Краткое руководство к действию по многомерной дифференциальной геометрии. Часть 2.

24 февраля 2013 г.

Глава 1. Тензорная алгебра комплексного векторного пространства.

§1.1. Комплексное линейное пространство.

Комплексное векторное пространство определяется точно так же как и вещественное векторное пространство. Только вещественные числа заменяются на комплексные числа. Аналогичным образом на случай комплексного линейного пространства переносятся определения линейной зависимости векторов, базиса и координат вектора. Приведем полученные определения.

Определение 1.1. Будем называть множество V *комплексным векторным (или комплексным линейным) пространством*, а его элементы *векторами*, если выполняются следующие требования:

I. Введено отображение, которое любым элементам $X, Y \in V$ ставит в соответствие элемент $Z \in V$, называемый *суммой векторов* X *и* Y и обозначаемый $Z = X + Y$.

II. Введено отображение, которое любому элементу $X \in V$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{C}$ ставит в соответствие элемент $Y \in V$, называемый *произведением вектора* X *на число* λ и обозначаемый $Y = \lambda X$.

III. Указанные два отображения удовлетворяют 8 условиям:

1^0. $X + Y = Y + X$ (коммутативность);

2^0. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (ассоциативность);

3^0. Существует элемент $0 \in V$, такой что для любого элемента $X \in V$ выполняется $X + 0 = X$ (элемент 0 называется *нуль-вектором*);

4^0. Для любого элемента $X \in V$ существует элемент $-X \in V$, такой что $X + (-X) = 0$ (элемент $-X$ называется *противоположным* элементу X);

5^0. $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$;

6^0. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$;

7^0. $(\lambda\mu)X = \lambda(\mu X)$;

8^0. $1X = X$,

где $X, Y \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ – произвольные элементы. Условия 1^0 – 8^0 называются *аксиомами векторного пространства*. Отображения, определенные в I и II будем называть *операцией сложения векторов* и *операцией умножения вектора на комплексное число*.

Определение 1.2. Система векторов $e_1, \ldots, e_n \in V$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{C}$, не равные нулю одновременно, и такие, что

$$\alpha^i e_i = 0 \qquad (*)$$

Если равенство $(*)$ выполняется только для чисел $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = 0$, то система векторов $e_1, \ldots, e_n$ называется *линейно независимой*.

Если в комплексном линейном пространстве V существует упорядоченная система n линейно независимых векторов, такая что любой вектор из V представим в виде линейной комбинации этих векторов с комплексными коэффициентами, то комплексное линейное пространство V называется *конечномерным*, число n называется его *размерностью*. Данная система векторов называется базисом комплексного линейного пространства V. Если хотят подчеркнуть, что коэффициенты разложения вектора являются комплексными числами, то говорят "комплексная размерность"пространства V и "комплексный базис"пространства V.

Коэффициенты, с помощью которых вектор представлен в виде линейной комбинации векторов базиса, называются *координатами этого вектора*.

Очевидно, что координаты суммы векторов комплексного линейного пространства равны суммам соответствующих координат векторов-слагаемых. Координаты произведения вектора на комплексное число равны произведению соответствующих координат исходного вектора на это число.

Пример 1.1. Рассмотрим множество $\mathbb{C}^n = \{(z^1, \dots, z^n), z^i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n\}$. Введем операции сложения элементов из $\mathbb{C}^n$ и умножения элемента из $\mathbb{C}^n$ на комплексное число по формулам

$$(z^1, \dots, z^n) + (\tilde{z}^1, \dots, \tilde{z}^n) = (z^1 + \tilde{z}^1, \dots, z^n + \tilde{z}^n); \quad z(z^1, \dots, z^n) = (zz^1, \dots, zz^n).$$

Легко видеть, что все аксиомы комплексного линейного пространства выполняются для множества $\mathbb{C}^n$, а значит, оно является комплексным векторным пространством. □

Задача 1.1. Докажите, что комплексная размерность пространства $\mathbb{C}^n$ равна n.

Теорема 1.1. *Пусть V – комплексное линейное пространство размерности n. Тогда оно является вещественным линейном пространством размерности $2n$.*

Доказательство. Так как множество вещественных чисел является подмножеством множества комплексных чисел, то все 8 аксиом вещественного линейного пространства выполняются автоматически.

Нам остается только найти базис V как вещественного линейного пространства. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – комплексный базис пространства V. Рассмотрим систему векторов

$$(e_1, \dots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \dots, \sqrt{-1}e_n). \tag{1.1}$$

Докажем, что эта система векторов "вещественно"линейно независима. Составим линейную комбинацию с вещественными коэффициентами:

$$\alpha^1 e_1 + \dots \alpha^n e_n + \beta^1 \sqrt{-1}e_1 + \dots + \beta^n \sqrt{-1}e_n = 0.$$

Вынесем за скобку векторы $e_1, \dots, e_n$.

$$(\alpha^1 + \sqrt{-1}\beta^1)e_1 + \dots + (\alpha^n + \sqrt{-1}\beta^n)e_n = 0.$$

В левой части этого равенства стоит линейная комбинация векторов $(e_1, \dots, e_n)$ с комплексными коэффициентами. Так как $(e_1, \dots, e_n)$ – комплексный базис V, то такая линейная комбинация равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны 0, то есть $\alpha^i + \sqrt{-1}\beta^i = 0$, то есть $\alpha^i = \beta^i = 0$, $i = 1, \dots, n$. По определению это означает, что система векторов (1.1) "вещественно"линейно независима.

Докажем, что любой вектор из V можно представить в виде линейной комбинации векторов системы (1.1) с вещественными коэффициентами. Пусть $X \in V$ – произвольный вектор. Так как $(e_1, \dots, e_n)$ – комплексный базис V, то вектор X можно представить в виде линейной комбинации этих векторов с комплексными коэффициентами:

$$X = z^1 e_1 + \dots + z^n e_n.$$

Обозначим $z^i = \alpha^i + \sqrt{-1}\beta^i$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}$ и подставим в предыдущее равенство:

$$X = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n + \beta^1 \sqrt{-1}e_1 + \dots + \beta^n \sqrt{-1}e_n.$$

Итак, система векторов (1.1) является базисом V как вещественного линейного пространства, а значит, его вещественная размерность равна $2n$. □

Комплексное линейное пространство V, рассматриваемое как вещественное линейное пространство, называют *овеществлением* комплексного линейного пространства V и обозначают $V^{\mathbb{R}}$.

Замечание 1.1. Обратите внимание, что в теореме 1.1 сами элементы множества V не изменяются. Меняется структура этого множества. Вначале мы "умеем"умножать векторы на комплексные числа, а затем, "забываем" об этом умении и умножаем те же самые векторы только на вещественные числа.

Задача 1.2. Докажите, что $(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{2n}$.

Теорема 1.2. *На любом вещественном линейном пространстве размерности $2n$ можно ввести структуру комплексного линейного пространства.*

Доказательство. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$. Рассмотрим оператор канонической комплексной структуры J_0. Напомним что это такое (см. пример 3.5 из курса тензорной алгебры). Фиксируем на V базис $(e_1, \dots, e_{2n})$ и зададим набор из $(2n)^2$ нулей и единиц, которые расположит в виде матрицы

$$((J_0)^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n, $i, j = 1, \dots, 2n$. В любом другом базисе зададим набор чисел, который будет получаться из $((J_0)^i_j)$ по тензорному закону. Как мы видели в курсе тензорной алгебры, эти наборы чисел задают тензор J_0 типа (1,1), причем сами являются его компонентами. Этот тензор называется оператором канонической комплексной структуры на векторном пространстве V.

Напомним, что оператор канонической комплексной структуры обладает свойством антиинволютивности (см. курс Тензорная алгебра), то есть

$$J_0 \circ J_0 \equiv (J_0)^2 = -id.$$

Введем в V^{2n} структуру комплексного линейного пространства с помощью оператора канонической комплексной структуры J_0 по формуле

$$zX = \alpha X + \beta(J_0 X), \tag{1.2}$$

где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta \in \mathbb{C}$, $X \in V$ – произвольные элементы.

Первые четыре и восьмая аксиомы комплексного линейного пространства такие же как и в вещественном линейном пространстве, а значит, выполняются автоматически. Остается проверить только три аксиомы комплексного линейного пространства, относящиеся к умножению вектора на комплексное число. Докажем, например, что $z(wX) = (zw)X$, $z, w \in \mathbb{C}$, $X \in V$. Остальные докажите самостоятельно.

Пусть $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$, $w = \xi + \sqrt{-1}\eta$. Тогда с учетом (1.2) получим

$$z(wX) = z(\xi X + \eta J_0 X) = \alpha(\xi X + \eta J_0 X) + \beta J_0(\xi X + \eta J_0 X) = (\alpha\xi - \beta\eta)X + (\alpha\eta + \beta\xi)J_0 X = (wz)X.$$

Здесь мы воспользовались линейностью и антиинволютивностью J_0.

Итак, любое четно мерное вещественное линейное пространство V имеет еще и структуру комплексного линейного пространства. $\square$

Замечание 1.2. Заметим, что доказанная теорема объясняет название тензора J_0 – "оператор комплексной структуры".

Слово "канонический"объясняется тем, что на вещественном линейном пространстве существуют другие тензоры J типа (1,1), которые обладают свойством $J \circ J = -id$. С их помощью аналогично теореме 1.2 можно ввести комплексную структуру на V. Такие тензоры называются *операторами комплексной структуры* на вещественном линейном пространстве V.

Оказывается, что четномерность вещественного линейного пространства является необходимым условием существования на нем оператора комплексной структуры J.

Теорема 1.3. *Пусть V – вещественное линейное пространство, J – оператор комплексной структуры на нем. Тогда (вещественная) размерность пространства V четна.*

Доказательство. Для того чтобы доказать, что размерность V четна, нам нужно предъявить базис V с четным числом векторов.

Пусть $e_1 \in V$ – произвольный ненулевой вектор. Докажем, что пара (e_1, Je_1) линейно независима. Составим линейную комбинацию

$$\alpha e_1 + \beta J e_1 = 0, \tag{1.3}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Применим к этому равенству оператор J:

$$\alpha J e_1 - \beta e_1 = 0. \tag{1.4}$$

Здесь мы воспользовались линейностью J и свойством антиинволютивности.

Если одно из чисел α, β равно нулю, то из (1.3) следует, что нулю равно и другое число. Предположим, что оба числа отличны от нуля. Тогда умножая (1.3) на α, а (1.4) – на β и вычитая из первого второе, получим $(\alpha^2 + \beta^2)e_1 = 0$. Так как $e_1 \neq 0$, получим $\alpha = \beta = 0$. Итак, пара векторов (e_1, Je_1) линейно независима. Если V совпадает с линейной оболочкой векторов e_1, Je_1, то эта пара является базисом V, следовательно, V имеет размерность 2.

Если $V \neq L(e_1, Je_1)$, то существует вектор e_2, такой что (e_1, Je_1, e_2) – линейно независимая система. Докажем, что в этом случае система векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2) также является линейно независимой. Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулю.

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma J e_1 + \eta J e_2 = 0 \tag{1.5}$$

Подействуем на обе части равенства оператором J:

$$\alpha J e_1 + \beta J e_2 - \gamma e_1 - \eta e_2 = 0 \tag{1.6}$$

Если $\eta = 0$, то из (1.5) мы получим $\alpha = \beta = \gamma = 0$ в силу линейной независимости векторов e_1, Je_1, e_2. Аналогично если $\beta = 0$, то из (1.6) получим, что $\alpha = \gamma = \eta = 0$. Таким образом, в обоих случаях все коэффициенты в (1.5) равны нулю, следовательно, система векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2) линейно независима.

Пусть $\eta \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Умножим (1.5) на β, а (1.6) умножим на $-\eta$ и сложим полученные равенства:

$$(\alpha\beta + \gamma\eta)e_1 + (\beta^2 + \eta^2)e_2 + (\beta\gamma - \alpha\eta)Je_1 = 0.$$

В силу линейной независимости векторов e_1, e_2, Je_1 получим, в частности, что $\beta^2 + \eta^2 = 0$, то есть $\beta = \eta = 0$. Мы пришли к противоречию с предположением, то есть $\alpha = \beta = \gamma = \eta = 0$ и система векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2) линейно независима.

Если V совпадает с линейной оболочкой векторов (e_1, e_2, Je_1, Je_2), то (e_1, e_2, Je_1, Je_2) является базисом V и размерность V равна 4. В противном случае существует вектор $e_3 \in V$, такой что векторы $e_1, e_2, Je_1, Je_2, e_3$ линейно независима. Тогда аналогично предыдущему доказывается, что система векторов $(e_1, e_2, e_3, Je_1, Je_2, Je_3)$ также линейно независима и так далее. Этот процесс конечен, так как конечномерно векторное пространство V.

В результате этого процесса мы получим базис $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$. Таким образом, вещественное векторное пространство V четномерно. Построенный базис называется *базисом вещественно адаптированным комплексной структуре* (или, короче, *RA-базисом*). □

Задача 1.3. Докажите, что относительно RA-базиса оператор комплексной структуры имеет матрицу

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$i, j = 1, \ldots, 2n$, I_n – единичная матрица порядка n.

Указание. Подействуйте оператором J на вектора RA-базиса, разложите полученный вектор по RA-базису и результат запишите в столбцы матрицы.

Следствие 1.1. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$. Тогда оно имеет структуру комплексного n-мерного пространства.

Доказательство. Пусть дано вещественное векторное пространство V размерности $2n$. Рассмотрим на нем какой-нибудь оператор комплексной структуры J (например, оператор канонической комплексной структуры J_0). Тогда по теореме 1.3 в V существует RA-базис $(e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$. Докажем, что система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ будет базисом V, рассматриваемого как комплексное линейное пространство.

Докажем сначала, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ (комплексно) линейно независимы. Составим линейную комбинацию этих векторов с комплексными коэффициентами и приравняем ее нулю:

$$z^1 e_1 + \ldots + z^n e_n = 0. \tag{1.7}$$

Обозначим $z^1 = \alpha^1 + \sqrt{-1}\beta^1, \ldots, z^n = \alpha^n + \sqrt{-1}\beta^n$ и подставим в (1.7):

$$\alpha^1 e_1 + \beta^1 Je_1 + \ldots + \alpha^n e_n + \beta^n Je_n = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что оператор комплексной структуры J определяет комплексную структуру на V по формуле $(\alpha + \sqrt{-1}\beta)X = \alpha X + \beta JX)$ (см. теорему 1.2). Так как система векторов $e_1, \ldots, e_n$, $Je_1, \ldots, Je_n$ линейно независима, $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = \beta^1 = \ldots = \beta^n = 0$, следовательно, $z^1 = \ldots = z^n$.

Задача 1.4. Докажите, что для любого вектора $X \in V$ существует набор чисел $z^1, \ldots, z^n \in \mathbb{C}$, таких что $X = z^1 e_1 + \ldots + z^n e_n$.

Итак, мы получили, что $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис V как комплексного векторного пространства, а значит, его размерность равна n. □

§1.2. Комплексификация вещественного векторного пространства.

2.1. Пусть V – вещественное векторное пространство произвольной размерности n. Рассмотрим множество всех формальных конечных сумм вида

$$Y = z^1 X_1 + \ldots + z^N X_N,$$

где $z^i \in \mathbb{C}$, $X_i \in V$, $i = 1, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N}$ – произвольное, не фиксированное число. Обратите внимание, что в данных формальных суммах комплексно число z и вектор X вещественного векторного пространства просто стоят рядом. Мы не умеем умножать вектора на комплексные числа (как это было в комплексных линейных пространствах).

Договоримся отождествлять следующие формальные суммы

$$z^1 X_1 + z^2 X_2 = z^2 X_2 + z^1 X_1; \quad z^1 X + z^2 X = (z^1 + z^2)X; \quad zX_1 + zX_2 = z(X_1 + X_2); \quad z(z^1 X) = (zz_1)X, \tag{1.8}$$

где $z^1, z^2, z \in \mathbb{C}$, $X_1, X_2, X \in V$. Будем считать равными две формальные суммы, которые можно привести к одному и тому же виду с помощью отождествлений (1.8).

Множество всех построенных формальных сумм с введенными отождествлениями назовем *комплексификацией вещественного векторного пространства* V и будем обозначать $V^{\mathbb{C}}$. Отметим, что введенное определение не является строгим, но вполне пригодно для работы. Желающие ознакомиться со строгим определением комплексификации векторного пространства могут обратиться к монографии Кобаяши, Номидзу "Основы дифференциальной геометрии"или монографии Кириченко "Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях".

В множестве $V^{\mathbb{C}}$ можно ввести структуру вещественного векторного пространства с помощью следующих операций сложения и умножения на вещественное число

$$Y_1 + Y_2 = z^i X_i + \tilde{z}^j \tilde{X}_j; \quad \alpha Y = (\alpha z^i) X_i, \tag{1.9}$$

где $Y_1 = z^i X_i \in V^{\mathbb{C}}$, $Y_2 = \tilde{z}^j \tilde{X}_j \in V^{\mathbb{C}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Другими словами, чтобы получить сумму двух элементов комплексификации нужно записать одну за другой обе формальные суммы Y_1 и Y_2 и применить введенные отождествления. Чтобы умножить элемент Y на вещественное число, нужно каждое комплексное число формальной суммы умножить на это вещественное число.

Задача 1.5. Докажите, что введенные операции сложения и умножения на вещественное число удовлетворяют всем 8 аксиомам вещественного векторного пространства.

Отметим, что нулевой элемент имеет вид $z^i X_i$, где $z^i = 0$ или $X_i = 0$ для любого индекса i.

Задача 1.6. Докажите, что вещественное векторное пространство V является векторным подпространством вещественного векторного пространства $V^{\mathbb{C}}$.

Указание. Любой элемент из V можно отождествить с формальной суммой вида $1X$.

Будем называть вектора из V *вещественными*, а остальные вектора из $V^{\mathbb{C}}$ – *комплексными векторами.*

Теорема 1.4. *Вещественная размерность пространства* $V^{\mathbb{C}}$ *равна* $2n$.

Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – базис вещественного векторного пространства V. Докажем, что система векторов

$$(e_1, \dots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \dots, \sqrt{-1}e_n) \tag{1.10}$$

из $V^{\mathbb{C}}$ является базисом $V^{\mathbb{C}}$ как вещественного векторного пространства.

Сначала докажем, что эта система векторов линейно независима. Составим линейную комбинацию и приравняем ее нулю:

$$\alpha^1 e_1 + \dots \alpha^n e_n + \beta^1 \sqrt{-1} e_1 + \dots + \beta^n \sqrt{-1} e_n = 0,$$

где $\alpha^i, \beta^i \in \mathbb{R}$. С учетом (1.8) получим

$$(\alpha^1 + \beta^1 \sqrt{-1}) e_1 + \dots + (\alpha^n + \beta^n \sqrt{-1}) e_n = 0.$$

Согласно задаче 1.5 нулевая формальная сумма должна иметь в каждом слагаемом хотя бы один нуль (комплексное число или вектор). Так как вектора базиса $(e_1, \dots, e_n)$ – не нулевые, то нулями будут комплексные числа перед ними, то есть $\alpha^1 + \beta^1\sqrt{-1} = \dots = \alpha^n + \beta^n \sqrt{-1} = 0$. Таким образом, $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = \beta^1 = \dots = \beta^n = 0$ и система векторов (1.10) является линейно независимой (в вещественном смысле).

Чтобы доказать, что любой вектор $Y = z^i X_i \in V^{\mathbb{C}}$ представляется в виде линейной комбинации (с вещественными коэффициентами) векторов (1.10), нужно каждый вектор X_i, входящий в формальную сумму Y разложить по базису $(e_1, \dots, e_n)$ и раскрыть скобки, воспользовавшись определением операций сложения и умножения на вещественное число и отождествлениями. Собрав коэффициенты перед векторами (1.10), мы получим разложение вектора Y по базису (1.10) (подробно распишите самостоятельно).

Итак, мы доказали, что комплексификация произвольного вещественного векторного пространства размерности n является $2n$-мерным вещественным векторным пространством. □

Комплексификация $V^{\mathbb{C}}$ несет также структуру комплексного линейного пространства. Она задается с помощью операций (1.9), где α – комплексное число. Очевидно, что все 8 аксиом комплексного линейного пространства при этом выполняются.

Следствие 1.2. Комплексная размерность комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ равна n.

Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \dots, \sqrt{-1}e_n)$ – базис $V^{\mathbb{C}}$ как вещественного векторного пространства, построенный в теореме 1.4. Докажем, что система векторов $(e_1, \dots, e_n)$ является базисом $V^{\mathbb{C}}$ как комплексного линейного пространства.

Задача 1.7. Докажите, что система векторов $(e_1, \dots, e_n)$ (комплексно) линейно независима.

Пусть Y – произвольный элемент из $V^{\mathbb{C}}$. Тогда в силу теоремы 1.4 его можно разложить по базису 1.10 с вещественными коэффициентами:

$$Y = \alpha^1 e_1 + \ldots \alpha^n e_n + \beta^1\sqrt{-1}e_1 + \ldots + \beta^n\sqrt{-1}e_n = (\alpha^1 + \beta^1\sqrt{-1})e_1 + \ldots + (\alpha^n + \beta^n\sqrt{-1})e_n$$

Обозначим $z^1 = \alpha^1 + \beta^1\sqrt{-1}$, ..., $z^n = \alpha^n + \beta^n\sqrt{-1}$. Тогда мы получим разложение вектора Y по векторам $(e_1, \ldots, e_n)$ с комплексными коэффициентами. $\square$

2.2. Определим в комплексном линейном пространстве $V^{\mathbb{C}}$ отображение $\tau : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ по формуле

$$\tau(z^i X_i) = \bar{z}^i X_i,$$

где $z^i X_i \in V^{\mathbb{C}}$, черта обозначает комплексное сопряжение. Это отображение называется *оператором комплексного сопряжения*. Очевидно, что оператор комплексного сопряжения является инволютивным, то есть $\tau^2 = id$.

Задача 1.8**.** Докажите, что оператор комплексного сопряжения τ является антилинейным отображением, то есть выполняются два условия:

$$\tau(Y_1 + Y_2) = \tau(Y_1) + \tau(Y_2); \quad \tau(zY) = \bar{z}\tau(Y),$$

$Y, Y_1, Y_2 \in V^{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}$.

Замечание 1.3**.** Если рассматривать комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$ как вещественное векторное пространство, то оператор комплексного сопряжения будет обычным линейным оператором.

Теорема 1.5**.** *Пусть $X \in V^{\mathbb{C}}$. Тогда вектор $X \in V$ тогда и только тогда, когда $\tau(X) = X$.*

Доказательство. Пусть $X \in V$. Тогда вектор X мы можем рассматривать как формальную сумму вида $1X$. Применим оператор τ: $\tau(X) = \tau(1X) = 1X = X$.

Обратно, пусть $Y \in V^{\mathbb{C}}$, такой что $\tau(Y) = Y$. Рассмотрим базис $(e_1, \ldots, e_n)$, построенный в следствии 1.2. Заметим, что он состоит из вещественных векторов, то есть из векторов, принадлежащих векторному пространству V. Тогда на разложение вектора Y по этому базису $Y = Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n$ можно посмотреть как на формальную сумму. Тогда получим по определению оператора комплексного сопряжения

$$\tau(Y) = \tau(Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n) = \bar{Y}^1 e_1 + \ldots + \bar{Y}^n e_n.$$

С другой стороны, $\tau(Y) = Y = Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n$. Откуда получим

$$\bar{Y}^1 e_1 + \ldots \bar{Y}^n e_n = Y^1 e_1 + \ldots + Y^n e_n,$$

то есть

$$\operatorname{Im} Y^1 e_1 + \ldots + \operatorname{Im} Y^n e_n = 0.$$

Так как система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ является базисом вещественного векторного пространства V (см. теорему 1.4) и числа $\operatorname{Im} Y^1, \ldots, \operatorname{Im} Y^n \in \mathbb{R}$, то в силу (вещественной) линейной независимости получим, что $\operatorname{Im} Y^1 = \ldots = \operatorname{Im} Y^n = 0$. Тогда вектор Y является линейной комбинацией вещественных векторов $e_1, \ldots, e_n$ с вещественными коэффициентами $\operatorname{Re} Y^1, \ldots, \operatorname{Re} Y^n$, то есть элементом из V. $\square$

2.3. Пусть V – n-мерное вещественное векторное пространство. Рассмотрим его комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$. Рассмотрим множество $(V^{\mathbb{C}})^*$ всех $\mathbb{C}$-линейных отображений вида $w : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$. Определим в этом множестве операции сложения и умножения на комплексное число стандартным образом

$$(w_1 + w_2)(Y) = w_1(Y) + w_2(Y); \quad (zw)(Y) = zw(Y), \; Y \in V^{\mathbb{C}}. \tag{1.11}$$

Эти операции удовлетворяют всем аксиомам комплексного линейного пространства. Таким образом, множество $(V^{\mathbb{C}})^*$ наделяется структурой комплексного линейного пространства. Найдем его комплексную размерность.

Пусть $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ – произвольный базис (не обязательно из вещественных векторов) комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$. Определим отображения $\varepsilon^i : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, которые каждому вектору из $V^{\mathbb{C}}$ ставят в соответствие его i-ю координату относительно базиса $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Очевидно, что это $\mathbb{C}$-линейные отображения.

Задача 1.9**.** Докажите, что отображения ε^i, $i = 1, \ldots, n$ являются линейно независимыми и любой элемент из $(V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ с комплексными коэффициентами. Другими словами, система линейных отображений $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ образует базис комплексного линейного пространства $(V^{\mathbb{C}})^*$.

Задача 1.10. Покажите, что для дуальных базисов $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ и $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ имеют место равенства $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Докажите, что если для некоторой системы $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ из $(V^{\mathbb{C}})^*$ выполняются равенства $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$, где $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ – произвольный базис $V^{\mathbb{C}}$, то $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ является базисом $(V^{\mathbb{C}})^*$, дуальным базису $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Другими словами, свойство $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$ является характеристическим для дуального базиса.

Решение. Первое утверждение докажите самостоятельно. Мы докажем второе утверждение.

Пусть дан базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$ и дана система элементов $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ из $(V^{\mathbb{C}})^*$, удовлетворяющая требованиям $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Докажем сначала, что система $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ линейно независима. Составим линейную комбинацию

$$z_i \varepsilon^i = 0, \tag{1.12}$$

где $z_i \in \mathbb{C}$. Фиксируем произвольный индекс $j = 1, \dots, n$ и подействуем обеими частями равенства (1.12) на вектор ε_j. В силу определений суммы и произведения на комплексное число отображений ε^i получим

$$0 = (z_i \varepsilon^i)(\varepsilon_j) = z_i \varepsilon^i(\varepsilon_j) = z_i \delta^i_j = z_j.$$

Таким образом, $z_j = 0$ для любого $j = 1, \dots, n$, то есть система отображений $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ линейно независима.

Покажем, что любое отображение $w \in (V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлено в виде линейной комбинации (с комплексными коэффициентами) отображений $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$. Действительно, для любого вектора $Y = Y^j \varepsilon_j \in V^{\mathbb{C}}$ имеем

$$w(Y) = w(Y^j \varepsilon_j) = Y^j w(\varepsilon_j) = Y^i \delta^j_i w_j = Y^i \varepsilon^j(\varepsilon_i) w_j = \varepsilon^j(Y^i \varepsilon_i) w_j = w_j \varepsilon^j(Y).$$

Таким образом, $w = w_j \varepsilon^j$, следовательно, $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ – базис $(V^{\mathbb{C}})^*$.

Наконец, покажем, что для любого $i = 1, \dots, n$ отображение ε^i ставит в соответствие любому элементу $Y \in V^{\mathbb{C}}$ его i-ю координату в базисе $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, то есть, что базис $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ является дуальным базису $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Действительно,

$$\varepsilon^i(Y) = \varepsilon^i(Y^j \varepsilon_j) = Y^j \varepsilon^i(\varepsilon_j) = Y^j \delta^i_j = Y^i.$$

□

Пример 1.2. Пусть $u \in V^*$ – произвольный ковектор. Определим отображение $u^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ по формуле $u^{\mathbb{C}}(z^\alpha X_\alpha) = z^\alpha u(X_\alpha)$, где $z^\alpha X_\alpha \in V^{\mathbb{C}}$ – произвольный элемент. Отображение $u^{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* ковектора u или *расширением ковектора u на комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$ по линейности.* Очевидно, что комплексификация ковектора является $\mathbb{C}$-линейным отображением, то есть принадлежит множеству $(V^{\mathbb{C}})^*$. Отметим еще один очевидный факт $(u^{\mathbb{C}})|_V = u$.

Теорема 1.6. *Любой элемент $w \in (V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлен в виде конечной формальной суммы вида $z_\alpha (u^\alpha)^{\mathbb{C}}$, где $z_i \in \mathbb{C}$, $u^\alpha \in V^*$, $\alpha = 1, \dots N \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – базис вещественного векторного пространства V, $(e^1, \dots, e^n)$ – базис дуального векторного пространства (вещественного) V^*. Хорошо известно, что i-й ковектор дуального базиса ставит в соответствие каждому вектору из V его i-ю координату в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Рассмотрим комплексификации ковекторов дуального базиса $(e^i)^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

Отметим, что система векторов $(e_1, \dots, e_n)$, являющегося базисом вещественного векторного пространства V, будет базисом комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство (см. следствие 1.2). Покажем, что отображение $(e^i)^{\mathbb{C}}$ ставит в соответствие каждому элементу из $V^{\mathbb{C}}$ его i-ю координату в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Действительно, рассмотрим произвольный элемент Y из $V^{\mathbb{C}}$ и разложим его по базису $(e_1, \dots, e_n)$. Разложение $Y = Y^j e_j$ мы можем рассматривать как формальную сумму. Тогда

$$(e^i)^{\mathbb{C}}(Y) = (e^i)^{\mathbb{C}}(Y^j e_j) = Y^j e^i(e_j) = Y^j \delta^i_j = Y^i.$$

Здесь мы воспользовались характеристическим свойством дуального базиса $e^i(e_j) = \delta^i_j$.

Пусть $w \in (V^{\mathbb{C}})^*$ – произвольный элемент. Тогда для любого элемента $Y = Y^j e_j \in V^{\mathbb{C}}$ имеем

$$w(Y) = w(Y^j e_j) = Y^j w(e_j) = (e^j)^{\mathbb{C}}(Y) w_j = w_j (e^j)^{\mathbb{C}}(Y).$$

Здесь мы обозначили $w(e_j) = w_j$ – это комплексные числа. Таким образом, для любого элемента $w \in (V^{\mathbb{C}})^*$ имеет место равенство $w = w_j (e^j)^{\mathbb{C}}$. В зависимости от ситуации мы можем посмотреть на правую часть этого равенства и как на формальную сумму и как на линейную комбинацию, в которой операции сложения и умножения на комплексное число определены формулами (1.11). □

Следствие 1.3. Система отображений $((e^1)^{\mathbb{C}}, \dots, (e^n)^{\mathbb{C}})$ является (комплексным) базисом комплексного линейного пространства $(V^{\mathbb{C}})^*$. Координаты элементов из $(V^{\mathbb{C}})^*$ относительно этого базиса совпадают с их компонентами относительно базиса $(e_1, \dots, e_n)$.

2.4. Пусть t – тензор типа (r,s) на вещественном векторном пространстве V. Будем называть такие тензоры *вещественными.* Определим отображение

$$t^{\mathbb{C}}:\underbrace{V^{\mathbb{C}}\times\ldots\times V^{\mathbb{C}}}_{r\,\text{раз}}\times\underbrace{(V^{\mathbb{C}})^*\times\ldots\times(V^{\mathbb{C}})^*}_{s\,\text{раз}}\to\mathbb{C}$$

по формуле

$$t^{\mathbb{C}}(z^{i_1}_{(1)}X^{(1)}_{i_1},\ldots,z^{i_1}_{(r)}X^{(r)}_{i_r},\tilde z^{(1)}_{j_1}(u^{j_1}_{(1)})^{\mathbb{C}},\ldots,\tilde z^{(s)}_{j_s}(u^{j_s}_{(s)})^{\mathbb{C}})=z^{i_1}_{(1)}\ldots z^{i_1}_{(r)}\tilde z^{(1)}_{j_1}\ldots\tilde z^{(s)}_{j_s}t(X^{(1)}_{i_1},\ldots,X^{(r)}_{i_r},u^{j_1}_{(1)},\ldots,u^{j_s}_{(s)}).$$

Здесь мы использовали то, что каждый элемент $V^{\mathbb{C}}$ и $(V^{\mathbb{C}})^*$ может быть представлен в виде конечной формальной суммы указанного вида. Построенное отображение называется *комплексификацией* тензора t или *расширением тензора t по линейности.* Очевидно, что комплексификация тензора t комплексно линейна по каждому аргументу.

Замечание 1.4. Пусть T – вещественный тензор типа $(r,1)$. Тогда он может быть отождествлен с отображением вида

$$t:\underbrace{V\times\ldots\times V}_{r\,\text{раз}}\to V$$

(см. курс Тензорная алгебра) по формуле

$$T(X_1,\ldots,X_r,u)=u(t(X_1,\ldots,X_r)).$$

Тогда его комплексификация $t^{\mathbb{C}}$ будет отображением

$$t^{\mathbb{C}}:\underbrace{V^{\mathbb{C}}\times\ldots\times V^{\mathbb{C}}}_{r\,\text{раз}}\to V^{\mathbb{C}},$$

которое определяется формулой

$$t^{\mathbb{C}}(Y_1,\ldots,Y_r)=z^{i_1}_{(1)}\ldots z^{i_r}_{(r)}t(X^{(1)}_{i_1},\ldots,X^{(r)}_{i_r}),$$

где $Y_1=z^{i_1}_{(1)}X^{(1)}_{i_1},\ldots,Y_r=z^{i_r}_{(r)}X^{(r)}_{i_r}\in V^{\mathbb{C}}$. Можно доказать, что оба определения комплексификации тензора T типа $(r,1)$ эквивалентны. Мы проведем доказательство этого утверждения в случае тензора типа (1,1), оставляя доказательство общего случая читателю.

Пусть $L:V\to V$ – линейный оператор, с которым отождествляется тензор $T:V\times V^*\to\mathbb{R}$. Тогда они связаны между собой формулой $T(X,u)=u(L(X))$. Построим комплексификации для T и L согласно введенным определениям. Мы получим

$$T^{\mathbb{C}}(z^iX_i,\tilde z_j(u^j)^{\mathbb{C}})=z^i\tilde z_jT(X_i,u^j);\quad L^{\mathbb{C}}(z^iX_i)=z^iL(X_i).$$

Нам нужно показать, что $T^{\mathbb{C}}(z^iX_i,\tilde z_j(u^j)^{\mathbb{C}})=(\tilde z_j(u^j)^{\mathbb{C}})(L^{\mathbb{C}}(z^iX_i))$. Имеем

$$T^{\mathbb{C}}(z^iX_i,\tilde z_j(u^j)^{\mathbb{C}})=z^i\tilde z_jT(X_i,u^j)=z^i\tilde z_ju^j(L(X_i))=z^i\tilde z_j(u^j)^{\mathbb{C}}(L(X_i))=\tilde z_j(u^j)^{\mathbb{C}}(L^{\mathbb{C}}(z^iX_i))=$$
$$=(\tilde z_j(u^j)^{\mathbb{C}})(L^{\mathbb{C}}(z^iX_i)).$$

Пример 1.3. Пусть на вещественном векторном пространстве V^2 задана евклидова структура g (см. курс Тензорная алгебра). Это тензор типа (2,0). Рассмотрим его комплексификацию $g^{\mathbb{C}}:V^{\mathbb{C}}\times V^{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$, заданную формулой

$$g^{\mathbb{C}}(z^iX_i,\tilde z^k\tilde X_k)=z^i\tilde z^kg(X_i,\tilde X_k).$$

Докажем, что отображение $g^{\mathbb{C}}$ является псевдо-евклидовой структурой, отличной от евклидовой структуры, на комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемой как вещественное векторное пространство. Линейность и симметричность отображения $g^{\mathbb{C}}$ очевидна.

Пусть (e_1,e_2) – ортонормированный базис пространства V. Тогда эти же векторы будут являться базисом комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$, а значит, любой вектор Y представляется в виде их линейной комбинации с комплексными коэффициентами $Y=Y^1e_1+Y^2e_2$. Пусть $g^{\mathbb{C}}(Y,\tilde Y)=0$ для любого вектора $\tilde Y\in V^{\mathbb{C}}$. В частности, это равенство верно для вектора $\tilde Y=e_1$. В этом случае получим

$$0=g^{\mathbb{C}}(Y^1e_1+Y^2e_2,e_1)=Y^1g(e_1,e_1)+Y^2g(e_2,e_1)=Y^1.$$

Мы воспользовались здесь тем, что базис (e_1,e_2) является ортонормированным относительно евклидовой структуры g.

Аналогичным образом получим для $\tilde{Y} = e_2$, что $Y^2 = 0$. Таким образом, $Y = 0$. По определению это означает, что отображение $g^{\mathbb{C}}$ является псевдо-евклидовой структурой на вещественном векторном пространстве $V^{\mathbb{C}}$.

Покажем, что эта структура не является евклидовой. Для этого рассмотрим два вектора $e_1 + \sqrt{-1}e_2$ и $e_1 - \sqrt{-1}e_2$. Имеем

$$g^{\mathbb{C}}(e_1 + \sqrt{-1}e_2, e_1 + \sqrt{-1}e_2) = g(e_1, e_1) + \sqrt{-1}g(e_1, e_2) + \sqrt{-1}g(e_2, e_1) - g(e_2, e_2) = 1 - 1 = 0.$$

Мы воспользовались тем, что базис (e_1, e_2) является ортонормированным относительно евклидовой структуры g. Итак, мы получаем, что для ненулевого вектора $e_1 + \sqrt{-1}e_2$

$$g^{\mathbb{C}}(e_1 + \sqrt{-1}e_2, e_1 + \sqrt{-1}e_2) = 0.$$

Мы получаем, что определение евклидовой структуры не выполняется для отображения $g^{\mathbb{C}}$, а значит, $g^{\mathbb{C}}$ является псевдо-евклидовой структурой, отличной от евклидовой структуры. Аналогично можно показать, что для вектора $e_1 - \sqrt{-1}e_2$ имеем

$$g^{\mathbb{C}}(e_1 - \sqrt{-1}e_2, e_1 - \sqrt{-1}e_2) = 0.$$

Такие векторы называются *изотропными*. Другими словами, ненулевой вектор в псевдо-евклидовом пространстве называется *изотропным*, если его длина равна нулю.

Задача 1.11. Докажите, что векторы $(e_1 - \sqrt{-1}e_2, e_1 + \sqrt{-1}e_2)$ являются линейно независимыми, а значит, образуют базис $V^{\mathbb{C}}$ как комплексного линейного пространства.

Отметим еще раз, что этот базис состоит из изотропных векторов. □

Замечание 1.5. Результат примера 1.3 можно обобщить на случай произвольного конечномерного векторного пространства.

Пример 1.4. Пусть J – тензор типа (1,1) на вещественном векторном пространстве V. Докажем, что комплексификация $J^{\mathbb{C}}$ этого тензора коммутирует с оператором комплексного сопряжения τ.

По определению комплексификации тензора получим

$$\tau \circ J^{\mathbb{C}}(z^i X_i) = \tau(z^i J(X_i)) = \bar{z}^i J(X_i) = J^{\mathbb{C}}(\bar{z}^i X_i) = J^{\mathbb{C}} \circ \tau(z^i X_i). \square$$

Задача 1.12. Пусть g – тензор типа (2,0) на вещественном векторном пространстве V. Докажите, что

$$\overline{g^{\mathbb{C}}(Y_1, Y_2)} = g^{\mathbb{C}}(\tau Y_1, \tau Y_2),$$

где $Y_1, Y_2 \in V^{\mathbb{C}}$.

§1.3. Проекторы.

Пусть V – вещественное векторное пространство. Линейное отображение $P : V \to V$ называется *проектором*, если $P^2 = P$.

Теорема 1.7. *Линейное отображение $P : V \to V$ является проектором тогда и только тогда, когда для любого элемента a из образа $\operatorname{Im} P$ проектора P имеем $P(a) = a$.*

Доказательство. Пусть дан проектор P. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \operatorname{Im} P$, то есть существует элемент $X \in V$, такой что $a = P(X)$. Тогда с учетом определения проектора получим

$$P(a) = P(P(X)) = P^2(X) = P(X) = a.$$

Обратно, пусть $a \in V$ такой элемент, что $P(a) = a$. Тогда $a \in \operatorname{Im} P$ по определению образа отображения. □

Пример 1.5. Пусть V^3 – геометрическое векторное пространство. Рассмотрим отображение $P : V^3 \to V^3$, заданное формулой

$$P(\vec{x}) = \frac{(\vec{a}\vec{x})}{|\vec{a}|^2}\vec{a},$$

где $\vec{a} \in V^3$ – некоторый фиксированный вектор, в числителе дроби стоит скалярное произведение векторов. Очевидно, что это отображение линейно в силу линейности скалярного произведения векторов.

Образом построенного отображения является множество всех векторов, коллинеарных вектору $\vec{a}$. Пусть $\vec{b} \in \operatorname{Im} P$, то есть $\vec{b} = t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$P(\vec{b}) = P(t\vec{a}) = tP(\vec{a}) = t\frac{(\vec{a}\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = t\vec{a} = \vec{b}.$$

По теореме 1.7 это означает, что отображение P является проектором. Этот проектор называется *проектированием вектора на прямую.* □

Предложение 1.1 **.** *Если на вещественном векторном пространстве V задан проектор P, то оно распадается в прямую сумму образа и ядра этого проектора*

$$V = \operatorname{Im} P \oplus Ker\, P.$$

Доказательство. Пусть на векторном пространстве V задан проектор P. Рассмотрим произвольный элемент $X \in V$ и обозначим через $b = X - P(X)$. Докажем, что $b \in Ker\, P$. Действительно,

$$P(b) = P(X - P(X)) = P(X) - P^2(X) = P(X) - P(X) = 0.$$

Таким образом, $X = P(X) + b$, то есть представим в виде суммы элемента из образа проектора P и его ядра.

Нам осталось доказать, что $Ker\, P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$. Пусть $X \in Ker\, P \cap \operatorname{Im} P$, то есть $P(X) = 0$ и $X = P(Y)$, $Y \in V$. Тогда

$$0 = P(X) = P^2(Y) = P(Y) = X.$$

Таким образом, $X = 0$. □

Оказывается верно и обратное.

Предложение 1.2 **.** *Если вещественное векторное пространство V распадается в прямую сумму своих подпространств*

$$V = A \oplus B,$$

то существует проектор $P : V \to V$, такой что $\operatorname{Im} P = A$, $Ker\, P = B$.

Пусть P – проектор на вещественном векторном пространстве V. Рассмотрим отображение $Q = id - P$.

Задача 1.13**.** Докажите, что отображение Q является проектором.

Этот проектор называется *дополнительным проектором для P.*

Задача 1.14**.** Докажите, что если Q – дополнительный проектор для P, то P – дополнительный проектор для Q. В связи с этим проекторы P и Q называются *взаимно дополнительными.*

Задача 1.15**.** Найдите дополнительный проектор к проектору P из примера 1.5 и выясните геометрический смысл этого проектора.

Ответ: $Q(\vec{x}) = id - \frac{(\vec{a}\vec{x})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$. Ортогональное проектирование вектора на плоскость σ, перпендикулярную вектору $\vec{a}$.

Задача 1.16**.** Пусть P и Q – взаимно дополнительные проекторы. Докажите, что

$$\operatorname{Im} P = Ker\, Q; \quad KerP = \operatorname{Im} Q.$$

Следствие 1.4**.** Композиция взаимно дополнительных проекторов равна нулю.

Задача 1.17**.** Пусть P и Q – взаимно дополнительные проекторы. Докажите, что

$$Im\, P \cap Ker\, P = Im\, P \cap Im\, Q = \{0\}.$$

§1.4. Комплексификация оператора комплексной структуры. Адаптированный базис.

4.1. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$, J – оператор комплексной структуры на нем. В задаче 1.3 был построен так называемый RA-базис, в котором матрица оператора комплексной структуры имеет достаточно "простой"вид. Оказывается для комплексификации $J^{\mathbb{C}}$ этого оператора можно построить в $V^{\mathbb{C}}$ базис, в котором $J^{\mathbb{C}}$ будет также иметь "простой"вид.

Зададим на вещественном векторном пространстве $V^{\mathbb{C}}$ два отображения σ и $\bar{\sigma}$ формулами

$$\begin{array}{ll} \sigma : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}} & \sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}); \\ \bar{\sigma} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}} & \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}). \end{array}$$

Задача 1.18**.** Докажите, что отображения σ и $\bar{\sigma}$ являются взаимно дополнительными проекторами.

Предложение 1.3 **.** *Образ проектора σ является собственным подпространством оператора $J^{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению $\sqrt{-1}$. Образ проектора $\bar{\sigma}$ является собственным подпространством оператора $J^{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению $-\sqrt{-1}$.*

Доказательство. Пусть $W \in \operatorname{Im}\sigma$ – произвольный элемент, то есть $W = \sigma(Y)$, $Y \in V^{\mathbb{C}}$. Тогда

$$J^{\mathbb{C}}(W) = J(\sigma(Y)) = \frac{1}{2}J^{\mathbb{C}} \circ (id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})(Y) = \frac{1}{2}(J^{\mathbb{C}} + \sqrt{-1}id)(Y) = \sqrt{-1}\frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})(Y) = \sqrt{-1}W$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(J^{\mathbb{C}})^2 = -id$ (это непосредственно следует из условия $J^2 = -id$ и определения комплексификации тензора).

