27) в случае векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Напомним, что задание векторного поля X на многообразии M равносильно заданию системы гладких функций $\{X^i\}$ на многообразии BM – тотальном пространстве расслоения вещественных реперов. Тогда соотношения (4.27) примут вид

$$dX^i + X^j \theta_j^i = X^i_{,j} \omega^j.$$

Продифференцируем их внешним образом:

$$0 + dX^j \wedge \theta_j^i + X^j d\theta_j^i = dX^i_{,j} \wedge \omega^j + X^i_{,j} d\omega^j.$$

Подставим вместо $d\theta_j^i$ и $d\omega^i$ структурные уравнения (4.16) и (4.17).

$$(X^j_{,k} \omega^k - X^k \theta_k^j) \wedge \theta_j^i + X^j (-\theta_k^j \wedge \theta_j^k + \frac{1}{2} R_{jk\ell}^i \omega^k \wedge \omega^\ell) = dX^i_{,j} \wedge \omega^j + X^i_{,j} (-\theta_k^j \wedge \omega^k + \frac{1}{2} S_{k\ell}^j \omega^k \wedge \omega^\ell). \quad (4.28)$$

Два слагаемых с двумя двухиндексными омегами взаимно уничтожаются. Все остальное переносим направо. Введем обозначение (в него войдут три слагаемых из последнего равенства с необходимым переобозначением индексов суммирования)

$$dX^i_{,j} + X^k_{,j} \theta_k^i - X^i_{,k} \theta_j^k = \nabla X^i_{,j}.$$

Тогда (4.28) перепишется в виде

$$\nabla X^i_{,j} \wedge \omega^j - \frac{1}{2} R_{jk\ell}^i X^j \omega^k \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2} S_{k\ell}^j X^i_{,j} \omega^k \wedge \omega^\ell = 0. \quad (4.29)$$

Дальнейшие рассуждения можно провести двумя разными путями. Первый путь нам уже известен – это использование обобщенной леммы Картана и леммы Картана (так мы доказывали, что тензоры кручения и кривизны действительно являются тензорами). Проведите эти рассуждения самостоятельно.

Мы посмотрим новый путь, идею которого будем использовать в дальнейшем. Заметим, что $\nabla X^i_{,j}$ – это 1-формы, определенные на многообразии BM . В его модуле $\mathfrak{X}^*(BM)$ 1-форм существует глобально определенный базис (θ_j^i, ω^k) . Утверждая это, мы воспользовались тем, что и двухиндексные теты (тензорные компоненты формы связности), и одноиндексные омеги (тензорные компоненты формы смещения) определены глобально на BM . При этом нетрудно убедиться (используя соотношения $\theta_j^i = \omega_j^i + \gamma_{jk}^i \omega^k$), что формы θ_j^i будут линейно независимы. Тогда формы $\nabla X^i_{,j}$ можно разложить по базису (θ_j^i, ω^k) :

$$\nabla X^i_{,j} = A_{j\ell}^{ik} \theta_k^\ell + A_{jk}^i \omega^k,$$

где $A_{j\ell}^{ik}$ и A_{jk}^i – некоторые гладкие функции на многообразии BM . Подставим полученное разложение в (4.29):

$$(A_{j\ell}^{ik} \theta_k^\ell + A_{jk}^i \omega^k) \wedge \omega^j - \frac{1}{2} R_{jkl}^i X^j \omega^k \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2} S_{k\ell}^j X^i_{,j} \omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

Раскроем скобки.

$$A_{j\ell}^{ik} \theta_k^\ell \wedge \omega^j + A_{jk}^i \omega^k \wedge \omega^j - \frac{1}{2} R_{jkl}^i X^j \omega^k \wedge \omega^\ell + \frac{1}{2} S_{k\ell}^j X^i_{,j} \omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