Обратно, пусть $W \in V^{\mathbb{C}}$ является собственным вектором оператора $J^{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению $\sqrt{-1}$, то есть

$$J^{\mathbb{C}}(W) = \sqrt{-1}W \tag{1.13}$$

Докажем, что W принадлежит образу проектора σ. Из (1.13) получим, что

$$(id + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})(W) = 0,$$

то есть W принадлежит ядру проектора $\bar{\sigma}$. Так как σ и $\bar{\sigma}$ взаимно дополнительные проекторы, то в силу задачи 1.16 ядро проектора $\bar{\sigma}$ совпадает с образом проектора σ, то есть W принадлежит $\operatorname{Im}\sigma$. Итак, мы доказали, что $\operatorname{Im}\sigma = D_J^{\sqrt{-1}}$.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Обозначим образ проектора σ через $D_J^{\sqrt{-1}}$, а образ проектора $\bar{\sigma}$ через $D_J^{-\sqrt{-1}}$. Тогда согласно предложению 1.1 и задаче 1.16 получим, что

$$V^{\mathbb{C}} = D_J^{\sqrt{-1}} \oplus D_J^{-\sqrt{-1}}. \tag{1.14}$$

Замечание 1.6**.** Проекторы $\sigma : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ и $\bar{\sigma} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ являются комплексно линейными отображениями, то есть

$$\sigma(zY) = z\sigma(Y); \quad \bar{\sigma}(zY) = z\bar{\sigma}(Y),$$

$z \in \mathbb{C}$, $Y \in V^{\mathbb{C}}$.

Предложение 1.4 **.** *Собственные подпространства* $D_J^{\sqrt{-1}}$ *и* $D_J^{-\sqrt{-1}}$ *комплексно сопряжены друг другу, то есть*

$$\tau(D_J^{\sqrt{-1}}) = D_J^{-\sqrt{-1}}.$$

Доказательство. Пусть $Y \in D_J^{\sqrt{-1}}$ – произвольный элемент, то есть $J^{\mathbb{C}}(Y) = \sqrt{-1}Y$. Тогда с учетом примера 1.4 получим

$$J^{\mathbb{C}}(\tau Y) = \tau(J^{\mathbb{C}}Y) = \tau(\sqrt{-1}Y) = -\sqrt{-1}\tau Y,$$

то есть $\tau Y \in D_J^{-\sqrt{-1}}$, то есть $\tau(D_J^{\sqrt{-1}}) \subset D_J^{-\sqrt{-1}}$.

Аналогичным образом мы можем доказать, что $\tau(D_J^{-\sqrt{-1}}) \subset D_J^{\sqrt{-1}}$.

Обратно, пусть $Y \in D_J^{-\sqrt{-1}}$. Тогда

$$Y = \tau^2 Y = \tau(\tau Y)$$

Как мы видели выше $\tau Y \in D_J^{\sqrt{-1}}$, то есть $Y \in \tau(D_J^{\sqrt{-1}})$.

Итак, мы доказали требуемое равенство и кроме того, в силу инволютивности τ получили, что

$$\tau(D_J^{-\sqrt{-1}}) = D_J^{\sqrt{-1}}.$$

□

Лемма 1.1**.** *В принятых обозначениях*

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \bar{\sigma}.$$

Доказательство. Пусть $Y \in V^{\mathbb{C}}$ – произвольный элемент. Тогда

$$\tau \circ \bar{\sigma}(Y) = \frac{1}{2}\tau(Y + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}(Y)) = \frac{1}{2}(\tau(Y) - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}(\tau Y)) = \sigma \circ \tau(Y).$$

Здесь мы воспользовались результатами примера 1.4. □

Рассмотрим сужения отображений σ и $\bar{\sigma}$ на векторное пространство V, которое мы будем рассматривать как комплексное линейное пространство. Отметим, что комплексная структура V отличается от комплексной структуры комплексификации $V^{\mathbb{C}}$. Умножение на комплексные числа в комплексном линейном пространстве V задается формулой

$$zX = \alpha X + \beta JX, \tag{1.15}$$

где $z=\alpha+\sqrt{-1}\beta$, $X\in V$. Изменение комплексной структуры приводит к тому, что отображение $\bar\sigma|_V$ становится комплексно антилинейным, то есть

$$\bar\sigma|_V(X_1+X_2)=\bar\sigma|_V(X_1)+\bar\sigma|_V(X_2);\quad \bar\sigma|_V(zX)=\bar z\bar\sigma|_V(X).$$

Отображение $\sigma|_V$ остается по-прежнему комплексно линейным. Точнее верны следующие две теоремы.

Теорема 1.8. *Отображение $\sigma|_V : V\to D_J^{\sqrt{-1}}$ является изоморфизмом комплексных линейных пространств, то есть это биекция, сохраняющая операции сложения векторов и умножения вектора на комплексное число.*

Доказательство. Из предложения 1.3 следует, что $\sigma|_V(X)\in D_J^{\sqrt{-1}}$ для любого вектора $X\in V$.

Докажем, что отображение $\sigma|_V$ сюръективно. Пусть $Y\in D_J^{\sqrt{-1}}$ – произвольный элемент. Рассмотрим вектор $X=Y+\tau Y$. Очевидно, что $\tau X=X$, а значит, по теореме 1.5 вектора X принадлежит векторному пространству V. Покажем, что $\sigma|_V(X)=Y$. Действительно,

$$\sigma|_V(X)=\sigma(Y+\tau Y)=\sigma Y+\tau\circ\bar\sigma Y. \tag{1.16}$$

Здесь мы воспользовались леммой 1.1. Так как $Y\in D_J^{\sqrt{-1}}=\operatorname{Im}\sigma$, то в силу теоремы 1.7 получим $\sigma Y=Y$. Так как проекторы σ и $\bar\sigma$ взаимно дополнительные, то $Y\in Ker\,\bar\sigma$, а значит, $\bar\sigma Y=0$. Тогда из (1.16) получим, что $\sigma|_V(X)=Y$. Итак, мы доказали, что отображение $\sigma|_V$ сюръективно.

Докажем инъективность отображения $\sigma|_V$. Пусть $X\in Ker\,\sigma\cap V$. Тогда $X\in\operatorname{Im}\bar\sigma=D_J^{-\sqrt{-1}}$. Так как $\tau X=X$ для $X\in V$ и $\tau(D_J^{-\sqrt{-1}})=D_J^{\sqrt{-1}}=\operatorname{Im}\sigma$, то $X\in Ker\,\sigma\cap\operatorname{Im}\sigma=\{0\}$. Итак, $X=0$ и отображение $\sigma|_V$ является инъективным.

Нам осталось доказать, что отображение $\sigma|_V$ комплексно линейно, то есть

$$\sigma|_V(X_1+X_2)=\sigma|_V(X_1)+\sigma|_V(X_2);\quad \sigma|_V(zX)=z\sigma|_V(X),$$

где $X,X_1,X_2\in V$, $z\in\mathbb{C}$. Докажем второе соотношение, как более сложное, а первое соотношение доказывается аналогично. Используя (1.21) получим

$$\begin{aligned}\sigma|_V(zX)=\sigma|_V(\alpha X+\beta JX)=\tfrac12(id-\sqrt{-1}J)(\alpha X+\beta JX)=\tfrac12((\alpha+\sqrt{-1}\beta)X-\sqrt{-1}(\alpha+\sqrt{-1}\beta)JX)=\\=(\alpha+\sqrt{-1}\beta)\tfrac12(X-\sqrt{-1}JX)=z\sigma|_V(X),\end{aligned}$$

где $z=\alpha+\sqrt{-1}\beta$. Отметим, что мы воспользовались тем, что $J^{\mathbb{C}}(X)=J(X)$ для векторов $X\in V$. □

Теорема 1.9. *Отображение $\bar\sigma|_V : V\to D_J^{-\sqrt{-1}}$ является антиизоморфизмом комплексных линейных пространств, то есть это биекция, для которой выполняется два условия:*

$$\bar\sigma|_V(X_1+X_2)=\bar\sigma|_V(X_1)+\bar\sigma|_V(X_2);\quad \bar\sigma|_V(zX)=\bar z\bar\sigma|_V(X), \tag{1.17}$$

$X,X_1,X_2\in V$, $z\in\mathbb{C}$.

Доказательство. Инъективность и сюръективность отображения $\bar\sigma|_V$ доказывается также как в предыдущей теореме. Докажем второе соотношение из (1.17). Имеем

$$\begin{aligned}\bar\sigma|_V(zX)=\bar\sigma|_V(\alpha X+\beta JX)=\tfrac12(id+\sqrt{-1}J)(\alpha X+\beta JX)=\tfrac12((\alpha-\sqrt{-1}\beta)X+\sqrt{-1}(\alpha-\sqrt{-1}\beta)JX)=\\=(\alpha-\sqrt{-1}\beta)\tfrac12(X+\sqrt{-1}JX)=\bar z\sigma|_V(X),\end{aligned}$$

□

Следствие 1.5. Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ – базис комплексного линейного пространства V. Тогда система векторов $(\sigma|_V(e_1),\dots,\sigma|_V(e_n),\bar\sigma|_V(e_1),\dots,\bar\sigma|_V(e_n))$ образует базис комплексификации $V^{\mathbb{C}}$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство.

Доказательство. Так как отображение $\sigma|_V$ является изоморфизмом, то переводит базис векторного пространства V в базис $(\sigma|_V(e_1),\dots,\sigma|_V(e_n))$ векторного подпространства $D_J^{\sqrt{-1}}$. Аналогично, антиизоморфизм $\bar\sigma|_V$ переводит базис V в базис $(\bar\sigma|_V(e_1),\dots,\bar\sigma|_V(e_n))$ векторного подпространства $D_J^{-\sqrt{-1}}$. В силу (1.14) прямая сумма этих подпространств является линейным пространством $V^{\mathbb{C}}$, а значит система векторов $(\sigma|_V(e_1),\dots,\sigma|_V(e_n),\bar\sigma|_V(e_1),\dots,\bar\sigma|_V(e_n))$ будет базисом $V^{\mathbb{C}}$. □

Введем обозначения $\varepsilon_1=\sigma|_V(e_1),\dots,\varepsilon_n=\sigma|_V(e_n),\varepsilon_{\hat1}=\bar\sigma|_V(e_1),\dots,\varepsilon_{\hat n}=\bar\sigma|_V(e_n)$. Тогда полученный базис комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ примет вид $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat1},\dots,\varepsilon_{\hat n})$. Такой базис называется *базисом, адаптированным комплексной структуре векторного пространства* V, или, короче, A- *базисом.*

Договоримся, что индексы a,b,c,d,e,f,g,h принимают значения от 1 до n, $\hat a,\hat b,\hat c,\hat d,\hat e,\hat f,\hat g,\hat h$ принимают значения от n до $2n$ и $\hat a=a+n$, где $2n$ – вещественная размерность векторного пространства V. Используя эти обозначения, A-базис коротко будет записываться $(\varepsilon_a,\varepsilon_{\hat b})$.

Задача 1.19**.** Докажите, что для A-базиса $\tau(\varepsilon_a) = \varepsilon_{\hat{a}}$.

Указание: используйте лемму 1.1.

Построенный A-базис для комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ хорош тем, что комплексификация $J^{\mathbb{C}}$ оператора комплексной структуры в этом базисе имеет диагональный вид

$$((J^{\mathbb{C}})^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

где $i, j = 1, \ldots, 2n$.

Действительно, согласно предложению 1.3 получим

$$(J^{\mathbb{C}})(\varepsilon_a) = \sqrt{-1}\varepsilon_a; \quad (J^{\mathbb{C}})(\varepsilon_{\hat{a}}) = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{a}}.$$

Используя определение матрицы оператора, получим (1.18).

4.2. Будем называть тензор *вещественным*, если он определен на вещественном векторном пространстве V. Назовем *компонентами вещественного тензора в A-репере* компоненты его комплексификации в A-репере. Исследуем свойства компонент некоторых вещественных тензоров в A-репере.

Пример 1.6**.** Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$. Рассмотрим $(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$ – произвольный A-базис комплексификации $V^{\mathbb{C}}$. Так как векторное пространство V мы можем рассматривать как подмножество в $V^{\mathbb{C}}$, то произвольный вектор $X \in V$ мы можем разложить по этому A-базису

$$X = X^a \varepsilon_a + X^{\hat{a}} \varepsilon_{\hat{a}},$$

где $X^a, X^{\hat{a}}$ – это некоторые комплексные числа, являющиеся координатами вектора X в A-базисе. Докажем, что для координат вектора X имеем

$$\bar{X}^a = X^{\hat{a}}; \quad \bar{X}^{\hat{a}} = X^a, \tag{1.19}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Действительно, используя задачу 1.19, получим

$$\tau X = \tau(X^a \varepsilon_a + X^{\hat{a}} \varepsilon_{\hat{a}}) = \bar{X}^a \varepsilon_{\hat{a}} + \bar{X}^{\hat{a}} \varepsilon_a.$$

Мы воспользовались здесь антилинейностью оператора комплексного сопряжения. Так как $X \in V$, то есть вещественный вектор, то согласно теореме 1.5 получим $\tau X = X$. Тогда

$$X^a \varepsilon_a + X^{\hat{a}} \varepsilon_{\hat{a}} = \bar{X}^a \varepsilon_{\hat{a}} + \bar{X}^{\hat{a}} \varepsilon_a.$$

В силу линейной независимости базисных векторов получим соотношения (1.19).

Итак, мы показали, что для вещественного вектора координаты в A-базисе попарно комплексно сопряжены. □

Пример 1.7**.** Пусть ковектор $\omega \in V^*$, где V – $2n$-мерное вещественное векторное пространство, на котором фиксирован оператор комплексной структуры J. Рассмотрим комплексификацию $\omega^{\mathbb{C}}$ ковектора ω и найдем его компоненты относительно A-базиса

$$\omega_a \equiv (\omega^{\mathbb{C}})_a = \omega^{\mathbb{C}}(\varepsilon_a) = \frac{1}{2}(\omega(e_a) - \sqrt{-1}\omega(Je_a)).$$

Заметим, что $\omega(e_a)$ и $\omega(Je_a)$ – вещественные числа. Тогда комплексно сопрягая обе части последнего равенства, получим

$$\overline{\omega_a} \equiv \overline{(\omega^{\mathbb{C}})_a} = \frac{1}{2}(\omega(e_a) + \sqrt{-1}\omega(Je_a)) = \omega^{\mathbb{C}}(\bar{\sigma}(e_a)) = (\omega^{\mathbb{C}})_{\hat{a}} \equiv \omega_{\hat{a}}.$$

Итак, мы получили, что компоненты (относительно A-базиса) комплексификации $\omega^{\mathbb{C}}$ произвольного ковектора ω, определенного на вещественном векторном пространстве V, будут попарно комплексно сопряжены. □

Замечание 1.7**.** Аналогично примеру 1.6 можно доказать, что для любого тензора t типа $(r, 0)$ или $(r, 1)$ компоненты в A-базисе его комплексификации будут попарно комплексно сопряжены. При этом при комплексном сопряжении компоненты индексы без крышки переходят в такие же индексы с крышкой и наоборот.

Задача 1.20**.** Докажите, что компоненты комплексификации $J^{\mathbb{C}}$ оператора комплексной структуры в A-базисе попарно комплексно сопряжены.

§1.5. Эрмитова форма на комплексном линейном пространстве.

Пусть дано комплексное линейное пространство V (комплексной) размерности n.

Определение 1.3. Отображение

$$h : V \times V \to \mathbb{C},$$

обладающее свойствами

1) аддитивностью по обоим аргументам

$$h(X_1 + X_2, Y) = h(X_1, Y) + h(X_2, Y); \quad h(X, Y_1 + Y_2) = h(X, Y_1) + h(X, Y_2);$$

2) комплексной однородностью по первому аргументу

$$h(zX, Y) = zh(X, Y);$$

3) *комплексной антиоднородностью* по второму аргументу

$$h(X, zY) = \bar{z}h(X, Y);$$

4) свойством *эрмитовости*

$$\overline{h(X, Y)} = h(Y, X),$$

где $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in V$, $z \in \mathbb{C}$, называется *эрмитовой формой.*

Свойства 1), 2) и 3) называются *линейностью по первому аргументу и антилинейностью по второму аргументу* или *полуторалинейностью* .

Эрмитова форма h называется *невырожденной*, если

$$h(X, Y) = 0 \, \forall Y \in V \;\Rightarrow\; X = 0.$$

Эрмитова форма h называется *положительно определеннной*, если $h(X, X) \geq 0$ для любого $X \in V$, причем $h(X, X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$. Положительно определенная эрмитова форма называется *эрмитовой метрикой* на комплексном векторном пространстве V.

Задача 1.21. Докажите, что положительно определенная эрмитова форма является невырожденной.

Замечание 1.8. Эрмитова форма на комплексном линейном пространстве является аналогом билинейной формы на вещественном векторном пространстве. Соответственно положительно определенная эрмитова форма является аналогом евклидовой структуры на вещественном векторном пространстве.

Пример 1.8. Пусть дано вещественное евклидово векторное пространство (V, g) размерности $2n$ и оператор комплексной структуры J на V, причем $g(JX, JY) = g(X, Y)$, $X, Y \in V$ (*условие согласованности*). Пару (J, g), удовлетворяющую условию согласованности будем называть *эрмитовой структурой* на вещественном векторном пространстве V.

Задача 1.22. Докажите, что для эрмитовой структуры (J, g) верно равенство

$$g(X, JY) + g(JX, Y) = 0, \tag{1.20}$$

где $X, Y \in V$.

В частности, из этого следует, что $g(X, JX) = 0$ для любого $X \in V$.

Указание: в условии согласованности замените X на JX и воспользуйтесь свойством оператора комплексной структуры $J^2 = -id$. Не забудьте, что евклидова структура симметрична.

Как мы знаем (см. теорему 1.2), в V умножение векторов на комплексные числа задается формулой

$$zX = \alpha X + \beta JX, \tag{1.21}$$

где $z = \alpha + \sqrt{-1}\beta$, $X \in V$, то есть V наделено структурой комплексного линейного пространства.

Определим на V как на комплексном линейном пространстве отображение

$$\langle\langle , \rangle\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

по формуле

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = g(X, Y) + \sqrt{-1}g(X, JY),$$

где $X, Y \in V$. Докажем, что такое отображение будет полуторалинейной формой на V относительно комплексной структуры, заданной формулой (1.21).

Очевидно, что $\langle\langle X_1 + X_2, Y\rangle\rangle = \langle\langle X_1, Y\rangle\rangle + \langle\langle X_2, Y\rangle\rangle$. Докажем, что $\langle\langle zX, Y\rangle\rangle = z\langle\langle X, Y\rangle\rangle$. Имеем

$$\langle\langle zX, Y\rangle\rangle = g(\alpha X + \beta JX, Y) + \sqrt{-1}g(\alpha X + \beta JX, JY) = \alpha(g(X,Y) + \sqrt{-1}g(X,JY)) + \beta\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}g(JX,Y)+ \\ +g(JX,JY)) = (\alpha + \sqrt{-1}\beta)(g(X,Y) + \sqrt{-1}g(X,JY)) = z\langle\langle X, Y\rangle\rangle$$

Здесь мы воспользовались условием согласованности и соотношением (1.20). Аналогично доказывается антилинейность по второму аргументу, то есть

$$\langle\langle X, Y_1 + Y_2\rangle\rangle = \langle\langle X, Y_1\rangle\rangle + \langle\langle X, Y_2\rangle\rangle; \quad \langle\langle X, zY\rangle\rangle = \bar{z}\langle\langle X, Y\rangle\rangle,$$

где $X, Y_1, Y_2, Y \in V$.

Наконец, проверим свойство эрмитовости:

$$\overline{\langle\langle X, Y\rangle\rangle} = \overline{g(X,Y) + \sqrt{-1}g(X,JY)} = g(X,Y) - \sqrt{-1}g(X,JY) = g(X,Y) + \sqrt{-1}g(JX,Y) = g(Y,X)+ \\ +\sqrt{-1}g(Y,JX) = \langle\langle Y, X\rangle\rangle.$$

Итак, мы показали, что отображение $\langle\langle , \rangle\rangle$ является эрмитовой формой на комплексном линейном пространстве V.

Задача 1.23. Докажите, что эрмитова форма $\langle\langle , \rangle\rangle$ положительно определена.

Задача 1.24. Какой будет эрмитова форма $\langle\langle , \rangle\rangle$, если g будет псевдо-евклидовой структурой? $\square$

Следующая теорема объясняет название "эрмитова структура"для пары (J, g).

Теорема 1.10. *Пусть V – вещественное векторное пространство четной размерности $2n$. Тогда задание эрмитовой структуры (J, g) на нем равносильно заданию положительно определенной эрмитовой формы $\langle\langle , \rangle\rangle$ на V, рассматриваемом как комплексное линейное пространство с комплексной структурой, определенной оператором комплексной структуры J.*

Доказательство. В одну сторону теорема доказана в примере 1.8, то есть мы построили положительно определенную эрмитову форму, используя эрмитову структуру (J, g), где J – оператор комплексной структуры, g – евклидова структура, согласованная с J.

Обратно, пусть дана положительно определенная эрмитова форма $\langle\langle , \rangle\rangle$ на V. Тогда для любых векторов $X, Y \in V$ комплексное число $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ представим в виде

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = g(X,Y) + \sqrt{-1}\Omega(X,Y),$$

где $g(X, Y)$ – это вещественная часть числа $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$, а $\Omega(X, Y)$ – мнимая. Таким образом, мы получаем два отображения

$$g : V \times V \to \mathbb{R}; \quad \Omega : V \times V \to \mathbb{R}$$

задаваемые формулами

$$g(X,Y) = \mathrm{Re}\langle\langle X, Y\rangle\rangle; \quad \Omega(X,Y) = \mathrm{Im}\langle\langle X, Y\rangle\rangle.$$

Задача 1.25. Докажите, что отображения g и Ω вещественно линейны по каждому аргументу.

Докажем, что отображение g симметрично, а отображение Ω кососимметрично. Имеем

$$g(Y,X) = \mathrm{Re}\langle\langle Y, X\rangle\rangle = \mathrm{Re}\,\overline{\langle\langle X, Y\rangle\rangle} = \overline{\mathrm{Re}\langle\langle X, Y\rangle\rangle} = g(X,Y).$$

Здесь мы воспользовались тем, что вещественная часть комплексного числа является вещественным числом, а значит, равна своему комплексному сопряжению. Аналогично получим

$$\Omega(Y,X) = \mathrm{Im}\langle\langle Y, X\rangle\rangle = \mathrm{Im}\,\overline{\langle\langle X, Y\rangle\rangle} = -\,\mathrm{Im}\langle\langle X, Y\rangle\rangle = -\Omega(X,Y).$$

Таким образом, отображение Ω является кососимметрическим тензором типа (2,0).

В силу свойства эрмитовости формы $\langle\langle , \rangle\rangle$ получим, что

$$\overline{\langle\langle X, X\rangle\rangle} = \langle\langle X, X\rangle\rangle,$$

то есть число $\langle\langle X, X\rangle\rangle$ вещественно. Тогда

$$g(X,X) = \mathrm{Re}\langle\langle X, X\rangle\rangle = \langle\langle X, X\rangle\rangle \geq 0,$$

причем

$$g(X,X) = 0 \Leftrightarrow \langle\langle X, X\rangle\rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Здесь мы воспользовались положительной определенностью эрмитовой формы $\langle\langle,\rangle\rangle$. Следовательно, g является евклидовой структурой на вещественном векторном пространстве V.

Нам осталось построить оператор комплексной структуры J, использую тензор Ω и доказать, что полученная комплексная структура согласована с евклидовой структурой g.

Зададим отображение $J : V \to V$ формулой

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY),$$

$X, Y \in V$. Здесь мы строим отображение J, поднимая один индекс у тензора Ω (см. курс Тензорная алгебра). Линейность отображение J очевидна. Кроме того,

$$g(X, J^2Y) = \Omega(X, JY) = \mathrm{Im}\langle\langle X, JY\rangle\rangle = \mathrm{Im}\langle\langle X, \sqrt{-1}Y\rangle\rangle = \mathrm{Im}(-\sqrt{-1}\langle\langle X, Y\rangle\rangle) = -\mathrm{Re}\langle\langle X, Y\rangle\rangle = -g(X, Y).$$

Напомним, что умножение на комплексное число в V мы определили по формуле $zX = \alpha + \beta JX$, в частности, $\sqrt{-1}X = JX$ в данном комплексном линейном пространстве V. Кроме того, мы воспользовались антилинейностью эрмитовой формы по второму аргументу.

Следовательно, $g(X, J^2Y + Y) = 0$ для любого $X \in V$. Откуда в силу невырожденности g получим $J^2Y = -Y$ для любого $Y \in V$, то есть $J^2 = -id$, то есть J является оператором комплексной структуры.

Наконец, докажем согласованность евклидовой структуры g и оператора комплексной структуры J. Имеем

$$g(X, JY) = \Omega(X, Y) = -\Omega(Y, X) = -g(Y, JX) = -g(JX, Y).$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью Ω и симметричностью g. Заменяя Y на JY получим $g(JX, JY) = g(X, Y)$. □

Пример 1.9. Пусть (V, g) – вещественное евклидово векторное пространство произвольной размерности n. Рассмотрим его комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$. Как мы знаем (см. § 1.2.), $V^{\mathbb{C}}$ является комплексным линейным пространством.

Определим отображение $H : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ по формуле

$$H(X, Y) = 2g^{\mathbb{C}}(X, \tau Y),$$

где $X, Y \in V^{\mathbb{C}}$. Докажем, что отображение H является эрмитовой формой на комплексном линейном пространстве $V^{\mathbb{C}}$. Проверим антилинейность отображения H по второму аргументу (остальные условия проверяются аналогично). Имеем

$$H(X, zY) = 2g^{\mathbb{C}}(X, \tau(zY)) = 2g^{\mathbb{C}}(X, \bar{z}\tau Y) = \bar{z}2g^{\mathbb{C}}(X, \tau Y) = \bar{z}H(X, Y).$$

Здесь мы воспользовались антилинейностью оператора комплексного сопряжения τ и комплексной линейностью комплексификации $g^{\mathbb{C}}$ евклидовой структуры g.

Наконец, проверим свойство эрмитовости отображения H:

$$\overline{H(Y, X)} = \overline{2g^{\mathbb{C}}(X, \tau Y)} = 2g^{\mathbb{C}}(\tau X, Y) = 2g^{\mathbb{C}}(Y, \tau X) = H(X, Y).$$

Мы воспользовались здесь результатом задачи 1.12 и инволютивностью оператора комплексного сопряжения. Итак, отображение H является эрмитовой формой на комплексном векторном пространстве $V^{\mathbb{C}}$. □

Теорема 1.11. *Пусть (V, g) – евклидово вещественное векторное пространство размерности $2n$, J – оператор комплексной структуры, согласованный с евклидовой структурой g. Тогда изоморфизм $\sigma|_V : V \to D_J^{\sqrt{-1}}$ и антиизоморфизм $\bar{\sigma}|_V : V \to D_J^{-\sqrt{-1}}$ являются изометрией и антиизометрией соответственно, то есть*

$$H(\sigma|_V(X), \sigma|_V(Y)) = \langle\langle X, Y\rangle\rangle; \quad H(\bar{\sigma}|_V(X), \bar{\sigma}|_V(Y)) = \langle\langle Y, X\rangle\rangle,$$

$X, Y \in V$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} H(\bar{\sigma}|_V(X), \bar{\sigma}|_V(Y)) = 2g^{\mathbb{C}}(\bar{\sigma}|_V(X), \tau\bar{\sigma}|_V(Y)) = 2g^{\mathbb{C}}(\bar{\sigma}|_V(X), \sigma|_V(Y)) = \\ = \tfrac{1}{2}g^{\mathbb{C}}(X + \sqrt{-1}JX, Y - \sqrt{-1}JY) = \tfrac{1}{2}(g(X, Y) - \sqrt{-1}g(X, JY) + \sqrt{-1}g(JX, Y) + g(JX, JY)) = \\ = g(X, Y) - \sqrt{-1}g(X, JY) = \overline{\langle\langle X, Y\rangle\rangle} = \langle\langle Y, X\rangle\rangle \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\tau \circ \bar{\sigma} = \sigma \circ \tau$ и для вещественных векторов $\tau(X) = X$.

Второе соотношение доказывается аналогично. □

Базис $(e_1,\dots,e_n)$ комплексного линейного пространства V называется *ортонормированным* относительно эрмитовой метрики $\langle\langle,\rangle\rangle$, если $\langle\langle e_a,e_b\rangle\rangle=\delta_{ab}$, где δ_{ab} – это дельта Кронекера.

Замечание 1.9. Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ – ортонормированный базис относительно эрмитовой метрики $\langle\langle,\rangle\rangle$ комплексного линейного пространства V. Тогда соответствующий вещественно адаптированный базис $(e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n)$ вещественного векторного пространства V будет ортонормированным базисом относительно евклидовой структуры g.

Действительно,

$$\langle\langle e_a,e_b\rangle\rangle=\delta_{ab}\quad\Leftrightarrow\quad g(e_a,e_b)+\sqrt{-1}g(e_a,Je_b)=\delta_{ab}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}g(e_a,e_b)=g(Je_a,Je_b)=\delta_{ab}\\ g(e_a,Je_b)=0\end{cases}$$

Следствие 1.6. Ортонормированный относительно эрмитовой метрики $\langle\langle,\rangle\rangle$ базис комплексного линейного пространства V при изометрии $\sigma|_V$ (соответственно, антиизометрии $\bar\sigma|_V$) переходит в ортонормированный относительно метрики H базис комплексного линейного пространства $D_J^{\sqrt{-1}}$ (соответственно, пространства $D_J^{-\sqrt{-1}}$). Другими словами, отображения $\sigma|_V$ и $\bar\sigma|_V$ переводят ортонормированный базис комплексного линейного пространства V в ортонормированный базис комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$.

Заметим, что в следствии 1.6 мы получаем A-базис пространства $V^{\mathbb{C}}$. Но если раньше мы брали произвольный базис в V и действовали на него отображениями σ и $\bar\sigma$, то теперь мы рассматриваем только ортонормированные базисы в V. Будем называть такие базисы *адаптированными эрмитовой структуре* (J,g) или, короче, *A-базисами.* Напомним, что A-базисы мы договорились обозначать $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat 1},\dots,\varepsilon_{\hat n})$, где n – комплексная размерность пространства V.

Так как базисы, адаптированные эрмитовой структуре (J,g) являются частным случаем базисов, адаптированных оператору комплексной структуры J, то матрица комплексификации $J^{\mathbb{C}}$ в таком базисе имеет вид (1.18). Выясним, какой вид имеет матрица комплексификации $g^{\mathbb{C}}$ евклидовой структуры g в таком базисе. Согласно введенным обозначениям матрицу $g^{\mathbb{C}}$ мы можем записать в следующем блочном виде

$$((g^{\mathbb{C}})_{ij})=\begin{pmatrix}g^{\mathbb{C}}_{ab} & g^{\mathbb{C}}_{\hat ab}\\ g^{\mathbb{C}}_{a\hat b} & g^{\mathbb{C}}_{\hat a\hat b}\end{pmatrix},\tag{1.22}$$

где $i,j=1,\dots,2n$; $a,b=1,\dots,n$; $\hat a=a+n$. Вычислим элементы каждого из блоков записанной матрицы. Имеем

$$g^{\mathbb{C}}_{ab}=g^{\mathbb{C}}(\varepsilon_a,\varepsilon_b)=\frac14 g^{\mathbb{C}}(e_a-\sqrt{-1}Je_a,e_b-\sqrt{-1}Je_b)=\frac14(g(e_a,e_b)-\sqrt{-1}g(e_a,Je_b)-\sqrt{-1}g(Je_a,e_b)-g(Je_a,Je_b))=0$$

Здесь мы воспользовались определением A-базиса и согласованностью оператора комплексной структуры с евклидовой структурой. Далее,

$$\begin{aligned}g^{\mathbb{C}}_{\hat ab}=g^{\mathbb{C}}(\varepsilon_{\hat a},\varepsilon_b)=\tfrac14 g^{\mathbb{C}}(e_a+\sqrt{-1}Je_a,e_b-\sqrt{-1}Je_b)=\tfrac14(g(e_a,e_b)-\sqrt{-1}g(e_a,Je_b)+\sqrt{-1}g(Je_a,e_b)+g(Je_a,Je_b))=\\ =\tfrac12(g(e_a,e_b)-\sqrt{-1}g(e_a,Je_b))=\tfrac12\delta_{ab}\equiv\tfrac12\delta^a_b\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались согласованностью оператора комплексной структуры с евклидовой структурой и замечанием 1.9.

Элементы остальных двух блоков матрицы (1.22) вычисляются аналогично. В результате получим

$$((g^{\mathbb{C}})_{ij})=\begin{pmatrix}0 & \frac12 I_n\\ \frac12 I_n & 0\end{pmatrix}$$

Замечание 1.10. Чтобы убрать коэффициенты $\frac12$ в матрице $((g^{\mathbb{C}})_{ij})$, вместо A-базиса рассматривают модифицированный A-базис $(\sqrt2\varepsilon_1,\dots,\sqrt2\varepsilon_n,\sqrt2\varepsilon_{\hat1},\dots,\sqrt2\varepsilon_{\hat n})$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие базисы и называть их A-базисами.

Задача 1.26. Докажите, что в модифицированном A-базисе матрицы компонент тензоров J и g имеют вид

$$((J^{\mathbb{C}})^i_j)=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}I_n & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}I_n\end{pmatrix};\quad((g^{\mathbb{C}})_{ij})=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$$

Замечание 1.11. Напомним, что мы договорились называть компонентами вещественного тензора в A-базисе компоненты его комплексификации в этом базисе. В дальнейшем, обозначая компоненты комплексификации вещественного тензора, будем опускать знак комплексификации. Например, матрицы из последней задачи будут обозначаться так:

$$(J^i_j)=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}I_n & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}I_n\end{pmatrix};\quad(g_{ij})=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$$

Пример 1.10. Пусть V – вещественное векторное пространство размерности $2n$, (J, g) – эрмитова структура на нем. Пусть $X \in V$ – произвольный вектор. Применим к нему операцию опускания индекса (см. курс Тензорная алгебра). В результате мы получим некоторый ковектор $u = \ell(X)$. Выразим компоненты этого ковектора в A-базисе через компоненты вектора X. Имеем

$$u_i = g_{ij} X^j$$

где индексы i, j пробегают все значения от 1 до $2n$. Рассмотрим два возможных случая для индекса i.
1) Индекс i принимает значения от 1 до n, то есть $i = a$. Имеем

$$u_a = g_{aj} X^j = g_{ab} X^b + g_{a\hat{b}} X^{\hat{b}} = 0 + \sum_{b=1}^{n} \delta_{ab} X^{\hat{b}} = X^{\hat{a}}.$$

Здесь индекс j сначала принимает значения от 1 до n (то есть $j = b$), а затем принимает значения от $n+1$ до $2n$ (то есть $j = \hat{b}$). Кроме того, мы воспользовались матрицей евклидовой структуры g в A-базисе.

2) Аналогично получаем, что $u_{\hat{a}} = X^a$.
Итак, компоненты X и $u = \ell(X)$ в A-базисе связаны соотношениями

$$u_a = X^{\hat{a}}; \quad u_{\hat{a}} = X^a. \square$$

Замечание 1.12. Для тензоров произвольного типа действует тот же принцип поднятия и опускания индекса, что и для вектора и ковектора: перемещающийся индекс теряет крышку, если она у него была, и приобретает – если нет.

Глава 2. Почти комплексные многообразия.

§2.1. G-структуры на гладком многообразии.

Напомним, что если $\mathscr{B}_1 = (P_1, M, \pi_1, G_1)$ и $\mathscr{B}_2 = (P_2, M, \pi_2, G_2)$ – два главных расслоения над многообразием M, то *гомоморфизмом расслоений* $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ называется пара (f, ρ), где $f : P_1 \to P_2$ – гладкое отображение, $\rho : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групп Ли, причем

1. $\pi_2 \circ f = \pi_1$, то есть отображение f переводит точки, принадлежащие одному слою в точки также принадлежащие одному слою (при этом говорят, что отображение f *послойно*);

2. $f(pg) = f(p)\rho(g)$, то есть действие структурной группы согласовано с отображением f посредством отображения ρ.

Если при этом пара (P_1, f) является вложенным подмногообразием многообразия P_2 (см. § 5 первой части курса Многомерная дифференциальная геометрия), а пара (G_1, ρ) является подгруппой Ли в группе G_2, то главное расслоение $\mathscr{B}_1$ называется *подрасслоением* главного расслоения $\mathscr{B}_2$.

Для нас наибольший интерес представляет случай, когда $\mathscr{B}_2 = (BM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$, то есть главное расслоение вещественных реперов над M, $\mathscr{B}_1 = (P, M, \tilde{\pi}, G)$ – его подрасслоение, причем $f : P \to BM$ – естественное вложение, $\tilde{\pi} = \pi|_P$, G – замкнутая подгруппа Ли полной линейной группы относительно естественного вложения $G \subset GL(n, \mathbb{R})$.

Пример 2.1. Если $G = O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$, $P = \{$ все ортонормированные реперы на $M\}$, то четверка $(P, M, \tilde{\pi}, O(n, \mathbb{R}))$ будет подрасслоением главного расслоения реперов.

Подрасслоение главного расслоения вещественных реперов над многообразием M по замкнутой подгруппе G называется *G-структурой* (первого порядка) над многообразием M.

Значение G-структур в дифференциальной геометрии, прежде всего, определяется тем, что их задание, как правило, бывает равносильно заданию дифференциально геометрической структуры на многообразии базы. Дифференциально-геометрическую структуру базы мы будем понимать в узком смысле, а именно, как тензорное поле или совокупность тензорных полей на многообразии базы. Например, задание $O(n, \mathbb{R})$-структуры равносильно заданию римановой структуры на многообразии M.

§2.2. Структура группы Ли на $GL(n, \mathbb{C})$ и ее подгруппах.

2.1. Пусть дано множество $M^{\mathbb{C}}_{n,n}$ $n \times n$-матриц, элементы которых являются комплексными числами. Обозначим через $GL(n, \mathbb{C})$ его подмножество, состоящее из матриц с ненулевым определителем. Как известно из курса алгебры, такое подмножество является абстрактной группой. Наша задача – ввести в этом множестве структуру группы Ли.

Матрицы из множества $GL(n,\mathbb{C})$ имеют комплексные элементы. Это не удобно для построения структуры гладкого многообразия на этом множестве. Как мы помним, для этого нам нужно каждой матрице поставить в соответствие набор из вещественных чисел. Чтобы избежать этой трудности, построим группу, которая состоит из вещественных матриц и изоморфна (как абстрактная группа) группе $GL(n,\mathbb{C})$.

Рассмотрим множество

$$GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}} = \{g \in GL(2n,\mathbb{R}) : gJ = Jg\},$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ – оператор стандартной комплексной структуры на $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$.

Лемма 2.1. *Во введенных обозначениях*

$$g \in GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad g = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \, det\, g \neq 0,$$

где A, B – вещественные матрицы порядка n.

Доказательство. Пусть $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ принадлежит множеству $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$. Матрица C записана в блочном виде. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – это вещественные $n \times n$-матрицы. Тогда условие $g \circ J = J \circ g$ равносильно равенству

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} C_2 & -C_1 \\ C_4 & -C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_3 & -C_4 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

Откуда получаем, что $C_3 = -C_2$, $C_1 = C_4$, то есть матрица из $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ имеет нужный вид.

Проверьте самостоятельно, что матрица вида $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ коммутирует с оператором стандартной комплексной структуры. □

Нетрудно видеть, что множество $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ является абстрактной группой. Она называется *вещественной реализацией полной комплексной линейной группы порядка n.*

Теорема 2.1. *Группа $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ изоморфна полной комплексной линейной группе $GL(n,\mathbb{C})$.*

Доказательство. Построим отображение

$$\tau : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$$

следующим образом. Пусть $Z = (z_{ab}) \in GL(n,\mathbb{C})$, где $z_{ab} = a_{ab} + ib_{ab}$, $a, b = 1, \dots, n$. Положим $A = (a_{ab})$, $B = (b_{ab})$. Тогда положим

$$\tau(Z) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что τ является биекцией и сохраняет операцию, а значит, является изоморфизмом групп. Проведите рассуждения самостоятельно. □

На вещественной реализации полной комплексной линейной группы порядка n стандартным образом строится структура гладкого многообразия. Атлас состоит из одной карты $(GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}, \varphi)$, а картирующее отображение φ ставит в соответствие матрице $g = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ последовательность элементов матриц A и B, выписанных в одну строчку. Количество элементов матриц A и B равно $n^2 + n^2 = 2n^2$, следовательно, размерность многообразия $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ равна $2n^2$. Далее, на $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ строится структура группы Ли точно так же как для вещественной полной линейной группы. Таким образом, вещественная реализация полной комплексной линейной группы наделяется структурой группы Ли. Так как полная комплексная линейная группа изоморфна своей вещественной реализации (а значит, с точки зрения геометров это одно и то же), то говорят, что полная комплексная линейная группа имеет структуру группы Ли.

2.2. Рассмотрим множество

$$U(n) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) : \, g \cdot \bar{g}^T = I_n\},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, а буква T – транспонированную матрицу. Хорошо известно, что это множество является абстрактной группой (и подгруппой полной комплексной линейной группы) и называется *унитарной группой порядка n.*

Аналогично случаю полной комплексной линейной группы можно построить вещественную реализацию унитарной группы, а значит, определить на ней структуру группы Ли.

Множество $SU(n) = \{g \in U(n) : det\, g = 1\}$ также обладает структурой абстрактной группы и называется *унитарной унимодулярной группой.* Она также обладает структурой группы Ли.

§2.3. Действие группы $GL(n,\mathbb{C})$.

Пусть даны вещественное векторное пространство V размерности $2n$ и оператор комплексной структуры J на V. Как мы видели в главе 1, само множество V обладает структурой комплексного линейного пространства и для него определена комплексификация $V^{\mathbb{C}}$, которая также обладает структурой комплексного линейного пространства. Для этих множеств определены следующие множества базисов:

1. $\mathscr{B}(V)=\{(e_1,\dots,e_n)\}$ – множество базисов V как комплексного линейного пространства;
2. $\mathscr{B}^{RA}(V)=\{(e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n)\}$ – множество базисов V как вещественного векторного пространства;
3. $\mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}})=\{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat{1}},\dots,\varepsilon_{\hat{n}})\}$ – множество базисов $V^{\mathbb{C}}$ как комплексного линейного пространства.

Теорема 2.2. *Для множеств $\mathscr{B}^{RA}(V)$ и $\mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}})$ существуют биективные отображения на множество $\mathscr{B}(V)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varkappa:\mathscr{B}(V)\to\mathscr{B}^{RA}(V)$, заданное формулой

$$(e_1,\dots,e_n)\to(e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n).$$

Очевидно, что это отображение инъективно. Сюръективность вытекает из следствия 1.1.

Рассмотрим отображение $\kappa:\mathscr{B}(V)\to\mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}})$, заданное формулой

$$(e_1,\dots,e_n)\to(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat{1}},\dots,\varepsilon_{\hat{n}}).$$

Очевидно, что это отображение инъективно. Покажем сюръективность. Пусть дан A-базис. По его определению имеем

$$\varepsilon_a=\tfrac{1}{2}(e_a-\sqrt{-1}Je_a);\quad \varepsilon_{\hat{a}}=\tfrac{1}{2}(e_a+\sqrt{-1}Je_a).$$

Тогда, сложив эти равенства, получим $e_a=\varepsilon_a+\varepsilon_{\hat{a}}$. Эти формулы позволяют, имея A-базис, построить систему векторов из V. Нетрудно показать, что она будет (комплексно) линейно независима. Так как эта система содержит n векторов, то она будет базисом V, которое рассматривается как комплексное линейное пространство. □

На множестве $\mathscr{B}(V)$ справа свободно и транзитивно действует полная комплексная линейная группа $GL(n,\mathbb{C})$. Это действие строится по аналогии с вещественным случаем. А именно, если $b=(e_1,\dots,e_n)$ – произвольный базис из $\mathscr{B}(V)$, $Z=(z^b_a)$ – произвольная матрица из $GL(n,\mathbb{C})$, то определен базис $\tilde{b}=(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)$ по формуле $\tilde{e}_c=z^b_c e_b$. Будем обозначать $\tilde{b}=bZ\equiv R_Z b$.

Другими словами, Z есть матрица перехода от базиса b к базису $\tilde{b}$. Как и в вещественном случае доказывается, что это правое транзитивное свободное действие. В силу биективного соответствия между множествами $\mathscr{B}(V)$, $\mathscr{B}^{RA}(V)$ и $\mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}})$ это действие индуцирует правое свободное действие группы $GL(n,\mathbb{C})$ на этих множествах. При действии на множестве $\mathscr{B}(V)$ она имеет свой привычный вид. Выясним, как будет выглядеть эта группа, когда она действует на множествах $\mathscr{B}^{RA}(V)$ и $\mathscr{B}^{A}(V^{\mathbb{C}})$.

Рассмотрим множество $\mathscr{B}^{RA}(V)$. Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ – базис V как комплексного линейного пространства, $b=(e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n)$ – соответствующий RA-базис. Обозначим $(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)$ – образ базиса b под действием элемента $Z=(z^i_j)\in GL(n,\mathbb{C})$. Тогда $\tilde{b}=(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n,J\tilde{e}_1,\dots,J\tilde{e}_n)$ – соответствующий RA-базис. Выясним, какой вид имеет матрица перехода от базиса b к базису $\tilde{b}$.

Пусть $z^a_b=a^a_b+\sqrt{-1}b^a_b$. Тогда матрица Z представима в виде $Z=A+\sqrt{-1}B$, где $A=(a^a_b)$ и $B=(b^a_b)$. Имеем

$$\tilde{e}_c=z^b_c e_b=a^b_c e_b+b^b_c Je_b;\quad J\tilde{e}_c=J(a^b_c e_b+b^b_c Je_b)=-b^b_c e_b+a^b_c Je_b.$$

Здесь мы воспользовались определением структуры комплексного линейного пространства на вещественном векторном пространстве с помощью оператора комплексной структуры (см. теорему 1.2). Откуда получаем, что матрица перехода от одного RA-базиса к другому имеет вид (чтобы получить эту матрицу, нужно координаты векторов нового базиса записать в столбцы этой матрицы)

$$\hat{Z}=\begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n & -b^1_1 & \dots & -b^1_n\\ & \dots & & & \dots & \\ a^n_1 & \dots & a^n_n & -b^n_1 & \dots & -b^n_n\\ & \dots & & & \dots & \\ b^n_1 & \dots & b^n_n & a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad \hat{Z}=\begin{pmatrix} A & -B\\ B & A\end{pmatrix}.$$

Таким образом, на множестве RA-базисов вещественного линейного пространства V свободно и транзитивно действует справа вещественная реализация полной комплексной линейной группы (см. § 2.2.). Так вещественная реализация полной комплексной линейной группы изоморфна полной комплексной линейной группе, будем говорить, что на множестве RA-базисов действует группа $GL(n,\mathbb{C})$.

Рассмотрим множество $\mathscr{B}^A(V^{\mathbb{C}})$. Пусть, по-прежнему, $(e_1,\dots,e_n)$ – базис V, рассматриваемого как комплексное линейное пространство, $(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)$ – его образ под действием элемента $Z=(z^a_b)\in GL(n,\mathbb{C})$. Рассмотрим соответствующие A-базисы $\beta=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat{1}},\dots,\varepsilon_{\hat{n}})$ и $\tilde{\beta}=(\tilde{\varepsilon}_1,\dots,\tilde{\varepsilon}_n,\tilde{\varepsilon}_{\hat{1}},\dots,\tilde{\varepsilon}_{\hat{n}})$. Напомним (см. § 1.4.), что

$$\varepsilon_i=\sigma|_V(e_a)=\tfrac{1}{2}(e_a-\sqrt{-1}Je_a);\quad \varepsilon_{\hat{a}}=\bar{\sigma}|_V(e_a)=\tfrac{1}{2}(e_a+\sqrt{-1}Je_a).$$

Так как проекторы $\sigma|_V$ и $\bar{\sigma}|_V$ являются гомоморфизмом (разбиваются суммы и выносятся комплексные числа) и антигомоморфизмом (суммы разбиваются, а комплексные числа выносятся комплексно сопряженными) соответственно, получим

$$\tilde{\varepsilon}_a=\sigma|_V(\tilde{e}_a)=\sigma|_V(z^b_a e_b)=z^b_a\sigma|_V(e_b)=z^b_a\varepsilon_b;\quad \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}=\bar{\sigma}|_V(\tilde{e}_a)=\bar{\sigma}|_V(z^b_a e_b)=\bar{z}^b_a\varepsilon_{\hat{b}}.$$

Записывая координаты векторов $(\tilde{\varepsilon}_a,\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}})$ в столбцы матрицы, получим, что матрица перехода от базиса β к базису $\tilde{\beta}$ имеет вид

$$\tilde{Z}=\begin{pmatrix} Z & 0\\ 0 & \bar{Z}\end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Таким образом, на множестве A-реперов комплексного линейного пространства $V^{\mathbb{C}}$ группа $GL(n,\mathbb{C})$ действует свободно и транзитивно посредством матриц вида (2.1). Под словами "группа $GL(n,\mathbb{C})$ действует на множестве A-реперов"понимается, что группа $GL(n,\mathbb{C})$ заменяется на изоморфную ей группу, которая и работает с A-базисами.

§2.4. Почти комплексные многообразия.

Пусть M – гладкое многообразие, на котором фиксировано тензорное поле J типа (1,1), такое что $J^2=-id$. Тензорное поле J называется *почти комплексной структурой* на многообразии M, а пара (M,J) называется *почти комплексным многообразием.*

Нетрудно показать, что необходимым условием существования почти комплексной структуры на многообразии M является его четномерность и ориентируемость. В связи с этим обозначим размерность многообразия M через $2n$.

Для каждого почти комплексного многообразия M размерности $2n$ построим главное расслоение так называемых *комплексных реперов.*

Фиксируем произвольную точку $m\in M$ и рассмотрим касательное пространство $T_m(M)$ в этой точке. Касательное пространство $T_m(M)$ является $2n$-мерным вещественным векторным пространством. На нем определен оператор комплексной структуры J_m – значение тензорного поля J (почти комплексной структуры многообразия M) в точке m. Здесь J рассматривается как сечение векторного расслоения тензоров типа (1,1). С помощью оператора комплексной структуры J_m можно в $T_m(M)$ ввести структуру комплексного линейного пространства (по аналогии с доказательством теоремы 1.2) по формуле

$$zX=\alpha X+\beta J_mX,$$

где $X\in T_m(M)$, $z=\alpha+\sqrt{-1}\beta$. Тогда множество $T_m(M)$ становится n-мерным комплексным линейным пространством. Совокупность $p=(m,e_1,\dots,e_n)$, где $(e_1,\dots,e_n)$ – базис $T_m(M)$ как комплексного линейного пространства, называется *комплексным репером* на гладком многообразии M. Обозначим множество комплексных реперов через $BM^{\mathbb{C}}$. Мы можем взять все множество комплексных реперов и попытаться построить на нем структуру главного расслоения. Но у нас возникнут такие же трудности, как и при построении структуры группы Ли на множестве $GL(n,\mathbb{C})$. Обойдем мы эти трудности точно таким же образом. Мы заменим множество комплексных реперов на некоторое подмножество обычных вещественных реперов (где $T_m(M)$ рассматривается как $2n$-мерное вещественное векторное пространство), причем эти два множества должны находится в биективном соответствии друг с другом. Согласно теореме 2.2 множество $\mathscr{B}(T_m(M))$ базисов $T_m(M)$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство, биективно отображается на множество $\mathscr{B}^{RA}(T_m(M))$ RA-базисов. Тогда каждому комплексному реперу $(m,e_1,\dots,e_n)$ однозначно ставится в соответствие вещественно адаптированный репер $(m,e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n)$. Обозначим это множество BM^{RA}. На этом множестве справа свободно и транзитивно действует вещественная реализация $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ полной комплексной линейной группы. Тогда четверка $(BM^{RA},GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}},\pi,M)$ будет главным расслоением (причем подрасслоением главного расслоения (вещественных) реперов). Это доказывается также как в случае главного расслоения реперов. А значит, для расслоения $(BM^{RA},GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}},\pi,M)$ будут иметь место структурные уравнения и основная теорема тензорного анализа. Так как множество реперов BM^{RA} биективно отображается на множество $BM^{\mathbb{C}}$, а группа $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ изоморфна $GL(n,\mathbb{C})$, то главное расслоение $(BM^{RA},GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}},\pi,M)$ обозначается $(BM^{\mathbb{C}},GL(n,\mathbb{C}),\pi,M)$ и называется *главным расслоением комплексных реперов.*

Аналогичная хитрость помогает ввести структуру главного расслоения во множестве A-реперов. Множество всех A-реперов заменяется множеством RA-реперов (они находятся в биективном соответствии по теореме 2.2), а группа матриц $\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \bar{Z} \end{pmatrix}$ заменяется на изоморфную ей группу $GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$. Тогда опять строим структуру главного расслоения на множестве BM^{RA} и благодаря введенным отождествлениям говорим, что четверка $(BM^A, GL(n,\mathbb{C}), \pi, M)$ является *главным расслоением A-реперов.*

Обратите внимание, что в обоих случаях расслоения комплексных реперов и расслоения A-реперов мы получили подрасслоения в главном расслоении вещественных реперов. Размерность тотальных пространств этих расслоений равна $n + 2n^2$ ($n = \dim M$, $2n^2 = dim\, GL(n,\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$), а размерность главного расслоения вещественных реперов равна $n + (2n)^2$. Поэтому записать структурные уравнения и основную теорему тензорного анализа в случае расслоения комплексных реперов и A-реперов мы можем (в случае A-реперов тензорные поля заменяются их комплексификациями), но нужно быть осторожными в разложении форм по базису. В базисе 1-форм будет меньше форм, чем в базисе 1-форм главного расслоения вещественных реперов. Другими словами, часть 1-форм из базиса главного расслоения вещественных реперов будет выражаться через остальные формы. Подробнее этот факт мы рассмотрим в дальнейшем.

Условимся в дальнейшем, что индексы $i, j, k, \ell, m, p, r, s, t$ пробегают значения от 1 до $2n$, индексы a, b, c, d, e, f, h пробегают значения от 1 до n и $\hat{a} = a + n$.

Можно доказать, что задание почти комплексной структуры на многообразии M равносильно заданию G-структуры со структурной группой $GL(n,\mathbb{C})$, тотальное пространство которой состоит из A-реперов. Будем называть эту G-структуру *присоединенной G-структурой* почти комплексного многообразия.

Почти комплексная структура J, а точнее ее комплексификация $J^{\mathbb{C}}$ характеризуется тем, что в A-реперах определяется функциями

$$((J^{\mathbb{C}})^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $(J^{\mathbb{C}})^i_j(p) = (J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_j))^i$, $p = (m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$. Действительно, согласно предложению 1.3 векторы A-базиса являются собственными векторами комплексификации оператора комплексной структуры $J^{\mathbb{C}}_m$, отвечающими собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, то есть

$$J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a) = \sqrt{-1}\varepsilon_a; \quad J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{a}}) = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{a}}.$$

Тогда, записывая координаты векторов $J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a)$ и $J^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{\hat{a}})$ в столбцы матрицы, получим (2.3). В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем работать с комплексификациями тензорных полей. Для сокращения записей будем опускать значок комплексификации у буквы, обозначающей тензорное поле. В связи с этой договоренностью равенство (2.3) примет вид

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Напомним, что индекс i пробегает значения от 1 до $2n$, то есть этот индекс сначала пробегает значения от 1 до n, а затем значения от $n+1$ до $2n$. Как мы договорились, первый интервал индексов обозначается буквой a, второй интервал индексов перенумерован $\hat{1}, \ldots, \hat{n}$ и обозначается $\hat{a}$. Аналогично с индексом j. Тогда матрица (J^i_j) приобретает вид

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} J^a_b & J^a_{\hat{b}} \\ J^{\hat{a}}_b & J^{\hat{a}}_{\hat{b}} \end{pmatrix},$$

где

$$J^a_b = \sqrt{-1}\delta^a_b; \quad J^a_{\hat{b}} = J^{\hat{a}}_b = 0; \quad J^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \equiv -\sqrt{-1}\delta^b_a. \tag{2.4}$$

Рассмотрим дуальный базис (ω^i_j, ω^k) главного расслоения вещественных реперов. Так как главное расслоение A-реперов является подрасслоением главного расслоения вещественных реперов (с учетом рассмотренных отождествлений), определено гладкое отображение $f : BM^A \to BM$ (см. определение G-структуры § 2.1.). Тогда определено отображение антиувлечения f^*, которое переведет 1-формы (ω^i_j, ω^k) базиса (см. § 3 главы 4 из первой части курса Многомерная дифференциальная геометрия) модуля $\mathfrak{X}^*(BM)$ в 1-формы (они будут уже линейно зависимы из-за уменьшения размерности многообразия) $(f^*\omega^i_j, f^*\omega^k)$ модуля $\mathfrak{X}^*(BM^A)$. Так как гладкое отображение f является естественным вложением (то есть точка из BM^A рассматривается как точка из BM), то 1-формы $f^*\omega^i_j$, $f^*\omega^k$ – это по сути те же формы, что и ω^i_j, ω^k (с учетом введенных отождествлений), но их значения рассматриваются не во всех вещественных реперах (точках многообразия BM), а только в A-реперах (точках многообразия BM^A). В связи с этим мы будем обозначать формы $f^*\omega^i_j, f^*\omega^k$ через ω^i_j, ω^k, помня, что работаем на пространстве расслоения A-реперов.

Пример 2.2. Подробно рассмотрим выше сказанное на примере основной теоремы тензорного анализа для почти комплексной структуры. В этом примере мы подробно запишем все выражения со знаками комплексификации и аналогичные выражения в сокращенных обозначениях (далее мы будем писать только сокращенные обозначения).

Так как почти комплексная структура является тензорным полем типа (1,1) по основной теореме тензорного анализа на пространстве BM всех вещественных реперов имеем (напомним, что мы работаем в минусах. Рекомендуется провести аналогичные рассуждения в плюсах.)

$$dJ^i_j - J^i_k\omega^k_j + J^k_j\omega^i_k = J^i_{jk}\omega^k.$$

Применим к обеим частям отображение антиувлечения f^*:

$$d(J^i_j \circ f) - (J^i_k \circ f)f^*\omega^k_j + (J^k_j \circ f)(f^*\omega^i_k) = (J^i_{jk} \circ f)f^*\omega^k.$$

Отображение антиувлечения f^* ставит в соответствие вещественной форме ее комплексификацию. Например, ω^k – компонента формы смещения на главном расслоении вещественных реперов, а $f^*\omega^k$ – ее комплексификация. Аналогично получаем для функций $J^i_j \circ f$ следующий алгоритм действия: отображение f переводит тензорное поле J в его комплексификацию $J^{\mathbb{C}}$ и для нее вычисляются компоненты в A-репере:

$$J^i_j \circ f(p) = (f^*J)^i_j(p) = J^{\mathbb{C}}(\varepsilon_j, u^i) = (J^{\mathbb{C}})^i_j,$$

где $p = (m, \varepsilon_i)$ – A-репер, (m, u^i) – дуальный репер.

В результате получаем (все значки расставлены)

$$d((J^{\mathbb{C}})^i_j) - (J^{\mathbb{C}})^i_k(\omega^{\mathbb{C}})^k_j + (J^{\mathbb{C}})^k_j(\omega^{\mathbb{C}})^i_k = (J^{\mathbb{C}})^i_{jk}(\omega^{\mathbb{C}})^k.$$

Итак, на пространстве расслоения A-реперов для почти комплексной структуры J получаем (еще раз напомним, что значки комплексификации здесь опущены)

$$dJ^i_j - J^i_k\omega^k_j + J^k_j\omega^i_k = J^i_{jk}\omega^k. \tag{2.5}$$

Индексы i, j, k бывают двух типов: от 1 до n и от $\hat{1} \equiv n+1$ до $\hat{n} \equiv 2n$. В первом случае этот индекс обозначается $a, b, c, \ldots$, а во втором случае – $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \ldots$. С учетом этого рассмотрим дифференциальные уравнения (2.5). Здесь свободными индексами (они будут нумеровать уравнения) являются индексы i и j. Сначала рассмотрим уравнения, в которых эти индексы принимают значения от 1 до n, то есть обозначим i через a, j – через b (индекс суммирования k пока не трогаем):

$$dJ^a_b - J^a_k\omega^k_b + J^k_b\omega^a_k = J^a_{bk}\omega^k. \tag{2.6}$$

Теперь займемся индексом k. Каждый индекс суммирования k обозначает сумму от 1 до $2n$. Ее можно разбить на две суммы: от 1 до n (здесь индекс суммирования должен обозначаться c) и от $n+1 \equiv \hat{1}$ до $2n \equiv \hat{n}$ (здесь индекс суммирования обозначается $\hat{c}$). Тогда (2.6) примет вид

$$dJ^a_b - J^a_c\omega^c_b - J^a_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b + J^c_b\omega^a_c + J^{\hat{c}}_b\omega^a_{\hat{c}} = J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^c.$$

Воспользуемся соотношениями (2.4):

$$d(\sqrt{-1}\delta^a_b) - \sqrt{-1}\delta^a_c\omega^c_b - 0\omega^{\hat{c}}_b + \sqrt{-1}\delta^c_b\omega^a_c + 0\omega^a_{\hat{c}} = J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^c.$$

Здесь под внешним дифференциалом функции вида $\sqrt{-1}f$, где f обычная гладкая функция гладкого многообразия, мы понимаем $\sqrt{-1}df$, то есть для оператора внешнего дифференцирования мы также рассматриваем комплексификацию. Тогда

$$0 - \sqrt{-1}\omega^a_b + \sqrt{-1}\omega^a_b = J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \quad \Leftrightarrow \quad J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} = 0.$$

Посмотрим на формы $(\omega^c, \omega^{\hat{c}})$. Это часть базиса (ω^i_j, ω^k) модуля $\mathfrak{X}^*(BM)$ главного расслоения вещественных реперов, а именно, формы ω^k. Как мы говорили выше, какие-то формы из этого базиса будут линейно выражаться через остальные формы, а значит, какая-то часть форм будет линейно зависима. Могут ли это быть формы $(\omega^c, \omega^{\hat{c}}) \equiv (\omega^k)$. Дальнейшие рассуждения носят эвристический характер и не могут быть восприняты как строгое доказательство. Формы ω^k являются дуальным базисом для горизонтальных лифтов векторных полей с базы M (см. § 3 глава 4 часть 1 курса Многомерная дифференциальная геометрия). При построении главного расслоения A-реперов базу мы не "уменьшению а значит, формы ω^k перешли с главного расслоения вещественных реперов на главное расслоение A-реперов, оставшись линейно независимыми. Сразу отметим, что "уменьшению"подверглась структурная группа. За нее отвечают формы ω^i_j. Поэтому мы ожидаем, что среди них появится какая-то линейная зависимость. Но это будет немного ниже.

Возвращаемся к равенствам

$$J^a_{bc}\omega^c + J^a_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} = 0.$$

Это линейная комбинация линейно независимых форм, следовательно, получим

$$J^a_{bc} = 0; \quad J^a_{b\hat{c}} = 0. \tag{2.7}$$

Итак, рассматривая часть уравнений (2.5) (а именно, уравнения, для которых i и j пробегают значения от 1 до n), мы получили (2.7).

Аналогичным образом рассмотрим случай, когда i пробегает значения от $n+1$ до $2n$, а j пробегает значения от 1 до n, то есть $i = \hat{a}$, $j = b$:

$$\begin{gathered}
dJ^{\hat{a}}_b - J^{\hat{a}}_c\omega^c_b - J^{\hat{a}}_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b + J^c_b\omega^{\hat{a}}_c + J^{\hat{c}}_b\omega^{\hat{a}}_{\hat{c}} = J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k \\
\sqrt{-1}\delta^{\hat{a}}_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}_b + \sqrt{-1}\delta^c_b\omega^{\hat{a}}_c = J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k \\
2\sqrt{-1}\omega^{\hat{a}}_b = J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k \\
\omega^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k
\end{gathered}$$

Итак, мы получили ожидаемую линейную зависимость между 1-формами.

Аналогично рассуждая (проведите вычисления самостоятельно) при $i = a$, $j = \hat{b}$ получим

$$\omega^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}k}\omega^k.$$

Как вы уже догадались, в случае $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$ мы получим $J^{\hat{a}}_{\hat{b}k} = 0$. Проверьте это самостоятельно.

Итак, дифференциальные уравнения (2.5), (локально) заданные на пространстве расслоения A-реперов, если расписать из по группам, принимают вид

$$J^a_{bk} = J^{\hat{a}}_{\hat{b}k} = 0; \quad \omega^{\hat{a}}_b = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{bk}\omega^k; \quad \omega^a_{\hat{b}} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}k}\omega^k. \tag{2.8}$$

Рассмотрим первую группу структурных уравнений главного расслоения вещественных реперов (попрежнему мы работаем в минусах)

$$d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j. \tag{2.9}$$

Чтобы записать соответствующие ей уравнения на пространстве расслоения A-реперов, нужно перейти к комплексификации форм и применить антиувлечение f^*. Опуская обозначения комплексификации и антиувлечения, мы получим уравнения в таком же виде, но будем помнить, что перешли от главного расслоения вещественных реперов к его подрасслоению, состоящему из A-реперов. Так как часть двухиндексных омег будет выражаться через одноиндексные, то уравнения (2.9) можно преобразовать. Сначала рассмотрим случай $i = a$.

$$d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b - \omega^a_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} = -\omega^a_b \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}k}\omega^k \wedge \omega^{\hat{b}} = -\omega^a_b \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}c}\omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b}\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}}.$$

Здесь мы использовали равенства (2.8). В последнем слагаемом последнего выражения мы поставили альтернацию, не производя упорядочения омег по номерам (см. пример 7.3 главы 1 курса Тензорная алгебра).

Аналогично рассуждая для $i = \hat{a}$ (проведите подробные вычисления самостоятельно) получим

$$d\omega^{\hat{a}} = -\omega^{\hat{a}}_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[bc]}\omega^b \wedge \omega^c.$$

Итак, мы получаем две группы равенств

$$d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b - \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b}c}\omega^c \wedge \omega^{\hat{b}} + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b}\hat{c}]}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{c}}; \quad d\omega^{\hat{a}} = -\omega^{\hat{a}}_{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{b}} + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b\hat{c}}\omega^{\hat{c}} \wedge \omega^b - \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[bc]}\omega^b \wedge \omega^c.$$

Эти уравнения называются *первой группой структурных уравнений почти комплексной структуры* гладкого многообразия M.

§2.5. Почти эрмитовы структуры.

Пусть M – $2n$-мерное гладкое многообразие. *Почти эрмитовой структурой* на M называется пара $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$, где J – почти комплексная структура, g – риманова метрика, согласованная с J, то есть $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Гладкое многообразие M, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется *почти эрмитовым многообразием.*

С почти эрмитовой структурой связаны две 2-формы: $\Omega(X,Y) = \langle X, JY\rangle$ – *фундаментальная форма почти эрмитовой структуры* и $F(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ – *келерова форма почти эрмитовой структуры.*

Задача 2.1. Докажите, что тензорные поля Ω и F, заданные выше действительно являются 2-формами, то есть кососимметричны. Докажите, что $\Omega = -F$.

Как мы знаем, в комплексификации $\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M) = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{X}(M)$ модуля гладких векторных полей и в комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ касательного пространства определены два проектора

$$\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}}); \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})$$

на собственные распределения (векторные подпространства) $D_{J^{\mathbb{C}}}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{J^{\mathbb{C}}}^{-\sqrt{-1}}$ соответственно. При этом $T_m^{\mathbb{C}}(M) = D_{J^{\mathbb{C}}}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{J^{\mathbb{C}}}^{-\sqrt{-1}}$ и Кроме того, проекторы σ и $\bar{\sigma}$ являются изометрией и антиизометрией $T_m(M)$ (которое рассматривается как комплексное линейное пространство) и комплексных линейных подпространств $D_{J^{\mathbb{C}}}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{J^{\mathbb{C}}}^{-\sqrt{-1}}$ соответственно относительно метрик $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$, $X, Y \in T_m(M)$ и $H(X,Y) = 2g^{\mathbb{C}}(X, \tau Y)$, $X, Y \in T_m^{\mathbb{C}}(M)$.

Эти обстоятельства позволяют установить естественное биективное соответствие между множеством ортонормированных реперов (относительно эрмитовой метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$) комплексного линейного пространства $T_m(M)$, множеством ортонормированных (относительно метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$) RA-реперов вещественного векторного пространства $T_m(M)$ и множеством ортонормированных A-реперов (относительно метрики H) комплексного линейного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$. Именно, если $(m, e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормированный репер комплексного линейного пространства $T_m(M)$, то ему соответствует $(m, e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n)$ – ортонормированный RA-репер вещественного векторного пространства $T_m(M)$, а также $(m, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}})$ – ортонормированный репер комплексного линейного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$, где $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\sigma(e_a)$. Обратите внимание, что в отличие от случая почти комплексной структуры векторы ε_a и $\varepsilon_{\hat{a}}$ приобретают множитель. Сути дела это не меняет, но матрица метрики $g^{\mathbb{C}}$ в таком репере принимает более простой вид.

Можно показать, что задание почти эрмитовой структуры на гладком многообразии равносильно заданию главного расслоения ортонормированных A-реперов. Структурной группой этого расслоения будет унитарная группа $U(n)$. Как и в случае почти комплексных многообразий множество ортонормированных A-реперов мы можем заменять на множества ортонормированных комплексных реперов и множество ортонормированных RA-реперов (соответствующим образом будет видоизменяться группа $U(n)$, действующая на эти реперы). Так как эти множества находятся в биективном соответствии, мы будем получать из них главные расслоения, изоморфные главному расслоению ортонормированных A-реперов. Так как они изоморфны, с точки зрения геометрии они представляют собой одно и то же расслоение, которое мы будем называть присоединенной *G-структурой* почти эрмитова многообразия M.

Отметим (см. § 1.5.), что ортонормированные A-реперы характеризуются тем, что в них матрицы (J^i_j) и (g_{ij}) структурных тензорных полей имеют вид (еще раз напомним, что мы опускаем знак комплексификации при обозначении тензорных полей)

$$(J^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Пример 2.3. Пусть Ω – фундаментальная форма почти эрмитовой структуры. Тогда форма Ω однозначно определяется набором функций $\{\Omega_{ij}\}$ (а точнее $\{\Omega^{\mathbb{C}}_{ij}\}$), заданных на пространстве расслоения A-реперов по формуле

$$\Omega_{ij}(p) = \Omega^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_i, \varepsilon_j),$$

где $p = (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$. Рассмотрим различные значения индексов i и j.

1. $i = a$, $j = b$. Тогда
$$\Omega_{ab}(p) = g^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a, J^{\mathbb{C}}_m \varepsilon_b\rangle = g^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_a, \sqrt{-1}\varepsilon_b) = \sqrt{-1}g_{ab} = 0.$$
Здесь мы воспользовались тем, что векторы ε_b являются собственными для $J^{\mathbb{C}}_m$, отвечающими собственному значению $\sqrt{-1}$.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда (перейдем к общеупотребительной записи, опуская p, m и знак комплексификации)
$$\Omega_{\hat{a}b} = \Omega(\varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_b) = g(\varepsilon_{\hat{a}}, J\varepsilon_b) = g(\varepsilon_{\hat{a}}, \sqrt{-1}\varepsilon_b) = \sqrt{-1}g_{\hat{a}b} = \sqrt{-1}\delta^a_b.$$

3. Аналогично рассуждая, получим
$$\Omega_{a\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^b_a; \quad \Omega_{\hat{a}\hat{b}} = 0.$$

Последний результат можно было получить из других соображений. В примере 1.7 было показано, что для вещественных тензорных полей при комплексном сопряжении задающих их систем функций индексы с крышками меняются на индексы без крышек и наоборот. Применим этот факт в нашем случае. Тогда

$$\Omega_{\hat{a}\hat{b}} = \overline{\Omega_{ab}} = 0; \quad \Omega_{a\hat{b}} = \overline{\Omega_{\hat{a}b}} = \overline{\sqrt{-1}\delta^a_b} = -\sqrt{-1}\delta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \equiv -\sqrt{-1}\delta^b_a.$$

Последнее равенство $\delta^{\hat{a}}_{\hat{b}} \equiv \delta^b_a$ это просто обозначение.

§2.6. Структурные уравнения почти эрмитовой структуры.

6.1. Пусть M – $2n$-мерное почти эрмитово многообразие и (J, g) – почти эрмитова структура на нем. Обозначим через ∇ риманову связность метрики g. Как мы знаем на пространстве расслоения вещественных реперов первая группа структурных уравнений произвольной связности имеет вид (см. первую часть курса Многомерной дифференциальной геометрии § 5 главы 4)

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k,$$

где $\{\omega^i\}$ – тензорные компоненты формы смещения, $\{\theta^i_j\}$ – тензорные компоненты формы связности, $\{S^i_{jk}\}$ – система функций на пространстве расслоения вещественных реперов, задающая тензор кручения данной связности (напомним, что мы работаем в минусах. Полезно аналогичные вычисления провести в плюсах). Так как для римановой связности тензор кручения равен нулю, мы получаем для нее следующие уравнения

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j. \tag{2.11}$$

Чтобы перейти на расслоение A-реперов берем комплексификации обеих частей этих равенств и применяем антиувлечение отображения вложения $f : GL(n, \mathbb{C}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$. Обозначения оставляем те же, помня, что перешли на пространство расслоения A-реперов. Вид уравнений остается тот же. Эти уравнения можно уточнить, так как часть двухиндексных омег должна выражаться через остальные омеги (ожидаем, что по аналогии со случаем почти комплексной структуры они будут выражаться через одноиндексные омеги). Эту зависимость мы можем получить из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет почти комплексная структура и риманова метрика на пространстве расслоения A-реперов. Начнем с почти комплексной структуры.

$$dJ^i_j - J^i_k \theta^k_j + J^k_j \theta^i_k = J^i_{j,k} \omega^k,$$

где $\{J^i_{j,k}\}$ – системы функций на пространстве расслоения A-реперов, которые задают ковариантный дифференциал почти комплексной структуры в римановой связности (а точнее его комплексификацию). Опять напомним, что все объекты в этих дифференциальных уравнениях являются комплексификациями. Распишем эти уравнения для различных значений индексов i и j.

1) $i = a$, $j = b$. Тогда

$$dJ^a_b - J^a_c \theta^c_b - J^a_{\hat{c}} \theta^{\hat{c}}_b + J^c_b \theta^a_c + J^{\hat{c}}_b \theta^a_{\hat{c}} = J^a_{b,k} \omega^k.$$

Подставим (2.10).

$$0 - \sqrt{-1}\delta^a_c \theta^c_b - 0 + \sqrt{-1}\delta^c_b \theta^a_c + 0 = J^a_{b,k} \omega^k$$
$$-\sqrt{-1}\theta^a_b + \sqrt{-1}\theta^a_b = J^a_{b,k} \omega^k.$$

Откуда получаем, что $J^a_{b,k}\omega^k = 0$. В силу линейной независимости форм ω^k получим $J^a_{b,k} = 0$.

2) $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$. Рассуждая аналогично пункту 1) получим $J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0$ (проведите вычисления самостоятельно).

3) $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда (сразу расписываем суммы и не пишем заведомо нулевые слагаемые)

$$0 - J^{\hat{a}}_{\hat{c}} \theta^{\hat{c}}_b + J^c_b \theta^{\hat{a}}_c = J^{\hat{a}}_{b,k} \omega^k$$
$$\sqrt{-1}\delta^{\hat{a}}_{\hat{c}} \theta^{\hat{c}}_b + \sqrt{-1}\delta^c_b \theta^{\hat{a}}_c = J^{\hat{a}}_{b,k} \omega^k$$
$$\sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}_b + \sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}_b = J^{\hat{a}}_{b,k} \omega^k$$

Откуда получаем ожидаемые соотношения на теты.

$$\theta^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,k} \omega^k.$$

4) $i = a$, $j = \hat{b}$. Аналогично пункту 3) получим (проведите вычисления самостоятельно)

$$\theta^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},k} \omega^k.$$

Итак, мы получили, что

$$J^a_{b,k} = 0; \quad J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0; \quad \theta^{\hat{a}}_b = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,k} \omega^k; \quad \theta^a_{\hat{b}} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},k} \omega^k. \tag{2.12}$$

Проведем аналогичные рассуждения для римановой метрики g. По основной теореме тензорного анализа (переведенной в термины римановой связности) получим

$$dg_{ij} - g_{kj} \theta^k_i - g_{ik} \theta^k_j = 0.$$

Здесь мы учли, что в римановой связности ковариантный дифференциал римановой метрики тождественно равен нулю, следовательно, в правых частях этих уравнений будут стоять нули.

1) $i = a$, $j = b$. Тогда с учетом (2.10) получим (мы опять не пишем заведомые нули)

$$-g_{\hat{c}b}\theta^{\hat{c}}_a - g_{a\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_{\hat{c}b}\theta^{\hat{c}}_a + \delta_{a\hat{c}}\theta^{\hat{c}}_b = 0$$

Итак, мы получаем, что

$$\theta^{\hat{b}}_a + \theta^{\hat{a}}_b = 0.$$

2) Аналогично (проведите вычисления самостоятельно) при $i = \hat{a}$, $j = \hat{b}$ получим

$$\theta^b_{\hat{a}} + \theta^a_{\hat{b}} = 0.$$

3) $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда

$$-\delta_{\hat{c}b}\theta^{\hat{c}}_{\hat{a}} - \delta_{\hat{a}c}\theta^c_b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta^{\hat{b}}_{\hat{a}} + \theta^a_b = 0.$$

Оставшийся случай выдаст такой же результат. Итак, мы нашли еще соотношения на двухиндексные теты:

$$\theta^{\hat{b}}_a + \theta^{\hat{a}}_b = 0; \quad \theta^b_{\hat{a}} + \theta^a_{\hat{b}} = 0; \quad \theta^{\hat{b}}_{\hat{a}} + \theta^a_b = 0. \tag{2.13}$$

Распишем первую группу структурных уравнений римановой связности (2.11) с учетом полученных соотношений.

1) Положим в уравнениях (2.11) $i = a$.

$$d\omega^a = -\theta^a_b\wedge\omega^b - \theta^a_{\hat{b}}\wedge\omega^{\hat{b}} = -\theta^a_b\wedge\omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}\omega^c\wedge\omega^{\hat{b}} - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},\hat{c}}\omega^{\hat{c}}\wedge\omega^{\hat{b}} = -\theta^a_b\wedge\omega^b - \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}\omega^c\wedge\omega^{\hat{b}} + \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}\omega^{\hat{b}}\wedge\omega^{\hat{c}} \tag{2.14}$$

Отметим, что на последнем слагаемом мы только поставили альтернацию, но не упорядочивали индексы b и c.

Введем обозначения

$$\omega_b = \omega^{\hat{b}}; \quad B^{ab}{}_c = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}; \quad B^{abc} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad C^{abc} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},\hat{c}}. \tag{2.15}$$

Тогда (2.14) запишется в виде

$$d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c. \tag{2.16}$$

Рассматривая аналогичным образом случай $i = \hat{a}$ (проведите расчеты самостоятельно), получим

$$d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c, \tag{2.17}$$

где

$$B_{ab}{}^c = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \quad B_{abc} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]}; \quad C_{abc} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,c}. \tag{2.18}$$

Уравнения (2.16) и (2.17) называются *первой группой структурных уравнений почти эрмитовой структуры (или почти эрмитова многообразия).*

6.2. При выводе структурных уравнений почти эрмитовой структуры у нас возникли системы функций, определенные на пространстве расслоения A-реперов, $\{B_{abc}, B^{abc}\}$, $\{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$ и $\{C_{abc}, C^{abc}\}$. Исследуем их свойства симметрии.

Предложение 2.1 **.** *Полученные системы функций комплексно сопряжены следующим образом*

$$\overline{B_{abc}} = B^{abc}; \quad \overline{B_{ab}{}^c} = B^{ab}{}_c; \quad \overline{C_{abc}} = C^{abc}.$$

Доказательство. Как мы видели в § 1.4. для комплексификаций вещественных тензоров при комплексном сопряжении индексы компонент в A-репере приобретают крышку, если ее не было, и теряют, если была. Так как функции

$$J^a_{\hat{b},\hat{c}}(p) = ((\nabla J)^{\mathbb{C}}_m)^a_{\hat{b}\hat{c}},$$

то есть компоненты комплексификации вещественного тензора $(\nabla J^{\mathbb{C}})_m$ в A-базисе, то при комплексном сопряжении этих функций мы получим следующий результат

$$\overline{J^a_{\hat{b},\hat{c}}} = J^{\hat{a}}_{b,c}.$$

Тогда для функций C^{abc} получим

$$\overline{C^{abc}} = \overline{\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},\hat{c}}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,c} = C_{abc}.$$

Остальные соотношения доказываются аналогично (проведите вычисления самостоятельно). $\square$

Предложение 2.2 **.** *Свойства симметрии*

$$B^{ab}{}_c = -B^{ba}{}_c; \quad C^{abc} = -C^{bac}; \quad B^{abc} = -B^{acb};$$
$$B_{ab}{}^c = -B_{ba}{}^c; \quad C_{abc} = -C_{bac}; \quad B_{abc} = -B_{acb}.$$

Доказательство. Из определения функций B^{abc} и B_{abc} непосредственно следует их кососимметричность по последней паре индексов. Чтобы доказать свойства симметрии для двух других пар функций, напомним, что для почти эрмитовых многообразий мы получили следующие соотношения (см. (2.13) и (2.12))

$$\theta_a^{\hat{b}} + \theta_b^{\hat{a}} = 0; \quad \theta_b^{\hat{a}} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2} J_{b,k}^{\hat{a}} \omega^k;$$

Подставим вторые соотношения в первые и сразу сократим на числовой коэффициент.

$$J_{a,k}^{\hat{b}} \omega^k + J_{b,k}^{\hat{a}} \omega^k = 0.$$

В силу линейной независимости форм ω^k получим

$$J_{a,c}^{\hat{b}} + J_{b,c}^{\hat{a}} = 0; \quad J_{a,\hat{c}}^{\hat{b}} + J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}} = 0.$$

Сравнивая полученные равенства с определением функций C_{abc} и $B_{ab}{}^c$ (см. (2.18)), получим

$$C_{bac} + C_{abc} = 0; \quad B_{ba}{}^c + B_{ab}{}^c = 0.$$

□

Очевидно, что

$$B_{abc} = C_{a[bc]}; \quad B^{abc} = C^{a[bc]}.$$

Оказывается, можно функции C_{abc} выразить через функции B_{abc}.

Предложение 2.3 **.** *Во введенных обозначениях имеем*

$$C_{abc} = B_{abc} + B_{bca} + B_{cba}.$$

Доказательство. Проальтернируем равенство $B_{abc} = C_{a[bc]}$ по индексам a и b:

$$B_{[ab]c} = \frac{1}{2}(C_{[ab]c} - C_{[a|c|b]}). \tag{2.19}$$

В силу предложения 2.2 имеем

$$C_{[ab]c} = \frac{1}{2}(C_{abc} - C_{bac}) = \frac{1}{2}(C_{abc} + C_{abc}) = C_{abc}.$$

Тогда (2.19) примет вид

$$B_{abc} - B_{bac} = C_{abc} - \frac{1}{2}(C_{acb} - C_{bca}).$$

Используем кососимметричность функций C_{abc} по первым двум индексам.

$$B_{abc} - B_{bac} = C_{abc} - \frac{1}{2}(-C_{cab} + C_{cba}),$$

то есть

$$B_{abc} - B_{bac} = C_{abc} + C_{c[ab]}.$$

Наконец, используя $C_{c[ab]} = B_{cab}$ и кососимметричность функций B_{abc} по последним двум индексам, получим

$$C_{abc} = B_{abc} + B_{bca} + B_{cba}.$$

□

Задача 2.2**.** Докажите, что

$$\theta_{\hat{b}}^{a} = -B^{ab}{}_c \omega^c + C^{abc} \omega_c = -B^{ab}{}_c \omega^c + (B^{abc} + B^{bca} + B^{cba}) \omega_c$$
$$\theta_b^{\hat{a}} = -B_{ab}{}^c \omega_c + C_{abc} \omega^c = -B_{ab}{}^c \omega_c + (B_{abc} + B_{bca} + B_{cba}) \omega^c.$$

§2.7. Виртуальный тензор.

7.1. Введем в рассмотрение отображение $B:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ по формуле

$$B(X,Y)(m)=B^{ab}{}_{c}X_bY^c\varepsilon_a+B_{ab}{}^{c}X^bY_c\varepsilon^a, \tag{2.20}$$

где мы ввели обозначение $\varepsilon^a=\varepsilon_{\hat{a}}$, $X_b=X^{\hat{b}}$, $m\in M$ и репер $p=(m,\varepsilon_a,\varepsilon^b)$. Обычно в этой формуле точку m не пишут.

Задача 2.3. Докажите, что отображение B определено корректно, то есть $B(X,Y)$ является вещественным векторным полем.

Указание. Докажите, что в каждой точке $m\in M$ значение $B(X,Y)(m)$ векторного поля $B(X,Y)$ будет вещественным вектором, то есть $\tau B(X,Y)(m)=B(X,Y)(m)$ (см. теорему 1.5).

Задача 2.4. Докажите, что отображение B является $C^\infty(M)$-линейным, то есть оно может быть отождествлено с тензорным полем типа (2,1) на многообразии M. Это тензорное поле называется *виртуальным тензором* почти эрмитова многообразия.

Заметим, что априори отображение B может зависеть от выбора A-репера. Покажем, что это не так. Для этого найдем инвариантное выражение для виртуального тензора.

Рассмотрим формулу (2.20). Используя обозначения (2.18) и (2.15), получим

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}X^{\hat{b}}Y^c\varepsilon_a+\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}X^bY^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{a}}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\left((\nabla J(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c))^a\varepsilon_a\right)X^{\hat{b}}Y^c+\frac{\sqrt{-1}}{2}\left((\nabla J(\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}}))^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}\right)X^bY^{\hat{c}}=$$

Здесь мы воспользовались определением функций, задающих ∇J в A-репере (справа налево). Заметим, что $(\nabla J(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c))^a\varepsilon_a$ – вектор, принадлежащий распределению $D_J^{\sqrt{-1}}$, то есть образ вектора $\nabla J(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c)$ под действием проектора σ. Аналогично, $(\nabla J(\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}}))^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}$ является образом вектора $\nabla J(\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}}))^{\hat{a}}$ под действием проектора $\bar{\sigma}$. Тогда

$$=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma(\nabla J(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c))X^{\hat{b}}Y^c+\frac{\sqrt{-1}}{2}\bar{\sigma}((\nabla J(\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}}))^{\hat{a}})X^bY^{\hat{c}}=$$

$X^b,X^{\hat{b}},Y^c,Y^{\hat{c}}$ – это комплексные числа. Они являются координатами векторов X_m и Y_m в A-базисе (обозначение точки m как всегда опущено). Эти числа нужно внести сначала под оператор σ (соответственно, $\bar{\sigma}$), а затем, под тензор ∇J). Заметим, что в отличие от теорем 1.8 и **??**, проекторы σ и $\bar{\sigma}$ рассматриваются как отображения $V^{\mathbb{C}}\to V^{\mathbb{C}}$, где $V^{\mathbb{C}}$ рассматривается как комплексное пространство с комплексной структурой, задаваемой формулами (1.9). В их определении берется комплексификация оператора комплексной структуры, то есть расширение на комплексные числа по линейности. Откуда получаем, что в этом случае и σ, и $\bar{\sigma}$ будут комплексно линейными операторами. Благодаря этому комплексные числа $X^b,X^{\hat{b}},Y^c,Y^{\hat{c}}$ вносим под знак σ и $\bar{\sigma}$. Так как ∇J – это комплексификация (знак комплексификации опущен для краткости записи) значения в точке m ковариантного дифференциала почти комплексной структуры, то под знак ∇J эти числа также можно внести (в силу комплексной линейности комплексификации). Тогда

$$=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma(\nabla J(X^{\hat{b}}\varepsilon_{\hat{b}},Y^c\varepsilon_c))+\frac{\sqrt{-1}}{2}\bar{\sigma}((\nabla J(X^b\varepsilon_b,Y^{\hat{c}}\varepsilon_{\hat{c}}))^{\hat{a}})=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma(\nabla J(\bar{\sigma}(X),\sigma(Y)))+\frac{\sqrt{-1}}{2}\bar{\sigma}(\nabla J(\sigma(X),\bar{\sigma}(Y)))=$$

Теперь применяем определения проекторов $\sigma=\frac{1}{2}(id-\sqrt{-1}J)$ и $\bar{\sigma}=\frac{1}{2}(id-\sqrt{-1}J)$. Для того чтобы не запутаться, мы подставим эти формулы сначала внутри ∇J, а на следующем шаге подставим внешние сигмы (можно подставлять все сразу).

$$=\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(-\sigma(\nabla J(X+\sqrt{-1}JX,Y-\sqrt{-1}JY))+\bar{\sigma}(\nabla J(X-\sqrt{-1}JX,Y+\sqrt{-1}JY))\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(-\sigma(\nabla J(X,Y)-\sqrt{-1}\nabla J(X,JY)+\sqrt{-1}\nabla J(JX,Y)+\nabla J(JX,JY))+\right.$$
$$\left.+\bar{\sigma}(\nabla J(X,Y)+\sqrt{-1}\nabla J(X,JY)-\sqrt{-1}\nabla J(JX,Y)+\nabla J(JX,JY))\right)=$$

Теперь подставим оставшиеся сигмы.

$$\frac{\sqrt{-1}}{16}(-\nabla J(X,Y)+\sqrt{-1}\nabla J(X,JY)-\sqrt{-1}\nabla J(JX,Y)-\nabla J(JX,JY)+$$
$$+\sqrt{-1}J\nabla J(X,Y)+J\nabla J(X,JY)-J\nabla J(JX,Y)+\sqrt{-1}J\nabla J(JX,JY)+$$
$$+\nabla J(X,Y)+\sqrt{-1}\nabla J(X,JY)-\sqrt{-1}\nabla J(JX,Y)+\nabla J(JX,JY)+$$
$$+\sqrt{-1}J\nabla J(X,Y)-J\nabla J(X,JY)+J\nabla J(JX,Y)+\sqrt{-1}J\nabla J(JX,JY))=$$

Приводим подобные. Так как мы ожидаем вещественный вектор, $\sqrt{-1}$ быть не должно, следовательно, взаимно уничтожатся все слагаемые внутри внешних скобок, которые не содержат множитель $\sqrt{-1}$.

$$= -\frac{1}{8}(\nabla J(X, JY) - \nabla J(JX, Y) + J\nabla J(X, Y) + J\nabla J(JX, JY)) =$$

Переходим от ковариантных дифференциалов к производным.

$$= -\frac{1}{8}(\nabla_{JY}(J)X - \nabla_Y(J)(JX) + J\nabla_Y(J)X + J\nabla_{JY}(J)(JX)) =$$

Применим тождество $J\nabla_Y(J)X + \nabla_Y(J)(JX) = 0$ (см. пример 2.3 курса Анализ на многообразиях).

$$= -\frac{1}{8}(\nabla_{JY}(J)X - \nabla_Y(J)(JX) - \nabla_Y(J)(JX) + \nabla_{JY}(J)X).$$

В последнем слагаемом мы воспользовались тем, что $J^2 = -id$. Окончательно получаем (здесь опять опущена точка m)

$$B(X, Y) = \frac{1}{4}(\nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JY}(J)X). \tag{2.21}$$

Итак, мы показали, что вектор $B(X, Y)(m)$ не зависит от выбора A-репера в точке m. Кроме того, мы получили выражение для отображения B в инвариантном виде исчисления Кошуля. Так как полученное равенство верно для любой точки m, то мы получили соотношения для тензорных полей. Это выражение еще раз подтверждает, что отображение B будет $C^\infty(M)$-линейным как композиция таковых, то есть будет тензорным полем типа (2,1). Это тензорное поле называется *виртуальным тензором почти эрмитова многообразия.*

7.2. Изучим свойства виртуального тензора.