В левой части этого равенства стоит 2-форма. Напомним, что в модуле 2-форм $\Lambda_2(BM)$ есть канонический базис $\{\theta_j^i \wedge \omega^k, \omega^\ell \wedge \omega^t \ (\ell < t)\}$. Он образован из базиса $\mathfrak{X}^*(BM)$ (подробности можно посмотреть в курсе Тензорный анализ или в курсе Анализ на многообразиях). Если в последнем равенстве мы сможем получить разложение по этому базису (такого разложения в нем нет, так как у внешних произведений одноиндексных омег индексы не упорядочены), то используя линейную независимость базисных форм, мы получим соотношения на коэффициенты такой линейной комбинации. Заметим, что внешние произведения $\theta_j^i \wedge \omega^k$ упорядочивать не нужно, так как на первом месте всегда стоит форма θ_j^i , которая в базисе $\mathfrak{X}^*(BM)$ всегда стоит раньше всех одноиндексных омег. Чтобы упорядочить внешние произведения одноиндексных омег, используем задачу 7.5 из курса Тензорной алгебры:

$$A_{j\ell}^{ik} \theta_k^\ell \wedge \omega^j - 2A_{[jk]}^i \omega^j \wedge \omega^k \ (j < k) - 2 \cdot \frac{1}{2} R_{j[k\ell]}^i X^j \omega^k \wedge \omega^\ell \ (k < \ell) + 2 \cdot \frac{1}{2} S_{[k\ell]}^j X^i_{,j} \omega^k \wedge \omega^\ell \ (k < \ell) = 0.$$

Так как тензоры кручения и кривизны кососимметричны по последним двум нижним индексам, альтернация снимется. У одноиндексных омег переобозначим индексы суммирования так, чтобы их внешнее произведение вынести за скобку:

$$A_{j\ell}^{ik} \theta_k^\ell \wedge \omega^j + (-2A_{[k\ell]}^i - 2 \cdot \frac{1}{2} R_{jk\ell}^i X^j + 2 \cdot \frac{1}{2} S_{k\ell}^j X^i_{,j}) \omega^k \wedge \omega^\ell \ (k < \ell) = 0.$$

Теперь у нас получилось разложение по базису 2-форм. Применяем линейную независимость.

$$A_{j\ell}^{ik} = 0; \quad -A_{[k\ell]}^i - \frac{1}{2} R_{jk\ell}^i X^j + \frac{1}{2} S_{k\ell}^j X^i_{,j} = 0.$$

Итак, мы получаем, что для разложения $\nabla X^i_{,j}$ коэффициенты при двухиндексных тетах равны нулю, а значит, эта форма раскладывается только по одноиндексным омегам.

$$\nabla X^i_{,j} = A_{jk}^i \omega^k.$$

Переходя, как и выше, от форм двухиндексных тет к двухиндексным омегам, получим основную теорему тензорного анализа, то есть система функций $\{X^i_{,j}\}$ задает тензорное поле типа (1,1).

Систему функций A_{jk}^i обычно обозначают $X^i_{,j,k}$.

Задача 4.1. Проведите процедуру дифференциального продолжения соотношений (4.27) в случае 1-формы.

Замечание 4.6. В дальнейшем, доказывая, что система функций, заданная на многообразии BM , задает тензорное поле на многообразии M , мы не будем от уравнений с тетами (тензорными компонентами формы связности) переходить к уравнениям с омегами (которые присутствуют в основной теореме тензорного анализа). Мы будем сразу делать вывод о том, что задано тензорное поле, так как в каждом случае этот переход один и тот же.

Замечание 4.7. Можно показать, что задание связности в главном расслоении реперов многообразия M равносильно заданию оператора Кошуля и, следовательно, оператора ковариантного дифференцирования на многообразии M (см. курс Анализ на многообразиях). При этом компоненты $\tilde{t}_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s}$ ковариантного

дифференциала тензорного поля t относительно натурального базиса (как они определялись в курсе Анализ на многообразиях) и функции $t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s}$, заданные на многообразии VM , связаны соотношением

$$\hat{t}_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} = t_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} \circ s,$$

где $s : M \rightarrow VM$ – локальное сечение, ставящее точкам области U локальной карты на M натуральные реперы в этих точках.

Тензоры кручения и кривизны связности определенные в этом курсе и в курсе Анализ на многообразиях также совпадают. Подробности можно почитать в монографии Кириченко "Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях" или в файле `diffs6.ps`.