Задача 2.5. Используя формулу (2.21), покажите, что

$$B(JX, Y) = -B(X, JY) = -JB(X, Y).$$

Благодаря почти комплексной структуре J модуль векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ можно рассматривать как (бесконечномерное) комплексное линейное пространство. Умножение на комплексные числа при этом будет задаваться формулой

$$zX = \alpha X + \beta JX,\ z = \alpha + \sqrt{-1}\beta.$$

Тогда на комплексном линейном пространстве виртуальный тензор будет обладать следующими свойствами

$$B(zX, Y) = \bar{z}B(X, Y); \quad B(X, zY) = zB(X, Y),$$

то есть отображение B будет $\mathbb{C}$-линейно по второму аргументу и $\mathbb{C}$-антилинейно по первому аргументу.

Действительно,

$$B(zX, Y) = B(\alpha X+\beta JX, Y) = \alpha B(X, Y)+\beta B(JX, Y) = \alpha B(X, Y)-\beta JB(X, Y) = (\alpha-\beta\sqrt{-1})B(X, Y) = \bar{z}B(X, Y)$$

Здесь мы воспользовались $\mathbb{R}$-линейностью тензорного поля B и результатом задачи 2.5.

Как и любое тензорное поле, для виртуального тензора B можно рассматривать комплексификацию $B^{\mathbb{C}}$. Как мы знаем, $B^{\mathbb{C}}$ будет комплексно линеен по каждому аргументу. Обычно знак комплексификации опускают. Будьте внимательны, чтобы не перепутать виртуальный тензор и его комплексификацию. Первый $\mathbb{C}$-линеен по второму аргументу и $\mathbb{C}$-антилинеен по первому, а вторая $\mathbb{C}$-линейна по каждому аргументу.

7.3. Найдем компоненты виртуального тензора в A-репере, то есть систему функций $\{B^i_{jk}\}$ на пространстве расслоения A-реперов, которые определяются следующим образом (Обратите внимание, что мы различаем обозначения B^c_{ab} и $B_{ab}{}^c$!!!)

$$B^i_{jk}(p) = (B_m(\varepsilon_j, \varepsilon_i))^i,\ p = (m, \varepsilon_i).$$

(Знак комплексификации на B_m опущен, хотя подразумевается, так как с векторами ε_i, которые принадлежат комплексификации касательного пространства, сам тензор B_m работать не умеет.) Нам нужно рассмотреть все возможные случаи для индексов i, j, k. Таких случаев будет 8.

1) Пусть $j = e$, $k = f$. Используя формулу (2.20), получим

$$B(\varepsilon_e, \varepsilon_f) = B^{ab}{}_c(\varepsilon_e)_b(\varepsilon_f)^c\varepsilon_a + B_{ab}{}^c(\varepsilon_e)^b(\varepsilon_f)_c\varepsilon^a.$$

Напомним введенные обозначения $(\varepsilon_e)_b \equiv (\varepsilon_e)^{\hat b}$, то есть $\hat b$ координата вектора ε_e. Так как вектор ε_e из первой половины базиса (индекс e принимает значения от 1 до n), а индекс $\hat b$ принимает значения от $n+1$ до $2n$, то $(\varepsilon_e)^{\hat b} = 0$. Аналогично получаем, что $(\varepsilon_f)_c = 0$. Итак, вектор $B(\varepsilon_e, \varepsilon_f) = 0$, а значит все его координаты в A-базисе также равны нулю. Откуда получаем $B^d_{ef} = B^{\hat d}_{ef} = 0$.

2) Пусть $j = \hat e$, $k = f$. Используя формулу (2.20), получим

$$B(\varepsilon_{\hat e}, \varepsilon_f) = B^{ab}{}_c(\varepsilon_{\hat e})_b(\varepsilon_f)^c\varepsilon_a + B_{ab}{}^c(\varepsilon_{\hat e})^b(\varepsilon_f)_c\varepsilon^a = B^{ab}{}_c\delta^e_b\delta^c_f\varepsilon_a = B^{ae}{}_f\varepsilon_a.$$

Здесь обнулилась только вторая группа слагаемых по причинам аналогичным пункту 1). Тогда координаты вектора $B(\varepsilon_{\hat e}, \varepsilon_f)$ будут следующие $B^a_{\hat e f} = B^{ae}{}_f$, $B^{\hat a}_{\hat e f} = 0$.

Аналогичным образом можно показать, что у виртуального тензора есть еще одна группа ненулевых компонент в A-репере, а именно, $B^{\hat a}_{e\hat f} = B_{ae}{}^f$. Остальные компоненты равны нулю (покажите самостоятельно).

Итак, ненулевые компоненты виртуального тензора B в A-репере:

$$B^a_{\hat b c} = B^{ab}{}_c; \quad B^{\hat a}_{b\hat c} = B_{ab}{}^c. \tag{2.22}$$

Заметим, что точно такой же результат можно получить, если использовать формулу (2.21) и обозначения (2.15), (2.18). Проведите вычисления самостоятельно.

7.4. Напомним, что на касательном пространстве $T_m(M)$, рассматриваемом как комплексное линейное пространство, определена эрмитова форма

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \langle X, Y\rangle + \sqrt{-1}\langle X, JY\rangle,\ X, Y \in T_m(M).$$

Лемма 2.2. *Произвольный вектор $\zeta \in T_m(M)$ может быть представлен в виде*

$$\zeta = \sum_{a=1}^{n}\langle\langle\zeta, e_a\rangle\rangle e_a.$$

Доказательство. По определению эрмитовой формы и комплексной структуры, задаваемой оператором комплексной структуры имеем

$$\sum_{a=1}^{n}\langle\langle\zeta, e_a\rangle\rangle e_a = \sum_{a=1}^{n}\langle\zeta, e_a\rangle e_a + \sqrt{-1}\sum_{a=1}^{n}\langle\zeta, Je_a\rangle e_a = \sum_{a=1}^{n}\langle\zeta, e_a\rangle e_a + \sum_{a=1}^{n}\langle\zeta, Je_a\rangle Je_a = \zeta.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в ортонормированном базисе (e_a, Je_a) (он ортонормирован относительно евклидовой структуры g_m) вещественные числа $\langle\zeta, e_a\rangle$ и $\langle\zeta, Je_a\rangle$ являются координатами вектора ζ в этом базисе. $\square$

Следом тензора T типа (2,1) назовем тензор $tr\,T$, который определяется формулой

$$(tr\,T)_m = -\frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}T(e_a, e_a),$$

где $(e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный относительно метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ базис касательного пространства $T_m(M)$, рассматриваемого как комплексное линейное пространство.

Назовем тензор T типа (2,1) *бесследным*, если его след равен нулю в каждой точке многообразия M.

Назовем тензор T типа (2,1) *примитивным*, если существует ковектор η, такой что

$$T(X, Y) = \langle\langle\eta, X\rangle\rangle Y - \langle\langle Y, X\rangle\rangle\eta.$$

Теорема 2.3. *Виртуальный тензор B почти эрмитова многообразия (M, J, g) в каждой точке многообразия M можно однозначно представить в виде суммы бесследного и примитивного тензора.*

Доказательство. Рассмотрим виртуальный тензор B, фиксируем точку $m \in M$ и обозначим для краткости той же буквой B значение виртуального тензора в точке m. Предположим, что тензор B представим в виде

$$B(X, Y) = B_0(X, Y) + \langle\langle\eta, X\rangle\rangle Y - \langle\langle Y, X\rangle\rangle\eta, \tag{2.23}$$

где B_0 – бесследный тензор. Найдем выражение для вектора η.

Вычислим след тензора B в равенстве (2.23).

$$\sum_{a=1}^{n}B(e_a, e_a) = \sum_{a=1}^{n}B_0(e_a, e_a) + \sum_{a=1}^{n}(\langle\langle\eta, e_a\rangle\rangle e_a - \langle\langle e_a, e_a\rangle\rangle\eta) = 0 + \eta - n\eta = (1-n)\eta.$$

Здесь мы воспользовались тем, что тензор B_0 является бесследным, леммой 2.2 и ортонормированностью базиса относительно эрмитовой метрики. Откуда получаем

$$\eta = \frac{1}{1-n}\sum_{a=1}^{n} B(e_a, e_a) \equiv tr\, B. \tag{2.24}$$

Нетрудно показать, что вектор η не зависит от выбора ортонормированного базиса. Это следует из того, что матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является унитарной. Так как виртуальный тензор антилинеен по одному и линеен по другому аргументу, элементы унитарной матрицы выносятся с одного аргумента по линейности, а с другого по антилинейности (комплексно сопряженным). Тогда получим произведение матрицы и комплексно сопряженной транспонированной матрицы. В силу унитарности это произведение равно единичной матрице. Проведите подробные вычисления самостоятельно.

Тензор B_0 определяется формулой

$$B_0(X, Y) = B(X, Y) - \langle\langle \eta, X\rangle\rangle Y + \langle\langle Y, X\rangle\rangle \eta, \tag{2.25}$$

где $\eta = tr\, B$. Непосредственная проверка показывает, что это бесследный тензор. Итак, если разложение виртуального тензора B в каждой точке m многообразия M существует, то оно бесследный и примитивный тензоры определяются соотношениями (2.24) и (2.25), а значит, они определены однозначно.

Чтобы доказать существование, зададим бесследный и примитивный тензоры формулами (2.24) и (2.25). Очевидно, что их сумма есть $B(X, Y)$. □

Замечание 2.1. Для дальнейших рассуждений нам понадобится так называемый *оператор кодифференцирования*. Пусть на гладком многообразии M фиксирована риманова метрика g. Обозначим определяемую ей связность через ∇. Рассмотрим отображение $\delta : \Lambda_r(M) \to \Lambda_{r-1}(M)$, задаваемое формулой

$$(\delta\Omega)_{i_1 \dots i_{r-1}} = g^{i_r k}\Omega_{i_1 \dots i_{r-1} i_r, k},$$

где $\Omega_{i_1 \dots i_{r-1} i_r, k}$ – компоненты ковариантного дифференциала формы Ω. Как мы знаем из курса тензорной алгебры, матрица (g^{ij}) является обратной к матрице (g_{ij}) компонент римановой метрики.

Заметим, что если взять ортонормированный относительно метрики g базис, то матрица (g_{ij}) будет единичной, а значит, и обратная ей матрица также будет единичной, то есть $g^{ij} = \delta^{ij}$. Тогда формула определяющая кодифференциал формы, примет вид

$$(\delta\Omega)_{i_1 \dots i_{r-1}} = \delta^{i_r k}\Omega_{i_1 \dots i_{r-1} i_r, k} = \sum_{k=1}^{2n} \Omega_{i_1 \dots i_{r-1} k, k}, \tag{2.26}$$

Это соотношение можно записать в почти инвариантном виде

$$(\delta\Omega)(X_1, \dots, X_{r-1}) = \sum_{k=1}^{2n} \nabla_{E_k}(\Omega)(X_1, \dots, X_{r-1}, E_k),$$

где $(E_1, \dots, E_{2n})$ – локальный ортонормированный базис модуля $\mathfrak{X}(M)$, $X_1, \dots, X_{r-1}$ – произвольные векторные поля на M. Если взять значение обеих частей этого равенства в точке $m \in M$, то получим

$$(\delta\Omega)_m(X_1, \dots, X_{r-1}) = \sum_{k=1}^{2n} \nabla_{e_k}(\Omega)(X_1, \dots, X_{r-1}, e_k) \tag{2.27}$$

Здесь уже $X_1, \dots, X_{r-1}$ – произвольные касательные векторы из $T_m(M)$, $(e_1, \dots, e_{2n})$ – произвольный ортонормированный базис касательного пространства $T_m(M)$ (относительно евклидовой структуры g_m – значение римановой метрики g, рассматриваемой как сечение векторного расслоения тензоров типа (2,0), в точке m). В правой части этого равенства также стоит значение ковариантного дифференциала формы Ω в точке m. Так как он записан в виде ковариантной производной, то писать букву m некуда и мы ее опустили.

Пусть $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – почти эрмитова структура на гладком многообразии M^{2n}. Напомним, что 2-форма $F(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ называется *келеровой формой*, а форма $\Omega(X, Y) = \langle X, JY\rangle$ называется *фундаментальной формой*. Очевидно, что $\Omega = -F$.

Определим 1-форму

$$\omega(X) = -\frac{1}{n-1}\delta F(JX) \equiv \frac{1}{n-1}\delta\Omega(JX),\ X \in \mathfrak{X}(M),$$

которая называется *формой Ли*. Двойственное ей векторное поле ξ называется *вектором Ли*. Двойственность векторного поля 1-форме означает, что $\omega(X) = g(X, \xi)$ для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Выясним, как вектор η из разложения виртуального тензора связан с вектором Ли. Так как вектор Ли связан с фундаментальной формой, а вектор η связан с виртуальным тензором, а значит, с ковариантным дифференциалом почти комплексной структуры, нам нужно установить формулу, связывающую ковариантные дифференциалы почти комплексной структуры и фундаментальной формы.

Применим оператор ковариантного дифференцирования ∇_X к определению фундаментальной формы: $\Omega(Y, Z) = g(Y, JZ)$ или (подготовка к дифференцированию)

$$C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(\Omega \otimes Y \otimes Z) = C^{(1)(2)(3)}_{(1)(2)(3)}(g \otimes Y \otimes J \otimes Z).$$

Получим (подробные вычисления проведите самостоятельно)

$$\nabla_X(\Omega)(Y, Z) = g(Y, \nabla_X(J)Z).$$

Используя полученную формулу, вычислим кодифференциал формы Ω. Согласно формуле (2.27) в каждой точке $m \in M$ имеем

$$(\delta\Omega)(Y) = \sum_{a=1}^{n} g(Y, \nabla_{e_a}(J)e_a) + \sum_{a=1}^{n} g(Y, \nabla_{Je_a}(J)(Je_a) = g(Y, \sum_{a=1}^{n} \nabla_{e_a}(J)e_a) + \nabla_{Je_a}(J)(Je_a)). \tag{2.28}$$

Здесь мы воспользовались тем, что RA-базис (e_a, Je_a) является ортонормированным относительно метрики g_m (см. замечание 1.9).

С другой стороны, используя формулу (2.21), получим

$$-JB(e_a, e_a) = B(Je_a, e_a) = \frac{1}{4}(\nabla_{e_a}(J)(J^2 e_a) - \nabla_{Je_a}(J)(Je_a)) = \frac{1}{4}(-\nabla_{e_a}(J)e_a - \nabla_{Je_a}(J)(Je_a)).$$

Просуммируем по a и учтем, что в силу замечания 1.9 базис (e_a) касательного пространства $T_m(M)$ (комплексное линейное пространство) является ортонормированным относительно эрмитовой метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$.

$$(1-n)Jtr\, B = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{n}(\nabla_{e_a}(J)e_a + \nabla_{Je_a}(J)(Je_a)).$$

Сравнивая полученный результат с (2.28), имеем

$$(\delta\Omega)(Y) = g(Y, 4(1-n)Jtr\, B) = 4(1-n)g(Y, J\eta).$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.24). Далее воспользуемся определением формы Ли и двойственного ей вектора Ли. Тогда левая часть последней цепочки равенств примет вид (вместо Y подставим JY)

$$(n-1)g(\xi, Y) = (n-1)\omega(JY) = 4(1-n)g(JY, J\eta) = 4(1-n)g(Y, \eta)$$

В силу невырожденности метрики g получим $\eta = -\frac{1}{4}\xi$.

Итак, для виртуального тензора почти эрмитовой структуры в каждой точке $m \in M$ получаем разложение

$$B(X, Y) = B_0(X, Y) + \frac{1}{4}(\langle\langle Y, X\rangle\rangle\xi - \langle\langle \xi, X\rangle\rangle Y), \tag{2.29}$$

где ξ – вектор Ли, B_0 – бесследный тензор. Так как это равенство верно для любой точки, то оно же задаст соотношение для соответствующих тензорных полей.

Замечание 2.2**.** Равенство (2.29) работает с объектами, определенными в точке, то есть с тензорами и касательными векторами. Так как оно верно для каждой точки многообразия M, объекты этого равенства можно рассматривать как векторные и тензорные поля.

Если обозначить примитивный тензор (тензорное поле) через B_1, то для виртуального тензора получим разложение на бесследный и примитивный тензоры (тензорные поля):

$$B = B_0 + B_1.$$

Нетрудно показать, что такое разложение определено однозначно. Мы будем пользоваться этим разложением для классификации почти эрмитовых структур, полагая $B_0 = 0$ или $B_1 = 0$. Запишем эти соотношения в A-реперах.

Начнем с условия $B_0 = 0$, то есть (см. (2.29)) виртуальный тензор является примитивным тензором, то есть

$$B(X, Y) = \frac{1}{4}(\langle\langle Y, X\rangle\rangle\xi - \langle\langle \xi, X\rangle\rangle Y). \tag{2.30}$$

Чтобы записать это соотношение в компонентах, мы должны, во-первых, взять значение тензорных полей, входящих в это равенство, в точке m и, во-вторых, подставить вместо аргументов вектора A-базиса. Второе пока мы сделать не сможем, так как эта формула работает с комплексными векторами из $T_m(M)$, а нужна формула, работающая с векторами комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$. Для перехода к нужной формуле вспомним, что эрмитова форма $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ определялась следующим образом

$$\langle\langle X,Y\rangle\rangle = g(X,Y)+\sqrt{-1}g(X,JY),\ X,Y\in T_m(M),$$

а умножение на мнимую единицу в $T_m(M)$ определялось как $\sqrt{-1}X = JX$. Тогда равенство (2.30) примет вид

$$B(X,Y)=\frac{1}{4}(g(Y,X)\xi+g(Y,JX)J\xi-g(\xi,X)Y-g(\xi,JX)JY).$$

Это равенство работает с векторами касательного пространства $T_m(M)$, рассматриваемого как вещественное векторное пространство. В этом равенстве мы можем перейти к комплексификации всех входящих в него тензоров и подставить вместо аргументов векторы A-репера. Для сокращения записи мы не будем писать над тензорами знак комплексификации. Рассмотрим возможные случаи для векторов X и Y.

1. Пусть $X=\varepsilon_{\hat{b}}$, $Y=\varepsilon_c$. Тогда

$$B(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c)=\frac{1}{4}(g(\varepsilon_c,\varepsilon_{\hat{b}})\xi+g(\varepsilon_c,J\varepsilon_{\hat{b}})J\xi-g(\xi,\varepsilon_{\hat{b}})\varepsilon_c-g(\xi,J\varepsilon_{\hat{b}})J\varepsilon_c.$$

   Далее, воспользуемся тем, что вектор ε_c является собственным вектором J, отвечающим собственному значению $\sqrt{-1}$, а вектор $\varepsilon_{\hat{b}}$ – собственным вектором, отвечающим собственному значению $-\sqrt{-1}$, то есть $J\varepsilon_c=\sqrt{-1}\varepsilon_c$ и $J\varepsilon_{\hat{b}}=-\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{b}}$. Так как $B(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_c)$ является вектором комплексификации $T_m^{\mathbb{C}}(M)$, его можно разложить по A-базису. Коэффициентами разложения будут компоненты виртуального тензора. Тогда

$$\begin{aligned}B^a_{\hat{b}c}\varepsilon_a+B^{\hat{a}}_{\hat{b}c}\varepsilon_{\hat{a}}&=\frac{1}{4}(\delta^b_c(\xi^a\varepsilon_a+\xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}})-\sqrt{-1}\delta^b_cJ(\xi^a\varepsilon_a+\xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}})-g(\xi^a\varepsilon_a+\xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}},\varepsilon_{\hat{b}})\varepsilon_c+\sqrt{-1}g(\xi^a\varepsilon_a+\xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}},\varepsilon_{\hat{b}})\sqrt{-1}\varepsilon_c))=\\&=\frac{1}{4}(\delta^b_c\xi^a\varepsilon_a+\delta^b_c\xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}+\delta^b_c\xi^a\varepsilon_a-\delta^b_c\xi^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}-\xi^b\varepsilon_c-\xi^b\varepsilon_c)=\frac{1}{2}(\delta^b_c\xi^a\varepsilon_a-\xi^b\delta^a_c\varepsilon_a)=\xi^{[a}\delta^{b]}_c\varepsilon_a.\end{aligned}$$

   Так как $B^{\hat{a}}_{\hat{b}c}=0$ и векторы A-базиса линейно независимы, получим

$$B^{ab}{}_c=\xi^{[a}\delta^{b]}_c. \tag{2.31}$$

2. Аналогично предыдущему пункту покажите, что при $X=\varepsilon_b$, $Y=\varepsilon_{\hat{c}}$ получим комплексно сопряженное соотношение, то есть

$$B_{ab}{}^c=\xi_{[a}\delta^c_{b]},$$

   где $\xi_a=\xi^{\hat{a}}$ – обозначение.

3. Все остальные (еще два) возможные значения X и Y дадут тождества вида $0=0$. Проверьте это самостоятельно.

Итак, мы показали, что $B_0=0$ тогда и только тогда, когда виртуальный тензор B примитивен, что равносильно выполнению тождества (2.31) на пространстве расслоения A-реперов. Заметим, что тождество из второго пункта получается из тождества (2.31) применение операции комплексного сопряжения.

Теперь рассмотрим случай, когда $B_1=0$, то есть виртуальный тензор является бесследным, то есть $tr\,B=0$. По определению следа имеем $\sum_{a=1}^n B(e_a,e_a)=0$ в каждой точке $m\in M$, где (e_a) – ортонормированный относительно эрмитовой метрики $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ базис комплексного векторного пространства $T_m(M)$. Нам опять нужно перейти к комплексификации. Так как вектор e_a можно рассматривать как вектор комплексификации вида $1\cdot e_a$, то на виртуальный тензор мы можем написать значок комплексификации. Далее, так как по определению A-базиса (точнее, модифицированного A-базиса замечание 1.10)

$$\varepsilon_a=\sqrt{2}\sigma(e_a)=\tfrac{\sqrt{2}}{2}(e_a-\sqrt{-1}Je_a);\quad \varepsilon_{\hat{a}}=\sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a)=\tfrac{\sqrt{2}}{2}(e_a+\sqrt{-1}Je_a),$$

складывая эти равенства, получим

$$e_a=\sqrt{2}(\varepsilon_a+\varepsilon_{\hat{a}}).$$

Подставим это равенство в $\sum_{a=1}^n B(e_a,e_a)=0$ и воспользуемся линейностью комплексификации виртуального тензора и тем, что все его компоненты кроме $B^a_{\hat{b}c}=B^{ab}{}_c$ и $B^{\hat{a}}_{b\hat{c}}=B_{ab}{}^c$ равны нулю.

$$B^i_{\hat{a}a}\varepsilon_i+B^i_{a\hat{a}}\varepsilon_i=0\quad\Leftrightarrow\quad B^b_{\hat{a}a}\varepsilon_b+B^{\hat{b}}_{a\hat{a}}\varepsilon_{\hat{b}}=0$$

В силу линейной независимости векторов A-базиса получим

$$B^{b}_{\hat{a}a} \equiv B^{ba}{}_{a} = 0; \quad B^{\hat{b}}_{a\hat{a}} \equiv B_{ba}{}^{a} = 0.$$

Полученная пара соотношений является комплексно сопряженной. Поэтому мы получаем, что $B_1 = 0$ тогда и только тогда, когда B является бесследным тензором, то есть выполняется следующее равенство на пространстве расслоения A-реперов

$$B^{ba}{}_{a} = 0.$$

§2.8. Структурные тензоры.

8.1. Аналогично случаю виртуального тензора можно рассмотреть два отображения $\tilde{C} : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ и $C : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, заданные формулами

$$\tilde{C}(X,Y) = C^{abc}X_bY_c\varepsilon_a + C_{abc}X^bY^c\varepsilon^a; \quad C(X,Y) = B^{abc}X_bY_c\varepsilon_a + B_{abc}X^bY^c\varepsilon^a \tag{2.32}$$

и показать, что они задают тензорные поля типа (2,1). Их инвариантная запись будет иметь вид

$$\tilde{C}(X,Y) = -\frac{1}{4}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX)); \tag{2.33}$$
$$C(X,Y) = -\frac{1}{8}(\nabla_{JY}(J)X + \nabla_Y(J)(JX) - \nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY)).$$

Задача 2.6**.** Проведите соответствующие вычисления самостоятельно.

Тензорное поле C называется *структурным тензором почти эрмитовой структуры*. Второе тензорное поле специального названия не имеет, так как очень редко используется в изучении почти эрмитовых структур. Договоримся называть его *неальтернированным структурным тензором*.

Очевидно, что $C = Alt\,\tilde{C}$.

Задача 2.7**.** Докажите, что $\tilde{C}(JX,Y) = \tilde{C}(X,JY) = -J\tilde{C}(X,Y)$. Выведите из этого, что $C(JX,Y) = C(X,JY) = -JC(X,Y)$.

Задача 2.8**.** Докажите, что структурный тензор $\mathbb{C}$-антилинеен по каждому аргументу.

Задача 2.9**.** Докажите, что ненулевые компоненты неальтернированного структурного тензора в A-репере имеют вид

$$\tilde{C}^{\hat{a}}_{bc} = C_{abc}; \quad \tilde{C}^{a}_{\hat{b}\hat{c}} = C^{abc}.$$

Задача 2.10**.** Докажите, что ненулевые компоненты структурного тензора в A-репере имеют вид

$$C^{\hat{a}}_{bc} = B_{abc}; \quad C^{a}_{\hat{b}\hat{c}} = B^{abc}.$$

8.2. Определим тензорное поле $\mathscr{C}$ типа (3,0) на почти эрмитовом многообразии следующей формулой

$$\mathscr{C}(X,Y,Z) = \langle\langle X, \tilde{C}(Y,Z)\rangle\rangle.$$

Так как эрмитова форма линейна по первому и антилинейна по второму аргументу, а неальтернированный структурный тензор антилинеен по обоим аргументам, получим, что тензорное поле $\mathscr{C}$ будет линейно (и в вещественном и в комплексном смыслах) по обоим аргументам. Правда, в каждой точке $m \in M$ оно будет ставить в соответствие набору векторов из $T_m(M)$ комплексное число. Тогда, если отпустить точку, то отображение $\mathscr{C}$ будет ставить в соответствие "обычным"векторным полям X, Y, Z в соответствие комплекснозначную функцию. Несмотря на это, мы будем называть отображение $\mathscr{C}$ тензорным полем на многообразии M (или комплексным тензорным полем).

Найдем компоненты тензорного поля $\mathscr{C}$ в A-репере. Имеем

$$\mathscr{C}_{abc} = \langle\varepsilon_a, \tilde{C}(\varepsilon_b,\varepsilon_c)\rangle + \sqrt{-1}\langle\varepsilon_a, J\tilde{C}(\varepsilon_b,\varepsilon_c)\rangle = \langle\varepsilon_a, C_{fbc}\varepsilon_{\hat{f}}\rangle + \sqrt{-1}\langle\varepsilon_a, J(C_{fbc}\varepsilon_{\hat{f}})\rangle = C_{fbc}\delta^f_a + \sqrt{-1}C_{fbc}\langle\varepsilon_a, J\varepsilon_{\hat{f}}\rangle =$$
$$= C_{abc} + C_{abc} = 2C_{abc}.$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.32) и тем, что $\varepsilon_{\hat{f}}$ являются собственными векторами оператора комплексной структуры, отвечающими собственному значению $-\sqrt{-1}$.

Аналогично можно получить (проведите вычисления самостоятельно), что $\mathscr{C}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = 2C^{abc}$. Остальные компоненты тензорного поля $\mathscr{C}$ будут равны нулю (вычислите несколько штук).

Итак, мы имеем тензорное поле $\mathscr{C}$ типа (3,0). К нему можно применить оператор альтернирования точно так же как мы применяли его к обычным (вещественным) тензорным полям: шесть подстановок будут перемешивать аргументы и результаты (комплексные тензорные поля) будут складываться с учетом знака подстановки. Так как оператор альтернирования является проектором, то тензорное поле $\mathscr{C}$ может быть (однозначно) представлено в виде суммы двух тензорных полей C_0 и C_1, где

$$C_1 = Alt\,\mathscr{C}; \quad C_0 = \mathscr{C} - C_1.$$

По определению оператора альтернирования получаем, что тензорное поле C_1 будет кососимметрическим тензорным полем. Тензорное поле C_0 назовем *квазисимметричным тензорным полем.*

Для тензорного поля C_0 имеем

$$Alt\,C_0 = Alt\,\mathscr{C} - Alt\,C_1 = Alt\,\mathscr{C} - Alt\,Alt\,\mathscr{C} = Alt\,\mathscr{C} - Alt\,\mathscr{C} = 0.$$

Здесь мы воспользовались определением проектора $Alt^2 = Alt$. Таким образом, тензорное поле C_0 принадлежит ядру проектора Alt. Так как векторное пространство тензоров раскладывается в прямую сумму ядра и образа проектора (см. § 1.3.), тензорное поле $\mathscr{C}$ однозначно представимо в виде суммы кососимметрического и квазисимметрического тензорных полей.

8.3. Аналогично случаю виртуального тензора, нам нужно будет получить условия на пространстве расслоения A-реперов, которые равносильны условиям $C_0 = 0$ и $C_1 = 0$.

Пусть $C_0 = 0$, то есть тензорное поле $\mathscr{C}$ является кососимметрическим, то есть $\mathscr{C} = Alt\,\mathscr{C}$. Тогда для компонент $\mathscr{C}$ выполняются соотношения

$$C^{abc} = C^{[abc]}; \quad C_{abc} = C_{[abc]}, \tag{2.34}$$

для остальных компонент получаем тождества вида $0 = 0$. Заметим, что соотношения в (2.34) комплексно сопряжены, а значит, существенным является только одно из них (второе получается из него комплексным сопряжением). Поэтому мы будем работать только с первым соотношением. Таким образом, мы получили промежуточный результат: $C_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $C^{abc} = C^{[abc]}$. Это соотношение не удобно, так как в структурных уравнениях (2.16) и (2.17) почти эрмитовой структуры участвуют компоненты $\{B^{abc}\}$ структурного тензора, а не компоненты $\{C^{abc}\}$ неальтернированного структурного тензора. Поэтому покажем, что соотношение

$$C^{abc} = C^{[abc]} \quad \Leftrightarrow \quad B^{abc} = B^{[abc]}. \tag{2.35}$$

Доказательство. Пусть выполняется соотношение $C^{abc} = C^{[abc]}$. Тогда

$$B^{abc} = C^{a[bc]} = \frac{1}{2}(C^{abc} - C^{acb}) = \frac{1}{2}(C^{[abc]} - C^{[acb]}) = \frac{1}{2}(C^{[abc]} + C^{[abc]}) = C^{[a[bc]]} = B^{[abc]}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что после альтернации получается кососимметрическое тензорное поле, а значит, при перестановке любых двух аргументов знак меняется на противоположный. Также мы воспользовались тем, что внешняя альтернация "съедает"все внутренние альтернации, следовательно, $C^{[a[bc]]} = C^{[abc]}$.

Обратно, пусть выполняется $B^{abc} = B^{[abc]}$. Тогда с учетом предложения 2.3 получим

$$C^{abc} = B^{abc} + B^{bca} + B^{cba} = B^{[abc]} + B^{[bca]} + B^{[cba]} = B^{[abc]} + B^{[abc]} - B^{[abc]} = B^{[abc]} = C^{[a[bc]]} = C^{[abc]}.$$

Здесь мы опять воспользовались кососимметричностью альтернированного тензорного поля по любой паре индексов. □

Итак, мы получили окончательный результат. Условие $C_0 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда тензорное поле $\mathscr{C}$ является кососимметрическим, то есть $B^{abc} = B^{[abc]}$.

Задача 2.11**.** Покажем, что условие $B^{abc} = B^{[abc]}$ равносильно тому, что система функций $\{B^{abc}, B_{abc}\}$ (которая является компонентами структурного тензора в A-репере) кососимметрична по любой паре индексов.

Решение. Из определения системы функций $\{B^{abc}, B_{abc}\}$ (см. формулы (2.18)) следует, что они кососимметричны по последней паре индексов. Покажем, что они кососимметричны по первой паре индексов. Из соотношения $B^{abc} = B^{[abc]}$ получаем

$$B^{abc} = B^{[abc]} = -B^{[bac]} = -B^{bac}.$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью альтернированного тензора по любой паре индексов. □

Рассмотрим условие $C_1 = 0$, то есть $\mathscr{C} = C_0$, то есть $\mathscr{C}$ принадлежит ядру проектора Alt, то есть $Alt\,\mathscr{C} = 0$. В компонентах это условие запишется в виде

$$C^{[abc]} = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что все компоненты $\mathscr{C}$ равны нулю, кроме компонент C^{abc} и C_{abc}. Но эти компоненты комплексно сопряжены, следовательно, из записанного соотношения следует, что комплексно сопряженных функций выполняется аналогичное соотношение и его можно не писать.

Аналогично случаю $C_0 = 0$ докажите, что условие $C^{[abc]} = 0$ равносильно условию $B^{[abc]} = 0$.

§2.9. Классификация Грея-Хервеллы почти эрмитовых многообразий.

Изучение почти эрмитовых структур в общем виде крайне сложно и практически не дает конкретной геометрической информации о таких структурах. Конкретная информация получается, если накладывать на почти эрмитову структуру какие-либо дополнительные требования. Классическим примером такого требования является условие $\nabla J = 0$ в римановой связности метрики g. Соответствующие почти эрмитовы структуры называются *келеровыми структурами.* Многообразия с такими структурами по названием А-пространств были введены П.А. Широковым (Казань) в начале XX века и чуть позже Е.Келером (E.Kähler). Позднее такие многообразия стали называть келеровыми многообразиями. Существует много примеров келеровых многообразий и, с другой стороны, их геометрия очень глубоко разработана. Геометрия келеровых многообразий стоит на стыке таких наук как топология, алгебраическая геометрия, глобальная теория эллиптических операторов, теоретическая физика. Несмотря на глубокую разработанность этой тематики, интерес к ней не ослабевает и в настоящее время. Такое богатство свойств навело на мысль ослабить свойство келеровости, что привело к открытию новых классов почти эрмитовых многообразий. Изучение вновь введенных классов привело к необходимости провести классификацию почти эрмитовых структур. Это было сделано в 1980 году А.Греем и Л.Хервеллой. Они показали, что все почти эрмитовы структуры можно разделить на 16 классов. Тождества, полученные А.Греем и Л.Хервеллой, достаточно громоздки. Мы приведем их без доказательства, а затем, покажем, что на пространстве присоединенной G-структуры эти тождества существенно упрощаются.

Тогда для $2n \geq 6$ получим

Класс	Определяющее тождество
$\{0\} \equiv \mathcal{K}$	$\nabla F = 0$ или $\nabla J = 0$
$W_1 \equiv \mathcal{NK}$	$\nabla_X(F)(X,Y) = 0$ или $3\nabla F = dF$ или $\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0$
$W_2 \equiv \mathcal{AK}$	$dF = 0$ или $d\Omega = 0$
$W_3 \equiv \mathcal{SK} \cap \mathcal{H}$	$\delta F = N = 0$ или $\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = \delta F = 0$
W_4	$\nabla_X(F)(Y,Z) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X,Y\rangle \delta F(Z) - \langle X,Z\rangle \delta F(Y) - \langle X,JY\rangle \delta F(JZ) + \langle X,JZ\rangle \delta F(JY))$
$W_1 \oplus W_2 = \mathcal{QK}$	$\nabla_X(F)(Y,Z) + \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0$
$W_3 \oplus W_4 = \mathcal{H}$	$N = 0$ или $\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0$
$W_1 \oplus W_3$	$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = \delta F = 0$
$W_2 \oplus W_4$	$dF = F \wedge \omega$ или $Alt_{XYZ}(\nabla_X(F)(Y,Z) - \frac{1}{n-1}F(X,Y)\delta F(JZ)) = 0$
$W_1 \oplus W_4 = VG$	$\nabla_X(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X,X\rangle \delta F(Y) - \langle X,Y\rangle \delta F(X) - \langle JX,Y\rangle \delta F(JX))$
$W_2 \oplus W_3$	$Alt_{XYZ}(\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z)) = \delta F = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = \mathcal{SK}$	$\delta F = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$\nabla_X(F)(Y,Z) + \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = \frac{-1}{n-1}(\langle X,Y\rangle \delta F(Z) - \langle X,Z\rangle \delta F(Y) - \langle X,JY\rangle \delta F(JZ) + \langle X,JZ\rangle \delta F(JY))$
$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4 = G_1$	$\nabla_X(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(F)(JX,Y) = 0$ Ë«Ë $\langle N(X,Y),X\rangle = 0$
$W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 = G_2$	$Alt_{XYZ}(\nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z)) = 0$ или $Alt_{XYZ}\langle N(X,Y),JZ\rangle = 0$
W	No condition

Проведем классификацию почти эрмитовых многообразий из других соображений, но получим те же самые классы.

Пусть $m \in M$ – произвольная точка $2n$-мерного почти эрмитова многообразия M, на котором фиксирована почти эрмитова структура $(J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Из формул (2.21) и (2.33) следует, что

$$B(X,Y) - \tilde{C}(X,Y) = \frac{1}{2}\nabla_Y(J)(JX)$$

или, воспользовавшись свойством оператора почти комплексной структуры, получим

$$\frac{1}{2}(-J\nabla_Y(J)X) = B(X,Y) - \tilde{C}(X,Y)$$

или, подействовав на обе части эндоморфизмом J, получим

$$(\nabla J)(X,Y) \equiv \nabla_Y(J)X = 2JB(X,Y) - 2J\tilde{C}(X,Y).$$

Так как это верно для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, получим

$$\nabla J = 2JB - 2J\tilde{C}.$$

Структурный тензор B можно разложить на сумму бесследного B_0 и примитивного B_1, а неальтернированный структурный тензор (а точнее, тензорное поле, полученное из неальтернированного структурного тензора опусканием верхнего индекса) можно разложить в сумму кососимметрического C_1 и квазисимметричного тензора C_0.

Проведем классификацию почти эрмитовых структур по принципу "обнуления"тензорных полей B_0, B_1, C_0, C_1. Получим следующую таблицу:

B_0	0	0	0	0	-	0	0	-	0	-	-	0	-	-	-	-
B_1	0	0	0	-	0	0	-	0	-	0	-	-	0	-	-	-
C_0	0	0	-	0	0	-	0	0	-	-	0	-	-	0	-	-
C_1	0	-	0	0	0	-	-	-	0	0	0	-	-	-	0	-

Оказывается, такая классификация совпадает с классификацией Грея-Хервеллы, но имеет более простые критерии, которые легко получаются благодаря результатам § 2.7. и § 2.8.. Их мы запишем в следующей таблице.

Принятые названия структуры	Класс Грея-Хервеллы	Критерий	Условие в A-репере
Келерова	$\mathcal{K} = \{0\}$	$B = 0$, $\tilde{C} = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$, $B^{abc} = 0$
Приближенно келерова	$\mathcal{NK} = W_1$	$B = 0$, $C_0 = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = B^{abc}$
Почти келерова	$\mathcal{AK} = W_2$	$B = 0$, $C_1 = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = 0$
–	$\mathcal{SK} \cap \mathcal{H} = W_3$	$B_1 = 0$, $\tilde{C} = 0$	$B^{ac}{}_c = 0$, $B^{abc} = 0$
–	W_4	$B_0 = 0$, $\tilde{C} = 0$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta^{b]}_c$
Квазикелерова	$\mathcal{QK} = W_1 \oplus W_2$	$B = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$
–	$W_1 \oplus W_3$	$B_1 = 0$, $C_0 = 0$	$B^{ac}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = B^{abc}$
Структура Вайсмана-Грея	$VG = W_1 \oplus W_4$	$B_0 = 0$, $C_0 = 0$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta^{b]}_c$, $B^{[abc]} = B^{abc}$
–	$W_2 \oplus W_3$	$B_1 = 0$, $C_1 = 0$	$B^{ac}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = 0$
–	$W_2 \oplus W_4$	$B_0 = 0$, $C_1 = 0$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta^{b]}_c$, $B^{[abc]} = 0$
Эрмитова	$\mathcal{H} = W_3 \oplus W_4$	$\tilde{C} = 0$	$B^{abc} = 0$
G_2-структура	$G_2 = W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	$C_1 = 0$	$B^{[abc]} = 0$
G_1-структура	$G_1 = W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$	$C_0 = 0$	$B^{[abc]} = B^{abc}$
–	$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$B_0 = 0$	$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta^{b]}_c$
Семикелерова	$\mathcal{SK} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$	$B_1 = 0$	$B^{ac}{}_c = 0$
Почти эрмитова	$AH = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	–	–

Пример 2.4. Докажем, что класс $W_1 \oplus W_4$ (многообразия Вайсмана-Грея) один и тот же в обеих классификациях. Для этого нужно либо записать условия, заданные на пространстве расслоения A-реперов, в инвариантном виде, либо записать инвариантное условие из классификации Грея-Хервеллы на пространстве расслоения A-реперов. Мы пойдем вторым путем.

Напомним, что в классификации Грея-Хервеллы класс многообразий Вайсмана-Грея задается следующим тождеством

$$\nabla_X(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X, X\rangle \delta F(Y) - \langle X, Y\rangle \delta F(X) - \langle JX, Y\rangle \delta F(JX)), \tag{2.36}$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля. Здесь $F(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ – келерова форма.

Пока перейти к компонентам в тождестве (2.36) мы не можем. Нужно сделать так, чтобы все аргументы были различны, а у нас пока два раза встречается X. Из-за этого при переходе к компонентам мы получили бы тождества только для компонент с одинаковыми индексами, которые работают с аргументами, стоящими на месте X. Для получения большей информации (тождеств на компоненты с различными индексами) мы должны провести так называемый *процесс поляризации тождества* (2.36). Так как тождество (2.36) верно для любых аргументов X, оно верно для аргумента $X + Z$, где X, Z – произвольные векторные поля на многообразии M. Тогда мы получаем новое тождество

$$\nabla_{X+Z}(F)(X+Z,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(\langle X+Z, X+Z\rangle \delta F(Y) - \langle X+Z, Y\rangle \delta F(X+Z) - \\ - \langle J(X+Z), Y\rangle \delta F(J(X+Z)))$$

Воспользуемся линейностью тензорных полей и тождеством (2.36)

$$\nabla_X(F)(Z,Y) + \nabla_Z(F)(X,Y) = \frac{-1}{2(n-1)}(2\langle X, Z\rangle \delta F(Y) - \langle X, Y\rangle \delta F(Z) - \langle Z, Y\rangle \delta F(X) - \\ - \langle JX, Y\rangle \delta F(JZ) - \langle JZ, Y\rangle \delta F(JX)). \tag{2.37}$$

Теперь мы можем перейти к компонентам в A-репере. Пусть $p = (m, \varepsilon_i)$ – произвольный A-репер. Берем значения всех тензорных полей, входящих в тождество (2.37) и подставляем векторы $X_m = \varepsilon_i$, $Y_m = \varepsilon_j$, $Z_m = \varepsilon_k$. Отметим, что у тензоров мы опять для краткости не пишем (но подразумеваем) точку m.

$$\nabla_{\varepsilon_i}(F)(\varepsilon_k, \varepsilon_j) + \nabla_{\varepsilon_k}(F)(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \frac{-1}{2(n-1)}(2\langle\varepsilon_i, \varepsilon_k\rangle\delta F(\varepsilon_j) - \langle\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle\delta F(\varepsilon_k) - \langle\varepsilon_k, \varepsilon_j\rangle\delta F(\varepsilon_i) -$$
$$- \langle J\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle\delta F(J\varepsilon_k) - \langle J\varepsilon_k, \varepsilon_j\rangle\delta F(J\varepsilon_i)).$$

Применяем определение компонент тензора

$$F_{kj,i} + F_{ij,k} = \frac{-1}{2(n-1)}(2g_{ik}(\delta F)_j - g_{ij}(\delta F)_k - g_{kj}(\delta F)_i - g_{\ell j}J_i^\ell(\delta F)_p J_k^p - g_{\ell j}J_k^\ell(\delta F)_p J_i^p. \tag{2.38}$$

Выразим ковариантный дифференциал келеровой формы F через ковариантный дифференциал почти комплексной структуры J. По определению имеем $F(X,Y) = g(JX,Y)$ или $C^{(1)(2)}_{(1)(2)}(F \otimes X \otimes Y) = C^{(1)(2)(3)}_{(1)(2)(3)}(g \otimes J \otimes X \otimes Y)$. Откуда, применяя оператор ковариантного дифференцирования ∇_Z получим $\nabla(F)(X,Y,Z) = g((\nabla J)(X,Z),Y)$. В компонентах это тождество примет вид (подставьте вектора A-базиса самостоятельно)

$$F_{ij,k} = g_{\ell j}J^\ell_{i,k}. \tag{2.39}$$

Тогда кодифференциал келеровой формы F будет вычисляться следующим образом (см. (2.1))

$$(\delta F)_i = g^{jk}g_{\ell j}J^\ell_{i,k} = \delta^k_\ell J^\ell_{i,k} = J^k_{i,k}. \tag{2.40}$$

Здесь мы воспользовались тем, что матрицы (g^{ij}) и (g_{ij}) являются взаимно обратными.

Подставим соотношения (2.39) и (2.40) в (2.38)

$$g_{\ell j}J^\ell_{k,i} + g_{\ell j}J^\ell_{i,k} = \frac{-1}{2(n-1)}\left(2g_{ik}J^\ell_{j,\ell} - g_{ij}J^\ell_{k,\ell} - g_{kj}J^\ell_{i,\ell} + g_{i\ell}J^\ell_j J^m_{t,m}J^t_k + g_{k\ell}J^\ell_j J^m_{t,m}J^t_i\right) \tag{2.41}$$

В полученном тождестве три свободных индекса. Они могут бегать по первой части A-базиса и по второй. Рассмотрим все возможные случаи (их будет 8 штук).

1. Пусть $i = a$, $j = b$, $k = c$.

$$g_{\ell b}J^\ell_{c,a} + g_{\ell b}J^\ell_{a,c} = \frac{-1}{2(n-1)}\left(2g_{ac}J^\ell_{b,\ell} - g_{ab}J^\ell_{c,\ell} - g_{cb}J^\ell_{a,\ell} + g_{a\ell}J^\ell_b J^m_{t,m}J^t_c + g_{c\ell}J^\ell_b J^m_{t,m}J^t_a\right)$$

Напомним, что среди компонент достаточно много нулей. Как мы получили выше

$$g_{ab} = g_{\hat{a}\hat{b}} = 0; \quad J^a_{\hat{b}} = J^{\hat{a}}_b = 0; \quad J^a_{b,k} = J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0.$$

Расписывая суммы "крышка – без крышки"сразу будем учитывать эти нули и не писать их.

$$g_{\hat{d}b}J^{\hat{d}}_{c,a} + g_{\hat{d}b}J^{\hat{d}}_{a,c} = \frac{-1}{2(n-1)}(0 - 0 - 0 + 0 + 0).$$

Откуда получаем,

$$J^{\hat{b}}_{a,c} + J^{\hat{b}}_{c,a} = 0. \tag{2.42}$$

С учетом обозначений (2.18) получаем $C_{bac} = -C_{bca}$, то есть $B_{bac} = C_{b[ac]} = C_{bac}$ и, следовательно, компоненты структурного тензора будут кососимметричны по любой паре индексов. Легко видеть, что верно и обратное утверждение, то есть если компоненты структурного тензора кососимметричны по любой паре индексов, то будут выполняться (2.42). Как мы знаем (см. задачу 2.11) кососимметричность структурного тензора равносильна условию $B_{[abc]} = B_{abc}$. Итак, в этом случае мы получаем условие $B_{[abc]} = B_{abc}$, которое присутствует в определении многообразия Вайсмана-Грея второй классификации.

2. Пусть $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$. Тогда из (2.41) получим (опять мы не пишем заведомо нулевые слагаемые)

$$g_{\hat{d}b}J^{\hat{d}}_{c,\hat{a}} = \frac{-1}{2(n-1)}\left(2g_{\hat{a}c}J^{\hat{d}}_{b,\hat{d}} - g_{\hat{a}b}J^{\hat{d}}_{c,\hat{d}} - 0 + g_{\hat{a}d}J^d_b J^{\hat{f}}_{e,\hat{f}}J^e_c + 0\right)$$
$$J^{\hat{b}}_{c,\hat{a}} = \frac{-1}{2(n-1)}\left(2J^{\hat{d}}_{b,\hat{d}}\delta^a_c - \delta^a_b J^{\hat{d}}_{c,\hat{d}} - \delta^a_b J^{\hat{f}}_{c,\hat{f}}\right).$$

Для получения последнего равенства мы воспользовались тем, что $J^d_b = \sqrt{-1}\delta^d_b$.

С учетом обозначений (2.18) получим

$$B_{bc}{}^{a} = \frac{-1}{n-1}\left(B_{db}{}^{d}\delta^{a}_{c} - B_{dc}{}^{d}\delta^{a}_{b}\right). \tag{2.43}$$

Это соотношение уже похоже на то, которое нам нужно получить. Осталось только выразить свертку виртуального тензора через компоненты вектора Ли. Напомним, что вектор Ли ξ – это векторное поле двойственное форме Ли

$$\alpha = \frac{-1}{n-1}\delta F \circ J, \tag{2.44}$$

то есть задается формулой

$$g(X,\xi) = \frac{-1}{n-1}\delta F \circ J(X),\ X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.45}$$

Запишем это равенство в компонентах на пространстве расслоения A-реперов. Для этого нужно взять значения всех тензорных полей в точке $m \in M$ и вместо аргумента X подставить вектор A-базиса.

$$g_{ij}\xi^{j} = \frac{-1}{n-1}(\delta F)_{j}J^{j}_{i} = \frac{-1}{n-1}J^{k}_{j,k}J^{j}_{i}.$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.40). Для полученного равенства возможны два случая: $i = a$ и $i = \hat{a}$ (рассмотрите самостоятельно). Пусть $i = a$. Тогда (мы опять не пишем заведомо нулевые слагаемые)

$$g_{a\hat{b}}\xi^{\hat{b}} = \frac{-1}{n-1}J^{\hat{c}}_{b,\hat{c}}J^{b}_{a}$$

Договоримся обозначать $\xi^{\hat{a}} = \xi_{a}$. Тогда последнее соотношение примет вид

$$\delta^{b}_{a}\xi_{b} = \frac{-1}{n-1}(-2\sqrt{-1})B_{cb}{}^{c}\sqrt{-1}\delta^{b}_{a}.$$

Здесь мы воспользовались обозначениями (2.18). Окончательно получим

$$\xi_{b} = \frac{-2}{n-1}B_{cb}{}^{c}. \tag{2.46}$$

Выразим из этого равенства свертку виртуального тензора и подставим в (2.43).

$$B_{bc}{}^{a} = \frac{1}{2}(\xi_{b}\delta^{a}_{c} - \xi_{c}\delta^{a}_{b}).$$

Это соотношение полностью совпадает с соотношением, задающим многообразия Вайсмана-Грея во второй классификации.

3. Остальные шесть возможных значений индексов дадут либо тождества вида $0 = 0$, либо комплексно сопряженные выражения. Рассмотрите несколько случаев самостоятельно.

Задача 2.12. Докажите, что остальные классы почти эрмитовых многообразий обеих классификаций совпадают.

§2.10. Вторая группа структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея.

Пусть $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – структура Вайсмана-Грея на гладком многообразии M размерности $2n > 2$. Как мы доказали в § 2.9. почти эрмитово многообразие является многообразием Вайсмана-Грея тогда и только тогда, когда структурный тензор кососимметричен по любой паре индексов, а виртуальный тензор – примитивен, то есть

$$B_{ab}{}^{c} = \xi_{[a}\delta^{c}_{b]};\quad B_{[abc]} = B_{abc}$$

и формулы комплексно сопряженные.

Рассмотрим первую группу структурных уравнений почти эрмитова многообразия (см. § 2.6.). Для многообразия Вайсмана-Грея они имеют тот же вид

$$\begin{aligned} d\omega^{a} &= -\theta^{a}_{b}\wedge\omega^{b} + B^{abc}\omega_{b}\wedge\omega_{c} + B^{ab}{}_{c}\omega^{c}\wedge\omega_{b}; \\ d\omega_{a} &= \theta^{b}_{a}\wedge\omega_{b} + B_{abc}\omega^{b}\wedge\omega^{c} + B_{ab}{}^{c}\omega_{c}\wedge\omega^{b}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

где

$$B_{ab}{}^{c} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}};\quad B_{abc} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]};\quad B^{ab}{}_{c} = -\tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{a}_{\hat{b},c};\quad B^{abc} = \tfrac{\sqrt{-1}}{2}J^{a}_{[\hat{b},\hat{c}]},$$

$\{\theta^{a}_{b}\}$ – тензорные компоненты формы римановой связности метрики g.

Выразим внешние дифференциалы форм θ_b^a через формы θ_b^a и ω^c. Процесс получения этих выражений называется *процедурой дифференциального продолжения* первой группы структурных уравнений, а выражения, которые мы получим, называются *второй группой структурных уравнений* многообразия Вайсмана-Грея.

Рассмотрим первое равенство из первой группы структурных уравнений и продифференцируем его внешним образом. Воспользуемся при этом свойствами оператора внешнего дифференцирования (см. первую часть курса Многомерная дифференциальная геометрия):

$$d^2 = 0; \quad d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta,\, \omega \in \Lambda_r(M).$$

Получим

$$0 = -d\theta_b^a \wedge \omega^b + \theta_b^a \wedge d\omega^b + dB^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c + B^{abc} d\omega_b \wedge \omega_c - B^{abc} \omega_b \wedge d\omega_c + dB^{ab}{}_c \wedge \omega^c \wedge \omega_b + B^{ab}{}_c d\omega^c \wedge \omega_b - B^{ab}{}_c \omega^c \wedge d\omega_b$$

Подставим вместо внешних дифференциалов одноиндексных омег их выражения из первой группы структурных уравнений.

$$\begin{gathered}
0 = -d\theta_b^a \wedge \omega^b + \theta_b^a \wedge (-\theta_c^b \wedge \omega^c + B^{bcd} \omega_c \wedge \omega_d + B^{bc}{}_d \omega^d \wedge \omega_c) + dB^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c + B^{abc} (\theta_b^d \wedge \omega_d + B_{bdf} \omega^d \wedge \omega^f + B_{bd}{}^f \omega_f \wedge \omega^d) \wedge \omega_c - \\
- B^{abc} \omega_b \wedge (\theta_c^d \wedge \omega_d + B_{cdf} \omega^d \wedge \omega^f + B_{cd}{}^f \omega_f \wedge \omega^d) + dB^{ab}{}_c \wedge \omega^c \wedge \omega_b + B^{ab}{}_c (-\theta_d^c \wedge \omega^d + B^{cdf} \omega_d \wedge \omega_f + B^{cd}{}_f \omega^f \wedge \omega_d) \wedge \omega_b - \\
- B^{ab}{}_c \omega^c \wedge (\theta_b^d \wedge \omega_d + B_{bdf} \omega^d \wedge \omega^f + B_{bd}{}^f \omega_f \wedge \omega^d \quad (2.48)
\end{gathered}$$

Сгруппируем слагаемые, используя переобозначения индексов суммирования, и введем обозначения следующим образом

$$\begin{gathered}
dB^{abc} + B^{dbc}\theta_d^a + B^{adc}\theta_d^b + B^{abd}\theta_d^c = \Delta B^{abc}; \quad (2.49) \\
dB^{ab}{}_c + B^{db}{}_c\theta_d^a + B^{ad}{}_c\theta_d^b - B^{ab}{}_d\theta_c^d = \Delta B^{ab}{}_c; \\
d\theta_b^a + \theta_c^a \wedge \theta_b^c = \Delta\theta_b^a;
\end{gathered}$$

и подставим в (2.48).

$$\begin{gathered}
-\Delta\theta_b^a \wedge \omega^b + \Delta B^{abc} \wedge \omega_b \wedge \omega_c + \Delta B^{ab}{}_c \wedge \omega^c \wedge \omega_b + 2B^{adc} B_{dbf} \omega^f \wedge \omega_c \wedge \omega^b - 2B^{adc} B_{cb}{}^f \omega_d \wedge f \wedge \omega^b + B^{af}{}_c B^{cd}{}_b \omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega^b - \\
- B^{af}{}_c B_{fdb} \omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega^b - B^{ad}{}_c B_{db}{}^f \omega^c \wedge \omega_f \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c B^{cdf} \omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega_b = 0 \quad (2.50)
\end{gathered}$$

Выражения ΔB^{abc} и $\Delta B^{ab}{}_c$ являются 1-формами на пространстве расслоения A-реперов, а $\Delta\theta_b^a$ является 2-формой на этом же пространстве, следовательно, они раскладываются по соответствующим базисам. Для 1-форм это базис $(\theta_b^a, \omega^a, \omega_b)$. Обозначим коэффициенты разложения следующим образом.

$$\begin{gathered}
\Delta B^{abc} = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d + B^{abc}{}_h{}^d\theta_d^h; \\
\Delta B^{ab}{}_c = B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d\omega_d + B^{ab}{}_{ch}{}^d\theta_d^h.
\end{gathered}$$

Для 2-форм $\Delta\theta_b^a$ мы поступим немного по-другому. 2-форма является частным случаем тензорного поля типа (2,0). Если в модуле векторных полей фиксировать какой-либо базис, то в модуле тензорных полей типа (2,0) существует так называемый канонический базис (см. пример 1.4 из первой части курса Многомерная дифференциальная геометрия). Он получается как всевозможные тензорные произведения 1-форм дуального базиса. В нашем случае он имеет вид

$$\{\theta_b^a \otimes \theta_d^c, \theta_b^a \otimes \omega^c, \omega^c \otimes \theta_b^a, \theta_b^a \otimes \omega_c, \omega_c \otimes \theta_b^a, \omega^c \otimes \omega^d, \omega^c \otimes \omega_d, \omega_d \otimes \omega^c, \omega_c \otimes \omega_d\}.$$

Разложим 2-формы $\Delta\theta_b^a$ (которые рассматриваются как тензорные поля типа (2,0)) по этому базису.

$$\begin{gathered}
\Delta\theta_b^a = \tilde{\mathscr{A}}_{bde}^{acf}\theta_c^d \otimes \theta_f^e + \tilde{\mathscr{A}}_b{}^{ac}{}_{ed}\theta_c^e \otimes \omega^d + \tilde{\mathscr{A}}_b{}^a{}_{de}^c\omega^d \otimes \theta_c^e + \tilde{\mathscr{A}}_b{}^{acd}{}_e\theta_c^e \otimes \omega_d + \tilde{\mathscr{A}}_b{}^{adc}{}_e\omega_d \otimes \theta_c^e + \tilde{\mathscr{A}}_b{}^a{}_{cd}\omega^c \otimes \omega^d + \tilde{\mathscr{A}}_b{}^a{}_c{}^d\omega^c \otimes \omega_d + \\
+ \tilde{\mathscr{A}}_b{}^{ad}{}_c\omega_d \otimes \omega^c + \tilde{\mathscr{A}}_b{}^{acd}\omega_c \otimes \omega_d.
\end{gathered}$$

Применим эндоморфизм альтернирования к обеим частям этого равенства и воспользуемся определением операции внешнего умножения (см. первую часть курса Многомерная дифференциальная геометрия). Так как 2-формы являются кососимметрическими тензорными полями, то есть принадлежат образу эндоморфизма альтернирования, получим $Alt(\Delta\theta_b^a) = \Delta\theta_b^a$.

$$\begin{gathered}
\Delta\theta_b^a = \frac{1}{2}(\tilde{\mathscr{A}}_{bde}^{acf}\theta_c^d \wedge \theta_f^e + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b{}^{ac}{}_{ed}\theta_c^e \wedge \omega^d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b{}^a{}_{de}^c\omega^d \wedge \theta_c^e + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b{}^{acd}{}_e\theta_c^e \wedge \omega_d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b{}^{adc}{}_e\omega_d \wedge \theta_c^e + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b{}^a{}_{cd}\omega^c \wedge \omega^d + \\
+ \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b{}^a{}_c{}^d\omega^c \wedge \omega_d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b{}^{ad}{}_c\omega_d \wedge \omega^c + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b{}^{acd}\omega_c \wedge \omega_d.
\end{gathered}$$

Сгруппируем слагаемые с разными типами 1-форм.

$$\Delta\theta^a_b = \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}^{acf}_{bde}\theta^d_c\wedge\theta^e_f + \frac{1}{2}(\tilde{\mathscr{A}}_b{}^{ac}{}_{ed} - \tilde{\mathscr{A}}_b^a{}_{de}^c)\theta^e_c\wedge\omega^d + \frac{1}{2}(\tilde{\mathscr{A}}_b^{acd}{}_e - \tilde{\mathscr{A}}_b^{acd}{}_e)\theta^e_c\wedge\omega_d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b^a{}_{cd}\omega^c\wedge\omega^d+$$
$$+\frac{1}{2}(\tilde{\mathscr{A}}_b^a{}_c{}^d - \tilde{\mathscr{A}}_b^{ad}{}_c)\omega^c\wedge\omega_d + \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}}_b^{acd}\omega_c\wedge\omega_d.$$

Обозначим получившиеся коэффициенты при 2-формах символом $\tilde{A}$ с соответствующими индексами, которые мы будем писать подряд (без пробелов).

$$\Delta\theta^a_b = \tilde{A}^{acf}_{bde}\theta^d_c\wedge\theta^e_f + \tilde{A}^{ac}_{bed}\theta^e_c\wedge\omega^d + \tilde{A}^{acd}_{be}\theta^e_c\wedge\omega_d + \tilde{A}^a_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d + \tilde{A}^{ad}_{bc}\omega^c\wedge\omega_d + \tilde{A}^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d. \quad (2.51)$$

Обратите внимание, что все индексы в этом равенстве пробегают все возможные значения (то есть не упорядочены по номерам), а значит, это равенство не является разложением по базису 2-форм. Хотя во многих работах пишут "разложим 2-форму по базису". Под этой фразой подразумевают тот процесс, который мы проделали. В дальнейшем мы не будем проводить подробных вычислений, а будем писать только последнее равенство, говоря при этом, что мы *разложили 2-форму* $\Delta\theta^a_b$ *по системе форм* $\{\theta^d_c\wedge\theta^e_f, \theta^e_c\wedge\omega^d, \theta^e_c\wedge\omega_d, \omega^c\wedge\omega^d, \omega^c\wedge\omega_d, \omega_c\wedge\omega_d\}$. Отметим еще один важный факт: системы функций $\tilde{A}^{acf}_{bde}$, $\tilde{A}^a_{bcd}$, $\tilde{A}^{acd}_b$ только константой $\frac{1}{2}$ отличаются от соответствующих компонент $\tilde{\mathscr{A}}^{acf}_{bde}$, $\tilde{\mathscr{A}}^a_{bcd}$, $\tilde{\mathscr{A}}^{acd}_b$ формы $\Delta\theta^a_b$. Так как любая 2-форма кососимметрична по своим аргументам, мы получаем кососимметричность ее компонент и функций $\tilde{A}$ по соответствующим им индексам, то есть

$$\tilde{A}^{acf}_{bde} = -\tilde{A}^{afc}_{bed};\quad \tilde{A}^a_{bcd} = -\tilde{A}^a_{bdc};\quad \tilde{A}^{acd}_b = -\tilde{A}^{adc}_b. \quad (2.52)$$

Подставим все три разложения в (2.50).

$$-(\tilde{A}^{acd}_{bef}\theta^e_c\wedge\theta^f_d + \tilde{A}^{acd}_{be}\theta^e_c\wedge\omega_d + \tilde{A}^{ac}_{bef}\theta^e_c\wedge\omega^f + \tilde{A}^{ac}_{bd}\omega^d\wedge\omega_c + \tilde{A}^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d + \tilde{A}^a_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d)\wedge\omega^b+$$
$$+(B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d + B^{abcd}{}_h\theta^h_d)\wedge\omega_b\wedge\omega_c + (B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d\omega_d + B^{ab}{}_{ch}^{\ d}\theta^h_d)\wedge\omega^c\wedge\omega_b + 2B^{adc}B_{dbf}\omega^f\wedge\omega_c\wedge\omega^b-$$
$$-2B^{adc}B_{cb}{}^f\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega^b + B^{af}{}_cB^{cd}{}_b\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega^b - B^{af}{}_cB_{fdb}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^b - B^{ad}{}_cB_{db}{}^f\omega^c\wedge\omega_f\wedge\omega^b+$$
$$+B^{ab}{}_cB^{cdf}\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega_b = 0$$

Раскроем в этом равенстве скобки. В его левой части мы получим линейную комбинацию 3-форм. Пока эта линейная комбинация не является разложением по базису, так как 1-формы в 3-формах не упорядочены по номерам. Чтобы получить упорядоченную последовательность 1-форм, воспользуемся задачами 7.4 и 7.5 из курса Тензорная алгебра, а именно формулами

$$t_{ij}e^i\wedge e^j = 2!t_{[ij]}e^i\wedge e^j(i<j);\quad t_{ijk}e^i\wedge e^j\wedge e^k = 3!t_{[ijk]}e^i\wedge e^j\wedge e^k(i<j<k).$$

$$-2\tilde{A}^{acd}_{bef}\theta^e_c\wedge\theta^f_d\wedge\omega^b - \tilde{A}^{acd}_{be}\theta^e_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b - 2\tilde{A}^{ac}_{[b|e|f]}\theta^e_c\wedge\omega^f\wedge\omega^b - 2\tilde{A}^{ac}_{[bd]}\omega^d\wedge\omega_c\wedge\omega^b - \tilde{A}^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b - 6\tilde{A}^a_{[bcd]}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^b+$$
$$+6B^{a[bcd]}\omega_d\wedge\omega_b\wedge\omega_c + 2B^{a[bc]}{}_d\omega^d\wedge\omega_b\wedge\omega_c + 2B^{a[bc]}{}_h^{\ d}\theta^h_d\wedge\omega_b\wedge\omega_c + 2B^{ab}{}_{[cd]}\omega^d\wedge\omega^c\wedge\omega_b + 2B^{a[b}{}_c{}^{d]}\omega_d\wedge\omega^c\wedge\omega_b+$$
$$+B^{ab}{}_{ch}^{\ d}\theta^h_d\wedge\omega^c\wedge\omega_b + 4B^{adc}B_{d[bf]}\omega^f\wedge\omega_c\wedge\omega^b - 4B^{a[d|c|}B_{cb}{}^{f]}\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega^b + 2B^{a[f}{}_cB^{|c|d]}{}_b\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega^b-$$
$$-6B^{af}{}_{[c}B_{|f|db]}\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^b - 2B^{ad}{}_{[c}B_{|d|b]}{}^f\omega^c\wedge\omega_f\wedge\omega^b + 6B^{a[b}{}_cB^{|c|df]}\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega_b = 0 \quad (2.53)$$

Так как в первом слагаемом этого равенства ставить скобки альтернации не удобно, мы запишем процедуру упорядочивания тет следующим образом: разобьем все слагаемые на пары $\tilde{A}^{acd}_{bef}\theta^e_c\wedge\theta^f_d\wedge\omega^b + \tilde{A}^{adc}_{bfe}\theta^f_d\wedge\theta^e_c\wedge\omega^b$. Здесь ни по одному индексу суммирование не производится. Воспользуемся кососимметричностью коэффициентов (2.52) и переобозначим индексы во втором слагаемом $f\leftrightarrow e$ и $c\leftrightarrow d$. В результате получим $2\tilde{A}^{acd}_{bef}\theta^e_c\wedge\theta^f_d\wedge\omega^b$, где $(e,c)<(f,d)$, а значит, формы теты уже будут упорядочены.

Рассмотрим также отдельно слагаемое $\tilde{A}^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b$. После альтернации получим

$$\tilde{A}^{a[cd]}_b\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b(c<d) = \frac{1}{2}(A^{acd}_b - A^{adc}_b)\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b(c<d) = A^{acd}_b\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b(c<d).$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью коэффициентов (2.52).

Соберем коэффициенты при одинаковых 3-формах в скобку (переобозначая при этом, где нужно индексы суммирования). Тогда в силу линейной независимости базисных форм получим

$\theta^e_c\wedge\theta^f_d\wedge\omega^b$: $\quad -2\tilde{A}^{acd}_{bef} = 0;$
$\theta^e_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b$: $\quad -\tilde{A}^{acd}_{be} - B^{ad}{}_{be}^{\ c} = 0;$
$\theta^e_c\wedge\omega^f\wedge\omega^b$: $\quad -2\tilde{A}^{ac}_{[b|e|f]} = 0;$
$\theta^h_d\wedge\omega_b\wedge\omega_c$: $\quad 2B^{a[bc]}{}_h^{\ d} = 0;$
$\omega^b\wedge\omega^d\wedge\omega_c$: $\quad -2\tilde{A}^{ac}_{[bd]} + 2B^{ac}{}_{[db]} + 4B^{afc}B_{f[bd]} - 2B^{af}{}_{[d}B_{|f|b]}{}^c = 0;$
$\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega^b$: $\quad -\tilde{A}^{acd}_b + 2B^{a[cd]}{}_b + 2B^{a[c}{}_b{}^{d]} - 4B^{a[c|f|}B_{fb}{}^{d]} + 2B^{a[d}{}_fB^{|f|c]}{}_b = 0;$
$\omega^c\wedge\omega^d\wedge\omega^b$: $\quad -6\tilde{A}^a_{[bcd]} - 6B^{af}{}_{[c}B_{|f|db]} = 0;$
$\omega_b\wedge\omega_c\wedge\omega_d$: $\quad 6B^{a[bcd]} + 6B^{a[b}{}_fB^{|f|cd]} = 0.$

Лемма 2.3. *Имеем $B^{a[bc]}{}_d = B^{abc}{}_d$. Другими словами функции $\{B^{abc}{}_d\}$ кососимметричны по двум последним верхним индексам.*

Доказательство. Проальтернируем соотношения

$$dB^{abc} + B^{dbc}\theta^a_d + B^{adc}\theta^b_d + B^{abd}\theta^c_d = B^{abc}{}_d\omega^d + B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}^d_f\theta^f_d \tag{2.54}$$

по индексам b и c и воспользуемся кососимметричностью структурного тензора по любой паре индексов.

$$dB^{abc} + B^{dbc}\theta^a_d + \frac{1}{2}(B^{adc}\theta^b_d - B^{adb}\theta^c_d) + \frac{1}{2}(B^{abd}\theta^c_d - B^{acd}\theta^b_d) = B^{a[bc]}{}_d\omega^d + B^{a[bc]d}\omega_d + B^{a[bc]}{}^d_f\theta^f_d$$

Опять воспользовавшись кососимметричностью структурного тензора легко видеть, что левая часть последнего равенства совпадает с левой частью равенства (2.54), а значит, равны и правые части этих равенств. Тогда в силу линейной независимости базисных форм имеем

$$B^{a[bc]}{}_d = B^{abc}{}_d; \quad B^{a[bc]d} = B^{abcd}; \quad B^{a[bc]}{}^d_f = B^{abc}{}^d_f.$$

□

Замечание 2.3. Из принципа доказательства леммы 2.3 видно, что системы функций, по которым раскладываются формы ΔB^{abc} и $\Delta B^{ab}{}_c$, наследует свойства симметрии по индексам структурного и виртуального тензоров соответственно.

Используя лемму 2.3 и кососимметричность структурного тензора по любой паре индексов, а виртуального тензора по верхней паре индексов полученные тождества мы можем записать в виде

$$\begin{gathered}\tilde{A}^{acd}_{bef} = 0;\ \tilde{A}^{acd}_{be} + B^{ad}{}_b{}^c_e = 0;\ \tilde{A}^{ac}_{[b|e|f]} = 0;\ B^{abc}{}^d_h = 0;\\ \tilde{A}^{ac}_{[bd]} + B^{ac}{}_{[bd]} + 2B^{acf}B_{fbd} + B^{af}{}_{[b}B_{d]f}{}^c = 0;\\ -\tilde{A}^{acd}_b + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + 2B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} + B^{a[c}{}_fB^{d]f}{}_b = 0;\\ \tilde{A}^a_{[bcd]} + B^{af}{}_{[b}B_{cd]f} = 0;\ B^{a[bcd]} + B^{a[b}{}_fB^{cd]f} = 0.\end{gathered} \tag{2.55}$$

Рассмотрим второе уравнение из первой группы структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея (см. (2.47)). Продифференцируем ее аналогично внешним образом.

$$0 = d\theta^b_a\wedge\omega_b - \theta^b_a\wedge d\omega_b + dB_{abc}\wedge\omega^b\wedge\omega^c + B_{abc}d\omega^b\wedge\omega^c - B_{abc}\omega^b\wedge d\omega^c + dB_{ab}{}^c\wedge\omega_c\wedge\omega^b + B_{ab}{}^cd\omega_c\wedge\omega^b - B_{ab}{}^c\omega_c\wedge d\omega^b.$$

Подставляем первую группу структурных уравнений.

$$\begin{gathered}0 = d\theta^b_a\wedge\omega_b - \theta^b_a\wedge(\theta^c_b\wedge\omega_c + B_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d + B_{bc}{}^d\omega_d\wedge\omega^c) + dB_{abc}\wedge\omega^b\wedge\omega^c + B_{abc}(-\theta^b_d\wedge\omega^d + B^{bdf}\omega_d\wedge\omega_f + B^{bd}{}_f\omega^f\wedge\omega_d)\wedge\omega^c -\\ - B_{abc}\omega^b\wedge(-\theta^c_d\wedge\omega^d + B^{cdf}\omega_d\wedge\omega_f + B^{cd}{}_f\omega^f\wedge\omega_d) + dB_{ab}{}^c\wedge\omega_c\wedge\omega^b + B_{ab}{}^c(\theta^d_c\wedge\omega_d + B_{cdf}\omega^d\wedge\omega^f + B_{cd}{}^f\omega_f\wedge\omega^d)\wedge\omega^b -\\ - B_{ab}{}^c\omega_c\wedge(-\theta^b_d\wedge\omega^d + B^{bdf}\omega_d\wedge\omega_f + B^{bd}{}_f\omega^f\wedge\omega_d).\end{gathered} \tag{2.56}$$

После раскрытия скобок сгруппируем первые два слагаемых:

$$d\theta^b_a\wedge\omega_b - \theta^b_a\wedge\theta^c_b\wedge\omega_c = d\theta^b_a + \theta^b_c\wedge\theta^c_a)\wedge\omega_b = \Delta\theta^b_a\wedge\omega_b.$$

Здесь во втором слагаемом мы поменяли индексы суммирования b и c. Обозначение $\Delta\theta^b_a$ см. (2.49).

Выделим еще две группы слагаемых и введем следующие обозначения.

$$dB_{abc} - B_{dbc}\theta^d_a - B_{adc}\theta^d_b - B_{abd}\theta^d_c = \Delta B_{abc}; \quad dB_{ab}{}^c - B_{db}{}^c\theta^d_a - B_{ad}{}^c\theta^d_b + B_{ab}{}^d\theta^c_d = \Delta B_{ab}{}^c.$$

Тогда

$$\begin{gathered}0 = \Delta\theta^b_a\wedge\omega_b + \Delta B_{abc}\wedge\omega^b\wedge\omega^c + \Delta B_{ab}{}^c\wedge\omega_c\wedge\omega^b + 2B_{abc}B^{bdf}\omega_d\wedge\omega_f\wedge\omega^c + 2B_{abc}B^{bd}{}_f\omega^f\wedge\omega_d\wedge\omega^c +\\ + B_{ab}{}^cB_{cdf}\omega^d\wedge\omega^f\wedge\omega^b + B_{ab}{}^cB_{cd}{}^f\omega_f\wedge\omega^d\wedge\omega^b - B_{ab}{}^cB^{bdf}\omega_c\wedge\omega_d\wedge\omega_f - B_{ab}{}^cB^{bd}{}_f\omega_c\wedge\omega^f\wedge\omega_d.\end{gathered} \tag{2.57}$$

Разложим 1-формы ΔB_{abc} и $\Delta B_{ab}{}^c$ по базису $\{\theta^a_b, \omega^c, \omega_d\}$.

$$\Delta B_{abc} = B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d + B_{abc}{}^d_f\theta^f_d; \quad \Delta B_{ab}{}^c = B_{ab}{}^c{}_d\omega^d + B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^{cd}_f\theta^f_d.$$

Разложение для 2-формы $\Delta\theta^a_b$ у нас уже есть (2.51). Причем мы уже доказали, что коэффициент $\tilde{A}^{acf}_{bde} = 0$. Подставим полученные разложения форм в (2.57), раскрываем скобки и ставим альтернации для получения разложения по базису 3-форм.

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \tilde{A}^{bc}_{aed}\theta^e_c \wedge \omega^d \wedge \omega_b + 2\tilde{A}^{[b|c|d]}_{ae}\theta^e_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b + 2\tilde{A}^b_{acd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega_b + 2\tilde{A}^{[bd]}_{ac}\omega^c \wedge \omega_d \wedge \omega_b + 6\tilde{A}^{[bcd]}_a\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b + \\
& + 6B_{a[bcd]}\omega^d \wedge \omega^b \wedge \omega^c + 2B_{abc}{}^d\omega_d \wedge \omega^b \wedge \omega^c + 2B_{abc}{}^d_f\theta^f_d \wedge \omega^b \wedge \omega^c + 2B_{a[b}{}^c{}_{d]}\omega^d \wedge \omega_c \wedge \omega^b + 2B_{ab}{}^{[cd]}\omega_d \wedge \omega_c \wedge \omega^b + \\
& + B_{ab}{}^{cd}{}_f\theta^f_d \wedge \omega_c \wedge \omega^b + 4B_{abc}B^{bdf}\omega_d \wedge \omega_f \wedge \omega^c + 4B_{ab[c}B^{bd}{}_{f]}\omega^f \wedge \omega_d \wedge \omega^c + 6B_{a[b}{}^cB_{|c|df]}\omega^d \wedge \omega^f \wedge \omega^b + \\
& + 2B_{a[b}{}^cB_{|c|d]}{}^f\omega_f \wedge \omega^d \wedge \omega^b - 6B_{ab}{}^{[c}B^{|b|df]}\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_f - 2B_{ab}{}^{[c}B^{|b|d]}{}_f\omega_c \wedge \omega^f \wedge \omega_d.
\end{aligned}
$$

Здесь мы сразу сняли альтернацию с кососимметричных индексов систем функций.

Применяем линейную независимость базисных 3-форм.

$\theta^e_c \wedge \omega^d \wedge \omega_b$: $\quad \tilde{A}^{bc}_{aed} - B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0;$

$\theta^e_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b$: $\quad \tilde{A}^{[b|c|d]}_{ae} = 0;$

$\theta^f_d \wedge \omega^b \wedge \omega^c$: $\quad B_{abc}{}^d_f = 0;$

$\omega^c \wedge \omega^d \wedge \omega_b$: $\quad \tilde{2}A^b_{acd} + 2B_{acd}{}^b + 2B_{a[c}{}^b{}_{d]} + 4B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + 2B_{a[d}{}^fB_{|f|c]}{}^b = 0;$

$\omega^c \wedge \omega_d \wedge \omega_b$: $\quad 2\tilde{A}^{[bd]}_{ac} + 2B_{ac}{}^{[bd]} + 4B_{afc}B^{fdb} - 2B_{af}{}^{[b}B^{|f|d]}{}_c = 0;$

$\omega_c \wedge \omega_d \wedge \omega_b$: $\quad 6\tilde{A}^{[bcd]}_a - 6B_{af}{}^{[c}B^{|f|db]} = 0;$

$\omega^b \wedge \omega^c \wedge \omega^b$: $\quad 6B_{a[bcd]} + 6B_{a[b}{}^fB_{|f|cd]} = 0.$

Опять аналогично предыдущему применяем кососимметричность функций и получаем следующие тождества

$$
\begin{gathered}
\tilde{A}^{bc}_{aed} - B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0;\ B_{abc}{}^d_f = 0;\ \tilde{A}^{[b|c|d]}_a e = 0; \qquad (2.58)\\
\tilde{A}^b_{acd} + B_{acd}{}^b + B_{a[c}{}^b{}_{d]} + 2B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} - B_{a[d}{}^fB_{c]f}{}^b = 0;\\
\tilde{A}^{[bd]}_{ac} + B_{ac}{}^{[bd]} + 2B_{afc}B^{fdb} + B_{af}{}^{[b}B^{d]f}{}_c = 0;\\
\tilde{A}^{[bcd]}_a - B_{af}{}^{[c}B^{db]f} = 0;\ B_{a[bcd]} + B_{a[b}{}^fB_{cd]f} = 0.
\end{gathered}
$$

Рассмотрим два тождества из (2.55) и (2.58): $\tilde{A}^{bc}_{aed} - B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0$ и $\tilde{A}^{ac}_{[b|e|f]} = 0$. В них участвуют функции одного вида, но обозначение индексов не согласовано. Обозначим индексы второго равенства так, чтобы они совпали с соответствующими индексами первого равенства: $\tilde{A}^{bc}_{[a|e|d]} = 0$. Первое тождество проальтернируем по индексам a и d: $\tilde{A}^{bc}_{[a|e|d]} - B_{[ad]}{}^{bc}{}_e = 0$. Так как виртуальный тензор кососимметричен по нижним индексам, и значит, кососимметричны по этим индексам все связанные с ним функции (см. лемму 2.3 и следующее за ней замечание), получим $\tilde{A}^{bc}_{[a|e|d]} - B_{[ad]}{}^{bc}{}_e = 0$. Таким образом,

$$
\tilde{A}^{bc}_{[a|e|d]} - B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0; \quad A^{bc}_{[a|e|d]} = 0.
$$

Откуда получаем, что $B_{ad}{}^{bc}{}_e = 0$ и $\tilde{A}^{bc}_{aed} = 0$. Аналогично получаем, что $B^{ad}{}_b{}^e_c = 0$ и $\tilde{A}^{aed}_{bc} = 0$.

Итак, мы получаем из разложения форм $\Delta\theta^a_b$, ΔB_{abc}, ΔB^{abc}, $\Delta B_{ab}{}^c$ и $\Delta B^{ab}{}_c$ следующие тождества

$$
\begin{gathered}
d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b + \tilde{A}^a_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + \tilde{A}^{ad}_{bc}\omega^c \wedge \omega_d + \tilde{A}^{acd}_b\omega_c \wedge \omega_d;\\
dB^{abc} + B^{dbc}\theta^a_d + B^{adc}\theta^b_d + B^{abd}\theta^c_d = B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d;\\
dB^{ab}{}_c + B^{db}{}_c\theta^a_d + B^{ad}{}_c\theta^b_d - B^{ab}{}_d\theta^d_c = B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d\omega_d;\\
dB_{abc} - B_{dbc}\theta^d_a - B_{adc}\theta^d_b - B_{abd}\theta^d_c = B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d;\\
dB_{ab}{}^c - B_{db}{}^c\theta^d_a - B_{ad}{}^c\theta^d_b + B_{ab}{}^d\theta^c_d = B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d\omega^d,
\end{gathered}
$$

и следующие тождества

$$
\begin{gathered}
\tilde{A}^{ac}_{[bd]} + B^{ac}{}_{[bd]} + 2B^{acf}B_{fbd} + B^{af}{}_{[b}B_{d]f}{}^c = 0;\\
-\tilde{A}^{acd}_b + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + 2B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} + B^{a[c}{}_fB^{d]f}{}_b = 0;\\
\tilde{A}^a_{[bcd]} + B^{af}{}_{[b}B_{cd]f} = 0;\ B^{a[bcd]} + B^{a[b}{}_fB^{cd]f} = 0.\\
\tilde{A}^b_{acd} + B_{acd}{}^b + B_{a[c}{}^b{}_{d]} + 2B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} - B_{a[d}{}^fB_{c]f}{}^b = 0;\\
\tilde{A}^{[bd]}_{ac} + B_{ac}{}^{[bd]} + 2B_{afc}B^{fdb} + B_{af}{}^{[b}B^{d]f}{}_c = 0;\\
\tilde{A}^{[bcd]}_a - B_{af}{}^{[c}B^{db]f} = 0;\ B_{a[bcd]} + B_{a[b}{}^fB_{cd]f} = 0.
\end{gathered}
$$

Чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями введенными в диссертации Н.Н.Щипковой (которая первой начала исследование многообразий Вайсмана-Грея методом присоединенной G-структуры, но они проводила вычисления в плюсах), мы введем следующие обозначения

$$
A^a_{bcd} = \tilde{A}^a_{bcd} + B^{af}{}_{[c}B_{d]bf}; \quad A^{bcd}_a = \tilde{A}^{bcd}_a - B_{af}{}^{[c}B^{d]bf}; \quad A^{ac}_{bd} = \tilde{A}^{ac}_{bd} + 2B^{acf}B_{fbd}.
$$

Тогда в новых обозначениях получим

$$d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b + (A^a_{bcd} - B^{af}{}_{[c}B_{d]bf})\omega^c \wedge \omega^d + (A^{acd}_b + B_{bf}{}^{[c}B^{d]af})\omega_c \wedge \omega_d + (A^{ac}_{bd} - 2B^{acf}B_{fbd})\omega^d \wedge \omega_c; \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned} dB^{abc} + B^{dbc}\theta^a_d + B^{adc}\theta^b_d + B^{abd}\theta^c_d &= B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d;\\ dB^{ab}{}_c + B^{db}{}_c\theta^a_d + B^{ad}{}_c\theta^b_d - B^{ab}{}_d\theta^d_c &= B^{ab}{}_{cd}\omega^d + B^{ab}{}_c{}^d\omega_d;\\ dB_{abc} - B_{dbc}\theta^d_a - B_{adc}\theta^d_b - B_{abd}\theta^d_c &= B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d;\\ dB_{ab}{}^c - B_{db}{}^c\theta^d_a - B_{ad}{}^c\theta^d_b + B_{ab}{}^d\theta^c_d &= B_{ab}{}^{cd}\omega_d + B_{ab}{}^c{}_d\omega^d. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Первую группу уравнений этого списка будем называть *второй группой структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея*. Все вместе эти уравнения будем называть *полной второй группой структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея*.

Обратите внимание, что полного соответствия с результатами Н.Н. Щипковой мы не добились (отличие в знаках), но это связано с тем, что мы проводили вычисления в минусах.

Полученные тождества во введенных обозначениях будут выглядеть следующим образом

$$\begin{gathered} A^{ac}_{[bd]} + B^{ac}{}_{[bd]} + B^{af}{}_{[b}B_{d]f}{}^c = 0;\\ -A^{acd}_b + B^{acd}{}_b + B^{a[c}{}_b{}^{d]} + B^{af[c}B_{fb}{}^{d]} + B^{a[c}{}_fB^{d]f}{}_b = 0;\\ A^a_{[bcd]} = 0;\ B^{a[bcd]} + B^{a[b}{}_fB^{cd]f} = 0;\\ A^b_{acd} + B_{acd}{}^b + B_{a[c}{}^b{}_{d]} + B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + B_{a[c}{}^fB_{d]f}{}^b = 0;\\ A^{[bd]}_{ac} + B_{ac}{}^{[bd]} + B_{af}{}^{[b}B^{d]f}{}_c = 0;\\ A^{[bcd]}_a = 0;\ B_{a[bcd]} + B_{a[b}{}^fB_{cd]f} = 0. \end{gathered} \tag{2.61}$$

§2.11. Следствия из структурных уравнений многообразия Вайсмана-Грея.

Напомним, что многообразия Вайсмана-Грея определяются тем, что их виртуальный тензор примитивен, а структурный тензор кососимметричен по любой паре индексов, то есть

$$B^{ab}{}_c = \xi^{[a}\delta^{b]}_c; \quad B^{[abc]} = B^{abc},$$

где система функций $\{\xi^a, \xi_a \equiv \xi^{\hat{a}}\}$ является системой компонент вектора Ли ξ в A-репере.

Лемма 2.4. *Равенство $B_{abc} = C_{abc}$ равносильно равенству $B_{[abc]} = B_{abc}$. В частности, для многообразий Вайсмана-Грея $B_{abc} = C_{abc}$, то есть неальтернированный структурный тензор совпадает со структурным тензором.*

Доказательство. Пусть выполнено второе равенство. Напомним (см. (2.35)), что это равенство равносильно равенству $C_{[abc]} = C_{abc}$. Тогда

$$B_{abc} = C_{a[bc]} = \frac{1}{2}(C_{abc} - C_{acb}) = \frac{1}{2}(C_{[abc]} - C_{[acb]}) = \frac{1}{2}(C_{[abc]} + C_{[abc]}) = C_{abc}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что альтернированный тензор будет кососимметричен по любой паре индексов.

Обратно, пусть выполняется равенство $B_{abc} = C_{abc}$. Тогда система функций C_{abc} будет кососимметрична по последней паре индексов, так как по ним кососимметрична система функций B_{abc}. Тогда функции C_{abc} кососимметричны по любой паре индексов, что равносильно кососимметричности неальтернированного структурного тензора (а точнее 3-формы $\mathscr{C}$, которая получается из него опусканием индекса), то есть $C_{[abc]} = C_{abc}$. Последнее равенство равносильно равенству $B_{[abc]} = B_{abc}$. □

Из доказанной леммы и задачи 2.2

Лемма 2.5. *Для многообразий Вайсмана-Грея имеем*

$$\begin{aligned} \theta^a_{\hat{b}} &= -B^{ab}{}_c\omega^c + B^{abc}\omega_c = -\tfrac{1}{2}\xi^a\delta^b_c\omega^c + \tfrac{1}{2}\xi^b\delta^a_c\omega^c + B^{abc}\omega_c;\\ \theta^{\hat{a}}_b &= -B_{ab}{}^c\omega_c + B_{abc}\omega^c = -\tfrac{1}{2}\xi_a\delta^c_b\omega_c + \tfrac{1}{2}\xi_b\delta^c_b\omega_c + B_{abc}\omega^c. \end{aligned}$$

Так как вектор Ли ξ является векторным полем, то есть тензорным полем типа (0,1), по основной теореме тензорного анализа на пространстве расслоения всех реперов получим

$$d\xi^i + \xi^j\theta^i_j = \xi^i{}_{,j}\omega^j,$$

где система функций $\{\xi^i{}_{,j}\}$ является компонентами ковариантного дифференциала вектора Ли. Аналогично примеру 2.2 перекидываем эти уравнения на пространство расслоения A-реперов.

Для единственного свободного индекса i этих уравнений возможны два случая:

1. $i = a$. Тогда
$$d\xi^a + \xi^b\theta^a_b + \xi^{\hat b}\theta^a_{\hat b} = \xi^a{}_{,b}\omega^b + \xi^a{}_{,\hat b}\omega^{\hat b}.$$
Воспользуемся леммой 2.5 и договоримся обозначать $\xi^a{}_{,\hat b} = \xi^{a,b}$.
$$d\xi^a + \xi^b\theta^a_b + \xi_b(-B^{ab}{}_c\omega^c + B_{abc}\omega^c) = \xi^a{}_{,b}\omega^b + \xi^{a,b}\omega_b. \tag{2.62}$$
Введем обозначение
$$d\xi^a + \xi^b\theta^a_b = \xi^{ab}\omega_b + \xi^a{}_b\omega^b. \tag{2.63}$$
Тогда из соотношений (2.62) в силу линейной независимости базисных форм получим (распишите вычисления подробно и обратите внимание на переобозначение индексов суммирования)
$$\xi^{a,b} = \xi^{ab} - \xi_c B^{abc}; \quad \xi^a{}_{,b} = \xi^a{}_b - \xi_c B^{ac}{}_b = \xi^a{}_b - \tfrac{1}{2}\xi^a\xi_c + \tfrac{1}{2}\xi^c\xi_c\delta^a_b.$$
Здесь мы использовали примитивность виртуального тензора многообразий Вайсмана-Грея.

2. Рассуждая аналогично (проведите расчеты самостоятельно) для $i = \hat a$, получим
$$d\xi_a - \xi_b\theta^b_a = \xi_{ab}\omega^b + \xi_a{}^b\omega_b; \tag{2.64}$$
$$\xi_a{}^{,b} = \xi_a{}^b - \xi^c B_{ac}{}^b = \xi_a{}^b - \frac{1}{2}\xi^b\xi_a + \frac{1}{2}\xi^c\xi_c\delta^b_a;$$
$$\xi_{a,b} = \xi_{ab} - \xi^c B_{abc}$$

Задача 2.13. Докажите, что $\bar\xi^a{}_b = \xi_a{}^b$, $\bar\xi^{ab} = \xi_{ab}$, где черта обозначает комплексное сопряжение.

Решение. Рассмотрим уравнения
$$d\xi^a + \xi^b\theta^a_b = \xi^a{}_b\omega^b + \xi^{ab}\omega_b$$
и применим к нему оператор комплексного сопряжения. Так как ξ, θ^a_b и ω^a, ω_b являются комплексификациями обычных вещественных объектов, согласно результатам § 1.4. индексы без крышки заменятся на индексы с крышками и наоборот.
$$d\xi^{\hat a} + \xi^{\hat b}\theta^{\hat a}_{\hat b} = \bar\xi^a{}_b\omega^{\hat b} + \bar\xi^{ab}\omega_{\hat b}.$$
Воспользуемся соотношениями (2.13) и договоренностью обозначать у функций индекс с крышкой индексом без крышки, но опущенным (или поднятым) по отношению к исходному индексу.
$$d\xi_a - \xi_b\theta^b_a = \bar\xi^a{}_b\omega_b + \bar\xi_{ab}\omega^b.$$
Заметим, что суммирование по одинаковым индексам здесь остается, хотя правило суммирования Эйнштейна нарушается.

Сравним это соотношение с уравнениями
$$d\xi_a - \xi_b\theta^b_a = \xi_{ab}\omega^b + \xi_a{}^b\omega_b.$$
Левые части равны, следовательно, равны и правые части. Тогда в силу линейной независимости базисных форм получим
$$\bar\xi^a{}_b = \xi_a{}^b; \quad \bar\xi_{ab} = \xi_{ab}.$$
□

Задача 2.14. Докажите, что системы функций $\{A^{acd}_b\}$, $\{A^a_{bcd}\}$ и $\{A^{ac}_{bd}\}$ из второй группы структурных уравнений связаны равенствами
$$\bar A^{ac}_{bd} = A^{bd}_{ac}; \quad \bar A^{acd}_b = -A^b_{acd}.$$
Указание. Примените оператор комплексного сопряжения ко второй группе структурных уравнений.

Задача 2.15. Докажите, что для многообразия Вайсмана-Грея имеют место тождества
$$B^{ab}{}_{cd} = \xi^{[a}{}_d\delta^{b]}_c; \quad B^{ab}{}_c{}^d = \xi^{[a|d|}\delta^{b]}_c.$$
и формулы комплексно сопряженные.

Указание. Воспользуйтесь примитивностью структурного тензора и уравнениями (2.59) и аналогичными уравнениями для вектора Ли.

Теорема 2.4. *Для многообразия Вайсмана-Грея имеют место тождества*
$$B_{acd}{}^b = \xi_{[ac}\delta^b_{d]} + \frac{1}{2}\xi^f B_{f[ac}\delta^b_{d]} - \frac{1}{2}\xi^b B_{acd};$$
$$A^b_{acd} = \frac{1}{6}\xi_{a[c}\delta^b_{d]} + \frac{1}{6}\xi_{[cd]}\delta^b_a + \frac{1}{3}\xi_{[c|a|}\delta^b_{d]} + \frac{1}{6}\xi^f B_{fa[c}\delta^b_{d]} - \frac{1}{6}\xi^f B_{fcd}\delta^b_a + \frac{1}{4}\xi_a\xi_{[c}\delta^b_{d]}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующее равенство из (2.10.):

$$A^b_{acd} + B_{acd}{}^b + B_{a[c}{}^b{}_{d]} + B_{af[c}B^{fb}{}_{d]} + B_{a[c}{}^f B_{d]f}{}^b = 0.$$

Распишем в нем альтернацию

$$A^b_{acd} + B_{acd}{}^b + \frac{1}{2}(B_{ac}{}^b{}_d - B_{ad}{}^b{}_c) + \frac{1}{2}(B_{afc}B^{fb}{}_d - B_{afd}B^{fb}{}_c) + \frac{1}{2}(B_{ac}{}^f B_{df}{}^b - B_{ad}{}^f B_{cf}{}^b) = 0$$

и применим лемму 2.15 и примитивность виртуального тензора

$$A^b_{acd}+B_{acd}{}^b+\frac{1}{2}\xi_{[a|d|}\delta^b_{c]}-\frac{1}{2}\xi_{[a|c|}\delta^b_{d]}+\frac{1}{4}(\xi^f B_{afc}\delta^b_d-\xi^b B_{adc})-\frac{1}{4}(\xi^f B_{afd}\delta^b_c-\xi^b B_{acd})+\frac{1}{8}(\xi_a\delta^f_c-\xi_c\delta^f_a)(\xi_d\delta^b_f-\xi_f\delta^b_d)-$$
$$-\frac{1}{8}(\xi_a\delta^f_d-\xi_d\delta^f_a)(\xi_c\delta^b_f-\xi_f\delta^b_c)=0.$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые, получим

$$A^b_{acd} + B_{acd}{}^b - \frac{1}{2}\xi_{a[c}\delta^b_{d]} - \frac{1}{2}\xi_{[cd]}\delta^b_a + \frac{1}{2}\xi^f B_{af[c}\delta^b_{d]} + \frac{1}{2}\xi^b B_{acd} - \frac{1}{4}\xi_a\xi_{[c}\delta^b_{d]} = 0 \qquad (2.65)$$

Проальтернируем по индексам a, c, d и учтем кососимметричность $B_{acd}{}^b$ по любой паре нижних индексов и тождество $A^b_{[acd]} = 0$ (см. (2.10.))

$$B_{acd}{}^b - \frac{1}{2}\xi_{[ac}\delta^b_{d]} - \frac{1}{2}\xi_{[cd}\delta^b_{a]} - \frac{1}{2}\xi^f B_{f[ac}\delta^b_{d]} + \frac{1}{2}\xi^b B_{acd} - \frac{1}{4}\xi_{[a}\xi_c\delta^b_{d]} = 0$$

Заметим, что второе слагаемое в последнем равенстве равно нулю, так как оно симметрично по индексам a и c, а альтернация симметричного тензора дает нуль (если не понятно, почему это так, раскройте альтернацию по определению и убедитесь, что последнее слагаемое действительно равно нулю). Далее, второе и третье слагаемые подобны (после перестановки индексов под знаком альтернации. Здесь мы учитываем, что после альтернации тензор становится кососимметрическим и, меняя местами два индекса, мы получаем знак минус). Проделав это, мы убеждаемся, что получили первое тождество из условия теоремы.

Выразим из последнего тождества $B_{acd}{}^b$ и подставим в (2.65).

$$A^b_{acd}-\frac{1}{2}\xi_{a[c}\delta^b_{d]}-\frac{1}{2}\xi_{[cd]}\delta^b_a+\frac{1}{3}(\xi_{a[c}\delta^b_{d]}+\xi_{c[d}\delta^b_{a]}+\xi_{d[a}\delta^b_{c]})+\frac{1}{2}\xi^f B_{af[c}\delta^b_{d]}+\frac{1}{6}(\xi^f B_{fa[c}\delta^b_{d]}+\xi^f B_{fc[d}\delta^b_{a]}+\xi^f B_{fd[a}\delta^b_{c[})-$$
$$-\frac{1}{4}\xi_a\xi_{[c}\delta^b_{d]}=0$$

Приводя подобные и перегруппировывая слагаемые в альтернации, получим требуемое тождество. □

Задача 2.16. Используя доказанную теорему, покажите, что для любого многообразия класса W_4 выполняется тождество

$$\xi_{[ab]} = 0.$$

Задача 2.17. Докажите, что для многообразия Вайсмана-Грея размерности выше 4 имеют место тождество

$$\xi_{[ad]}{}^c = \xi_b(A^{bc}_{[ad]} - 2B^{bcf}B_{fad}) - \xi^b(-A^c_{bda} + B^{cf}{}_{[d}B_{a]bf}) - \xi^{cb}B_{bda} + \xi_{[a|b|}B^{bc}{}_{d]} + \xi_{[a}{}^b B_{d]b}{}^c.$$

Решение. Рассмотрим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты в A-репере вектора Ли (см. первое соотношение в (2.64))

$$d\xi_a - \xi_b\theta^b_a = \xi_{ab}\omega^b + \xi_a{}^b\omega_b.$$

Продифференцируем эти уравнения внешним образом.

$$-d\xi_b \wedge \theta^b_a - \xi_b d\theta^b_a = d\xi_{ab} \wedge \omega^b + \xi_{ab}d\omega^b + d\xi_a{}^b \wedge \omega_b + \xi_a{}^b d\omega_b.$$

Подставим первую и вторую группы структурных уравнений (2.16), (2.17), (2.59).

$$-\xi_b(-\theta^b_c \wedge \theta^c_a + (A^b_{acd} - B^{bf}{}_{[c}B_{d]af})\omega^c \wedge \omega^d + (A^{bcd}_a + B_{af}{}^{[c}B^{d]bf})\omega_c \wedge \omega_d + (A^{bc}_{ad} - 2B^{bcf}B_{fad})\omega^d \wedge \omega_c)-$$
$$-(\xi_{bc}\omega^c + \xi_b{}^c\omega_c + \xi_c\theta^c_b) \wedge \theta^b_a = d\xi_{ab} \wedge \omega^b + \xi_{ab}(-\theta^b_c \wedge \omega^c + B^{bcd}\omega_c \wedge \omega_d + B^{bc}{}_d\omega^d \wedge \omega_c) + d\xi_a{}^b \wedge \omega_b+$$
$$+\xi_a{}^b(\theta^c_b \wedge \omega_c + B_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d + B_{bc}{}^d\omega_d \wedge \omega^c) \qquad (2.66)$$

Введем обозначения

$$\Delta\xi_{ab} = d\xi_{ab} - \xi_{cb}\theta^c_a - \xi_{ac}\theta^c_b; \quad \Delta\xi_a{}^b = d\xi_a{}^b - \xi_c{}^b\theta^c_a + \xi_a{}^c\theta^b_c.$$

$\Delta\xi_{ab}$ и $\Delta\xi_a{}^b$ – это 1-формы на пространстве расслоения A-реперов. Их можно разложить по базису 1-форм

$$\Delta\xi_{ab} = \xi_{ab}{}^c_d\theta^d_c + \xi_{ab}{}^c\omega_c + \xi_{abc}\omega^c; \quad \Delta\xi_a{}^b = \xi_a{}^{bc}{}_d\theta^d_c + \xi_a{}^{bc}\omega_c + \xi_a{}^b{}_c\omega^c.$$

Подставим эти разложения в (2.66)

$$\begin{aligned}
&-\xi_b(A^b_{acd} - B^{bf}{}_{[c}B_{d]af})\omega^c\wedge\omega^d - \xi_b(A^{bcd}_a + B_{af}{}^{[c}B^{d]bf})\omega_c\wedge\omega_d - \xi_b(A^{bc}_{ad} - 2B^{bcf}B_{fad})\omega^d\wedge\omega_c) = \\
&= \xi_{ab}{}^c_d\theta^d_c\wedge\omega^b + \xi_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b + \xi_{abc}\omega^c\wedge\omega^b + \xi_a{}^{bc}{}_d\theta^d_c\wedge\omega_b + \xi_a{}^{bc}\omega_c\wedge\omega_b + \xi_a{}^b{}_c\omega^c\wedge\omega_b + \xi_{ab}B^{bcd}\omega_c\wedge\omega_d + \\
&\qquad + \xi_{ab}B^{bc}{}_d\omega^d\wedge\omega_c + \xi_a{}^bB_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d + \xi_a{}^bB_{bc}{}^d\omega_d\wedge\omega^c
\end{aligned}$$

В силу линейной независимости базисных форм получим

$$\begin{array}{ll}
\theta^d_c\wedge\omega^b: & \xi_{ab}{}^c_d = 0 \\
\theta^d_c\wedge\omega_b: & \xi_a{}^{bc}{}_d = 0 \\
\omega^c\wedge\omega^d: & -\xi_b(A^b_{acd} - B^{bf}{}_{[c}B_{d]af}) = \xi_{a[dc]} + \xi_a{}^bB_{bcd} \\
\omega_c\wedge\omega_d: & -\xi_b(A^{bcd}_a + B_{af}{}^{[c}B^{d]bf}) = \xi_a{}^{[dc]} + \xi_{ab}B^{bcd} \\
\omega^d\wedge\omega_c: & -\xi_b(A^{bc}_{ad} - 2B^{bcf}B_{fad}) = -\xi_{ad}{}^c + \xi_a{}^c{}_d + \xi_{ab}B^{bc}{}_d - \xi_a{}^bB_{bd}{}^c.
\end{array} \tag{2.67}$$

Так как для многообразия Вайсмана-Грея размерности выше 4 имеем $\xi_a{}^b = \xi^b{}_a$, получим $\xi_a{}^{dc} = \xi^d{}_a{}^c$ (докажите самостоятельно). Проальтернируем третье равенство по индексам a и d из (2.67) и подставим в комплексно сопряженное ко второму равенству.

Альтернированное третье равенство.

$$-\xi_b(A^{bc}_{[ad]} - 2B^{bcf}B_{fad}) = -\xi_{[ad]}{}^c + \xi_{[a}{}^c{}_{d]} + \xi_{[a|b|}B^{bc}{}_{d]} + \xi_{[a}{}^bB_{d]b}{}^c$$

Комплексно сопрягаем второе и сразу заменяем свободные индексы, чтобы удобно было подставлять: $a\to c$, $d\to a$, $c\to d$.

$$-\xi^b(-A^c_{bda} + B^{cf}{}_{[d}B_{a]bf}) = \xi^c{}_{[ad]} + \xi^{cb}B_{bda}.$$

Подставляем.

$$-\xi_b(A^{bc}_{[ad]} - 2B^{bcf}B_{fad}) = -\xi_{[ad]}{}^c - \xi^b(-A^c_{bda} + B^{cf}{}_{[d}B_{a]df}) - \xi^{cb}B_{bda} + \xi_{[a|b|}B^{bc}{}_{d]} + \xi_{[a}{}^bB_{d]b}{}^c.$$

Окончательно получаем

$$\xi_{[ad]}{}^c = \xi_b(A^{bc}_{[ad]} - 2B^{bcf}B_{fad}) - \xi^b(-A^c_{bda} + B^{cf}{}_{[d}B_{a]bf}) - \xi^{cb}B_{bda} + \xi_{[a|b|}B^{bc}{}_{d]} + \xi_{[a}{}^bB_{d]b}{}^c.$$

□

Задача 2.18**.** Используя результат предыдущей задачи, докажите, что для многообразия Вайсмана-Грея размерности выше 4 имеет место тождество

$$\xi_{[ad]}{}^c = -2B^{bcf}B_{fad}\xi_b - \frac{2}{3}\xi^b\xi^cB_{abd} + \frac{2}{3}\xi^c\xi_{[da]} + \frac{1}{6}\xi^b\xi_{[bd]}\delta^c_a + \frac{1}{6}\xi^b\xi_{[ab]}\delta^c_d - \xi^{cb}B_{bda}.$$

Задача 2.19**.** Получите что-нибудь хорошее для четырехмерного многообразия Вайсмана-Грея.

§2.12. Компоненты некоторых классических тензоров в A-репере для многообразия Вайсмана-Грея.

12.1. Тензор Римана-Кристоффеля. Пусть M – многообразие Вайсмана-Грея со структурой (J,g). Напомним, что *тензором Римана-Кристоффеля* называется тензор кривизны римановой связности метрики g. Рассмотрим структурные уравнения связности

$$d\theta^i_j = -\theta^i_k\wedge\theta^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jk\ell}\omega^k\wedge\omega^\ell, \tag{2.68}$$

где $\{R^i_{jk\ell}\}$ – компоненты тензора кривизны связности на пространстве расслоения всех вещественных реперов, $\{\theta^i_j\}$ – тензорные компоненты формы кривизны связности. На пространстве расслоения A-реперов структурные уравнения связности будут иметь такой же вид, но все входящие в них объекты должны быть заменены на их комплексификации. Как обычно мы будем подразумевать комплексификацию объекта, но писать ее не будем. Итак, теперь уравнения (2.68) записаны на пространстве расслоения A-реперов, а значит, индексы могут принимать два вида значений: с крышкой и без крышки. Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть $i = a$, $j = b$. Тогда
$$d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b - \theta^a_{\hat{c}} \wedge \theta^{\hat{c}}_b + \frac{1}{2} R^a_{bk\ell} \omega^k \wedge \omega^\ell.$$
Применим лемму 2.5.
$$d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b - (-B^{ac}{}_d \omega^d + B^{acd} \omega_d) \wedge (-B_{cb}{}^f \omega_f + B_{cbf} \omega^f) + \frac{1}{2} R^a_{bk\ell} \omega^k \wedge \omega^\ell.$$
Раскроем скобки и распишем подробно последнее слагаемое.
$$d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b - B^{ac}{}_d B_{cb}{}^f \omega^d \wedge \omega_f + B^{ac}{}_d B_{cbf} \omega^d \wedge \omega^f + B^{acd} B_{cb}{}^f \omega_d \wedge \omega_f - B^{acd} B_{cbf} \omega_d \wedge \omega^f + \frac{1}{2} R^a_{bcd} \omega^c \wedge \omega^d +$$
$$+ \frac{1}{2} R^a_{b\hat{c}\hat{d}} \omega_c \wedge \omega_d + R^a_{b\hat{c}d} \omega_c \wedge \omega^d$$
Сообразите самостоятельно, куда в последнем слагаемом делся коэффициент $\frac{1}{2}$. Здесь мы переобозначили $\omega^{\hat{c}}$ на ω_c, а для функций $R^a_{b\hat{c}d}$ обозначения менять не стали. Таким образом, правило суммирования Эйнштейна нарушается, но суммирование по букве c у нас остается. Аналогичное замечание для буквы d.

Сравним полученное тождество со второй группой структурных уравнений (2.59). Тогда
$$(A^a_{bcd} - B^{af}{}_{[c} B_{d]bf}) \omega^c \wedge \omega^d + (A^{acd}_b + B_{bf}{}^{[c} B^{d]af}) \omega_c \wedge \omega_d + (A^{ac}_{bd} - 2B^{acf} B_{fbd}) \omega^d \wedge \omega_c = -B^{ac}{}_d B_{cb}{}^f \omega^d \wedge \omega_f +$$
$$+ B^{ac}{}_d B_{cbf} \omega^d \wedge \omega^f + B^{acd} B_{cb}{}^f \omega_d \wedge \omega_f - B^{acd} B_{cbf} \omega_d \wedge \omega^f + \frac{1}{2} R^a_{bcd} \omega^c \wedge \omega^d +$$
$$+ \frac{1}{2} R^a_{b\hat{c}\hat{d}} \omega_c \wedge \omega_d + R^a_{b\hat{c}d} \omega_c \wedge \omega^d$$
Соберем в скобки коэффициенты при одинаковых 2-формах.
$$(A^a_{bcd} - B^{af}{}_{[c} B_{d]bf} - B^{af}{}_c B_{fbd} - \frac{1}{2} R^a_{bcd}) \omega^c \wedge \omega^d + (A^{acd}_b + B_{bf}{}^{[c} B^{d]af} - B^{afc} B_{fb}{}^d - \frac{1}{2} R^a_{b\hat{c}\hat{d}}) \omega_c \wedge \omega_d +$$
$$+ (A^{ac}_{bd} - 2B^{acf} B_{fbd} + B^{af}{}_d B_{fb}{}^c - B^{afc} B_{fbd} + R^a_{b\hat{c}d}) \omega^d \wedge \omega_c = 0$$
Во внешних произведениях $\omega^c \wedge \omega^d$ и $\omega_c \wedge \omega_d$ одноиндексные омеги не упорядочены по номерам, следовательно, в левой части последнего равенства линейная комбинация не является разложением по базису 2-форм. Чтобы получить разложение по базису 2-форм, нужно скобки перед этими 2-формами проальтернировать по индексам c, d. Часть слагаемых этих скобок уже проальтернирована по этим индексам, следовательно, повторная альтернация ничего не изменит в этих слагаемых. Также эта альтернация ничего не изменит в функциях, которые были введены кососимметричными по индексам c, d. Например, в функциях A^a_{bcd}, R^a_{bcd}. Таким образом, после упорядочивания получим
$$2(A^a_{bcd} - B^{af}{}_{[c} B_{d]bf} - B^{af}{}_{[c} B_{|fb|d]} - \frac{1}{2} R^a_{bcd}) \omega^c \wedge \omega^d (c < d) + 2(A^{acd}_b + B_{bf}{}^{[c} B^{d]af} - B^{af[c} B_{fb}{}^{d]} - \frac{1}{2} R^a_{b\hat{c}\hat{d}}) \omega_c \wedge \omega_d (c < d) +$$
$$+ (A^{ac}_{bd} - 2B^{acf} B_{fbd} + B^{af}{}_d B_{fb}{}^c - B^{afc} B_{fbd} + R^a_{b\hat{c}d}) \omega^d \wedge \omega_c = 0$$
В последней скобке ω^d всегда предшествует $\omega_c \equiv \omega^{\hat{c}}$, а значит, в этом слагаемом уже все упорядочено. Используя свойство кососимметричности структурного тензора по любой паре индексов, в первой и второй скобках мы получим, что два слагаемых взаимно уничтожаются. Наконец, воспользуемся линейной независимостью базисных форм
$$R^a_{bcd} = 2A^a_{bcd}; \quad R^a_{b\hat{c}\hat{d}} = 2A^{acd}_b; \quad R^a_{b\hat{c}d} = -A^{ac}_{bd} + B^{acf} B_{fbd} - B^{af}{}_d B_{fb}{}^c.$$

2. Пусть $i = \hat{a}$, $j = b$. Тогда (2.68) примет вид
$$d\theta^{\hat{a}}_b = -\theta^{\hat{a}}_c \wedge \theta^c_b - \theta^{\hat{a}}_{\hat{c}} \wedge \theta^{\hat{c}}_b + \frac{1}{2} R^{\hat{a}}_{bk\ell} \omega^k \wedge \omega^\ell = -(-B_{ac}{}^d \omega_d + B_{acd} \omega^d) \wedge \theta^c_b + \theta^c_a \wedge (-B_{cd}{}^f \omega_f + B_{cdf} \omega^f) + \frac{1}{2} R^{\hat{a}}_{bk\ell} \omega^k \wedge \omega^\ell$$
Здесь мы воспользовались формулами из леммы 2.5 и формулами (2.13).

С другой стороны, продифференцируем внешним образом тождество $\theta^{\hat{a}}_b = -B_{ab}{}^c \omega_c + B_{abc} \omega^c$ из леммы 2.5 и подставим первую группу структурных уравнений и (2.59). Тогда
$$d\theta^{\hat{a}}_b = d(-B_{ab}{}^c \omega_c + B_{abc} \omega^c) = -dB_{ab}{}^c \wedge \omega_c - B_{ab}{}^c d\omega_c + dB_{abc} \wedge \omega^c + B_{abc} d\omega^c = -B_{ab}{}^c{}_d \omega^d \wedge \omega_c - B_{ab}{}^{cd} \omega_d \wedge \omega_c -$$
$$- B_{db}{}^c \theta^d_a \wedge \omega_c - B_{ad}{}^c \theta^d_b \wedge \omega_c + B_{ab}{}^d \theta^c_d \wedge \omega_c - B_{ab}{}^c (\theta^d_c \wedge \omega_d + B_{cdf} \omega^d \wedge \omega^f + B_{cd}{}^f \omega_f \wedge \omega^d) + B_{abcd} \omega^d \wedge \omega^c + B_{abc}{}^d \omega_d \wedge \omega^c +$$
$$+ B_{dbc} \theta^d_a \wedge \omega^c + B_{adc} \theta^d_b \wedge \omega^c + B_{abd} \theta^d_c \wedge \omega^c + B_{abc} (-\theta^c_d \wedge \omega^d + B^{cdf} \omega_d \wedge \omega_f + B^{cd}{}_f \omega^f \wedge \omega_d)$$

Левые части двух последних тождеств равны, значит равны и их правые части. Тогда после приведения подобных (проведите подробные расчеты самостоятельно) получим

$$\frac{1}{2}R^{\hat{a}}_{bcd}\omega^c\wedge\omega^d+R^{\hat{a}}_{b\hat{c}d}\omega_c\wedge\omega^d+\frac{1}{2}R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}}\omega_c\wedge\omega_d = B_{ab}{}^c{}_d\omega_c\wedge\omega^d+B_{ab}{}^{cd}\omega_c\wedge\omega_d-B_{ab}{}^fB_{fcd}\omega^c\wedge\omega^d-B_{ab}{}^fB_{fd}{}^c\omega_c\wedge\omega^d-$$
$$-B_{abcd}\omega^c\wedge\omega^d+B_{abd}{}^c\omega_c\wedge\omega^d+B_{abf}B^{fcd}\omega_c\wedge\omega_d-B_{abf}B^{fc}{}_d\omega_c\wedge\omega^d.$$

Собираем коэффициенты при одинаковых 2-формах и упорядочиваем индексы в этих формах (расстановка альтернаций и коэффициентов). В результате в силу линейной независимости базисных форм получаем (объясните, почему на некоторых функциях стоит альтернация, а на некоторых – нет)

$$R^{\hat{a}}_{bcd} = -2(B_{ab}{}^fB_{fcd}+B_{ab[cd]});\quad R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}} = 2(B_{ab}{}^{[cd]}+B_{abf}B^{fcd}).$$

Здесь получается еще одно равенство, но оно нам не нужно (покажем это ниже).

Остальные случаи индексов i и j в структурных уравнениях связности не дадут новых результатов. Докажем это. Во-первых, вспомним, что в курсе Анализ на многообразиях мы определили ковариантный тензор кривизны по формуле (запишем индексную форму этой формулы)

$$R_{ijk\ell} = g_{im}R^m_{jk\ell}.$$

В курсе Анализ на многообразиях в этом равенстве стояли компоненты тензоров кривизны в натуральном базисе. Как мы знаем (из курса тензорной алгебры), если компоненты тензоров равны в одном базисе, то они равны в любом другом базисе. Тогда на последнее соотношение можно смотреть как на равенство компонент в A-реперах тензора кривизны (а точнее его комплексификации). Распишем это равенство для различных возможных случаев свободных индексов.

$$R_{abcd} = g_{am}R^m_{bcd} = g_{af}R^f_{bcd}+g_{a\hat{f}}R^{\hat{f}}_{bcd} = \delta^f_aR^{\hat{f}}_{bcd} = R^{\hat{a}}_{bcd}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в A-реперах $g_{af}=0$. Итак,

$$R_{abcd} = R^{\hat{a}}_{bcd}.$$

Аналогичным образом можно показать, что $R_{\hat{a}bcd} = R^a_{bcd}$, то есть при перемещении индекса по вертикали он меняет свое состояние "с крыщкой – без крышки"на противоположное. Тогда полученные нами соотношения на компоненты тензора Римана-Кристоффеля можно записать в виде

$$\begin{array}{ll} R_{\hat{a}bcd} = 2A^a_{bcd}; & R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -A^{ac}_{bd}+B^{acf}B_{fbd}-B^{af}{}_dB_{fb}{}^c \\ R_{abcd} = -2(B_{ab}{}^fB_{fcd}+B_{ab[cd]}); & R_{ab\hat{c}\hat{d}} = 2(B_{ab}{}^{[cd]}+B_{abf}B^{fcd}). \end{array}\tag{2.69}$$

Так как ковариантный тензор Римана-Кристоффеля обладает следующими свойствами симметрии (см. курс Анализ на многообразиях)

$$1)\, R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell};\quad 2)\, R_{ijk\ell} = -R_{ij\ell k};\quad 3)\, R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}$$

и кроме того, является вещественным, то есть при комплексном сопряжении его компонент индексы с крышками становятся индексами без крышек и наоборот, получаем, что из перечисленных четырех компонент можно получить все остальные 12 компонент (всего их 16 штук).

12.2. Тензор Риччи. Свертка тензора Римана-Кристоффеля позволяет определить еще один тензор (точнее тензорное поле типа (2,0)) на любом римановом многообразии (в частности, на почти эрмитовом многообразии). Он называется *тензором Риччи* и определяется следующей формулой (также см. курс Анализ на многообразиях)

$$r_{jk} = R^i_{jik} \equiv g^{i\ell}R_{ij\ell k}.$$

Замечание 2.4. В литературе (середины прошлого века) также встречается еще одно определение тензора Риччи

$$r_{j\ell} = R^i_{j\ell i}.$$

В силу свойств симметрии тензора Римана-Кристоффеля, такой тензор Риччи отличается от введенного нами знаком.

Задача 2.20. Покажите, что тензор Риччи симметричен.

Указание: воспользуйтесь свойствами симметрии ковариантного тензора Римана-Кристоффеля.

Найдем компоненты тензора Риччи в A-реперах.

1. Пусть $j=a$, $k=b$. Тогда
$$r_{ab}=R^i_{abi}=R^c_{abc}+R^{\hat c}_{ab\hat c}=\sum_c(R_{\hat c abc}+R_{cab\hat c})=\sum_c(R_{\hat c abc}+R_{\hat c bac})=A^c_{acb}+A^c_{bca}=-A^c_{abc}-A^c_{bac}.$$
Здесь мы воспользовались свойствами симметрии ковариантного тензора Римана-Кристоффеля и выражения для компонент тензора Римана-Кристоффеля.

Воспользуемся второй формулой из теоремы 2.4.
$$r_{ab}=-2(A^c_{abc}+A^c_{bac})=-(\frac{1}{3}\xi_{a[b}\delta^c_{c]}+\frac{1}{3}\xi_{[bc]}\delta^c_a+\frac{2}{3}\xi_{[b|a|}\delta^c_{c]}+\frac{1}{3}\xi^fB_{fa[b}\delta^c_{c]}-\frac{1}{3}\xi^fB_{fbc}\delta^c_a+\frac{1}{2}\xi_a\xi_{[b}\delta^c_{c]}+\frac{1}{3}\xi_{b[a}\delta^c_{c]}+$$
$$+\frac{1}{3}\xi_{[ac]}\delta^c_b+\frac{2}{3}\xi_{[a|b|}\delta^c_{c]}+\frac{1}{3}\xi^fB_{fb[a}\delta^c_{c]}-\frac{1}{3}\xi^fB_{fac}\delta^c_b+\frac{1}{2}\xi_b\xi_{[a}\delta^c_{c]})=-(\frac{1}{6}n\xi_{ab}-\frac{1}{6}\xi_{ab}+\frac{1}{3}\xi_{[ba]}+\frac{1}{3}\xi_{ba}n-\frac{1}{3}\xi_{ba}+\frac{1}{6}\xi^fB_{fab}n-$$
$$-\frac{1}{6}\xi^fB_{fab}-\frac{1}{3}\xi^fB_{fba}++\frac{1}{4}n\xi_a\xi_b-\frac{1}{4}\xi_a\xi_b+\frac{1}{6}n\xi_{ba}-\frac{1}{6}\xi_{ba}+\frac{1}{3}\xi_{[ab]}+\frac{1}{3}\xi_{ab}n-\frac{1}{3}\xi_{ab}+\frac{1}{6}\xi^fB_{fba}n-\frac{1}{6}\xi^fB_{fba}-\frac{1}{3}\xi^fB_{fab}+$$
$$+\frac{1}{4}n\xi_b\xi_a-\frac{1}{4}\xi_b\xi_a)=-\frac{n-1}{2}(\xi_{ab}+\xi_{ba}+\xi_a\xi_b).$$

2. Пусть $j=\hat a$, $k=b$. Тогда
$$r_{\hat ab}=R^c_{\hat acb}+R^{\hat c}_{\hat a\hat cb}=R_{\hat c\hat acb}+R_{c\hat a\hat cb}=-\bar R_{ca\hat b\hat c}-R_{\hat ac\hat cb}.$$
Используя найденные компоненты тензора Римана-Кристоффеля, найдем $\bar R_{ca\hat b\hat c}$. Для компонент структурного тензора мы уже знаем правило комплексного сопряжения (см. предложение 2.1). Для функций $B_{ab}{}^{cd}$ получите правило комплексного сопряжения самостоятельно, используя уравнения (2.59). Как подсказывает интуиция в результате получится следующее правило
$$\overline{B_{ab}{}^{cd}}=B^{ab}{}_{cd}.$$
Возвращаемся к вычислению компонент тензора Риччи.
$$r_{\hat ab}=-(2B^{ca}{}_{[bc]}+2B^{caf}B_{fbc}-A^{ac}_{cb}+B^{acf}B_{fcb}-B^{af}{}_bB_{fc}{}^c))=-((B^{ca}{}_{bc}-B^{ca}{}_{cb})-3B^{acf}B_{fbc}-A^{ac}_{cb}-$$
$$-\frac{1}{4}(\xi^a\delta^f_b-\xi^f\delta^a_b)(\xi_f\delta^c_c-\xi_c\delta^c_f))=-(\xi^{[c}{}_c\delta^{a]}_b-\xi^{[c}{}_b\delta^{a]}_c-3B^{acf}B_{fbc}-A^{ac}_{cb}-\frac{1}{4}(n\xi^a\xi_b-\xi^a\xi_b-\xi^f\xi_f\delta^a_bn+\xi^f\xi_f\delta^a_b))=$$
$$=-(\frac{1}{2}(\xi^c{}_c\delta^a_b-\xi^a{}_b-\xi^a{}_b+\xi^a_bn)-3B^{acf}B_{fbc}-A^{ac}_{cb}-\frac{1}{4}((n-1)\xi^a\xi_b-(n-1)\xi^f\xi_f\delta^a_b))=$$
$$=-(\frac{n-2}{2}\xi^a{}_b+\frac{1}{2}\xi^c{}_c\delta^a_b-3B^{acf}B_{fbc}-A^{ac}_{cb}-\frac{n-1}{4}(\xi^a\xi_b-\xi^f\xi_f\delta^a_b)).$$

Так как тензор Риччи является вещественным и симметричным, то две оставшиеся группы компонент выражаются через найденные следующим образом:
$$r_{\hat a\hat b}=\bar r_{ab};\quad r_{a\hat b}=\bar r_{\hat ab}.$$
Итак, компоненты тензора Риччи в A-репере имеют вид
$$r_{ab}=-\frac{n-1}{2}(\xi_{ab}+\xi_{ba}+\xi_a\xi_b);\quad r_{\hat ab}=-(\tfrac{n-2}{2}\xi^a{}_b+\tfrac{1}{2}\xi^c{}_c\delta^a_b-3B^{acf}B_{fbc}-A^{ac}_{cb}-\tfrac{n-1}{4}(\xi^a\xi_b-\xi^f\xi_f\delta^a_b));$$
$$r_{\hat a\hat b}=-\frac{n-1}{2}(\xi^{ab}+\xi^{ba}+\xi^a\xi^b);\quad r_{a\hat b}=-(\tfrac{n-2}{2}\xi_a{}^b+\tfrac{1}{2}\xi_c{}^c\delta^b_a-3B_{acf}B^{fbc}-A^{cb}_{ac}-\tfrac{n-1}{4}(\xi_a\xi^b-\xi_f\xi^f\delta^b_a)).$$

Замечание 2.5**.** Кроме тензора Риччи есть еще так называемый *эндоморфизм Риччи.* Он обозначается ric и определяется следующим образом:
$$g(ric(X),Y)=r(X,Y),\ X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$
В компонентах это равенство примет вид
$$g_{ij}r^j_k=r_{ik},$$
где r^j_k обозначены компоненты эндоморфизма Риччи.

В A-репере для эндоморфизма Риччи получим
$$r_{ab}=g_{aj}r^j_b=\delta^c_ar^{\hat cb}=r^{\hat a}_b.$$
Аналогично можно получить соотношения для остальных компонент (посчитайте самостоятельно). Мы видим, что компоненты тензора Риччи и эндоморфизма Риччи следующим образом: при перемещении индекса он теряет крышку, если она была, или приобретает ее, если не было.

Так как тензор Риччи симметричен, нам все равно на какое место (первое или второе опускать индекс у эндоморфизма Риччи. Поэтому компоненты $r^{\hat a}{}_b=r_b{}^{\hat a}$ мы будем обозначать $r^{\hat a}_b$. Для компонент $r^a_{\hat b}$, r^a_b, $r^{\hat a}_{\hat b}$ вводится аналогичная договоренность.

12.3. Скалярная кривизна. *Скалярной кривизной* называется функция

$$\varkappa = g^{ij} r_{ij}.$$

Вычислим скалярную кривизну в A-репере. Заметим, что матрица (g^{ij}) является обратной к матрице (g_{ij})

$$\varkappa = g^{a\hat{b}} r_{a\hat{b}} + g^{\hat{a}b} r_{\hat{a}b} = 2\sum_{a=1}^{n} r_{aa} = -(2(n-1)\xi^c{}_c - 6B^{acf}B_{acf} - 2A^{ac}_{ca} + \frac{(n-1)^2}{2}\xi^a\xi_a)).$$

12.4. Важное следствие. Для многообразия Вайсмана-Грея размерности выше 2 имеет место тождество

$$\xi^a{}_a = \xi_a{}^a.$$

Для многообразий Вайсмана-Грея размерности выше 4 имеет место тождество

$$\xi^a{}_b = \xi_b{}^a.$$

Действительно, рассмотрим компоненту тензора Римана-Кристоффеля вида

$$R_{ab\hat{c}\hat{d}} = 2(B_{ab}{}^{[cd]} + B_{abf}B^{fcd}).$$

Так как тензор Римана-Кристоффеля вещественен и обладает свойствами симметрии, получим

$$R_{ab\hat{c}\hat{d}} = R_{\hat{c}\hat{d}ab} = \bar{R}_{cd\hat{a}\hat{b}}.$$

Подставим в полученное равенство значения компонент тензора Римана-Кристоффеля (2.69).

$$2B_{ab}{}^{[cd]} + 2B_{acf}B^{fcd} = \overline{2B_{cd}{}^{[ab]}} + 2B_{cdf}B^{fab} = 2B^{cd}{}_{[ab]} + 2B^{cdf}B_{fab}.$$

В силу кососимметричности структурного тензора получим

$$B_{ab}{}^{[cd]} = B^{cd}{}_{[ab]}.$$

Воспользуемся результатом задачи 2.15.

$$\xi_{[a}{}^{[d}\delta^{c]}_{b]} = \xi^{[c}{}_{[b}\delta^{d]}_{a]}$$

Раскроем альтернацию (на $\frac{1}{4}$ сразу сокращаем).

$$\xi_a{}^d\delta^c_b + \xi_b{}^c\delta^d_a - \xi_a{}^c\delta^d_b - \xi_b{}^d\delta^c_a = \xi^d{}_a\delta^c_b + \xi^c{}_b\delta^d_a - \xi^c{}_a\delta^d_b - \xi^d{}_b\delta^c_a.$$

Свернем эти тождества по индексам b и d. Это означает что из множества полученных равенств мы выберем те, у которых индексы b и d одинаковые (обозначим эти равные индексы одной буквой, например, b) и почленно их сложим. В результате получим

$$2\xi_a{}^c - n\xi_a{}^c - \xi_b{}^b\delta^c_a = -\xi^c{}_a n - \xi^b{}_b\delta^c_a + 2\xi^c{}_a. \qquad (2.70)$$

Теперь свернем по индексам a и c.

$$2(1-n)\xi_b{}^b = 2(1-n)\xi^b{}_b.$$

Так как размерность многообразия больше 2, n больше 1, и на числовой коэффициент можно сократить. В результате получим первое из требуемых соотношений. Подставим это соотношение в (2.70). После приведения подобных получим

$$(2-n)\xi_a{}^c = (2-n)\xi^c{}_a.$$

Для многообразий Вайсмана-Грея размерности выше 4 ($n > 2$) из этого следует, что $\xi_a{}^c = \xi^c{}_a$.

§2.13. Конформные преобразования. Конформно инвариантные классы многообразий Вайсмана-Грея.

13.1. Пусть дано гладкое многообразие M с почти эрмитовой структурой $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$. В частности, это многообразие является римановым, а значит, для него определено понятие конформного преобразования. Напомним (см. курс Анализ на многообразиях), что *конформным преобразованием* риманова многообразия называется переход от римановой метрики g к римановой метрике $\tilde{g} = e^{2f}g$. Легко видеть (покажите самостоятельно), что почти комплексная структура J согласована с метрикой $\tilde{g}$, а значит, определяет на гладком многообразии M почти эрмитову структуру. Для краткости договоримся обозначать почти эрмитово многообразие (M, J, g) через $\mathscr{M}$, а почти эрмитово многообразие $(M, J, \tilde{g})$ – через $\tilde{\mathscr{M}}$.

Если для каждой точки риманова многообразия (M, g) существует окрестность U и функция f, заданная на этой окрестности, такие что риманово многообразие $(U, \tilde{g} = e^{2f} g)$ является евклидовым (то есть тензор Римана-Кристоффеля этого многообразия тождественно равен нулю), то многообразие (M, g) называется *локально конформно плоским.* Если существует функция f, заданная на всем многообразии M, то многообразие (M, g) называется *глобально конформно плоским.*

Хорошо известно (см. Рашевский "Риманова геометрия и тензорный анализ"или Постников "Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия"), что риманово многообразие (размерности выше 3) является локально конформно плоским тогда и только тогда, когда в нуль обращается так называемый *тензор Вейля конформной кривизны* (точнее, ковариантный тензор Вейля конформной кривизны. Для тензора конформной кривизны, так же как для тензора Римана-Кристоффеля есть тензор типа (3,1), определяемый формулой $W^i_{jk\ell} = g^{it} W_{tjk\ell}$, который мы также будем называть тензором Вейля конформной кривизны)

$$W_{ij,k\ell} = R_{ij,k\ell} - \frac{1}{n-2}\left(g_{ik} r_{j\ell} - g_{i\ell} r_{jk} - g_{jk} r_{i\ell} + g_{j\ell} r_{ik}\right) + \frac{\varkappa}{(n-1)(n-2)}(g_{ik} g_{j\ell} - g_{i\ell} g_{jk}).$$

где n – размерность гладкого многообразия M.

Заметим, что из классической дифференциальной геометрии известно, что любое двумерное риманово многообразие является локально конформно плоским. Для трехмерного риманова многообразия критерий локальной конформной плоскости приобретает другой вид (см. Рашевский "Риманова геометрия и тензорный анализ"), а тензор Вейля конформной кривизны в нем всегда равен нулю. Обратите внимание, что в книгах Рашевского и Постникова тензор Вейля конформной кривизны отличается друг от друга знаками. Это обусловлено тем, что в этих книгах по-разному определен тензор Риччи: $r_{jk} = R^i_{jki}$ – у Рашевского и $r_{jk} = R^i_{jik}$ – у Постникова. Мы определили тензор Риччи также, как в книге Постникова и поэтому возьмем формулу для тензора Вейля конформной кривизны именно из этой книги.

Задача 2.21**.** Докажите, что тензор Вейля конформной кривизны W обладает следующими свойствами симметрии

$$1)\, W_{ijk\ell} = -W_{jik\ell}; \quad 2)\, W_{ijk\ell} = -W_{ij\ell k}; \quad 3)\, W_{ijk\ell} = W_{k\ell ij}.$$

Это те же самые свойства симметрии, что и у тензора Римана-Кристоффеля.

13.2. Так как любое почти эрмитово многообразие, в частности, является римановым, то для него также определены понятия локальной конформной плоскости и тензора Вейля конформной кривизны. Так как размерность почти эрмитова многообразия четна и обозначена $2n$, тензор Вейля конформной кривизны для почти эрмитова многообразия имеет вид

$$W_{ijk\ell} = R_{ijk\ell} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{ik} g_{j\ell} + r_{j\ell} g_{ik} - r_{i\ell} g_{jk} - r_{jk} g_{i\ell}) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{jk} g_{i\ell} - g_{j\ell} g_{ik}),$$

Найдем компоненты тензора Вейля конформной кривизны для многообразий Вайсмана-Грея. Так как тензор Вейля конформной кривизны обладает теми же свойствами симметрии, что и тензор Римана-Кристоффеля, и вещественен, он тоже имеет четыре компоненты, через которые выражаются все остальные 12 компонент. Найдем эти четыре компоненты.

1. Пусть $i = a$, $j = b$, $k = c$, $\ell = d$. Тогда

$$W_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{ac} g_{bd} + r_{bd} g_{ac} - r_{ad} g_{bc} - r_{bc} g_{ad}) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{bc} g_{ad} - g_{bd} g_{ac}) = R_{abcd} = \\ = -2(B_{ab}{}^f B_{fcd} + B_{ab[cd]}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $g_{ab} = 0$ и выражением для компонент тензора Римана-Кристоффеля.

2. $i = \hat{a}$, $j = b$, $k = c$, $\ell = d$. Тогда

$$W_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}bcd} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{\hat{a}c} g_{bd} + r_{bd} g_{\hat{a}c} - r_{\hat{a}d} g_{bc} - r_{bc} g_{\hat{a}d}) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{bc} g_{\hat{a}d} - g_{bd} g_{\hat{a}c}) = \\ = R_{\hat{a}bcd} - \frac{1}{2(n-1)}(r_{bd}\delta^a_c - r_{bc}\delta^a_d)$$

Подставим в это выражение компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тензора Риччи.

$$W_{\hat{a}bcd} = 2A^a_{bcd} + \frac{1}{4}((\xi_{bd} + \xi_{db} + \xi_b \xi_d)\delta^a_c - (\xi_{bc} + \xi_{cb} + \xi_b \xi_c)\delta^a_d).$$

3. $i=\hat{a}$, $j=\hat{b}$, $k=c$, $\ell=d$. Тогда

$$W_{\hat{a}\hat{b}cd}=R_{\hat{a}\hat{b}cd}-\frac{1}{2(n-1)}(r_{\hat{a}c}g_{\hat{b}d}+r_{\hat{b}d}g_{\hat{a}c}-r_{\hat{a}d}g_{\hat{b}c}-r_{\hat{b}c}g_{\hat{a}d})-\frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{\hat{b}c}g_{\hat{a}d}-g_{\hat{b}d}g_{\hat{a}c})=$$
$$=R_{\hat{a}\hat{b}cd}-\frac{1}{2(n-1)}(r^a_c\delta^b_d+r^b_d\delta^a_c-r^a_d\delta^b_c-r^b_c\delta^a_d)-\frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(\delta^b_c\delta^a_d-\delta^b_d\delta^a_c).$$

Здесь мы не будем пока подставлять компоненты тензоров Римана-Кристоффеля и Риччи. Оставим эту компоненту в таком виде.

4. $i=\hat{a}$, $j=b$, $k=\hat{c}$, $\ell=d$. Тогда

$$W_{\hat{a}b\hat{c}d}=R_{\hat{a}b\hat{c}d}-\frac{1}{2(n-1)}(r_{\hat{a}\hat{c}}g_{bd}+r_{bd}g_{\hat{a}\hat{c}}-r_{\hat{a}d}g_{b\hat{c}}-r_{b\hat{c}}g_{\hat{a}d})-\frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}(g_{b\hat{c}}g_{\hat{a}d}-g_{bd}g_{\hat{a}\hat{c}})=$$
$$=-A^{ac}_{bd}+B^{acf}B_{fbd}-B^{af}{}_{d}B_{fb}{}^{c}+\frac{1}{2(n-1)}(r^a_d\delta^c_b+r^c_b\delta^a_d)-\frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}\delta^c_b\delta^a_d.$$

13.3. Хорошо известно (Рашевский "Риманова геометрия и тензорный анализ"), что тензор Вейля конформной кривизны $W^i_{jk\ell}$ является конформно инвариантным, то есть он один и тот же для исходного почти эрмитова многообразия и конформно преобразованного. Ковариантный тензор Вейля при конформном преобразовании изменяется следующим образом

$$\tilde{W}_{ijk\ell}=\tilde{g}_{it}\tilde{W}^t_{jk\ell}=e^{2f}g_{it}W^t_{jk\ell}=e^{2f}W_{ijk\ell}.$$

Из этого следует, что $W_{ijk\ell}=0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{W}_{ijk\ell}=0$, то есть обращение в нуль тензора Вейля является конформно инвариантным условием, следовательно, класс почти эрмитовых многообразий, для которых $W_{ijk\ell}=0$, является замкнутым относительно конформных преобразований. Другими словами, если взять почти эрмитово многообразие, для которого $W_{ijk\ell}=0$, и подвергнуть его конформному преобразованию, то получим почти эрмитово многообразие, для которого также $\tilde{W}_{ijk\ell}=0$. Как мы отмечали выше, это условие в размерности выше трех равносильно конформной евклидовости исходного многообразия.

На пространстве расслоения A-реперов компоненты тензора Вейля делятся на четыре группы. В каждую из них входят компоненты найденные нами выше и компоненты, получающиеся с помощью свойств симметрии тензора Вейля и его вещественности. Обозначим эти классы следующим образом:

$$C_0:\ W_{abcd}=0;\quad C_1:\ W_{\hat{a}bcd}=0;$$
$$C_2:\ W_{\hat{a}\hat{b}cd}=0;\quad C_3:\ W_{\hat{a}b\hat{c}d}=0.$$

Найдем критерии принадлежности многообразия Вайсмана-Грея каждому из перечисленных классов.

Рассмотрим класс C_0. С учетом результатов предыдущего пункта получим, что многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_0 тогда и только тогда, когда

$$B_{ab}{}^{f}B_{fcd}+B_{ab[cd]}=0. \tag{2.71}$$

Напомним, что при проведении дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений многообразий Вайсмана-Грея мы получили следующее тождество (см. (2.10.))

$$B_{a[bcd]}+B_{a[b}{}^{f}B_{cd]f}=0. \tag{2.72}$$

В силу кососимметричности функций B_{abcd} по первым трем индексам мы можем переписать первое слагаемое последнего тождества в виде

$$B_{a[bcd]}=\frac{1}{3}(B_{abcd}+B_{acdb}+B_{adbc})=\frac{1}{3}(B_{abcd}-B_{adcb}+B_{adbc})=\frac{1}{3}(B_{abcd}+2B_{ad[bc]})$$

Подставим полученное выражение и (2.71) в (2.72):

$$\frac{1}{3}(B_{abcd}-2B_{ad}{}^{f}B_{fbc})+B_{a[b}{}^{f}B_{cd]f}=0.$$

Раскроем альтернацию и учтем примитивность виртуального тензора.

$$\frac{1}{3}(B_{abcd}-2B_{ad}{}^{f}B_{fbc})+\frac{1}{3}(B_{ab}{}^{f}B_{cdf}+B_{ac}{}^{f}B_{dbf}+B_{ad}{}^{f}B_{bcf})=0$$
$$B_{abcd}-\xi_aB_{dbc}+\xi_dB_{abc}+\frac{1}{2}(\xi_aB_{cdb}-\xi_bB_{cda}+\xi_aB_{dbc}-\xi_cB_{dba}+\xi_aB_{bcd}-\xi_dB_{bcf})=0 \tag{2.73}$$

Приводя подобные и используя обозначения для альтернации и симметризации по индексам, получим

$$B_{abcd} = -\xi_{[a}B_{b]cd} - \xi_{(c}B_{d)ab}. \tag{2.74}$$

Непосредственно проверяется, что для многообразия Вайсмана-Грея, для которого выполняется (2.74), будет выполняться (2.71), а значит, многообразие принадлежит классу C_0.

Теорема 2.5. *Многообразие Вайсмана-Грея (размерности выше 2) принадлежит классу C_0 тогда и только тогда, когда выполнено тождество (2.74).*

Рассмотрим многообразие класса C_1, то есть

$$2A^a_{bcd} + \frac{1}{4}((\xi_{bd} + \xi_{db} + \xi_b\xi_d)\delta^a_c - (\xi_{bc} + \xi_{cb} + \xi_b\xi_c)\delta^a_d) = 0 \tag{2.75}$$

Напомним, что в теореме 2.4 мы получили следующую формулу, которая верна для любых многообразий Вайсмана-Грея

$$A^a_{bcd} = \frac{1}{6}\xi_{b[c}\delta^a_{d]} + \frac{1}{6}\xi_{[cd]}\delta^a_b + \frac{1}{3}\xi_{[c|b|}\delta^a_{d]} + \frac{1}{6}\xi^f B_{fb[c}\delta^a_{d]} - \frac{1}{6}\xi^f B_{fcd}\delta^a_b + \frac{1}{4}\xi_b\xi_{[c}\delta^a_{d]}. \tag{2.76}$$

Подставим (2.76) в (2.75).

$$\frac{1}{3}\xi_{b[c}\delta^a_{d]} + \frac{1}{3}\xi_{[cd]}\delta^a_b + \frac{2}{3}\xi_{[c|b|}\delta^a_{d]} + \frac{1}{3}\xi^f B_{fb[c}\delta^a_{d]} - \frac{1}{3}\xi^f B_{fcd}\delta^a_b + \frac{1}{2}\xi_b\xi_{[c}\delta^a_{d]} + \frac{1}{4}((\xi_{bd} + \xi_{db} + \xi_b\xi_d)\delta^a_c - (\xi_{bc} + \xi_{cb} + \xi_b\xi_c)\delta^a_d) = 0$$

Раскроем альтернации, сгруппируем их по-другому и приведем подобные.

$$-\frac{1}{6}\xi_{[bc]}\delta^a_d + \frac{1}{6}\xi_{[bd]}\delta^a_c + \frac{1}{3}\xi_{[cd]}\delta^a_b + \frac{1}{6}\xi^f B_{fbc}\delta^a_d - \frac{1}{6}\xi^f B_{fbd}\delta^a_c - \frac{1}{3}\xi^f B_{fcd}\delta^a_b = 0. \tag{2.77}$$

Так как пока все преобразования были равносильными, мы получили промежуточный критерий класса C_1.

Далее пойдут не равносильные преобразования. Свернем (2.77) по индексам a и d (выберем из всех уравнений (2.77), для которых $a = d$ и почленно сложим их).

$$\frac{1}{6}n\xi_{[cb]} + \frac{1}{6}\xi_{[bc]} + \frac{1}{3}\xi_{[cb]} + \frac{1}{6}n\xi^f B_{fbc} - \frac{1}{6}\xi^f B_{fbc} - \frac{1}{3}\xi^f B_{fcb} = 0.$$

Воспользуемся кососимметричностью альтернированного тензора и кососимметричностью структурного тензора.

$$\frac{1}{6}(n+1)(-\xi_{[bc]} + \xi^f B_{fbc}) = 0.$$

Окончательно получим

$$\xi_{[bc]} = \xi^f B_{fbc}. \tag{2.78}$$

Обратно, подставляя (2.78) в (2.77), получаем тождество вида $0 = 0$, следовательно,(2.78) и (2.77) равносильны. Таким образом, доказана

Теорема 2.6. *Многообразие Вайсмана-Грея (размерности выше 2) принадлежит классу C_1 тогда и только тогда, когда выполнено тождество (2.78).*

Рассмотрим класс C_2. Аналогично получаем (подробные вычисления проведите самостоятельно)

$$B^{abf}B_{fcd} = \xi^{[a}{}_{[c}\delta^{b]}_{d]} + \frac{1}{n-1}r^{[a}_{[c}\delta^{b]}_{d]} + \frac{\varkappa(\delta^b_c\delta^a_d - \delta^b_d\delta^a_c)}{4(2n-1)(n-1)}. \tag{2.79}$$

Теорема 2.7. *Многообразие Вайсмана-Грея (размерности выше 2) принадлежит классу C_2 тогда и только тогда, когда выполнено тождество (2.79).*

Рассмотрим класс C_3. Приравнивая соответствующую компоненту тензора Вейля нулю, получим

$$-A^{ac}_{bd} + B^{acf}B_{fbd} - B^{af}{}_d B_{fb}{}^c + \frac{1}{2(n-1)}(r^a_d\delta^c_b + r^c_b\delta^a_d) - \frac{\varkappa}{2(2n-1)(n-1)}\delta^c_b\delta^a_d = 0 \tag{2.80}$$

Проальтернируем это тождество по индексам b, d и подставим первое соотношение из (2.10.). После приведения подобных получим

$$B^{ac}{}_{[bd]} + B^{acf}B_{fbd} + \frac{1}{n-1}r^{[a}_{[d}\delta^{c]}_{b]} - \frac{\varkappa(\delta^c_b\delta^a_d - \delta^c_d\delta^a_b)}{4(2n-1)(n-1)} = 0.$$

Полученное тождество совпадает с критерием класса C_2 (убедитесь в этом самостоятельно), то есть класс C_3 включен в класс C_2.

Теорема 2.8. *Многообразие Вайсмана-Грея (размерности выше 2) принадлежит классу C_3 тогда и только тогда, когда выполнено тождество (2.80).*

Замечание 2.6. Можно показать, что кроме включения $C_3 \subset C_2$ имеет место следующее включение конформно инвариантных классов многообразий Вайсмана-Грея $C_1 \subset C_0$. Тогда, очевидно, что класс $C_1 \cap C_3$ совпадает с классом конформно плоских многообразий Вайсмана-Грея. Для него была получена следующая классификационная теорема

Теорема 2.9. *Многообразие Вайсмана-Грея размерности выше 4 является конформно плоским тогда и только тогда, когда локально конформно эквивалентно одному из следующих многообразий:*

1. *комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$;*
2. *шестимерной сфере S^6_k, $k > 0$;*
3. *многообразию $S^6_k \times S^2_{-k}$, $k > 0$, снабженных канонической приближенно келеровой структурой. Здесь символ S^m_k обозначает m-мерное пространство постоянной кривизны k.*

Также была получена классификационная теорема для класса $C_1 \cap C_2$.

§2.14. Отображения присоединенных G-структур почти эрмитовых многообразий, порожденные конформными преобразованиями почти эрмитовой структуры.

Пусть дано почти эрмитово многообразие $\mathscr{M} = (M, J, g)$ и конформно преобразованное почти эрмитово многообразие $\tilde{\mathscr{M}} = (M, J, \tilde{g} = e^{2f}g)$, где f – гладкая функция на многообразии M. Обозначим присоединенную G-структуру многообразия $\mathscr{M}$ через $\mathscr{P} = (P, M, \pi, U(n))$, а присоединенную G-структуру многообразия $\tilde{\mathscr{M}}$ через $\tilde{\mathscr{P}} = (\tilde{P}, M, \tilde{\pi}, U(n))$. Рассмотрим отображение

$$\psi : \tilde{P} \to P,$$

заданное следующим образом

$$\psi : p = (m, \varepsilon_i) \to \tilde{p} = (m, \tilde{\varepsilon}_i = e^{-f}(m)\varepsilon_i),$$

где $m = \pi(p) = \tilde{\pi}(\tilde{p})$ – точка многообразия M. Другими словами, отображение ψ не меняет вершины репера, а все вектора репера умножает на одно и то же вещественное число $e^{-f}(m)$.

Замечание 2.7. Отображение ψ индуцирует отображение дуальных реперов. Будем обозначать его той же буквой ψ. Оно задается следующим образом:

$$\psi : (m, u^i) \to (m, \tilde{u}^i = e^f(m)u^i). \qquad (2.81)$$

Действительно,

$$\tilde{u}^i(\tilde{\varepsilon}_j) = e^f(m)u^i(e^{-f}(m)\varepsilon_j) = u^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j.$$

Здесь мы воспользовались тем, что базисы (ε_i) и (u^j) являются дуальными.

Покажем, что отображение ψ задано корректно, то есть образом A-репера $p = (m, \varepsilon_i)$ будет A-репер, то есть $\tilde{p} \in \tilde{P}$. Для этого достаточно показать, что компоненты $\{\tilde{J}^i_j\}$ почти комплексной структуры J и компоненты $\{\tilde{g}_{ij}\}$ римановой метрики $\tilde{g}$ в репере $\tilde{p}$ имеют вид

$$(\tilde{J}^i_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}; \quad (\tilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.82)$$

По определению компонент тензорного поля в A-репере имеем

$$\tilde{J}^i_j(\tilde{p}) = J_m(\tilde{\varepsilon}_j, \tilde{u}^i) = J_m(e^{-f}(m)\varepsilon_j, e^f(m)u^i) = J_m(\varepsilon_j, u^i) = J^i_j(p).$$

Таким образом, матрица компонент почти комплексной структуры J в точках $\tilde{p}$ имеет такой же вид как матрица компонент J в точках p, то есть вид (2.82).

Задача 2.22. Докажите, что матрица компонент римановой метрики $\tilde{g}$ в точках $\tilde{p}$ имеет вид (2.82).

Итак. отображение ψ задано корректно. Очевидно, что ψ является диффеоморфизмом. Тогда пара отображений (ψ, id), где $id : U(n) \to U(n)$ является изоморфизмом главных расслоений $\mathscr{P}$ и $\tilde{\mathscr{P}}$.

Обозначим $\omega = \{\omega^i\}$ и $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}^i\}$ формы смещения для почти эрмитовых многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$ соответственно. Фиксируем на каждом из многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$ риманову связность.

Лемма 2.6. *Для форм смещения ω и $\tilde{\omega}$ имеем*

$$(\psi^*\tilde{\omega}^i)(p) = e^f \circ \pi(p)\omega^i(p) \equiv e^f(m)\omega^i(p).$$

Доказательство. Как мы видели в курсе Многомерная дифференциальная геометрия (I), любой базис $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})$ арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^{2n}$ порождает базис $(X_{\xi_1} \equiv X_1, \ldots, X_{\xi_{2n}} \equiv X_{2n})$ векторного пространства всех базисных полей пространства расслоения реперов. Рассмотрим, в частности, в качестве такого базиса стандартный базис арифметического векторного пространства

$$\xi_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \xi_{2n} = (0, \ldots, 0, 1).$$

Очевидно, что $\tilde{\pi} \circ \psi = \pi$, а значит, для дифференциалов этих отображений имеет место равенство

$$(\tilde{\pi}_*)_{\psi(p)} \circ (\psi_*)_p = (\pi_*)_p.$$

Тогда по определению формы смещения получим

$$\begin{aligned}(\psi^*\tilde{\omega})_p(X_i)_p = \psi^*_{\psi(p)}\tilde{\omega}_{\psi(p)}(X_i) = \tilde{\omega}_{\psi(p)}((\psi_*)_p(X_i)_p) = \tilde{p}^{-1} \circ (\tilde{\pi}_*)_{\tilde{p}} \circ (\psi_*)_p(X_i)_p = \tilde{p}^{-1}(\pi_*)_p(X_i)_p = \tilde{p}^{-1}p(\xi_i) = \\ = \tilde{p}^{-1}(\varepsilon_i) = \tilde{p}^{-1}(e^f(m)\tilde{\varepsilon}_i) = e^f(m)\tilde{p}^{-1}(\tilde{\varepsilon}_i) = e^f(m)\xi_i = e^f(m)\omega_p(X_i)_p.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой $(\phi^*\omega)_p = \phi^*_{\phi(p)}(\omega_{\phi(p)})$ – формула (1.27) из курса Многомерная дифференциальная геометрия (I). Эта формула связывает отображение антиувлечения форм и отображение антиувлечения ковекторов. Далее использовали определение отображения антиувлечения ковекторов, определение формы смещения, характеристическим свойством базисного векторного поля $\pi_* X_\xi = p(\xi)$ (см. § 4.2 курса Многомерная дифференциальная геометрия (I)).

Таким образом, получаем $(\psi^*\tilde{\omega})_p(X_i)_p = e^f(m)\omega_p(X_i)_p$ для любой точки $p \in P$, то есть $(\psi^*\tilde{\omega})(X_i) = e^f\omega(X_i)$.

Из определения отображения ψ следует, что оно переводит слой главного расслоения $\mathscr{P}$ в слой расслоения $\tilde{\mathscr{P}}$. Следовательно, касательное пространство к слою переходит в касательное пространство к слою при отображении $(\psi_*)_p$ для любой точки $p \in P$. Следовательно, вертикальное распределение $\mathscr{V}$ расслоения $\mathscr{P}$ под действием отображения ψ_* переходит в вертикальное распределение $\tilde{\mathscr{V}}$ расслоения $\tilde{\mathscr{P}}$.

Так как базисные векторные поля образуют базис горизонтального распределения, а форма смещения обращается в нуль на любом вертикальном векторном поле (то есть является горизонтальной формой), получим

$$\begin{aligned}(\psi^*\tilde{\omega})(X) = (\psi^*\tilde{\omega})(X_{\mathscr{V}} + X^iX_i) = (\psi^*\tilde{\omega})(X_{\mathscr{V}}) + X^i(\psi^*\tilde{\omega})(X_i) = \tilde{\omega}(\psi_*X_{\mathscr{V}}) \circ \psi + X^ie^f\omega(X_i) = \\ = 0 + e^f\omega(X^iX_i) = e^f\omega(X_{\mathscr{V}} + X^iX_i) = e^f\omega(X).\end{aligned}$$

для любого $X \in \mathfrak{X}(P)$. Здесь мы разложили векторное поле X на сумму вертикального и горизонтального векторного поля (так как $\mathfrak{X}(P) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$, горизонтальное распределение берется относительно римановой связности многообразия $\mathscr{M}$), а горизонтальное разложили по базису базисных векторных полей. □

Замечание 2.8. Лемма 2.6 и формула преобразования дуального A-репера (2.81) наводят на мысль, что компоненты формы смещения тесным образом связаны с ковекторами дуального A-репера (m, u^i). Это действительно так.

Рассмотрим форму смещения ω для главного расслоения A-реперов. Она вводится точно так же как в случае главного расслоения всех вещественных реперов (см. курс Многомерная дифференциальная геометрия)

$$\omega_p = p^{-1} \circ \pi_*,$$

где $p = (m, \varepsilon_i)$ – A-репер, π – отображение проекции.

Предположим, что на многообразии M (или что равносильно на пространстве расслоения всех реперов) фиксирована связность. Тогда для любого вектора $X \in T_m(M)$ на многообразии M определен горизонтальный лифт $i_{\mathscr{H}}X$ этого вектора в горизонтальную площадку $\mathscr{H}_p$, где p – A-репер, принадлежащий слою $\pi^{-1}(m)$, висящему над точкой m.

Подействуем касательный вектор $(i_{\mathscr{H}}X)_p$, $p \in P$ формой смещения

$$\omega_p(i_{\mathscr{H}}X) = p^{-1}X.$$

Здесь мы воспользовались определением горизонтального лифта, а именно, тем, что $\pi_* \circ i_{\mathscr{H}}(X) = X$. В правой части этого равенства стоит набор координат вектора X в базисе A-репера p, то есть набор из $2n$ чисел $(u^1(X), \ldots, u^{\hat{n}}(X))$ (здесь мы воспользовались определением дуального базиса). Правую часть этого равенства мы можем записать так: $\omega^i_p(i_{\mathscr{H}}X)\xi_i$, где ξ_i – стандартный базис арифметического векторного пространства, ω^i – тензорные компоненты формы смещения. Тогда

$$(\omega^1_p(i_{\mathscr{H}}X),\dots,\omega^{\hat{n}}_p(i_{\mathscr{H}}X)) = (u^1(X),\dots,u^{\hat{n}}(X)),$$

что означает $\omega^i_p(i_{\mathscr{H}}X) = u^i(X)$. Это верно для любого касательного вектора X, следовательно

$$\omega^i_p \circ i_{\mathscr{H}} = u^i,$$

где $p = (m, \varepsilon_i) \in P$ – произвольный A-репер, (m, u^i) – дуальный репер.

Обозначим римановы связности метрик g и $\tilde{g}$ через ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно. Пусть $\{\theta^a_b\}$ и $\{\tilde{\theta}^a_b\}$ компоненты форм связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ на пространствах присоединенных G-структур. Применим к формам $\tilde{\theta}^a_b$ отображение антиувлечения ψ^*. В результате мы получим некоторую 1-форму на многообразии P. Разложим эту форму по базису 1-форм $(\theta^a_b, \omega^c, \omega_d)$:

$$\psi^*\tilde{\theta}^a_b = A^{ac}_{bd}\theta^d_c + B^a_{bc}\omega^c + B^{ac}_b\omega_c, \tag{2.83}$$

где A^{ac}_{bd}, B^{ac}_b, B^a_{bc} – функции на многообразии P, которые мы сейчас найдем. Используем для этого первую группу структурных уравнений (2.16) почти эрмитовой структуры $(J, \tilde{g})$

$$d\tilde{\omega}^a = -\tilde{\theta}^a_b \wedge \tilde{\omega}^b + \tilde{B}^{abc}\tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}_c + \tilde{B}^{ab}{}_c\tilde{\omega}^c \wedge \tilde{\omega}_b, \tag{2.84}$$

где

$$\begin{array}{ll} \tilde{B}^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{J}^a_{\hat{b},c}; & \tilde{B}_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{J}^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \\ \tilde{B}^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{J}^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; & \tilde{B}_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\tilde{J}^{\hat{a}}_{[b,c]}, \end{array}$$

$\{\tilde{J}^i_{j,k}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала почти комплексной структуры J в римановой связности $\tilde{\nabla}$ метрики $\tilde{g}$.

Применим отображение антиувлечения ψ^* к равенству (2.84) и учтем, что отображение антиувлечения коммутирует с оператором внешнего дифференцирования d, обладает свойством $\psi^*(\omega\wedge\theta) = \psi^*\omega \wedge \psi^*\theta$ и для функций $\psi^*f = f\circ\psi$

$$d(\psi^*\tilde{\omega}^a) = -(\psi^*\tilde{\theta}^a_b)\wedge(\psi^*\tilde{\omega}^b) + (\tilde{B}^{abc}\circ\psi)(\psi^*\tilde{\omega}_b)\wedge(\psi^*\tilde{\omega}_c) + (\tilde{B}^{ab}{}_c\circ\psi)(\psi^*\tilde{\omega}^c)\wedge(\psi^*\tilde{\omega}_b).$$

С учетом леммы 2.6 получим

$$d((e^f\circ\pi)\omega^a) = -(\psi^*\tilde{\theta}^a_b)\wedge(e^f\circ\pi)\omega^b + (\tilde{B}^{abc}\circ\psi)(e^f\circ\pi)\omega_b\wedge(e^f\circ\pi)\omega_c + (\tilde{B}^{ab}{}_c\circ\psi)(e^f\circ\pi)\omega^c\wedge(e^f\circ\pi)\omega_b$$

Продифференцируем левую часть этого равенства

$$(e^f\circ\pi)d(f\circ\pi)\wedge\omega^a + (e^f\circ\pi)d\omega^a = -(e^f\circ\pi)(\psi^*\tilde{\theta}^a_b)\wedge\omega^b + (e^f\circ\pi)^2(\tilde{B}^{abc}\circ\psi)\omega_b\wedge\omega_c + (e^f\circ\pi)^2(\tilde{B}^{ab}{}_c\circ\psi)\omega^c\wedge\omega_b.$$

Сокращая на $(e^f\circ\pi)$ и используя первую группу структурных уравнений

$$d\omega^a = -\theta^a_b\wedge\omega^b + B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b$$

почти эрмитова многообразия $\mathscr{M}$, получим

$$d(f\circ\pi)\wedge\delta^a_b\omega^b - \theta^a_b\wedge\omega^b + B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c + B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b = -(\psi^*\tilde{\theta}^a_b)\wedge\omega^b + (e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{abc}\circ\psi)\omega_b\wedge\omega_c + (e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ab}{}_c\circ\psi)\omega^c\wedge\omega_b \tag{2.85}$$

Заметим, что $d(f\circ\pi) = d(\pi^*f) = \pi^*df$, где df – это 1-форма на многообразии M. Обозначим ее β. Форма $\pi^*\beta$ – это 1-форма на многообразии P. Покажем, что она является горизонтальной формой, то есть обращается в нуль на любом вертикальном векторном поле. Действительно, для любого вертикального векторного поля X имеем

$$\pi^*\beta(X) = \beta(\pi_*X)\circ\pi = \beta(0)\circ\pi = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что по определению вертикальные векторные поля – это поля π-связанные с нулевым векторным полем на базе M.

Тогда форма $\pi^*\beta$ будет раскладываться по базису ассоциированного кораспределения вертикального распределения, то есть по формам ω^i из базиса (θ^i_j, ω^k). Напомним, что эти формы являются тензорными компонентами формы смещения ω. Итак,

$$\pi^*\beta = \beta_i\omega^i. \tag{2.86}$$

Покажем, что функции β_i, определенные на пространстве расслоения A-реперов, являются компонентами формы β в A-реперах, то есть нужно показать, что $\beta_i(p) = \beta^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_i)$.

Возьмем горизонтальный лифт $i_{\mathscr{H}}$ произвольного векторного поля X на многообразии M, подействуем на него обеими частями равенства (2.86) и возьмем значение полученной функции в произвольной точке $p=(m,\varepsilon_i)\in P$, то есть в произвольном A-репере.

$$(\pi^*\beta)(i_{\mathscr{H}}X)(p)=(\beta_i\omega^i)(i_{\mathscr{H}}X)(p).$$

Воспользуемся определением тензорного поля как полилинейного отображения (см. курс Анализ на многообразиях) и определением умножения тензорного поля на функцию

$$(\pi^*\beta)_p(i_{\mathscr{H}}X)_p=\beta_i(p)\omega^i_p(i_{\mathscr{H}}X)_p.$$

Учтем замечание 2.8 и формулу, связывающую отображения увлечения форм и ковекторов $(\phi^*\omega)_p=\phi^*_{\phi(p)}\omega_{\phi(p)}$.

$$\pi^*_{\pi(p)}\beta_{\pi(p)}(i_{\mathscr{H}}X)_p=\beta_i(p)u^i(X_m).$$

Далее, используем определение отображения ковекторов (см. курс Многомерная дифференциальная геометрия (I))

$$\beta_m((\pi_*)_p(i_{\mathscr{H}}X)_p)=\beta_i(p)u^i(X_m).$$

По определению горизонтального лифта имеем $(\pi_*)_p(i_{\mathscr{H}}X)_p=X_m$. Тогда

$$\beta_m(X_m)=\beta_i(p)u^i(X_m).$$

Перейдем в этом равенстве к комплексификациям тензоров и подставим в качестве X_m вектор ε_j из A-репера p. Тогда

$$\beta^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_j)=\beta_i(p)u^i(\varepsilon_j)=\beta_i(p)\delta^i_j=\beta_j(p),$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к тождеству (2.85). В первое слагаемое левой части подставим $d(f\circ\pi)=\pi^*\beta=\beta_i\omega^i$. Сразу распишем сумму $\beta_i\omega^i=\beta_c\omega^c+\beta_{\hat{c}}\omega^{\hat{c}}=\beta_c\omega^c+\beta^c\omega_c$, где как обычно мы ввели обозначение $\beta_{\hat{c}}=\beta^c$ и $\omega^{\hat{c}}=\omega_c$ и подставим (2.83)

$$(\beta_c\omega^c+\beta^c\omega_c)\wedge\delta^a_b\omega^b-\delta^a_c\delta^b_d\theta^c_b\wedge\omega^d+B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b=-(A^{ac}_{bd}\theta^d_c+B^a_{bc}\omega^c+B^{ac}_b\omega_c)\wedge\omega^b+(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{abc}\circ\psi)\omega_b\wedge\omega_c+ \\ +(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ab}{}_c\circ\psi)\omega^c\wedge\omega_b$$

Обратите внимание, что слагаемое $(\beta_c\omega^c+\beta^c\omega_c)\wedge\omega^a$ мы записали (очевидно в равносильном) виде $(\beta_c\omega^c+\beta^c\omega_c)\wedge\delta^a_b\omega^b$. Это нужно для того, чтобы оно приняло вид: коэффициент, который суммируется с базисными 2-формами, который нужен для применения линейной независимости. Аналогичным образом мы поступили со слагаемым $\theta^a_b\wedge\omega^b$.

Сгруппируем подобные слагаемые, упорядочим базисные 1-формы и применим линейную независимость полученных базисных 2-форм (подробные вычисления проведите самостоятельно). Тогда

$$\begin{aligned}
&\theta^c_b\wedge\omega^d: && -\delta^b_d\delta^a_c=-A^{ab}_{dc};\\
&\omega^c\wedge\omega^b: && \beta_{[c}\delta^a_{b]}=-B^a_{[bc]};\\
&\omega_c\wedge\omega^b: && \beta^c\delta^a_b-B^{ac}{}_b=-B^{ac}_b-(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{ac}{}_b\circ\psi);\\
&\omega_b\wedge\omega_c: && B^{abc}=(e^f\circ\pi)(\tilde{B}^{abc}\circ\psi).
\end{aligned}\tag{2.87}$$

Первое из полученных соотношений подставим в (2.83)

$$\psi^*\tilde{\theta}^a_b=\theta^a_b+B^a_{bc}\omega^c+B^{ac}_b\omega_c.\tag{2.88}$$

Аналогичным образом рассмотрим второе тождество из первой группы структурных уравнений почти эрмитова многообразия $\tilde{\mathscr{M}}$

$$d\tilde{\omega}_a=\tilde{\theta}^b_a\wedge\tilde{\omega}_b+\tilde{B}_{abc}\tilde{\omega}^b\wedge\tilde{\omega}^c+\tilde{B}_{ab}{}^c\tilde{\omega}_c\wedge\tilde{\omega}^b.$$

Применим отображение антиувлечения ψ^*, лемму 2.6, первую группу структурных уравнений почти эрмитова многообразия $\mathscr{M}$, подставим равенства (2.88) и (2.86).

$$(\beta_b\omega^b+\beta^b\omega_b)\wedge\delta^c_a\omega_c+\theta^b_a\wedge\omega_b+B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b=(\theta^b_a+B^{bc}_a\omega_c+B^b_{ac}\omega^c)\wedge\omega_b+(e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{abc}\circ\psi)\omega^b\wedge\omega^c+ \\ +(e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c\circ\psi)\omega_c\wedge\omega^b.\tag{2.89}$$

Опять готовим последнее равенство к применению линейной независимости базисных 2-форм и получаем

$$\begin{aligned}
&\omega^b\wedge\omega_c: && \beta_b\delta^c_a-B_{ab}{}^c=B^c_{ab}-(e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c\circ\psi);\\
&\omega_b\wedge\omega_c: && \beta^{[b}\delta^{c]}_a=-B^{[bc]}_a;\\
&\omega^b\wedge\omega^c: && B_{abc}=(e^f\circ\pi)(\tilde{B}_{abc}\circ\psi).
\end{aligned}\tag{2.90}$$

Рассмотрим тождества (2.87) и (2.90). Найдем из них коэффициенты B_b^{ac} и B_{bc}^a для форм (2.88). Проальтернируем третье соотношение из (2.87) по индексам a и c с учетом кососимметричности компонент виртуальных тензоров многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$ по верхним индексам:

$$\beta^{[c}\delta_b^{a]} - B^{ac}{}_b = -B_b^{[ac]} - (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ac}{}_b \circ \psi)$$

и подставим в это выражение второе соотношение из (2.90)

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ac}{}_b \circ \psi) = B^{ac}{}_b + \beta^a \delta_b^c - \beta^c \delta_b^a.$$

Подставим это соотношение в третье соотношение из (2.87)

$$B_b^{ac} = -\beta^a \delta_b^c.$$

Аналогично (проведите подробные вычисления самостоятельно) находим

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c \circ \psi) = B_{ab}{}^c + \beta_a \delta_b^c - \beta_b \delta_a^c;$$
$$B_{ab}^c = \beta_a \delta_b^c.$$

Таким образом, для почти эрмитовых многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$ мы получаем следующие результаты

$$\begin{gathered}\psi^* \tilde{\theta}_b^a = \theta_b^a + \beta_b \delta_c^a \omega^c - \beta^a \delta_b^c \omega_c = \theta_b^a + \beta_b \omega^a - \beta^a \omega_b;\\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{ac}{}_b \circ \psi) = B^{ac}{}_b + \beta^a \delta_b^c - \beta^c \delta_b^a;\\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{ab}{}^c \circ \psi) = B_{ab}{}^c + \beta_a \delta_b^c - \beta_b \delta_a^c;\\ (e^f \circ \pi)(\tilde{B}^{abc} \circ \psi) = B^{abc}; (e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{abc} \circ \psi) = B_{abc};\end{gathered} \tag{2.91}$$

Пример 2.5**.** Напомним, что для произвольного многообразия Вайсмана-Грея определены форма Ли по формуле (2.44) и вектор Ли по формуле (2.45). Мы получили формулу, связывающую компоненты вектора Ли на пространстве расслоения A-реперов и компоненты виртуального тензора (2.46). Запишем ее еще раз.

$$\xi_b = \tfrac{-2}{n-1} B_{cb}{}^c \quad \xi^b = \tfrac{-2}{n-1} B^{cb}{}_c.$$

Вторая формула получается из первой комплексным сопряжением.

Используя формулы (2.91), вычислим как связаны между собой компоненты векторов Ли ξ и $\tilde{\xi}$ почти эрмитовых многообразий $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$. Имеем

$$\begin{aligned}(e^f \circ \pi)(\tilde{\xi}_b \circ \psi) = (e^f \circ \pi)(\frac{-2}{n-1}\tilde{B}_{cb}{}^c \circ \psi) = \frac{-2}{n-1}(e^f \circ \pi)(\tilde{B}_{cb}{}^c \circ \psi) &= \frac{-2}{n-1}(B_{cb}{}^c + \beta_c \delta_b^c - \beta_b \delta_c^c) =\\ &= \frac{-2}{n-1}(B_{cb}{}^c + \beta_b - n\beta_b) = \xi_b + 2\beta_b.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{\xi}_b \circ \psi) = \xi_b + 2\beta_b.$$

Чтобы получить вторую группу компонент вектора Ли $\tilde{\xi}$, комплексно сопряжем полученное равенство (для тренировки самостоятельно проведите для этих компонент рассуждения аналогичные предыдущим)

$$(e^f \circ \pi)(\tilde{\xi}^b \circ \psi) = \xi^b + 2\beta^b.$$

Замечание 2.9**.** Для дальнейших расчетов нам нужно будет разобраться с формой β. Так как β является тензорным полем типа (1,0) по основной теореме тензорного анализа ее компоненты β_i на пространстве расслоения всех реперов удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\beta_i - \beta_j \theta_i^j = \beta_{i,j}\omega^j,$$

где $\{\beta_{i,j}\}$ – система функций на пространстве расслоения всех реперов, являющаяся компонентами ковариантного дифференциала формы β в римановой связности ∇ метрики g.

Аналогично примеру 2.2 перекидываем это равенство на пространство расслоения A-реперов и расписываем возможные случаи для индекса i.

1. Пусть $i = a$. Тогда

$$d\beta_a - \beta_b \theta_a^b - \beta_{\hat{b}} \theta_a^{\hat{b}} = \beta_{a,b}\omega^b + \beta_{a,\hat{b}}\omega^{\hat{b}}.$$

   Воспользуемся задачей 2.2.

$$d\beta_a - \beta_b \theta_a^b - \beta^b(-B_{bc}{}^d \omega_d + C_{bcd}\omega^d) = \beta_{a,b}\omega^b + \beta_{a,}{}^b\omega_b. \tag{2.92}$$

Здесь мы ввели обозначения $\beta^b = \beta_{\hat{b}}$, $\beta_{a,}{}^b = \beta_{a,\hat{b}}$, и как всегда $\omega^{\hat{b}} = \omega_b$. Заметим, что 1-форма $d\beta_a - \beta_b\theta_a^b$ раскладывается по 1-формам ω^b, ω_b (см. последнее равенство). Введем обозначение

$$d\beta_a - \beta_b\theta_a^b = \beta_{ab}\omega^b + \beta_a{}^b\omega_b$$

и подставим его в (2.92).

$$\beta_{ab}\omega^b + \beta_a{}^b\omega_b + \beta^b B_{ba}{}^d\omega_d - \beta^b C_{bad}\omega^d = \beta_{a,b}\omega^b + \beta_{a,}{}^b\omega_b.$$

В силу линейной независимости базисных форм имеем

$$\beta_{a,b} = \beta_{ab} - \beta^d C_{dab}; \quad \beta_{a,}{}^b = \beta_a{}^b + \beta^d B_{da}{}^b. \tag{2.93}$$

2. Для $i = \hat{a}$ рассуждения аналогичны (проведите самостоятельно). В результате получим

$$d\beta^a + \beta^b\theta_b^a = \beta^{ab}\omega_b + \beta^a{}_b\omega^b$$

и

$$\beta^{a,b} = \beta^{ab} - \beta_d C^{dab}; \quad \beta^a{}_{,b} = \beta^a{}_b + \beta_d B^{da}{}_b, \tag{2.94}$$

где $\beta^a{}_{,b} = \beta_{\hat{a},b}$, $\beta^{a,b} = \beta_{\hat{a},\hat{b}}$ – обозначения.

Далее, так как форма β точная, то есть $\beta = df$, получим $d\beta = 0$. Из курса Многомерная дифференциальная геометрия (I) мы знаем, что для 1-формы ω имеет место равенство $d\omega = -Alt\nabla\omega$. Записывая это равенство для формы β в компонентах, мы получим $0 = \beta_{[i,j]}$, то есть

$$\beta_{a,b} = \beta_{b,a}; \quad \beta_{a,}{}^b = \beta^b_{,a}.$$

С учетом формул (2.93) и (2.94) из этого получим

$$\beta_{[ab]} = \beta^d C_{dab}; \quad \beta_a{}^b - \beta^b{}_a = \beta_d B^{db}{}_a - \beta^d B_{da}{}^b.$$

В частности, для многообразий Вайсмана-Грея $C_{abc} = B_{abc}$. Тогда последняя пара формул примет вид

$$\beta_{[ab]} = \beta^d B_{dab}; \quad \beta_a{}^b - \beta^b{}_a = \beta_d B^{db}{}_a - \beta^d B_{da}{}^b.$$

Задача 2.23. Докажите, что для произвольного почти эрмитова многообразия имеют место соотношения

$$(e^{2f}\circ\pi)(\tilde{\xi}_a{}^b\circ\psi) = \xi_a{}^b + 2\beta_a{}^b - \beta^b\xi_a + \xi_c\beta^c\delta_a^b - 2\beta^b\beta_a + 2\beta^c\beta_c\delta_a^b;$$
$$(e^{2f}\circ\pi)(\tilde{\xi}_{ab}\circ\psi) = \xi_{ab} + 2\beta_{ab} - \xi_a\beta_b - \xi_b\beta_a - 4\beta_a\beta_b;$$

$$(e^{2f}\circ\pi)(\tilde{\xi}^a{}_b\circ\psi) = \xi^a{}_b + 2\beta^a{}_b - \beta_b\xi^a + \xi^c\beta_c\delta_b^a - 2\beta_b\beta^a + 2\beta_c\beta^c\delta_b^a;$$
$$(e^{2f}\circ\pi)(\tilde{\xi}^{ab}\circ\psi) = \xi^{ab} + 2\beta^{ab} - \xi^a\beta^b - \xi^b\beta^a - 4\beta^a\beta^b;$$

$$(e^{2f}\circ\pi)(\tilde{B}_{abcd}\circ\psi) = B_{abcd} - B_{dbc}\beta_a - B_{adc}\beta_b - B_{abd}\beta_c - B_{abc}\beta_d;$$
$$(e^{2f}\circ\pi)(\tilde{B}_{abc}{}^d\circ\psi) = B_{abc}{}^d + B_{fbc}\beta^f\delta_a^d + B_{afc}\beta^f\delta_b^d + B_{abf}\beta^f\delta_c^d - B_{abc}\beta^d;$$

$$(e^{2f}\circ\pi)(\tilde{B}^{abcd}\circ\psi) = B^{abcd} - B^{dbc}\beta^a - B^{adc}\beta^b - B^{abd}\beta^c - B^{abc}\beta^d;$$
$$(e^{2f}\circ\pi)(\tilde{B}^{abc}{}_d\circ\psi) = B^{abc}{}_d + B^{fbc}\beta_f\delta_d^a + B^{afc}\beta_f\delta_d^b + B^{abf}\beta_f\delta_d^c - B^{abc}\beta_d;$$

Решение. Докажем первые два равенства. Остальные докажите самостоятельно аналогичным образом.

Рассмотрим дифференциальные уравнения (2.63), которым удовлетворяют компоненты вектора Ли $\tilde{\xi}$ почти эрмитова многообразия $\mathscr{M}$

$$d\tilde{\xi}_a - \tilde{\xi}_b\tilde{\theta}_a^b = \tilde{\xi}_{ab}\tilde{\omega}^b + \tilde{\xi}_a{}^b\tilde{\omega}_b.$$

Применим к обеим частям этого равенства отображение ψ^*

$$d(\tilde{\xi}_a\circ\psi) - (\tilde{\xi}_b\circ\psi)\psi^*\tilde{\theta}_a^b = (\tilde{\xi}_{ab}\circ\psi)\psi^*\tilde{\omega}^b + (\tilde{\xi}_a{}^b\circ\psi)\psi^*\tilde{\omega}_b \tag{2.95}$$

Используем формулы, полученные в примере 2.5. Выразим из них $\tilde{\xi}_a\circ\psi$ и подставим в (2.95)

$$d((e^{-f}\circ\pi)(\xi_a + 2\beta_a)) - (e^{-f}\circ\pi)(\xi_b + 2\beta_b)(\theta_a^b + \beta_a\omega^b - \beta^b\omega_a) = (\tilde{\xi}_{ab}\circ\psi)(e^f\circ\pi)\omega^b + (\tilde{\xi}_a{}^b\circ\psi)(e^f\circ\pi)\omega_b \tag{2.96}$$

Преобразуем первое слагаемое

$$d((e^{-f}\circ\pi)(\xi_a+2\beta_a)) = (e^{-f}\circ\pi)(-d(f\circ\pi))(\xi_a+2\beta_a)) = (e^{-f}\circ\pi)(-\beta)(\xi_a+2\beta_a)) = \\ = (e^{-f}\circ\pi)(-\beta_i\omega^i)(\xi_a+2\beta_a)) = (e^{-f}\circ\pi)(-\beta_b\omega^b-\beta^b\omega_b)(\xi_a+2\beta_a))$$

Вернемся к (2.96), умножим обе части равенства на $(e^f\circ\pi)$, подставим преобразованное слагаемое, воспользуемся (2.63) и замечанием 2.9.

$$(d\xi_a-\xi_b\theta^b_a)+2(d\beta_a-\beta_b\theta^b_a)-\beta_b(\xi_a+2\beta_a)\omega^b+\beta^b(\xi_a+2\beta_a)\omega_b-\beta_a(\xi_b+2\beta_b)\omega^b+\beta^f(\xi_f+2\beta_f)\delta^b_a\omega_b = \\ = (\tilde\xi_{ab}\circ\psi)(e^{2f}\circ\pi)\omega^b+(\tilde\xi_a{}^b\circ\psi)(e^{2f}\circ\pi)\omega_b$$

$$\xi_a{}^b\omega_b+\xi_{ab}\omega^b+2\beta_a{}^b\omega_b+2\beta_{ab}\omega^b-\beta_b(\xi_a+2\beta_a)\omega^b+\beta^b(\xi_a+2\beta_a)\omega_b-\beta_a(\xi_b+2\beta_b)\omega^b+\beta^f(\xi_f+2\beta_f)\delta^b_a\omega_b = \\ = (\tilde\xi_{ab}\circ\psi)(e^{2f}\circ\pi)\omega^b+(\tilde\xi_a{}^b\circ\psi)(e^{2f}\circ\pi)\omega_b$$

Пользуясь линейной независимостью базисных 1-форм, получаем требуемые равенства. □

§2.15. Отображения присоединенных G-структур для многообразий Вайсмана-Грея.

15.1. А. Грей и Л. Хервелла доказали, что класс многообразий Вайсмана-Грея является конформно инвариантным, то есть если почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}=(M,J,g)$ принадлежит классу многообразий Вайсмана-Грея, то и почти эрмитово многообразие $\tilde{\mathscr{M}}=(M,J,\tilde g=e^{2f}g)$ принадлежит этому же классу.

Мы докажем этот факт другим методом. Пусть почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ является многообразием Вайсмана-Грея. Согласно результатам § 2.9. это означает, что его структурный тензор кососимметричен по любой паре индексов, а виртуальный тензор примитивен. В виде равенств этот критерий можно записать следующим образом:

$$B^{[abc]}=B^{abc};\quad B^{ab}{}_c=\xi^{[a}\delta^{b]}_c.$$

Выясним, удовлетворяют ли этому критерию структурный и виртуальный тензоры почти эрмитова многообразия $\tilde{\mathscr{M}}$. Согласно формулам (2.91) получим

$$(e^f\circ\pi)(\tilde B^{[abc]}\circ\psi)=B^{[abc]}=B^{abc}=(e^f\circ\pi)(\tilde B^{abc}\circ\psi).$$

Откуда получаем, что

$$(e^f\circ\pi)(\tilde B^{[abc]}\circ\psi)=(e^f\circ\pi)(\tilde B^{abc}\circ\psi).$$

Так как функция $(e^f\circ\pi)$ ни в одной точке $p\in P$ не обращается в нуль, на нее можно сократить. Так как ψ является биекцией, из равенства

$$\tilde B^{[abc]}\circ\psi(p)=\tilde B^{abc}\circ\psi(p),\ p\in P$$

будет следовать равенство

$$\tilde B^{[abc]}(\tilde p)=\tilde B^{abc}(\tilde p)$$

для любой точки $\tilde p\in\tilde P$, то есть для любого A-репера присоединенной G-структуры многообразия $\tilde{\mathscr{M}}$, то есть в более привычной записи

$$\tilde B^{[abc]}=\tilde B^{abc}.$$

Таким образом, первое условие из критерия многообразия Вайсмана-Грея выполняется. Проверим выполнение второго условия из критерия. Аналогичным образом получаем

$$(e^f\circ\pi)(\tilde B^{ab}{}_c\circ\psi)=B^{ab}{}_c+\beta^a\delta^b_c-\beta^b\delta^a_c=\frac12(\xi^a\delta^b_c-\xi^b\delta^a_c)+\beta^a\delta^b_c-\beta^b\delta^a_c= \\ =\frac12((e^f\circ\pi)(\tilde\xi^a\circ\psi)\delta^b_c-2\beta^a\delta^b_c-(e^f\circ\pi)(\tilde\xi^b\circ\psi)\delta^a_c+2\beta^b\delta^a_c)+\beta^a\delta^b_c-\beta^b\delta^a_c= \\ =(e^f\circ\pi)(\tilde\xi^{[a}\delta^{b]}_c\circ\psi).$$

Тогда аналогично предыдущему тождеству из критерия получим $\tilde B^{ab}{}_c=\tilde\xi^{[a}\delta^{b]}_c$, то есть выполняется второе условие из критерия многообразия Вайсмана-Грея.

Итак, почти эрмитово многообразие $\tilde{\mathscr{M}}$ является многообразием Вайсмана-Грея.

15.2. Рассмотрим многообразие Вайсмана-Грея $\mathscr{M}$. Обозначим $B = B^{abc}B_{abc}$ полную свертку компонент структурного тензора этого многообразия. Очевидно, что если два A-репера p и q принадлежат одному слою $\pi^{-1}(m)$, то $B(p) = B(q)$. Следовательно, B можно рассматривать как функцию на M, которая каждой точке m ставит в соответствие значение функции B в репере $p = (m, \varepsilon_i)$ с вершиной в данной точке m. Функция B принимает только неотрицательные значения, так как в силу комплексной сопряженности B_{abc} и B^{abc} получаем

$$B = B^{abc}B_{abc} = B_{abc}\bar{B}_{abc} = |B_{abc}|^2.$$

Функция B равна нулю тогда и только тогда когда все функции B_{abc} обращаются в нуль. Пусть $m \in M$ – произвольная точка, в которой функция B отлична от нуля. Так как эта функция гладкая, значит, в частности, она является непрерывной, следовательно, существует окрестность точки m, в которой эта функция отлична от нуля. Сужение почти комплексной структуры J и метрического тензора g на эту окрестность задает на ней структуру почти эрмитова многообразия. До конца этого пункта будем работать с такими почти эрмитовыми многообразиями.

Заметим, что для четырехмерных многообразий Вайсмана-Грея функции B_{abc} и B^{abc} тождественно равны нулю, так как различных значений для индексов всего два: 1 и 2. Тогда у функций B_{abc} и B^{abc} всегда найдутся два одинаковых индекса. В силу кососимметричности этих функций по любой паре индексов они всегда равны нулю. Например, $B_{112} = -B_{112}$, следовательно, $B_{112} = 0$. Таким образом, для четырехмерных многообразий Вайсмана-Грея функция B всегда тождественно равна нулю.

Пусть дано многообразие Вайсмана-Грея размерности выше четырех. Фиксируем точку m, в которой функция B отлична от нуля, возьмем некоторую окрестность этой точки, в которой функция B по-прежнему отлична от нуля, и рассмотрим функцию $f = ln\sqrt{B}$. Очевидно, что она положительна в любой точке окрестности точки m. Рассмотрим конформное преобразование почти эрмитовой структуры, которое задается функцией f. Будем называть такие конформные преобразования *каноническими.* Для канонического преобразования с учетом формул (2.91) имеем

$$\tilde{B} = \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = (e^{-2f} \circ \pi)B = e^{-2ln\sqrt{B}} \circ \pi)B = (B^{-1})B = 1.$$

Здесь идет отождествление $B\circ\pi$ и B, то есть мы пользуемся тем, что функция B может быть рассмотрена и как функция на P и как функция на M.

Итак, мы получаем, что в окрестности каждой точки m многообразия M, в которой функция B отлична от нуля, многообразие Вайсмана-Грея $\mathscr{M}$ может каноническим конформным преобразованием быть преобразовано в многообразие Вайсмана-Грея для которого функция $\tilde{B}$ будет константой, равной 1.

Получим следствия из этого результата. Продифференцируем тождество $\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = 1$ внешним образом.

$$d\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} + \tilde{B}^{abc}d\tilde{B}_{abc} = 0 \tag{2.97}$$

и воспользуемся дифференциальными уравнениями

$$\begin{gathered} d\tilde{B}_{abc} - \tilde{B}_{dbc}\tilde{\theta}^d_a - \tilde{B}_{adc}\tilde{\theta}^d_b - \tilde{B}_{abd}\tilde{\theta}^d_c = \tilde{B}_{abcd}\tilde{\omega}^d + \tilde{B}_{abc}{}^d\tilde{\omega}_d; \\ d\tilde{B}^{abc} + \tilde{B}^{dbc}\tilde{\theta}^a_d + \tilde{B}^{adc}\tilde{\theta}^b_d + \tilde{B}^{abd}\tilde{\theta}^c_d = \tilde{B}^{abcd}\tilde{\omega}_d + \tilde{B}^{abc}{}_d\tilde{\omega}^d; \end{gathered} \tag{2.98}$$

Выразим $d\tilde{B}_{abc}$ и $d\tilde{B}^{abc}$ и подставим в (2.97)

$$(\tilde{B}^{abcd}\tilde{\omega}_d + \tilde{B}^{abc}{}_d\tilde{\omega}^d - \tilde{B}^{dbc}\tilde{\theta}^a_d - \tilde{B}^{adc}\tilde{\theta}^b_d - \tilde{B}^{abd}\tilde{\theta}^c_d)\tilde{B}_{abc} + \tilde{B}^{abc}(\tilde{B}_{abcd}\tilde{\omega}^d + \tilde{B}_{abc}{}^d\tilde{\omega}_d - \tilde{B}_{dbc}\tilde{\theta}^d_a - \tilde{B}_{adc}\tilde{\theta}^d_b - \tilde{B}_{abd}\tilde{\theta}^d_c) = 0.$$

Приведем подобные, переобозначая, где это необходимо индексы суммирования

$$(\tilde{B}^{abcd}\tilde{\omega}_d + \tilde{B}^{abc}{}_d\tilde{\omega}^d)\tilde{B}_{abc} + \tilde{B}^{abc}(\tilde{B}_{abcd}\tilde{\omega}^d + \tilde{B}_{abc}{}^d\tilde{\omega}_d) = 0.$$

В силу линейной независимости базисных форм получим два комплексно сопряженных равенства, из которых нам нужно будет одно.

$$\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc} + \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc}{}^d = 0. \tag{2.99}$$

Напомним, что для любого многообразия Вайсмана-Грея верны тождества (см. формулы (2.10.) и теорему 2.4)

$$\begin{gathered} \tilde{B}_{abc}{}^d = -\frac{1}{2}\tilde{\xi}^d\tilde{B}_{abc} + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^h\tilde{B}_{h[ab}\delta^d_{c]} + \tilde{\xi}_{[ab}\delta^d_{c]}; \qquad (2.100) \\ \tilde{B}^{a[bcd]} + \tilde{B}^{a[b}{}_h\tilde{B}^{cd]h} = 0. \end{gathered}$$

Подставим (2.100) в (2.99)

$$\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc} - \frac{1}{2}\tilde{\xi}^d\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^h\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{h[ab}\delta^d_{c]} + \tilde{B}^{abc}\tilde{\xi}_{[ab}\delta^d_{c]} = 0.$$

Учтем, что $\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc}=1$ и раскроем альтернации

$$\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc}-\frac{1}{2}\tilde{\xi}^{d}+\frac{1}{6}(\tilde{\xi}^{h}\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{hab}\delta^{d}_{c}+\tilde{\xi}^{h}\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{hbc}\delta^{d}_{a}+\tilde{\xi}^{h}\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{hca}\delta^{d}_{b})+\frac{1}{3}(\tilde{B}^{abc}\tilde{\xi}_{[ab]}\delta^{d}_{c}+\tilde{B}^{abc}\tilde{\xi}_{[bc]}\delta^{d}_{a}+\tilde{B}^{abc}\tilde{\xi}_{[ca]}\delta^{d}_{b})=0.$$

Избавимся от дельт.

$$\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc}-\frac{1}{2}\tilde{\xi}^{d}+\frac{1}{6}(\tilde{\xi}^{h}\tilde{B}^{abd}\tilde{B}_{hab}+\tilde{\xi}^{h}\tilde{B}^{dbc}\tilde{B}_{hbc}+\tilde{\xi}^{h}\tilde{B}^{adc}\tilde{B}_{hca})+\frac{1}{3}(\tilde{B}^{abd}\tilde{\xi}_{[ab]}+\tilde{B}^{dbc}\tilde{\xi}_{[bc]}+\tilde{B}^{adc}\tilde{\xi}_{[ca]})=0.$$

Приведем подобные, переобозначая индексы суммирования.

$$\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc}-\frac{1}{2}\tilde{\xi}^{d}+\frac{1}{2}\tilde{\xi}^{h}\tilde{B}^{abd}\tilde{B}_{hab}+\tilde{B}^{abd}\tilde{\xi}_{[ab]})=0.$$

Выразим из этого равенства $\tilde{\xi}^{d}$.

$$\tilde{\xi}^{d}=2\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc}+\tilde{\xi}^{h}\tilde{B}^{abd}\tilde{B}_{hab}+2\tilde{B}^{abd}\tilde{\xi}_{[ab]}). \tag{2.101}$$

Свернем второе соотношение из (2.100) с B_{abc}

$$\frac{1}{3}\left(\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc}+\tilde{B}^{acdb}\tilde{B}_{abc}+\tilde{B}^{adbc}\tilde{B}_{abc}\right)+ \\ +\frac{1}{6}\left((\tilde{\xi}^{a}\delta^{b}_{f}-\tilde{\xi}^{b}\delta^{a}_{f})\tilde{B}^{cdf}\tilde{B}_{abc}+(\tilde{\xi}^{a}\delta^{c}_{f}-\tilde{\xi}^{c}\delta^{a}_{f})\tilde{B}^{dbf}\tilde{B}_{abc}+(\tilde{\xi}^{a}\delta^{d}_{f}-\tilde{\xi}^{d}\delta^{a}_{f})\tilde{B}^{bcf}B_{abc})\right)=0$$

Заменяя, где нужно, индексы суммирования и суммируя дельты, получим

$$\frac{1}{3}(\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc}+2\tilde{B}^{adbc}\tilde{B}_{abc})+\frac{1}{6}(\tilde{\xi}^{a}\tilde{B}^{cdb}\tilde{B}_{abc}-\tilde{\xi}^{d}\tilde{B}^{cda}\tilde{B}_{abc}+\tilde{\xi}^{a}\tilde{B}^{dbc}\tilde{B}_{abc}-\tilde{\xi}^{c}\tilde{B}^{dba}\tilde{B}_{abc}+\tilde{\xi}^{a}\tilde{B}^{bcd}\tilde{B}_{abc}-\tilde{\xi}^{d}\tilde{B}^{bca}\tilde{B}_{abc})=0.$$

Учитывая, что $\tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc}=1$, получим

$$\frac{1}{3}\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{abc}+\frac{2}{3}\tilde{B}^{adbc}\tilde{B}_{abc}+\frac{5}{6}\tilde{\xi}^{a}\tilde{B}^{bcd}\tilde{B}_{abc}-\frac{1}{6}\tilde{\xi}^{d}=0$$

Выразим из этого равенства $B^{abcd}B_{abc}$ и подставим в (2.101)

$$-4\tilde{B}^{adbc}\tilde{B}_{abc}-4\tilde{\xi}^{a}\tilde{B}^{bcd}\tilde{B}_{abc}+2\tilde{B}^{abd}\tilde{\xi}_{[ab]}=0. \tag{2.102}$$

Вернемся опять ко второму соотношению из (2.100) и свернем его с B_{bcd}.

$$\frac{1}{3}(\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{bcd}+\tilde{B}^{acdb}\tilde{B}_{bcd}+\tilde{B}^{adbc}\tilde{B}_{bcd})+\frac{1}{6}((\tilde{\xi}^{a}\delta^{b}_{f}-\tilde{\xi}^{b}\delta^{a}_{f})\tilde{B}^{cdf}\tilde{B}_{bcd}+(\tilde{\xi}^{a}\delta^{c}_{f}-\tilde{\xi}^{c}\delta^{a}_{f})\tilde{B}^{dbf}\tilde{B}_{bcd}+(\tilde{\xi}^{a}\delta^{d}_{f}-\tilde{\xi}^{d}\delta^{a}_{f})\tilde{B}^{bcf}\tilde{B}_{bcd})=0.$$

После преобразований учетом $\tilde{B}^{bcd}\tilde{B}_{bcd}=1$ получим

$$\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{bcd}+\frac{1}{2}\tilde{\xi}^{a}-\frac{1}{2}\tilde{\xi}^{b}\tilde{B}^{acd}\tilde{B}_{bcd}=0.$$

Выразим $\tilde{B}^{abcd}\tilde{B}_{bcd}$, заменим свободный индекс a на индекс d и подставим в (2.102).

$$-2\tilde{\xi}^{d}+2\tilde{\xi}^{a}\tilde{B}_{dbc}\tilde{B}_{abc}-4\tilde{\xi}^{a}\tilde{B}^{bcd}\tilde{B}_{abc}+2\tilde{B}^{abd}\tilde{\xi}_{[ab]}=0$$

или, окончательно,

$$\tilde{\xi}^{d}=(\tilde{\xi}_{[ab]}-\tilde{\xi}^{d}\tilde{B}_{fab})\tilde{B}^{abd}. \tag{2.103}$$

Итак, мы получаем, что в некоторой окрестности точки $m\in M$ многообразия Вайсмана-Грея, в которой функция B отлична от нуля, оно допускает конформное преобразование (а именно, каноническое конформное преобразование), которое переводит его в многообразие Вайсмана-Грея, для которого выполняется соотношение (2.103).

Задача 2.24. Используя соотношение (2.103) покажите, что для каждой точки $m\in M$ многообразия Вайсмана-Грея, в которой функция B отлична от нуля, существует окрестность, в которой выполняется равенство

$$B\xi^{d}+2B^{abcd}B_{abc}+3\xi^{c}B_{cab}B^{abd}=0. \tag{2.104}$$

Заметим, что в правой части формулы (2.103) в скобках стоит левая часть равенства из критерия многообразия Вайсмана-Грея класса C_1. Используя эту формулу, мы сейчас докажем, что любое шестимерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_1, то есть оно локально конформно преобразуемо к приближенно келерову многообразию.

Пусть $\mathscr{M}$ – шестимерное многообразие Вайсмана-Грея. Фиксируем точку $m \in M$, такую что в этой точке функция B отлична от нуля. Тогда существует некоторая окрестность точки m, в которой функция B по-прежнему отлична от нуля. Как мы уже знаем, комплексификация касательного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M) = \mathbb{C} \otimes T_m(M)$ распадается в прямую сумму векторных подпространств $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$ и $(D_J^{-\sqrt{-1}})_m$. При этом отображение

$$\sigma : T_m^{\mathbb{C}}(M) \to (D_J^{\sqrt{-1}})_m,$$

задаваемое формулой $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}J^{\mathbb{C}})$, является проектором на подпространство $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$. Его сужение на касательное пространство $T_m(M)$, рассматриваемое как комплексное векторное пространство, является изоморфизмом $\mathbb{C}-$ линейных пространств. В частности, комплексная размерность пространства $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$ равна 3. Если $(m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{\hat{1}}, \varepsilon_{\hat{2}}, \varepsilon_{\hat{3}})$ – произвольный $A-$ репер, а $(m, u^1, u^2, u^3, u^{\hat{1}}, u^{\hat{2}}, u^{\hat{3}})$ – дуальный репер, то векторы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ образуют базис пространства $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$, а ковекторы (u^1, u^2, u^3) – дуальный базис. Тогда пространство 3-ковекторов на $(D_J^{\sqrt{-1}})_m$ одномерно и любой 3-ковектор пропорционален 3-ковектору $u^1 \wedge u^2 \wedge u^3$. В частности, для структурного тензора C получаем $(\sigma C)_m = \lambda u^1 \wedge u^2 \wedge u^3$. Следовательно,

$$B_{abc} = \lambda \varepsilon_{abc}; \quad B^{abc} = \bar{\lambda} \varepsilon^{abc} \tag{2.105}$$

где ε_{abc}, ε^{abc} – символ Кронекера 3-го порядка. Напомним, что символ Кронеккера третьего порядка равен нулю, если среди чисел a, b, c есть хотя бы два одинаковых, равен 1, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ является четной и равен -1, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ является нечетной.

Теорема 2.10. *Любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея принадлежит классу C_0.*

Доказательство. В случае 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея критерий класса C_0 (2.74) примет вид

$$B^{123d} = -\xi^d B^{123} = -\xi^d \bar{\lambda}. \tag{2.106}$$

и формулы комплексно сопряженные. Проверим, что он выполняется для любого 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея.

Пусть $p \in P$ – произвольная точка присоединенной $G-$ структуры многообразия Вайсмана-Грея $\mathscr{M}$, такая что $B(p) = 0$. Так как $B = 6B^{123}B_{123}$, получим $B^{123}(p) = B_{123}(p) = 0$ и в силу **(??)** $B^{123d} = 0$. Следовательно, критерий класса C_0 выполняется.

Пусть $p \in P$, такая что $B(p) \neq 0$. Тогда согласно задаче 2.24 существует окрестность U точки $m = \pi(p)$, для которой выполняется (2.104). Подставим в это равенство (2.105)

$$\lambda\bar{\lambda}\varepsilon_{abc}\varepsilon^{abc} + 2B^{abcd}\lambda\varepsilon_{abc} + 3\xi^c\lambda\bar{\lambda}\varepsilon_{cab}\varepsilon^{abd} = 0. \tag{2.107}$$

Вычислим отдельно каждое слагаемое.

В дельте Кронеккера 3-го порядка мы получим нуль, если в ней есть хотя бы два одинаковых индекса. Так как индексы a, b, c могут принимать лишь три различные значения $1, 2, 3$, ненулевыми будут дельты Кронеккера ε_{abc} со всевозможными перестановками чисел $1, 2, 3$. Так как дельта Кронеккера является кососимметрическим объектом, то есть меняет знак при перестановке любых двух индексов, получим

$$\varepsilon_{abc}\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{312}\varepsilon^{312} + \varepsilon_{213}\varepsilon^{213} + \varepsilon^{321}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{132}\varepsilon^{132} = 6\varepsilon_{123}\varepsilon^{123} = 6.$$

Далее, аналогичным образом получаем

$$2B^{abcd}B_{abc} = 2B^{abcd}\lambda\varepsilon_{abc} = 12B^{123d}\lambda.$$

Наконец,

$$3\xi^c\lambda\bar{\lambda}\varepsilon_{cab}\varepsilon^{abd} = 3\lambda\bar{\lambda}(\xi^1\varepsilon_{1ab}\varepsilon^{abd} + \xi^2\varepsilon_{2ab}\varepsilon^{abd} + \xi^3\varepsilon_{3ab}\varepsilon^{abd}) = 3\lambda\bar{\lambda}(\xi^1\varepsilon_{123}\varepsilon^{23d} + \xi^1\varepsilon_{132}\varepsilon^{32d} + \xi^2\varepsilon_{213}\varepsilon^{13d} +$$
$$+ \xi^2\varepsilon_{231}\varepsilon^{31d} + \xi^3\varepsilon_{312}\varepsilon^{12d} + \xi^3\varepsilon_{321}\varepsilon^{321}) = 6\lambda\bar{\lambda}(\xi^1\varepsilon^{23d} + \xi^2\varepsilon^{31d} + \xi^3\varepsilon^{12d}).$$

Подставим все полученные результаты в (2.107) и сократим на λ, так как $\lambda \neq 0$.

$$6\bar{\lambda}\xi^d + 12B^{123d} + 6\bar{\lambda}(\xi^1\varepsilon^{23d} + \xi^2\varepsilon^{31d} + \xi^3\varepsilon^{12d}) = 0.$$

Перебирая возможные значения для d (это 1,2,3), получим (2.106). □

Теорема 2.11. *Любое 6-мерное многообразие Вайсмана-Грея является многообразием класса C_1, то есть локально конформно приближенно келеровым многообразием.*

Доказательство. Пусть $p \in P$ – произвольная точка присоединенной $G-$ структуры 6-мерного многообразия Вайсмана-Грея, для которой $B = 0$. Тогда выполняется критерий класса C_1 в силу результата задачи 2.16.

Пусть $p \in P$, такая что $B(p) \neq 0$. Как мы видели выше для некоторой окрестности U точки $\pi(p)$ имеем многообразие Вайсмана-Грея $(U, J, \tilde{g} = e^{2f} g)$, для которого $1 = \tilde{B}$. Тогда получим

$$\tilde{B} = \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = 6\tilde{B}^{123}\tilde{B}_{123}.$$

Следовательно,

$$\tilde{B}^{123}\tilde{B}_{123} = \frac{1}{6} \tag{2.108}$$

Распишем соотношение (2.103) для различных значений индекса d с учетом (2.108). Пусть $d = 1$. Тогда

$$\tilde{\xi}^1 = 2\tilde{\xi}_{[23]}\tilde{B}^{231} - 2\xi^1\tilde{B}_{123}\tilde{B}^{231} = 2\tilde{\xi}_{[23]}\tilde{B}^{231} - \frac{1}{3}\xi^1.$$

Приводя подобные, получим

$$\tilde{\xi}^1 = \frac{3}{2}\tilde{\xi}_{[23]}\tilde{B}^{123}. \tag{2.109}$$

Аналогичным образом получаем два других соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 &= \frac{3}{2}\tilde{\xi}_{[31]}\tilde{B}^{123} \\ \tilde{\xi}^3 &= \frac{3}{2}\tilde{\xi}_{[12]}\tilde{B}^{123} \end{aligned} \tag{2.110}$$

Продифференцируем внешним образом (2.109), подставим выражения для внешних дифференциалов функций ξ^1 и B^{123} и воспользуемся линейной независимостью базисных форм (проведите подробные вычисления самостоятельно). В результате получим

$$\tilde{\xi}^{1d} = \frac{3}{2}(\tilde{\xi}_{[23]}{}^d\tilde{B}^{123} + \tilde{\xi}_{[23]}\tilde{B}^{123d}).$$

Подставим в это соотношение формулу из задачи 2.18 и используем теорему 2.10 (а именно, формулу (2.106)). Тогда для $d = 2$ получим

$$\tilde{\xi}^{12} - \frac{1}{4}\tilde{\xi}^{21} = -\frac{3}{2}\tilde{\xi}^1\tilde{\xi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\xi}_3\tilde{B}^{123} \tag{2.111}$$

Дифференцируя третье соотношение (2.110) аналогичным образом, получим

$$\tilde{\xi}^{21} - \frac{1}{4}\tilde{\xi}^{12} = -\frac{3}{2}\tilde{\xi}^1\tilde{\xi}^2 - \frac{1}{2}\tilde{\xi}_3\tilde{B}^{123} \tag{2.112}$$

Вычитая из (2.111) (2.112) и комплексно сопрягая, получим

$$\tilde{\xi}_{[12]} = \frac{2}{5}\tilde{\xi}^3\tilde{B}_{123}.$$

Подставляя полученное тождество в (2.110), получим $\tilde{\xi}^3 = 0$.

Аналогично получаем, что $\tilde{\xi}^1 = 0$ и $\tilde{\xi}^2 = 0$. Таким образом, многообразие $(U, J, \tilde{g})$ является приближенно келеровым (см. классификацию почти эрмитовых многообразий). Следовательно, исходное многообразие $\mathscr{M}$ является локально конформно приближенно келеровым многообразием.

Известно, что класс локально конформно приближенно келеровых многообразий в размерности выше 4 совпадает с классом многообразий Вайсмана-Грея класса C_1. Откуда мы получаем, что исходное шестимерное многообразие Вайсмана-Грея $\mathscr{M}$ принадлежит классу C_1. □

Глава 3. Приложения.

§3.1. Голоморфная секционная кривизна почти эрмитова многообразия.

1.1. Напомним (см. приложения курса лекций Тензорный анализ 2012-13 уч.год.), что для для каждой точки m риманова многообразия (M, g) определено понятие секционной кривизны в направлении двумерной площадки L^2. Это число $K_m(L^2)$, которое вычисляется по следующей формуле

$$K_m(L^2) = \frac{R_m(X,Y)Y,X)}{g_m(X,X)g_m(Y,Y) - g_m(X,Y)^2},$$

где X, Y – базис двумерной площадки (двумерного векторного пространства) L^2, R – тензор Римана-Кристоффеля.

Пусть $\mathscr{M} = (M, J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – почти эрмитово многообразие размерности $2n > 2$. Фиксируем произвольную точку $m \in M$. Тогда среди двумерных площадок касательного пространства $T_m(M)$ выделяются площадки L^2, инвариантные относительно структурного эндоморфизма J, то есть $J_m(L^2) \subset L^2$. Они называются *голоморфными площадками.*

Лемма 3.1. *Пусть $m \in M$ – произвольная фиксированная точка. Тогда голоморфные площадки L^2 в точке m это в точности двумерные векторные пространства вида $\mathcal{L}(X, J_mX)$, где $X \in T_m(M)$ – произвольный ненулевой вектор, $\mathcal{L}$ обозначает линейную оболочку векторов.*

Доказательство. Пусть X – произвольный ненулевой вектор голоморфной площадки L^2. В силу инвариантности L^2 вектор J_mX также принадлежит L^2. Кроме того, как мы знаем (см. курс Многомерная диф.геометрия часть1) векторы X И J_mX являются линейно независимыми, а значит, образуют базис векторного пространства L^2, следовательно, $L^2 = \mathcal{L}(X, J_mX)$.

Обратно, рассмотрим двумерное векторное пространство $\mathcal{L}(X, J_mX)$. Тогда для любого вектора $Y \in \mathcal{L}(X, J_mX)$ имеем

$$J_mY = J_m(aX + bJ_mX) = aJ_mX + bJ_m^2X = aJ_mX - bX = (-b)X + aJ_mX \in \mathcal{L}(X, J_mX),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ – координаты вектора Y в базисе (X, J_mX). Таким образом, мы получаем, что $\mathcal{L}(X, J_mX)$ инвариантно относительно структурного эндоморфизма J, а значит, является голоморфной площадкой. □

Голоморфной секционной кривизной, короче *HS-кривизной*, *почти эрмитова многообразия $\mathscr{M}$ в точке m в направлении вектора X* называется секционная кривизна в точке m в направлении двумерной голоморфной площадки $L^2 = \mathcal{L}(X, J_mX)$. Обозначение $H_m(L^2)$ или $H_m(X)$. Другими словами, вещественное число $H_m(X)$ определяется по формуле

$$H_m(X) = \frac{R_m(X, J_mX)J_mX, X)}{g_m(X,X)g_m(J_mX, J_mX) - g_m(X, J_mX)^2} = \frac{R_m(X, J_mX)J_mX, X)}{g_m(X,X)^2} = \frac{R_m(X, J_mX)J_mX, X)}{||X||^4}.$$

Здесь мы воспользовались согласованностью метрики g с почти комплексной структурой J, ортогональностью векторов X и J_mX относительно метрики g и определением нормы вектора $||X||^2 = g_m(X, X)$.

Почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ называется *многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны* (короче, *точечно постоянной HS-кривизны*), если для любой точки $m \in M$ вещественное число $H_m(X)$ не зависит от выбора вектора X и обозначается $H(m)$. В этом случае мы получаем гладкую функцию $H(m)$ на многообразии M. Если к тому же функция $H(m)$ является константой, то $\mathscr{M}$ называется *многообразием глобально постоянной голоморфной секционной кривизны.* В классе почти эрмитовых многообразий точечное постоянство и глобальное постоянство голоморфной секционной кривизны не эквивалентны. Пример многообразия, которое имеет точечную, но не постоянную голоморфную секционную кривизну был построен Греем и Ванхекке. Однако эквивалентность обоих понятий имеет место в некоторых подклассах почти эрмитовых многообразий. Например, в классе келеровых многообразий точечное и глобальное постоянство секционной кривизны эквивалентно. Келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны называются *комплексными пространственными формами.* Известна полная классификация комплексных пространственных форм (Hawley, Igusa). А именно, верна теорема

Теорема 3.1. *Любая комплексная пространственная форма размерности выше двух, локально голоморфно изометрична одному из следующих многообразий*

1. *комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^n$, если $H > 0$;*
2. *комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$, если $H = 0$;*
3. *комплексному гиперболическому пространству $\mathbb{C}H^n$, если $H < 0$.*

1.2. Пусть почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ размерности $2n > 2$ (случай двумерного многообразия рассматривался в классической дифференциальной геометрии). Пусть оно имеет точечно постоянную голоморфную секционную кривизну c. Это гладкая функция на многообразии M, для которой имеет место равенство

$$g(R(X, JX)JX, X) = cg(X, X)^2, \tag{3.1}$$

где $X \in \mathfrak{X}(M)$, R – тензор Римана-Кристоффеля (то есть тензор кривизны римановой связности). Это равенство является критерием точечного постоянства голоморфной секционной кривизны. Запишем этот критерий на пространстве присоединенной G-структуры.

Рассмотрим правую часть равенства (3.1):

$$g(X,X)=g(X,X)=g_{ij}X^iX^j=g_{\hat{a}b}X^{\hat{a}}X^b+g_{a\hat{b}}X^aX^{\hat{b}}=\delta^a_bX_aX^b+\delta^b_aX^aX_b=2X^aX_a.$$

Тогда $g(X,X)^2=4(X^aX_a)(X^bX_b)$. Введем в рассмотрение симметричную дельту Кронеккера второго порядка

$$\tilde{\delta}^{ab}_{cd}=\delta^a_c\delta^b_d+\delta^a_d\delta^b_c.$$

Тогда

$$\tilde{\delta}^{ab}_{cd}X_aX_bX^cX^d=\delta^a_c\delta^b_dX_aX_bX^cX^d+\delta^a_d\delta^b_cX_aX_bX^cX^d=(X_aX^a)(X_bX^b)+(X_aX^a)(X_bX^b)=2(X_aX^a)^2=\frac{1}{2}g(X,X)^2.$$

Рассмотрим левую часть равенства (3.1):

$$\begin{aligned}g(R(X,JX)JX,X)&=R_{ijk\ell}X^k(JX)^\ell X^i(JX)^j=R_{abcd}X^c(JX)^dX^a(JX)^b+R_{\hat{a}bcd}X^c(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^b+\\&+R_{a\hat{b}cd}X^c(JX)^dX^a(JX)^{\hat{b}}+R_{ab\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^a(JX)^b+R_{abc\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^b+R_{\hat{a}\hat{b}cd}X^c(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^{\hat{b}}+\\&+R_{\hat{a}b\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^b+R_{\hat{a}bc\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^b+R_{a\hat{b}\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^a(JX)^{\hat{b}}+R_{a\hat{b}c\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^{\hat{b}}+\\&+R_{ab\hat{c}\hat{d}}X^{\hat{c}}(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^b+R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^{\hat{b}}+R_{\hat{a}\hat{b}c\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^{\hat{b}}+R_{a\hat{b}\hat{c}\hat{d}}X^{\hat{c}}(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^{\hat{b}}+\\&+R_{\hat{a}b\hat{c}\hat{d}}X^{\hat{c}}(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^b+R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}X^{\hat{c}}(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^{\hat{b}}.\end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое и воспользуемся матрицей компонент структурного эндоморфизма J.

$$\begin{aligned}R_{abcd}X^c(JX)^dX^a(JX)^b&=R_{abcd}X^c(J^d_iX^i)X^a(J^b_jX^j)=R_{abcd}X^c(J^d_fX^f)X^a(J^b_hX^h)=\\&=R_{abcd}X^c(\sqrt{-1}\delta^d_fX^f)X^a(\sqrt{-1}\delta^b_hX^h)=-R_{abcd}X^cX^dX^aX^b\end{aligned}$$

В силу кососимметричности тензора Римана-Кристоффеля по первой паре индексов, переобозначая индексы суммирования a и b, получим

$$R_{abcd}X^cX^dX^aX^b=R_{bacd}X^cX^dX^bX^a=-R_{abcd}X^cX^dX^aX^b,$$

то есть $R_{abcd}X^cX^dX^bX^a=0$. Аналогичным образом во всех слагаемых, где индексы первой или второй пары индексов тензора Римана-Кристоффеля однотипны (оба без крышки или оба с крышкой), мы получим нули. Таким образом, сумма из 16 слагаемых превращается в сумму из четырех слагаемых

$$\begin{aligned}g(R(X,JX)JX,X)&=R_{\hat{a}b\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^{\hat{a}}(JX)^b+R_{\hat{a}bc\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^{\hat{a}}(JX)^b+R_{a\hat{b}\hat{c}d}X^{\hat{c}}(JX)^dX^a(JX)^{\hat{b}}+\\&+R_{a\hat{b}c\hat{d}}X^c(JX)^{\hat{d}}X^a(JX)^{\hat{b}}=-R_{\hat{a}b\hat{c}d}X^{\hat{c}}X^dX^{\hat{a}}X^b+R_{\hat{a}bc\hat{d}}X^cX^{\hat{d}}X^{\hat{a}}X^b+R_{a\hat{b}\hat{c}d}X^{\hat{c}}X^dX^aX^{\hat{b}}-\\&-R_{a\hat{b}c\hat{d}}X^cX^{\hat{d}}X^aX^{\hat{b}}=4R_{\hat{a}bc\hat{d}}X^{\hat{a}}X^bX^cX^{\hat{d}}\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы переобозначили индексы суммирования и воспользовались свойствами симметрии тензора Римана-Кристоффеля.

Итак, на пространстве присоединенной G-структуры критерий точечного постоянства голоморфной секционной кривизны (3.1) принимает вид

$$(R_{\hat{a}bc\hat{d}}-\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc})X^{\hat{a}}X^bX^cX^{\hat{d}}=0.$$

Обозначим $R_{\hat{a}bc\hat{d}}=R^a{}_{bc}{}^d$ и введем в рассмотрение отображение

$$H:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathbb{C}\otimes C^\infty(M),$$

заданное формулой (здесь $\mathfrak{X}(M)$ рассматривается как комплексное линейное пространство с умножением на мнимую единицу по формуле $\sqrt{-1}X=JX$)

$$H(X,Y,Z,W)=(R^{(a}{}_{(bc)}{}^{d)}-\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc})X^bY^cZ_aW_d, \tag{3.2}$$

где $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$.

Задача 3.1**.** Докажите, что отображение H обладает следующими свойствами

1. отображение H аддитивно по каждому аргументу;

2. отображение H $\mathbb{C}$-однородно по первым двум аргументам и $\mathbb{C}$-антиоднородно по двум последним, то есть

$$\sqrt{-1}H(X,Y,Z,W) = H(JX,Y,Z,W) = H(X,JY,Z,W) = -H(X,Y,JZ,W) = -H(X,Y,Z,JW).$$

3. отображение H симметрично по первой и второй паре аргументов, то есть

$$H(X,Y,Z,W) = H(Y,X,Z,W); \quad H(X,Y,Z,W) = H(X,Y,W,Z);$$

4. $H(X,Y,Z,W) = \overline{H(Z,W,X,Y)}$;

5. $H(X,X,X,X) = 0$.

Проведем стандартную процедуру поляризации для равенства

$$H(X,X,X,X) = 0 \tag{3.3}$$

Так как это равенство верно для любого векторного поля X, оно верно для векторного поля $X+Y$, где X и Y также произвольные векторные поля на многообразии M. Получим

$$\begin{aligned}0 = H(X+Y,X+Y,X+Y,X+Y) = H(X,X,X,X) + H(Y,Y,Y,Y) + 2H(X,X,X,Y) + 2H(X,Y,X,X) +\\ + 4H(X,Y,X,Y) + H(X,X,Y,Y) + H(Y,Y,X,X) + 2H(Y,Y,Y,X) + 2H(X,Y,Y,Y) = 0.\end{aligned}$$

Тогда с учетом равенства (3.3) получим

$$\begin{aligned}2H(X,X,X,Y) + 2H(X,Y,X,X) + 4H(X,Y,X,Y) + H(X,X,Y,Y) + H(Y,Y,X,X) + 2H(Y,Y,Y,X) +\\ + 2H(X,Y,Y,Y) = 0.\end{aligned}$$

Так как это равенство верно для любого векторного поля X, оно верно для векторного поля JX.

$$\begin{aligned}2H(JX,JX,JX,Y) + 2H(JX,Y,JX,JX) + 4H(JX,Y,JX,Y) + H(JX,JX,Y,Y) + H(Y,Y,JX,JX) +\\ + 2H(Y,Y,Y,JX) + 2H(JX,Y,Y,Y) = 0.\end{aligned}$$

Воспользуемся результатами задачи 3.1:

$$\begin{aligned}2\sqrt{-1}H(X,X,X,Y) - 2\sqrt{-1}H(X,Y,X,X) + 4H(X,Y,X,Y) - H(X,X,Y,Y) - H(Y,Y,X,X) -\\ - 2\sqrt{-1}H(Y,Y,Y,X) + 2\sqrt{-1}H(X,Y,Y,Y) = 0.\end{aligned}$$

Аналогичным образом, заменяя Y на JY, получим

$$\begin{aligned}-2\sqrt{-1}H(X,X,X,Y) + 2\sqrt{-1}H(X,Y,X,X) + 4H(X,Y,X,Y) - H(X,X,Y,Y) - H(Y,Y,X,X) +\\ + 2\sqrt{-1}H(Y,Y,Y,X) - 2\sqrt{-1}H(X,Y,Y,Y) = 0.\end{aligned}$$

Сложим последние два равенства

$$4H(X,Y,X,Y) - H(X,X,Y,Y) - H(Y,Y,X,X) = 0. \tag{3.4}$$

Заменяя X на $X+Z$ и используя (3.4), получим

$$4(H(Z,Y,X,Y) + H(X,Y,Z,Y)) - (H(X,Z,Y,Y) + H(Z,X,Y,Y)) - (H(Y,Y,Z,X) + H(Y,Y,X,Z)) = 0.$$

Заменим Y на JY и используем задачу 3.1:

$$4(H(Z,Y,X,Y) + H(X,Y,Z,Y)) + (H(X,Z,Y,Y) + H(Z,X,Y,Y)) + (H(Y,Y,Z,X) + H(Y,Y,X,Z)) = 0.$$

Сложим последние два равенства:

$$H(Z,Y,X,Y) + H(X,Y,Z,Y) = 0.$$

Заменим Y на $Y+W$:

$$H(Z,Y,X,W) + H(Z,W,X,Y) + H(X,Y,Z,W) + H(X,W,Z,Y) = 0.$$

Наконец, заменяя Z на JZ получим

$$H(Z,Y,X,W) + H(Z,W,X,Y) - H(X,Y,Z,W) - H(X,W,Z,Y) = 0.$$

Складываем последние два равенства

$$H(Z,Y,X,W) + H(Z,W,X,Y) = 0.$$

Заменяя W на JW и складывая, получим, что $H(Z,W,X,Y) = 0$ для любых $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$. С учетом (3.2) получим

$$R^{(a}{}_{(bc)}{}^{d)} - \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = 0. \tag{3.5}$$

Обратно, если выполняется равенство (3.5), то, очевидно, что почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ имеет точечно постоянную голоморфную секционную кривизну. Таким образом, получаем критерий точечного постоянства голоморфной секционной кривизны почти эрмитова многообразия на пространстве присоединенной G-структуры.

Теорема 3.2**.** *Почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ имеет точечно постоянную голоморфную секционную кривизну тогда и только тогда, когда выполняется равенство (3.5).*

1.3. Пусть теперь почти эрмитово многообразие $\mathscr{M}$ является многообразием Вайсмана-Грея. Напомним, что для многообразий Вайсмана-Грея компонента $R^a{}_{bc}{}^d \equiv R_{\hat{a}bc\hat{d}}$ вычисляется по формуле

$$R_{\hat{a}bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - B^{adf}B_{fbc} + B^{af}{}_cB_{fb}{}^d.$$

Тогда критерий точечного постоянства голоморфной секционной кривизны примет вид

$$A^{(ad)}_{(bc)} - B^{(ad)f}B_{f(bc)} + B^{(a|f|}{}_{(c}B_{|f|b)}{}^{d)} - \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = 0. \tag{3.6}$$

Так как функции B_{abc}, B^{abc} кососимметричны по любой паре индексов, $B^{(ad)f}B_{f(bc)} = 0$.

Разберемся со слагаемым $A^{(ad)}_{(bc)}$. Имеем

$$A^{ad}_{bc} = A^{(ad)}_{[bc]} + A^{[ad]}_{(bc)} + A^{(ad)}_{(bc)} + A^{[ad]}_{[bc]}.$$

Напомним, что при выводе второй группы структурных уравнений многообразий Вайсмана-Грея мы получили два тождества

$$A^{ac}_{[bd]} + B^{ac}{}_{[bd]} + B^{af}{}_{[b}B_{d]f}{}^c = 0; \quad A^{[bd]}_{ac} + B_{ac}{}^{[bd]} + B_{af}{}^{[b}B^{d]f}{}_c = 0.$$

Из этих формул мы можем найти $A^{(ad)}_{[bc]}$, $A^{[ad]}_{(bc)}$, $A^{[ad]}_{[bc]}$:

$$A^{(ad)}_{[bc]} = -B^{(ad)}{}_{[bc]} - B^{(a|f|}{}_{[b}B_{c]f}{}^{d)}; \quad A^{[ad]}_{(bc)} = -B_{(bc)}{}^{[ad]} - B_{(b|f|}{}^{[a}B^{d]f}{}_{c)};$$
$$A^{[ad]}_{[bc]} = -B^{[ad]}{}_{[bc]} - B^{[a|f|}{}_{[b}B_{c]f}{}^{d]};$$

Задача 3.2**.** Докажите, что $B_{(bc)}{}^{ad} = B^{(ad)}{}_{bc} = 0$ и $B^{[ad]}{}_{bc} = B^{ad}{}_{bc}$.

Подставляя все полученные равенства в (3.6) и приводя подобные, получим

$$A^{ad}_{bc} - B^{af}{}_cB_{bf}{}^d + B^{ad}{}_{[bc]} - \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = 0.$$

Это критерий точечного постоянства голоморфной секционной кривизны для многообразия Вайсмана-Грея.